RANGKUMAN BAB 5 DAN 6
MATEMATIKA II
TAHUN 2020/2021

Ahmad Hisbu Zakiyudin

1 Bab 5

1.1 Persamaan Parametrik

Persamaan kurva yang titik-titiknya bergantung pada suatu parameter. Biasanya dituliskan

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

Orientasi kurva parametrik merupakan arah pertambahan parameter. Kurva parametrik dapat digambarkan dengan mengeliminasi parameter, tetapi menghilangkan informasi orientasi.

1.2 Turunan Persamaan Parametrik

Jika $x(t)$ dan $y(t)$ mempunyai turunan pertama terhadap t yang kontinu dan $\frac{dx}{dt} \neq 0$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Turunan keduanya sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Kurva parametrik memiliki garis singgung vertikal jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} \neq 0$. Sedangkan jika $\frac{dx}{dt} \neq 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, maka kurvanya memiliki garis singgung horizontal.

1.3 Panjang Busur Kurva Parametrik

Jika persamaan parametrik

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

ditelusuri tepat sekali saat t bertambah dari a ke b dan $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ fungsi kontinu untuk $a \leq t \leq b$, maka panjang busur kurvanya adalah

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

1.4 Luas Permukaan Kurva Parametrik

Luas permukaan kurva yang diputar terhadap sumbu$-x$

$$S = \int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Luas permukaan kurva yang diputar terhadap sumbu$-y$

$$S = \int_a^b 2\pi x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

1.5 Koordinat Kutub dan Koordinat Siku-Siku

Titik $P(x, y)$ pada koordinat siku-siku memiliki koordinat $P(r, \theta)$ pada koordinat kutub dengan hubungan

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

dan

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

1.6 Grafik dalam Koordinat Kutub

Lingkaran yang berpusat di $(0, 0)$ dan berjari-jari a memiliki persamaan

$$r = a$$

Lingkaran yang berpusat di sumbu$-x$ dan melewati titik $(0, 0)$ serta berjari-jari a memiliki persamaan

$$r = 2a\cos\theta \qquad \text{atau} \qquad r = -2a\cos\theta$$

Lingkaran yang berpusat di sumbu$-y$ dan melewati titik $(0, 0)$ serta berjari-jari a memiliki persamaan

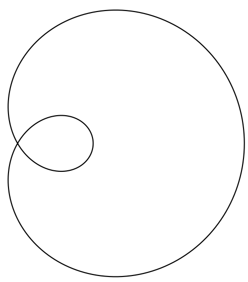
$$r = 2a\sin\theta \qquad \text{atau} \qquad r = -2a\sin\theta$$

Kardioida dan limacons memiliki persamaan sebagai berikut

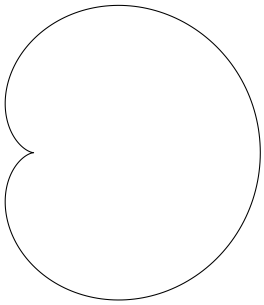
$$r = a \pm b\cos\theta \qquad \text{atau} \qquad r = a \pm b\sin\theta$$

dengan $a > 0, b > 0$

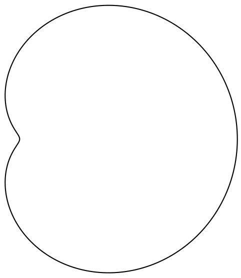
Jika $a < b$, maka terbentuk limacons berikut



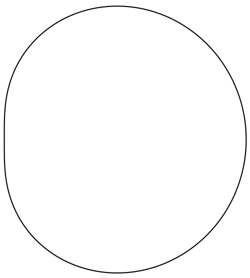
Jika $a = b$, maka terbentuk kardioida berikut



Jika $b < a < 2b$, maka terbentuk limacons cekung berikut



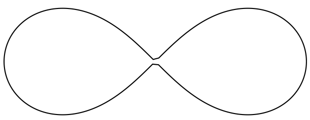
Jika $a \geq 2b$, maka terbentuk limacons cembung berikut



Lemniscate memiliki persamaan

$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta \qquad \text{atau} \qquad r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$$

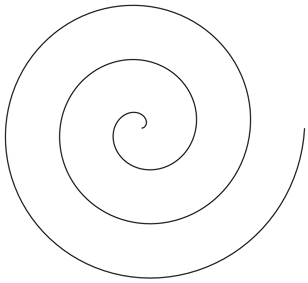
merupakan kurva yang berbentuk baling-baling sebagai berikut



Posisi relatif ke sumbu kutub bergantung pada tanda di depan a^2 dan apakah $\sin 2\theta$ atau $\cos 2\theta$ yang muncul dalam persamaan.
Spiral memiliki persamaan bentuk

$$r = a\theta \quad (\theta \leq 0)$$

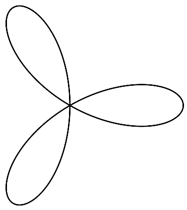
dengan kurva berikut



Kurva rose yang memiliki persamaan

$$r = a \sin n\theta \qquad \text{atau} \qquad r = a \cos n\theta$$

berbentuk sebagai berikut



Kurva ini memiliki n daun jika n ganjil dan $2n$ daun jika n genap

1.7 Luas dalam Koordinat Kutub

Jika $r = f(\theta)$ kontinu dan tak negatif untuk $\alpha \leq \theta \leq \beta$ dan $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, maka luas kurvanya

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

1.8 Volume Benda Putar dalam Koordinat Kutub

Volume benda putar yang diputar terhadap sumbu$-x$ dan dibatasi oleh $\theta_1 = \alpha$ dan $\theta_2 = \beta$ adalah

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \, d\theta$$

Volume benda putar yang diputar terhadap sumbu$-y$ dan dibatasi oleh $\theta_1 = \alpha$ dan $\theta_2 = \beta$ adalah

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3}\pi r^3 \cos\theta \, d\theta$$

1.9 Turunan Persamaan Kurva Kutub

Jika $r = f(\theta)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta \frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta \frac{dr}{d\theta}}$$

1.10 Panjang Busur Kurva Kutub

Jika kurva $r = f(\theta)$ ditelusuri tepat sekali untuk θ bertambah dari α ke β dan $\dfrac{dr}{d\theta}$ kontinu untuk $\alpha \le \theta \le \beta$, maka panjang busur kurva

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

1.11 Latihan Soal

1. (a) Buatlah sketsa kurva dari persamaan parametrik

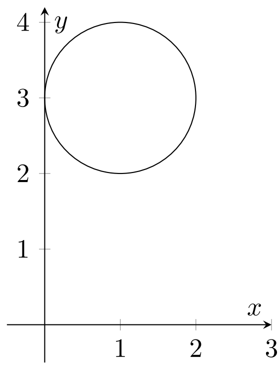
$$x = 1 + \cos t, \quad y = 3 - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(b) Dapatkan panjang busur dari kurva tersebut.

(c) Dapatkan semua nilai parameter t yang menyebabkan kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal

Penyelesaian:

(a) Tinjau bahwa $\cos t = x-1$ dan $\sin t = 3-y$ sehingga $\cos^2 t+\sin^2 t = 1 = (x-1)^2+(3-y)^2$
Diperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di $(1, 3)$ dan berjari-jari 1. Karena $0 \le t \le 2\pi$, maka kurvanya merupakan satu lingkaran penuh sebagai berikut



(b) Karena kurvanya merupakan satu lingkaran penuh dengan jari-jari 1, maka panjang busurnya adalah keliling lingkaran yaitu $2\pi r = 2\pi$
Dapat dihitung pula dengan rumus panjang busur untuk kurva parametrik, yaitu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Tinjau

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \text{ dan } \frac{dy}{dt} = -\cos t$$

serta $a = 0$ dan $b = 2\pi$ sehingga

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= t\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

(c) Kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal jika $\dfrac{dx}{dt} = 0$ dan $\dfrac{dy}{dt} \neq 0$, yaitu saat $t = 0$, $t = \pi$, dan $t = 2\pi$

2. Dapatkan panjang busur dari kurva $r = a\cos\theta + b\sin\theta$. (Berikan gambar sketsa kurvanya). Perhatikan: bilangan b dan a dalam soal ini adalah dua digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $b = 7$ dan $a = 6$, jika a atau b adalah 0 ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

Ingat rumus panjang busur untuk kurva kutub $r = f(\theta)$ jika kurvanya ditelusuri keseluruhan satu kali untuk θ bergerak dari $\theta = \alpha$ ke $\theta = \beta$ adalah

$$
\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta
$$

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (-a\sin\theta + b\cos\theta)^2 \\
&= a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

Tinjau bahwa kurva tersebut ditelusuri keseluruhan satu kali untuk θ bergerak dari $\theta = 0$ ke $\theta = \pi$, karena titik $(a, 0)$ dan titik $(-a, \pi)$ merupakan titik yang sama dalam koordinat kutub. Jadi diperoleh

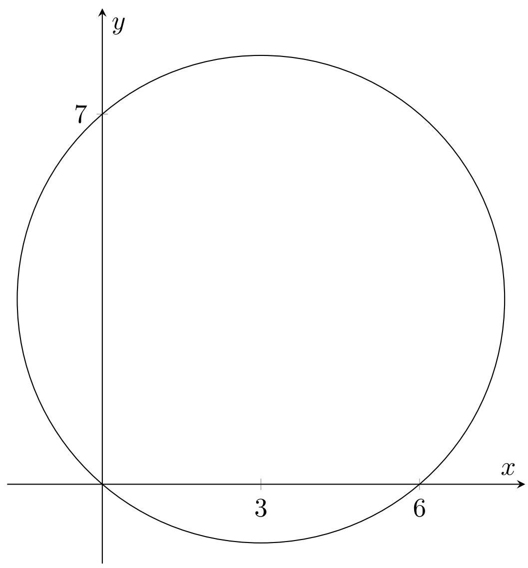
$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, d\theta \\
&= \theta\sqrt{a^2 + b^2}\Big|_0^{\pi} \\
&= \pi\sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Untuk menggambar kurvanya, ingat bahwa $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ dan $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$, serta $x^2 + y^2 = r^2$

sehingga

$$
\begin{aligned}
r &= a\cos\theta + b\sin\theta \\
r &= \frac{ax}{r} + \frac{by}{r} \\
r^2 &= ax + by \\
x^2 + y^2 - ax - by &= 0 \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{a^2+b^2}{4}
\end{aligned}
$$

Jadi kurvanya merupakan lingkaran yang berpusat di $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ dan berjari-jari $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
Jika $a = 6$ dan $b = 7$, maka lingkarannya berpusat di $(3, 3.5)$ dan berjari-jari $\frac{\sqrt{85}}{2}$, serta memotong titik $(0,0), (6,0)$, dan $(0,7)$ sebagai berikut



Cara lain untuk mendapatkan panjang busurnya adalah menghitung keliling lingkaran tersebut yang berjari-jari $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, yaitu $S = 2\pi r = 2\pi\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \pi\sqrt{a^2+b^2}$

3. Diberikan partikel bergerak sepanjang kurva $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \sqrt{8 + 2t - t^2} \end{cases}$ dengan $-2 \leq t \leq 1$

   (a) Nyatakan dalam persamaan kutub $r = f(\theta)$ dengan lintasan θ

   (b) Tentukan panjang lintasan kurva tersebut

   (c) Sketsa persamaan kurva tersebut dan arah lintasannya

Penyelesaian:

(a) Perhatikan bahwa $t = 1 - x$ sehingga

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{8 + 2(1-x) - (1-x)^2} \\ &= \sqrt{8 + 2 - 2x - 1 + 2x - x^2} \\ &= \sqrt{9 - x^2} \end{aligned}$$

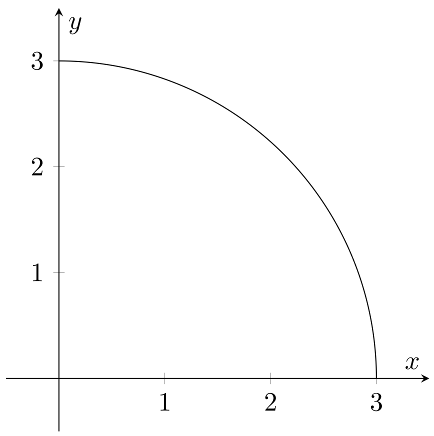
Ingat bahwa $y = r\sin\theta$ dan $x = r\cos\theta$ sehingga

$$\begin{aligned} r\sin\theta &= \sqrt{9 - r^2\cos^2\theta} \\ r^2\sin^2\theta &= 9 - r^2\cos^2\theta \\ r^2 &= 9 \end{aligned}$$

Dapat diambil $r = f(\theta) = 3$. Untuk $t = -2$, maka $x = r\cos\theta = 3$ sehingga $\theta = 0$, dan untuk $t = 1$, maka $x = r\cos\theta = 0$ sehingga $\theta = \frac{\pi}{2}$. Jadi $r = f(\theta) = 3$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(b) Tinjau bahwa $r = 3$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ merupakan seperempat lingkaran dengan jari-jari $r = 3$ di kuadran pertama, sehingga panjang lintasan kurva tersebut merupakan seperempat keliling lingkaran yaitu $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{3}{2}\pi$

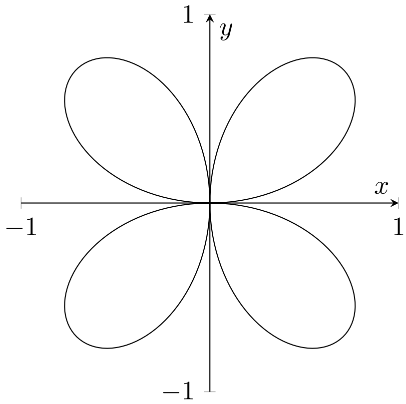
(c) Dari jawaban (b) sudah diperoleh bentuk kurvanya.
Sedangkan untuk arah lintasannya, tinjau bahwa x berkurang dan y bertambah ketika t bergerak dari -2 ke 1, sehingga arahnya berlawanan arah jarum jam. Berikut sketsanya



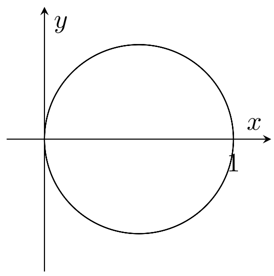
4. Gambarkan dan dapatkan luas irisan dari $r = \sin 2\theta$ dan $r = \cos\theta$

Penyelesaian:

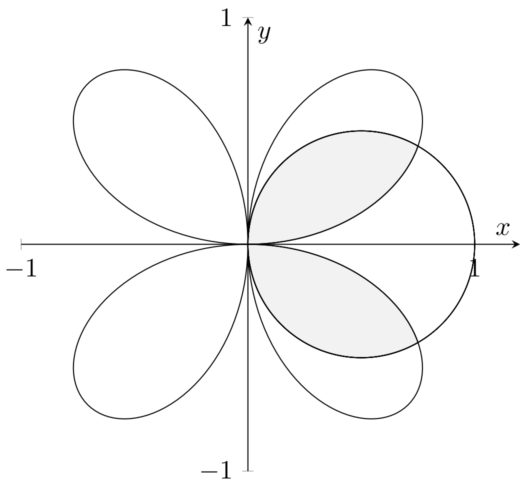
Perhatikan bahwa $r_1 = \sin 2\theta$ merupakan kurva rose dengan n genap sehingga memiliki 4 daun sebagai berikut



Sedangkan $r = \cos\theta$ merupakan lingkaran yang berpusat di $(0.5, 0)$ dan berjari-jari 0.5 sebagai berikut



Dapat diperoleh irisannya sebagai berikut



Perhatikan bahwa kurvanya simetris sehingga cukup hitung luas pada kuadran I kemudian kalikan 2. Tinjau titik perpotongan pada kuadran I adalah

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 \\ \sin 2\theta &= \cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta &= 0 \\ \cos\theta(2\sin\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh perpotongannya ketika $\cos\theta = 0$ yaitu $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ untuk $r_2 = \cos\theta$ dan $\theta_1 = 0$ untuk $r_1 = \sin 2\theta$. Ketika $\sin\theta = \frac{1}{2}$, maka $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{6}$. Jadi, luas irisan kurva pada kuadran I dapat dirumuskan

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} r_1^2 \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r_2^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta \, d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \, d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right] \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{3}{32}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Jadi luas total irisan adalah $2L = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\sqrt{3}$

5. Dapatkan kemiringan garis singgung pada kurva $r = 3\sin 3\theta$ di $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian:

Ingat bahwa kemiringan garis singgung kurva di suatu titik merupakan turunan persamaan kurva tersebut di titik itu, dan turunan persamaan kurva kutub adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta \frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta \frac{dr}{d\theta}}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin 3\theta \cos\theta + \sin\theta(9\cos 3\theta)}{-3\sin 3\theta \sin\theta + \cos\theta(9\cos 3\theta)}$$

Untuk $\theta = \frac{\pi}{4}$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{-3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}}{-\frac{3}{2} - \frac{9}{2}} \\
&= \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jadi kemiringan garis singgung pada kurva $r = 3\sin 3\theta$ di $\theta = \frac{\pi}{4}$ adalah $\frac{1}{2}$

2 Bab 6

2.1 Barisan Tak Hingga

Barisan tak hingga $a_1, a_2, a_3, \cdots$ dapat dituliskan dalam notasi kurung $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau $\{a_n\}$
Barisan $\{a_n\}$ disebut konvergen ke L jika $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ dengan $-\infty < L < \infty$

2.2 Sifat-Sifat Barisan Konvergen

Diberikan barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ yang masing-masing konvergen ke limit L_1 dan L_2 dan c adalah suatu konstanta, maka

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = cL_1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L_1 \pm L_2$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L_1 L_2$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad$ jika $L_2 \neq 0$

Jika barisan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ masing-masing konvergen ke L dan $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq K$ (K bilangan bulat tertentu), maka $\{b_n\}$ juga konvergen ke L

2.3 Barisan Monoton

Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut naik jika $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$
Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut turun jika $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$
Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut tidak naik jika $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$
Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut tidak turun jika $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$
Secara umum, untuk semua pasangan suku-suku yang berurutan a_n dan a_{n+1}
Jika $a_{n+1} - a_n > 0$ maka disebut barisan naik
Jika $a_{n+1} - a_n < 0$ maka disebut barisan turun
Jika $a_{n+1} - a_n \leq 0$ maka disebut barisan tidak naik
Jika $a_{n+1} - a_n \geq 0$ maka merupakan barisan tidak turun
Jika semua suku pada barisan tersebut positif, maka
Barisan monoton naik jika $a_{n+1}/a_n > 1$
Barisan monoton turun jika $a_{n+1}/a_n < 1$
Barisan monoton tidak naik jika $a_{n+1}/a_n \leq 1$
Barisan monoton tidak turun jika $a_{n+1}/a_n \geq 1$

2.4 Deret Tak Hingga

Deret tak hingga adalah suatu ekspresi yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Bilangan-bilangan $u_1, u_2, u_3, \cdots$ disebut suku-suku dari deret tersebut.
Misalkan $\{s_n\}$ adalah barisan dari jumlahan parsial deret $u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$. Jika barisan $\{s_n\}$ konvergen ke suatu limit S, maka deret tersebut konvergen dan S adalah jumlah dari deret tersebut, dapat ditulis

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Jika barisan dari jumlahan parsial tersebut divergen, maka deret tersebut divergen dan tidak mempunyai jumlah.
Deret geometri tak hingga

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{k-1} + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

konvergen jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$. Jika deret konvergen, maka jumlah deret adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Deret harmonik merupakan deret divergen dengan bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Deret$-p$ atau deret hyperharmonic merupakan deret dengan bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots$$

yang konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $0 < p \leq 1$

2.5 Sifat-Sifat Aljabar Deret Tak Hingga

1. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ deret konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ juga konvergen dengan jumlah

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

2. Jika c adalah konstanta tak nol, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k$ keduanya konvergen atau keduanya divergen. Jika deretnya konvergen, maka jumlahnya

$$\sum_{k=1}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

3. Penghapusan sejumlah berhingga suku-suku pada suatu deret tidak memengaruhi konvergensi dan divergensi dari deret tersebut

2.6 Uji Integral

Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ adalah deret dengan suku-suku positif dan $f(x)$ merupakan fungsi yang dihasilkan jika k diganti x dalam rumus u_k. Jika f adalah deret turun dan kontinu pada interval $[a, +\infty)$, maka

$$\sum_{k=a}^{\infty} u_k \qquad \text{dan} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

keduanya konvergen atau keduanya divergen.

2.7 Uji Rasio

Jika diberikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dengan suku-suku positif dan dimisalkan bahwa $\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, maka

1. Deret konvergen jika $\rho < 1$
2. Deret divergen jika $\rho > 1$
3. Deret mungkin konvergen atau divergen jika $\rho = 1$ sehingga diperlukan uji yang lain

2.8 Prinsip Informal

1. Prinsip Informal I: Suku-suku konstan dalam penyebut u_k dapat dihilangkan tanpa berpengaruh pada konvergensi maupun divergensi deret
2. Prinsip Informal II: Jika sebuah polinomial dalam k tampak sebagai faktor pembilang atau penyebut dari u_k, maka semua suku (kecuali k dengan pangkat tertinggi) pada polinomial dapat dihilangkan tanpa memengaruhi konvergensi maupun divergensi deret.

2.9 Uji Deret Berganti Tanda

Suatu deret berganti tanda dengan bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

atau

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

dan diasumsikan a_k positif merupakan deret yang konvergen jika kedua kondisi berikut terpenuhi

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_k > \cdots$
2. $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

2.10 Deret Pangkat

Deret pangkat memiliki bentuk

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

yang dapat dipastikan konvergen untuk $x = c$ karena

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = 0$$

2.11 Deret Taylor dan Maclaurin

Jika $f(x)$ memiliki turunan pada semua tingkat di $x = a$, maka deret Taylor untuk $f(x)$ di sekitar $x = a$ menjadi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots$$

Pada kasus khusus yaitu $a = 0$, deret Taylor tersebut disebut deret Maclaurin untuk $f(x)$ yang memiliki bentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

Berikut dua deret Maclaurin yang paling umum dijumpai

1. Deret Maclaurin
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
memiliki selang konvergensi $-1 < x < 1$

2. Deret Maclaurin
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
memiliki selang konvergensi seluruh bilangan real

2.12 Turunan dan Integral Deret Pangkat

Jika suatu fungsi $f(x)$ direpresentasikan oleh suatu deret pangkat misal

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

dengan jari-jari konvergensi R, maka

1. Deret-deret suku diferensialnya
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_k(x-a)^k] = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$$
memiliki jari-jari konvergensi R

2. Fungsi $f(x)$ diferensiabel pada selang $(a-R, a+R)$ dan untuk setiap x dalam selang ini
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_k(x-a)^k] = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$$

3. Deret-deret suku integrasinya

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int c_k(x-a)^k\,dx\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$$

memiliki jari-jari konvergensi R

4. Fungsi $f(x)$ kontinu pada selang $(a-R,a+R)$ dan untuk setiap x dalam selang ini

$$\int f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int c_k(x-a)^k\,dx\right]+C$$

5. Untuk setiap α dan β dalam selang $(a-R,a+R)$, maka

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\alpha}^{\beta} c_k(x-a)^k\,dx\right]$$

2.13 Latihan Soal

1. (a) Gunakan uji yang sesuai untuk menentukan apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n+1}\text{ konvergen atau divergen}$$

(b) Dapatkan jumlahan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]$$

Penyelesaian:

(a) Dengan Prinsip Informal I, suku konstan yaitu 1 pada penyebut dapat dihilangkan tanpa memengaruhi konvergensi deret tersebut, sehingga bentuknya menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n}$$

Bentuk tersebut merupakan deret geometri tak hingga dengan $a=\frac{4}{3}$ dan $r=\frac{1}{3}$ yang jelas konvergen.

(b) Tinjau bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{3^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(k+3)(k+4)}$$

Perhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{3^k}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan $a=\frac{7}{3}$ dan $r=\frac{1}{3}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{3^k}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}$$

Perhatikan pula $\dfrac{6}{(k+3)(k+4)} = 6\left(\dfrac{1}{k+3} - \dfrac{1}{k+4}\right)$ sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(k+3)(k+4)} &= \lim_{k\to\infty} 6\Bigg[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots \\ &\qquad + \left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)\Bigg] \\ &= \lim_{k\to\infty} 6\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{k+4}\right] \\ &= 6\left[\frac{1}{4}-0\right] = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Jadi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right] = \frac{7}{2}+\frac{3}{2} = 5$$

2. Selesaikan

(a) Tentukan konvergensi barisan $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
Dari jawaban tersebut, tentukan konvergensi $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) Dengan uji perbandingan, tentukan deret berikut konvergen ataukah divergen?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n}$$

Penyelesaian:

(a) Akan dicari $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = L_1$
Misalkan $\dfrac{1}{n} = k$, maka $k\to 0^+$ karena $n\to+\infty$, sehingga

$$L_1 = \lim_{k\to 0^+}\frac{\sin \pi k}{k} = \pi$$

Jadi barisan $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke π
Selanjutnya tinjau,

$$\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1}\times n\sin\frac{\pi}{n}$$

Dapat diperoleh $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = L_2$
Akibatnya

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = L_1\cdot L_2 = \frac{\pi}{2}$$

Jadi barisan $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\dfrac{\pi}{2}$

(b) Tinjau bahwa $0\le\sin^2(5n)\le 1$ sehingga $2^n\sin^2(5n)\le 2^n$
Tinjau pula $0\le\cos^2 n\le 1$ sehingga $4^n\le 4^n+\cos^2 n$ dan $\dfrac{1}{4^n+\cos^2 n}\le\dfrac{1}{4^n}$

Akibatnya

$$\frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2 n} \le \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$$

Karena $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = 1$ dan $r = \dfrac{1}{2}$ yang jelas konvergen sehingga deret $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2 n}$ juga konvergen.

3. Buktikan $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ konvergen jika $p > 1$

   Penyelesaian:

   Uji konvergensi deret tersebut dengan uji integral berikut

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$$

   Misalkan $\ln x = u$ sehingga $\dfrac{1}{x}\, dx = du$, akan dihitung dulu integralnya tanpa menggunakan batas integral

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx &= \int \frac{1}{u^p}\, du \\ &= \int u^{-p}\, du \\ &= \frac{u^{1-p}}{1-p} \\ &= \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} \end{aligned}$$

   Dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx &= \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{(\ln a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p} \right) \\ &= \frac{1}{1-p} \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) \end{aligned}$$

   Jika $p > 1$, diperoleh

$$\frac{1}{1-p} \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) = \frac{1}{1-p} \left(0 - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) = \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$$

   Dapat disimpulkan deret tersebut konvergen jika $p > 1$

   Jika $p < 1$, maka $p - 1 < 0$ sehingga

$$\frac{1}{1-p} \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) = \infty$$

   Dapat disimpulkan deret tersebut divergen jika $p < 1$

4. Selesaikan:

(a) Diberikan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^2} + \cdots + \dfrac{2n-1}{n^2}$
Tuliskan 5 suku pertama barisan, dan dapatkan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(b) Jika diberikan barisan $(a_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ dan $(b_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ maka selidiki tentang konvergensi dari: 1.$(a_n + b_n)$; 2.$(a_n \cdot b_n)$; 3. $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$

Penyelesaian:

(a) Tinjau bahwa

$$a_n = \frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{n^2} = \frac{\frac{n}{2}(1+(2n-1))}{n^2} = 1$$

untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$. Diperoleh $(a_n) = (1, 1, 1, \dots)$ sehingga $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ merupakan 5 suku pertama barisan tersebut dan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(b) i. Tinjau $(a_n + b_n) = (1, 1, 1, \dots)$ sehingga barisan tersebut konvergen ke 1

ii. Tinjau $(a_n \cdot b_n) = (0, 0, 0, \dots)$ sehingga barisan tersebut konvergen ke 0

iii. Tinjau untuk $n = 2$, $\dfrac{a_n}{b_n}$ tidak terdefinisi sehingga konvergensi barisan $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ tidak dapat ditentukan

5. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{1}{1-ax}$

(a) Dapatkan deret Maclaurin dari $f(x)$ (Nyatakan dalam notasi sigma)

(b) Gunakan hasil dari (a) untuk mendapatkan deret Maclaurin dari fungsi $f(x) = \dfrac{1}{(1-ax)^2}$

Perhatikan: bilangan a dalam soal ini adalah digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $a = 6$, jika $a = 0$ ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

(a) Tinjau

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-ax} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{a}{(1-ax)^2} & f'(0) &= a \\ f''(x) &= \frac{a\cdot 2a}{(1-ax)^3} & f''(0) &= a\cdot 2a \\ f'''(x) &= \frac{a\cdot 2a\cdot 3a}{(1-ax)^4} & f'''(0) &= a\cdot 2a\cdot 3a \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \frac{a\cdot 2a\cdot 3a\cdots ka}{(1-ax)^{k+1}} = \frac{k!a^k}{(1-ax)^{k+1}} & f^{(k)}(0) &= a\cdot 2a\cdot 3a\cdots ka = k!a^k \end{aligned}$$

Diperoleh deret Maclaurin dari $f(x)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots \\ &= 1+(a)(x)+\frac{2!a^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{k!a^k}{k!}x^k+\cdots \\ &= 1+(ax)+(ax)^2+\cdots(ax)^k+\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(ax)^k \end{aligned}$$

Alternatif penyelesaian dengan metode substitusi.
Tinjau deret Maclaurin dari $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}x^k$. Dengan metode substitusi diperoleh deret Maclaurin dari $f(x)$ adalah

$$\frac{1}{1-ax} = 1+ax+(ax)^2+(ax)^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(ax)^k$$

(b) Tinjau $\frac{d}{dx}(ax)^k = ka(ax)^{k-1}$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-ax}\right) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(ax)^k \\ \frac{a}{(1-ax)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}ka(ax)^{k-1} \\ \frac{a}{(1-ax)^2} &= a\sum_{k=0}^{\infty}k(ax)^{k-1} \\ \frac{1}{(1-ax)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}k(ax)^{k-1} = 1+2(ax)+3(ax)^2+\cdots \end{aligned}$$