1 Barisan Tak Hingga

Barisan tak hingga $a_1, a_2, a_3, \cdots$ dapat dituliskan dalam notasi kurung $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau $\{a_n\}$
Barisan $\{a_n\}$ disebut konvergen ke L jika $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ dengan $-\infty < L < \infty$

2 Sifat-Sifat Barisan Konvergen

Diberikan barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ yang masing-masing konvergen ke limit L_1 dan L_2 dan c adalah suatu konstanta, maka

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = cL_1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L_1 \pm L_2$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L_1 L_2$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad \text{jika } L_2 \neq 0$

Jika barisan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ masing-masing konvergen ke L dan $a_n \le b_n \le c_n$ untuk $n \ge K$ (K bilangan bulat tertentu), maka $\{b_n\}$ juga konvergen ke L

3 Barisan Monoton

Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut naik jika $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$
Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut turun jika $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$
Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut tidak naik jika $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$
Suatu barisan $\{a_n\}$ disebut tidak turun jika $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots$
Secara umum, untuk semua pasangan suku-suku yang berurutan a_n dan a_{n+1}
Jika $a_{n+1} - a_n > 0$ maka disebut barisan naik
Jika $a_{n+1} - a_n < 0$ maka disebut barisan turun
Jika $a_{n+1} - a_n \le 0$ maka disebut barisan tidak naik
Jika $a_{n+1} - a_n \ge 0$ maka merupakan barisan tidak turun
Jika semua suku pada barisan tersebut positif, maka
Barisan monoton naik jika $a_{n+1}/a_n > 1$
Barisan monoton turun jika $a_{n+1}/a_n < 1$
Barisan monoton tidak naik jika $a_{n+1}/a_n \le 1$
Barisan monoton tidak turun jika $a_{n+1}/a_n \ge 1$

4 Deret Tak Hingga

Deret tak hingga adalah suatu ekspresi yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Bilangan-bilangan $u_1, u_2, u_3, \cdots$ disebut suku-suku dari deret tersebut.
Misalkan $\{s_n\}$ adalah barisan dari jumlahan parsial deret $u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$. Jika barisan $\{s_n\}$ konvergen ke suatu limit S, maka deret tersebut konvergen dan S adalah jumlah dari deret tersebut, dapat ditulis

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Jika barisan dari jumlahan parsial tersebut divergen, maka deret tersebut divergen dan tidak mempunyai jumlah.
Deret geometri tak hingga

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{k-1} + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

konvergen jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$. Jika deret konvergen, maka jumlah deret adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Deret harmonik merupakan deret divergen dengan bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Deret$-p$ atau deret hyperharmonic merupakan deret dengan bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots$$

yang konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $0 < p \leq 1$

5 Sifat-Sifat Aljabar Deret Tak Hingga

1. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ deret konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ juga konvergen dengan jumlah

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

2. Jika c adalah konstanta tak nol, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} cu_k$ keduanya konvergen atau keduanya divergen. Jika deretnya konvergen, maka jumlahnya

$$\sum_{k=1}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

3. Penghapusan sejumlah berhingga suku-suku pada suatu deret tidak memengaruhi konvergensi dan divergensi dari deret tersebut

6 Uji Integral

Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ adalah deret dengan suku-suku positif dan $f(x)$ merupakan fungsi yang dihasilkan jika k diganti x dalam rumus u_k. Jika f adalah deret turun dan kontinu pada interval $[a, +\infty)$, maka

$$\sum_{k=a}^{\infty} u_k \qquad \text{dan} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

keduanya konvergen atau keduanya divergen.

7 Uji Rasio

Jika diberikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dengan suku-suku positif dan dimisalkan bahwa $\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, maka

1. Deret konvergen jika $\rho < 1$
2. Deret divergen jika $\rho > 1$
3. Deret mungkin konvergen atau divergen jika $\rho = 1$ sehingga diperlukan uji yang lain

8 Prinsip Informal

1. Prinsip Informal I: Suku-suku konstan dalam penyebut u_k dapat dihilangkan tanpa berpengaruh pada konvergensi maupun divergensi deret
2. Prinsip Informal II: Jika sebuah polinomial dalam k tampak sebagai faktor pembilang atau penyebut dari u_k, maka semua suku (kecuali k dengan pangkat tertinggi) pada polinomial dapat dihilangkan tanpa memengaruhi konvergensi maupun divergensi deret.

9 Uji Deret Berganti Tanda

Suatu deret berganti tanda dengan bentuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

atau

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

dan diasumsikan a_k positif merupakan deret yang konvergen jika kedua kondisi berikut terpenuhi

1. $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_k > \cdots$
2. $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

10 Deret Pangkat

Deret pangkat memiliki bentuk

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

yang dapat dipastikan konvergen untuk $x = c$ karena

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = 0$$

11 Deret Taylor dan Maclaurin

Jika $f(x)$ memiliki turunan pada semua tingkat di $x = a$, maka deret Taylor untuk $f(x)$ di sekitar $x = a$ menjadi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots$$

Pada kasus khusus yaitu $a = 0$, deret Taylor tersebut disebut deret Maclaurin untuk $f(x)$ yang memiliki bentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

Berikut dua deret Maclaurin yang paling umum dijumpai

1. Deret Maclaurin
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
memiliki selang konvergensi $-1 < x < 1$

2. Deret Maclaurin
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
memiliki selang konvergensi seluruh bilangan real

12 Turunan dan Integral Deret Pangkat

Jika suatu fungsi $f(x)$ direpresentasikan oleh suatu deret pangkat misal

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

dengan jari-jari konvergensi R, maka

1. Deret-deret suku diferensialnya

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_k(x-a)^k] = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$$

memiliki jari-jari konvergensi R

2. Fungsi $f(x)$ diferensiabel pada selang $(a-R, a+R)$ dan untuk setiap x dalam selang ini

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_k(x-a)^k] = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$$

3. Deret-deret suku integrasinya

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\int c_k(x-a)^k \, dx\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$$

memiliki jari-jari konvergensi R

4. Fungsi $f(x)$ kontinu pada selang $(a-R, a+R)$ dan untuk setiap x dalam selang ini

$$\int f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int c_k(x-a)^k \, dx\right] + C$$

5. Untuk setiap α dan β dalam selang $(a-R, a+R)$, maka

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\alpha}^{\beta} c_k(x-a)^k \, dx\right]$$

13 Latihan Soal

1. (a) Gunakan uji yang sesuai untuk menentukan apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1} \text{ konvergen atau divergen}$$

(b) Dapatkan jumlahan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{3^k} + \frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]$$

Penyelesaian:

(a) Dengan Prinsip Informal I, suku konstan yaitu 1 pada penyebut dapat dihilangkan tanpa memengaruhi konvergensi deret tersebut, sehingga bentuknya menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

Bentuk tersebut merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = \frac{4}{3}$ dan $r = \frac{1}{3}$ yang jelas konvergen.

(b) Tinjau bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{3^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(k+3)(k+4)}$$

Perhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{3^k}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan $a=\frac{7}{3}$ dan $r=\frac{1}{3}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{3^k}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}$$

Perhatikan pula $\frac{6}{(k+3)(k+4)}=6\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$ sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(k+3)(k+4)}&=\lim_{k\to\infty}6\Bigg[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)+\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)\Bigg]\\&=\lim_{k\to\infty}6\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{k+4}\right]\\&=6\left[\frac{1}{4}-0\right]=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Jadi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{7}{3^k}+\frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$$

2. Selesaikan

(a) Tentukan konvergensi barisan $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
Dari jawaban tersebut, tentukan konvergensi $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) Dengan uji perbandingan, tentukan deret berikut konvergen ataukah divergen?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n}$$

Penyelesaian:

(a) Akan dicari $\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=L_1$
Misalkan $\frac{1}{n}=k$, maka $k\to 0^+$ karena $n\to+\infty$, sehingga

$$L_1=\lim_{k\to 0^+}\frac{\sin \pi k}{k}=\pi$$

Jadi barisan $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke π
Selanjutnya tinjau,

$$\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n}=\frac{n}{2n+1}\times n\sin\frac{\pi}{n}$$

Dapat diperoleh $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} = L_2$

Akibatnya

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n+1} \sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = L_1 \cdot L_2 = \frac{\pi}{2}$$

Jadi barisan $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\dfrac{\pi}{2}$

(b) Tinjau bahwa $0 \le \sin^2(5n) \le 1$ sehingga $2^n \sin^2(5n) \le 2^n$

Tinjau pula $0 \le \cos^2 n \le 1$ sehingga $4^n \le 4^n + \cos^2 n$ dan $\dfrac{1}{4^n+\cos^2 n} \le \dfrac{1}{4^n}$

Akibatnya

$$\frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n} \le \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$$

Karena $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = 1$ dan $r = \dfrac{1}{2}$ yang jelas konvergen sehingga deret $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n \sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n}$ juga konvergen.

3. Buktikan $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^p}$ konvergen jika $p > 1$

Penyelesaian:

Uji konvergensi deret tersebut dengan uji integral berikut

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$

Misalkan $\ln x = u$ sehingga $\dfrac{1}{x}\,dx = du$, akan dihitung dulu integralnya tanpa menggunakan batas integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx &= \int \frac{1}{u^p}\,du \\ &= \int u^{-p}\,du \\ &= \frac{u^{1-p}}{1-p} \\ &= \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\end{aligned}$$

Dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{(\ln a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right) \\ &= \frac{1}{1-p}\left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}\right)\end{aligned}$$

Jika $p > 1$, diperoleh

$$\frac{1}{1-p}\left(\lim_{a\to\infty}\frac{1}{(\ln a)^{p-1}}-\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}\right)=\frac{1}{1-p}\left(0-\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}\right)=\frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$$

Dapat disimpulkan deret tersebut konvergen jika $p > 1$

Jika $p < 1$, maka $p-1 < 0$ sehingga

$$\frac{1}{1-p}\left(\lim_{a\to\infty}\frac{1}{(\ln a)^{p-1}}-\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}\right)=\infty$$

Dapat disimpulkan deret tersebut divergen jika $p < 1$

4. Selesaikan:

   (a) Diberikan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $a_n = \frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}$
   Tuliskan 5 suku pertama barisan, dan dapatkan $\lim_{n\to\infty} a_n$

   (b) Jika diberikan barisan $(a_n) = (0,1,0,1,0,1,\dots)$ dan $(b_n) = (1,0,1,0,1,0,\dots)$ maka selidiki tentang konvergensi dari: 1.$(a_n + b_n)$; 2.$(a_n \cdot b_n)$; 3. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

   Penyelesaian:

   (a) Tinjau bahwa

   $$a_n = \frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{n^2}=\frac{\frac{n}{2}(1+(2n-1))}{n^2}=1$$

   untuk $n = 1,2,3,\cdots$. Diperoleh $(a_n) = (1,1,1,\dots)$ sehingga $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ merupakan 5 suku pertama barisan tersebut dan $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

   (b) i. Tinjau $(a_n + b_n) = (1,1,1,\dots)$ sehingga barisan tersebut konvergen ke 1

   ii. Tinjau $(a_n \cdot b_n) = (0,0,0,\dots)$ sehingga barisan tersebut konvergen ke 0

   iii. Tinjau untuk $n = 2$, $\frac{a_n}{b_n}$ tidak terdefinisi sehingga konvergensi barisan $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ tidak dapat ditentukan

5. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{1-ax}$

   (a) Dapatkan deret Maclaurin dari $f(x)$ (Nyatakan dalam notasi sigma)

   (b) Gunakan hasil dari (a) untuk mendapatkan deret Maclaurin dari fungsi $f(x) = \frac{1}{(1-ax)^2}$

   Perhatikan: bilangan a dalam soal ini adalah digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $a = 6$, jika $a = 0$ ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

(a) Tinjau

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-ax} \\ f'(x) &= \frac{a}{(1-ax)^2} \\ f''(x) &= \frac{a\cdot 2a}{(1-ax)^3} \\ f'''(x) &= \frac{a\cdot 2a\cdot 3a}{(1-ax)^4} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \frac{a\cdot 2a\cdot 3a\cdots ka}{(1-ax)^{k+1}} = \frac{k!a^k}{(1-ax)^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= a \\ f''(0) &= a\cdot 2a \\ f'''(0) &= a\cdot 2a\cdot 3a \\ &\vdots \\ f^{(k)}(0) &= a\cdot 2a\cdot 3a\cdots ka = k!a^k \end{aligned}$$

Diperoleh deret Maclaurin dari $f(x)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots \\ &= 1+(a)(x)+\frac{2!a^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{k!a^k}{k!}x^k+\cdots \\ &= 1+(ax)+(ax)^2+\cdots(ax)^k+\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(ax)^k \end{aligned}$$

Alternatif penyelesaian dengan metode substitusi.
Tinjau deret Maclaurin dari $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}x^k$. Dengan metode substitusi diperoleh deret Maclaurin dari $f(x)$ adalah

$$\frac{1}{1-ax} = 1+ax+(ax)^2+(ax)^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(ax)^k$$

(b) Tinjau $\frac{d}{dx}(ax)^k = ka(ax)^{k-1}$ sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-ax}\right) &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(ax)^k \\ \frac{a}{(1-ax)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}ka(ax)^{k-1} \\ \frac{a}{(1-ax)^2} &= a\sum_{k=0}^{\infty}k(ax)^{k-1} \\ \frac{1}{(1-ax)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}k(ax)^{k-1} = 1+2(ax)+3(ax)^2+\cdots \end{aligned}$$