PERTEMUAN 6
ASISTENSI MATEMATIKA I
PEMBAHASAN SOAL EAS 2020

Ahmad Hisbu Zakiyudin

Soal Hari Selasa, 12 Januari 2021 Pukul 13.00-14.15 WIB

1. Dapatkan rumusan untuk $\dfrac{d^n y}{dx^2}$ dari $y = \sin^2 x$

   Solusi:
   Tinjau $\dfrac{d^n y}{dx^2}$ untuk $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \sin 2x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 2\cos 2x = -2\cos(2x + \pi) \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -4\sin 2x = -4\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= -8\cos 2x = -8\cos(2x + 2\pi) \\
\frac{d^5y}{dx^5} &= 16\sin 2x = -16\cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

   sehingga polanya berulang tiap 4 kali, serta dapat diperoleh $\dfrac{d^n y}{dx^n} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

2. Diketahui $y(x) = 16x^2 - x^4$

   (a) Dengan uji turunan pertama tentukan titik kritisnya dan jenis maksimum-minimumnya

   (b) Dengan uji turunan kedua tentukan titik beloknya

   (c) Sketsalah grafik fungsi tersebut

   Solusi:

   (a) Titik kritis yaitu x ketika $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 32x - 4x^3 &= 0 \\
4x(8 - x^2) &= 0 \\
4x(\sqrt{8} - x)(\sqrt{8} + x) &= 0
\end{aligned}$$

   Diperoleh titik kritis yang merupakan titik stasioner pada $x = -\sqrt{8}, x = 0, x = \sqrt{8}$. Selanjutnya, tinjau bahwa $f'(x) \leq 0$ untuk selang $[-\sqrt{8}, 0] \cup [\sqrt{8}, +\infty)$ sehingga $f(x)$ turun pada selang tersebut, serta $f'(x) \geq 0$ untuk selang $(-\infty, -\sqrt{8}] \cup [0, \sqrt{8}]$ sehingga $f(x)$ naik pada selang tersebut. Oleh karena itu $f(-\sqrt{8}) = f(\sqrt{8}) = 64$ merupakan maksimum global dan $f(0) = 0$ merupakan minimum lokal

   (b) Titik belok yaitu titik x ketika $f''(x) = 0$

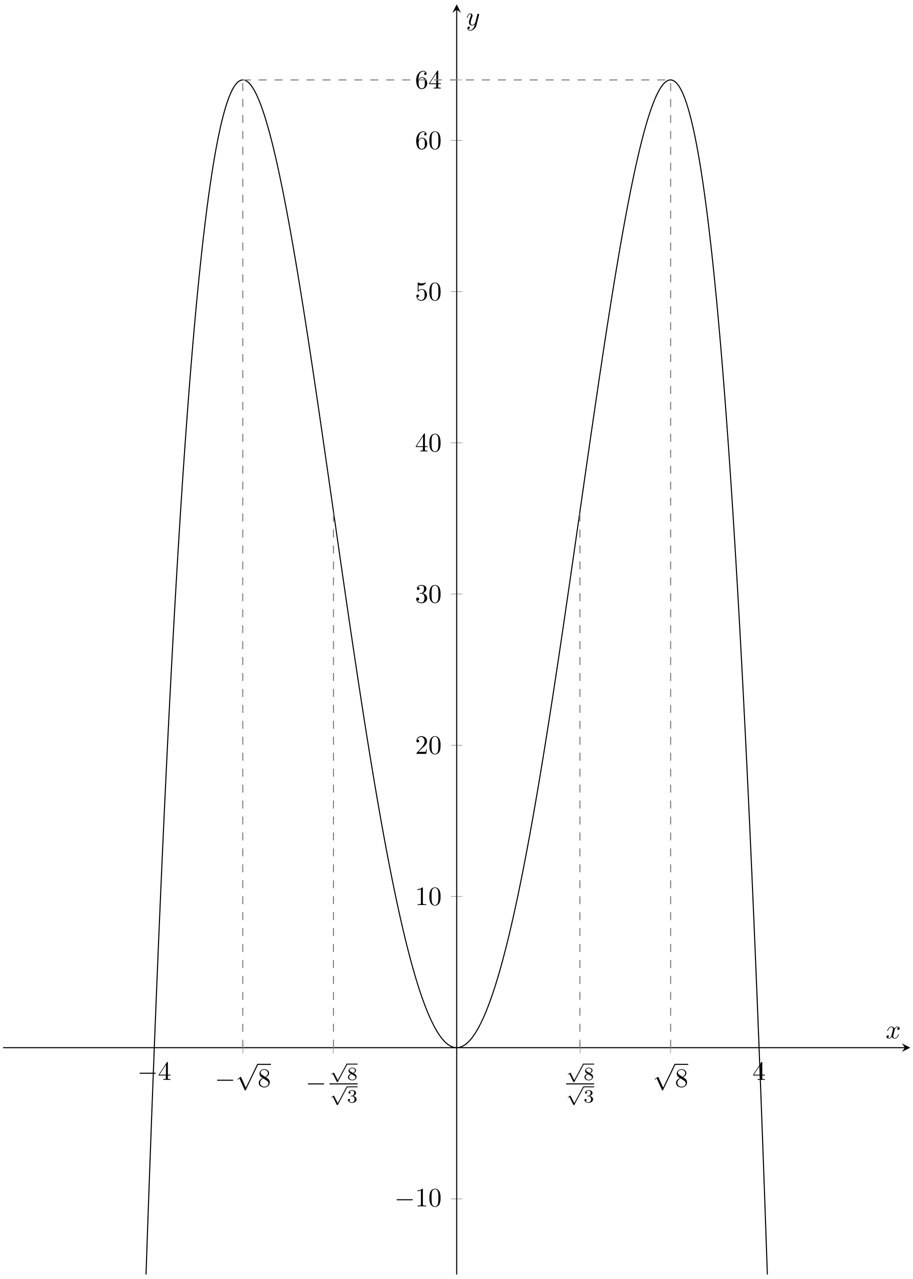
$$\begin{aligned}
f''(x) = 32 - 12x^2 &= 0 \\
4(8 - 3x^2) &= 0 \\
(\sqrt{8} - x\sqrt{3})(\sqrt{8} + x\sqrt{3}) &= 0
\end{aligned}$$

   Diperoleh titik belok adalah $x = -\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ dan $x = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$

(c) Sebelum sketsa grafik fungsinya, akan ditentukan kecekungan fungsi terlebih dahulu. Tinjau bahwa $f''(x) < 0$ untuk selang $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ sehingga $f(x)$ cekung ke bawah pada selang tersebut, serta $f''(x) > 0$ untuk selang $\left(-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\right)$ sehingga $f(x)$ cekung ke atas pada selang tersebut.
Selanjutnya dapat ditentukan perpotongan $f(x)$ dengan sumbu x yaitu $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) = 16x^2 - x^4 &= 0 \\ x^2(16 - x^2) &= 0 \\ x^2(4 - x)(4 + x) &= 0 \end{aligned}$$

sehingga berpotongan dengan sumbu x pada titik $x = -4, x = 0$, dan $x = 4$. Dengan demikian, sketsa grafiknya adalah



3. (a) Tuliskan Teorema Nilai Rata-rata

   (b) Diberikan $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada selang $[-1, 8]$
   Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk menentukan nilai c sehingga $f'(c) = \dfrac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)}$

   Solusi:

   (a) Jika $f(x)$ dapat diturunkan pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$, maka terdapat sedikitnya satu titik c dalam (a, b) sehingga

   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

   (b) Tinjau bahwa $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt[3]{x}}$ yang jelas tidak dapat diturunkan pada setiap titik di $(-1, 8)$ yaitu pada $x = 0$, sehingga teorema tersebut sebenarnya tidak berlaku. Akan tetapi, akan kita coba cari apakah terdapat c yang memenuhi

   $$\begin{aligned} f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} &= \frac{8^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}}{8 - (-1)} \\ \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} &= \frac{3}{9} \\ c &= 8 \end{aligned}$$

   Jadi terdapat nilai c yang memenuhi persamaan tersebut, tetapi c tidak pada $(-1, 8)$, dan $f(x)$ tidak dapat diturunkan pada $x = 0$. Dengan demikian, hal ini tidak menyalahi Teorema Nilai Rata-rata.

4. Tentukan ukuran tabung dengan isi terbesar yang dapat dibuat dalam bola berjari-jari R.

   Solusi:

   Sketsa terlebih dahulu tabung di dalam bola.
   Misalkan jari-jari tabung adalah a, maka untuk mencari tingginya, kita dapat membuat proyeksi 2 dimensi untuk tabung dalam bola. Proyeksinya akan berbentuk seperti persegi panjang dalam lingkaran. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan pusat lingkaran adalah $(0, 0)$ dan jari-jarinya sama seperti jari-jari bola, yaitu R sehingga dapat diperoleh persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = R^2$. Selanjutnya, karena jari-jari tabung adalah a, maka $a^2 + y^2 = R^2$. Misalkan pula titik (a, b) melewati lingkaran, sehingga tinggi tabungnya adalah $2b$. Jadi kita punya $a^2 + b^2 = R^2$ atau $a^2 = R^2 - b^2$. Oleh karena itu diperoleh volume tabung

   $$V = \pi a^2(2b) = 2\pi(R^2 - b^2)b = 2\pi(R^2 b - b^3)$$

   Volume terbesar atau maksimum ketika $\dfrac{dV}{db} = 0$, yaitu

   $$\begin{aligned} \frac{dV}{db} &= 2\pi(R^2 - 3b^2) = 0 \\ (R - b\sqrt{3})&(R + b\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

   Karena $b > 0$, diperoleh $b = \dfrac{R}{3}\sqrt{3}$ sehingga $a^2 = \dfrac{2R^2}{3}$. Dengan kata lain ukuran jari-

jari tabung yaitu $a = \frac{R}{3}\sqrt{6}$ dan tingginya adalah $2b = \frac{2R}{3}\sqrt{3}$, serta volumenya adalah $V = 2\pi\left(R^2\frac{R}{3}\sqrt{3} - \left(\frac{R}{3}\sqrt{3}\right)^3\right) = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$

5. Selesaikan integral berikut:
   (a) $\int \sin 2x\sqrt{2-3\sin^2 x}\,dx$
   (b) $\int \left(5x^2 - 15x + \frac{45}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

   Solusi:

   (a) Misalkan $u = 2 - 3\sin^2 x$ sehingga $du = -3\sin 2x\,dx$ dan diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int \sin 2x\sqrt{2-3\sin^2 x}\,dx &= \int -\frac{1}{3}\sqrt{u}\,du \\
&= -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3} + C \\
&= -\frac{2}{9}(2-3\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

   (b) Perhatikan bahwa $5x^2 - 15x + \frac{45}{4} = 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\int \left(5x^2 - 15x + \frac{45}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx &= \int \left(5\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \sqrt{5}\int \left(x - \frac{3}{2}\right) dx \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right) + C
\end{aligned}
$$

Soal Hari Selasa 12 Januari 2021 Pukul 7.00-8.15 WIB

1. Diberikan $y = f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$
   (a) Dapatkan $y' = f'(x)$
   (b) Jika (x_0, y_0) titik pada kurva f dimana garis singgung dari f tegak lurus dengan garis $y = x$, maka tentukan titik (x_0, y_0) dan persamaan garis singgung di titik tersebut.

   Solusi:

   (a) Dapat dengan mudah diperoleh $y' = f'(x) = \dfrac{(x+2)(1)-(x+3)(1)}{(x+2)^2} = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$
   (b) Ingat bahwa gradien garis singgung kurva pada suatu titik pada kurva adalah nilai turunan pertama pada titik tersebut. Tinjau bahwa gradien garis singgung yang dimaksud tegak lurus dengan garis $y = x$ sehingga gradien garis singgungnya adalah -1. Selanjutnya kita cari nilai x yang memenuhi $f'(x) = -1$

   $$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} &= -1 \\ (x+2)^2 &= 1 \\ |x+2| &= 1 \end{aligned}$$

   sehingga terdapat dua titik x_0 yang memenuhi, yaitu $x_0 = -3$ dan $x_0 = -1$.

   i. Untuk $x_0 = -3$ kita peroleh $y_0 = f(x_0) = f(-3) = 0$ sehingga persamaan garis singgung di titik tersebut adalah

   $$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y &= -1(x-(-3)) \\ y &= -x-3 \\ x + y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

   ii. Untuk $x_0 = -1$, kita peroleh $y_0 = f(x_0) = f(-1) = 2$ sehingga persamaan garis singgung di titik tersebut adalah

   $$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 2 &= -1(x-(-1)) \\ y &= -x+1 \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Jadi terdapat dua titik (x_0, y_0) pada kurva $f(x)$ yang garis singgungnya tegak lurus dengan garis $y = x$, yaitu titik $(-3, 0)$ dengan garis singgung $x + y + 3 = 0$ dan titik $(-1, 2)$ dengan garis singgung $x + y - 1 = 0$

2. Diketahui $f'(x) = \sqrt{3x+4}$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Didefinisikan $F(x) = f(g(x))$, dapatkan $F'(x)$
Solusi:
Untuk mendapatkan $F'(x)$ ingat kembali aturan rantai
$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = g'(x)\sqrt{3g(x)+4} = 2x\sqrt{3x^2+1}$$

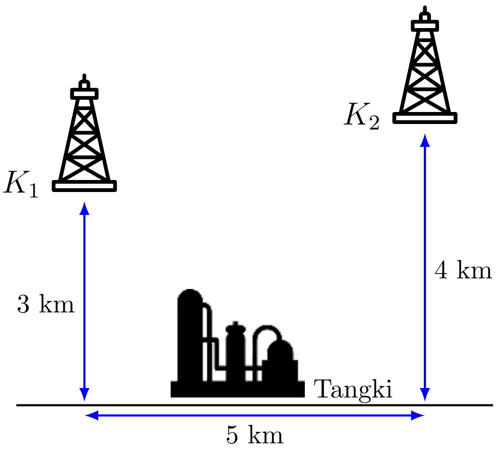
3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \begin{cases} 4x-2, & x < 1 \\ (x-2)(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$ pada $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$
Solusi:
Akan kita cari masing-masing nilai maksimum dan minimum $f(x)$ pada selang $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $\left[1, \frac{7}{2}\right]$

i. Untuk selang $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, diperoleh $f(x) = 4x - 2$ dan $f'(x) = 4$, sehingga $f'(x) > 0$ untuk setiap x pada selang tersebut, serta $f(x)$ tidak memiliki titik stasioner. Oleh karena itu, dapat dicek pada batas selangnya, yaitu $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ adalah nilai minimum. Sedangkan nilai maksimumnya tidak ada, tetapi mendekati $\lim\limits_{x\to 1^-} 4x - 2 = 2$.

ii. Untuk selang $\left[1, \frac{7}{2}\right]$, diperoleh $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ dan $f'(x) = 2x - 5$. Dapat diperoleh pula $f''(x) = 2$ sehingga $f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0$, artinya $x = \dfrac{5}{2}$ merupakan nilai minimum relatif. Selanjutnya dapat dicek nilai $f(x)$ pada batas selang dan titik stasioner
$$\begin{aligned} f(1) &= (1-2)(1-3) = 2 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2} - 2\right)\left(\frac{5}{2} - 2\right) = -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{7}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2} - 2\right)\left(\frac{7}{2} - 3\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$
sehingga nilai minimum pada selang $\left[1, \frac{7}{2}\right]$ adalah $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ dan maksimum adalah $f(1) = 2$

Apabila kedua hasil tersebut digabungkan, dapat diperoleh nilai maksimum dan minimum global berturut-turut $f(1) = 2$ dan $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Selain itu, diperoleh pula maksimum relatif dan minimum relatif berturut-turut $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{4}$ dan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

4. Terdapat dua Kilang minyak lepas pantai, Kilang 1 berjarak 3 km dan Kilang 2 berjarak 4 km dari daratan, jarak Kilang 1 dan Kilang 2 adalah 5 km. Akan dibangun Tangki untuk menampung hasil kilang. Tangki terletak di daratan antara Kilang 1 dan Kilang 2 (lihat gambar). Tentukan letak Tangki dengan jarak minimum dari Kilang 1 dan Kilang 2.



Solusi:

Misalkan terdapat P_1 dan P_2 di daratan sehingga sehingga $P_1K_1 = 3$ km dan $P_2K_2 = 4$ km merupakan jarak antara Kilang 1 dan Kilang 2 ke daratan, akibatnya $P_1P_2 = 5$ km. Selanjutnya misalkan Tangki berada di titik T dan $P_1T = x$, sehingga $P_2T = 5 - x$. Oleh karena itu, dapat diperoleh jarak antara Kilang 1 dengan Tangki adalah $K_1T = \sqrt{K_1P_1 + P_1T^2} = \sqrt{x^2+9}$, serta jarak antara Kilang 2 dengan Tangki adalah $K_2T = \sqrt{K_2P_2 + P_2T} = \sqrt{16+(5-x)^2}$. Karena kita perlu mencari jarak minimum K_1T dan K_2T sekaligus, maka jika kita jumlahkan jarak keduanya, pasti minimum juga. Misalkan jumlah jarak keduanya adalah $y = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{16+(5-x)^2}$, maka minimumnya adalah titik x saat $\dfrac{dy}{dx} = 0$ yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} + \frac{2(5-x)(-1)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}} &= 0 \\
\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+41}} &= 0 \\
\frac{x\sqrt{x^2-10x+41} + (x-5)\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2-10x+41}} &= 0 \\
x\sqrt{x^2-10x+41} + (x-5)\sqrt{x^2+9} &= 0 \\
x\sqrt{x^2-10x+41} &= (5-x)\sqrt{x^2+9} \\
x^2(x^2-10x+41) &= (x^2-10x+25)(x^2+9) \\
x^4 - 10x^3 + 41x^2 &= x^4 + 9x^2 - 10x^3 - 90x + 25x^2 + 225 \\
7x^2 + 90x - 225 &= 0 \\
(x+15)(7x-15) &= 0
\end{aligned}$$

Karena $0 < x < 5$, maka $x = \dfrac{15}{7}$. Jadi jarak minimum Kilang 1 dengan Tangki adalah

$$K_1T = \sqrt{9+x^2} = \sqrt{9+\left(\frac{15}{7}\right)^2} = \frac{3}{7}\sqrt{74} \text{ km}$$

serta jarak minimum Kilang 2 dengan Tangki adalah

$$K_2T = \sqrt{16 + (5-x)^2} = \sqrt{16 + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2} = \frac{4}{7}\sqrt{74}\text{ km}$$

5. Tentukan nilai integral berikut

   (a) $\displaystyle\int_0^2 |3x-2|\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$ jika $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 3$

   Solusi:

   (a) Tinjau bahwa $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2, & x \geq \frac{2}{3} \\ 2-3x, & x < \frac{2}{3} \end{cases}$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 |3x-2|\,dx &= \int_0^{\frac{2}{3}} (2-3x)\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 (3x-2)\,dx \\ &= \left[2x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{\frac{2}{3}}^2 \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

   (b) Misalkan $u = \frac{1}{x}$ sehingga $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$.
   Batas atas integral menjadi $u = \frac{1}{1} = 1$ dan batas bawahnya menjadi $u = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Pada soal diketahui bahwa $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= \int_2^1 -f(u)\,du \\ &= -\int_2^1 f(u)\,du \\ &= \int_1^2 f(u)\,du \\ &= 3\end{aligned}$$