

PEMBAHASAN SOAL EAS
MATEMATIKA II
TAHUN 2021/2022

Ahmad Hisbu Zakiyudin

SOAL SESI 1 (Kelas 2-24)

1. Dapatkan luas permukaan dari kurva $y = \sqrt{9 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$ jika diputar terhadap sumbu- x

Penyelesaian:

Ingat bahwa luas permukaan dari kurva $y = f(x)$ yang diputar terhadap sumbu- x adalah

$$K = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Tinjau

$$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{x^2}{9-x^2} \\ &= \frac{9}{9-x^2} \end{aligned}$$

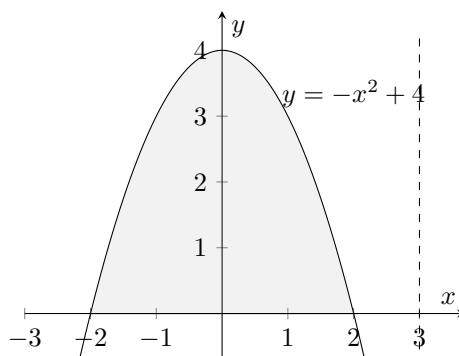
Batasnya yaitu $a = -2$ dan $b = 2$, sehingga

$$\begin{aligned} K &= \int_{-2}^2 2\pi \sqrt{9-x^2} \sqrt{\frac{9}{9-x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-2}^2 3 dx \\ &= 6\pi x \Big|_{-2}^2 \\ &= 6\pi[2 - (-2)] = 24\pi \end{aligned}$$

2. Diberikan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + 4$ dan sumbu- x
- Sketsa daerah tersebut.
 - Dapatkan titik berat daerah tersebut.
 - Dapatkan volume daerah tersebut jika diputar terhadap garis $x = 3$

Penyelesaian:

- (a) Tinjau bahwa $y = -x^2 + 4$ merupakan parabola dengan titik puncak yaitu $(0, 4)$, serta titik potongnya dengan sumbu- x yaitu ketika $y = 0$ adalah titik $(-2, 0)$ dan $(2, 0)$ sehingga daerahnya sebagai berikut



- (b) Perhatikan bahwa kurvanya simetris terhadap sumbu- y atau garis $x = 0$, sehingga $\bar{x} = 0$. Selanjutnya untuk mencari \bar{y} menggunakan rumus berikut

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b y_1^2 - y_2^2 dx}{\int_a^b y_1 - y_2 dx}$$

Dalam hal ini $y_1 = -x^2 + 4$ dan y_2 adalah sumbu- x yaitu $y_2 = 0$, serta $a = -2$ dan $b = 2$ sehingga

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2} \frac{\int_{-2}^2 (-x^2 + 4)^2 dx}{\int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\int_{-2}^2 x^4 - 8x^2 + 16 dx}{\int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left. \frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right|_{-2}^2}{\left. \frac{-x^3}{3} + 4x \right|_{-2}^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{512}{15} - \frac{32}{3}}{\frac{32}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{512}{15} \cdot \frac{3}{32} \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Jadi titik beratnya yaitu $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{8}{5})$

- (c) Volume daerah tersebut jika diputar terhadap garis $x = 3$ dapat digunakan dalil Guldin I, yaitu

$$V = 2\pi dL$$

Dalam hal ini d adalah jarak antara titik berat dataran dengan sumbu putar, yaitu $d = 3$. Telah diperoleh pula, luas daerah tersebut yaitu $\int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = \frac{32}{3}$. Jadi volumenya adalah $V = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{32}{3} = 64\pi$

- Misalkan posisi suatu partikel pada saat t diberikan dalam dua fungsi parametrik $x = \ln t - 1$ dan $y = \frac{t}{t-1}$
 - Nyatakan posisi partikel tersebut ke dalam bentuk koordinat kartesius.
 - Gambarkan grafik lintasan partikel untuk $t \geq 2$
- Sketsa grafik daerah di luar kurva kutub $r = 3$ dan di dalam kurva kutub $r = 2 - 2\cos \theta$, selanjutnya hitung luas daerah tersebut.

5. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$

- (a) Dapatkan polinomial Taylor derajat 5 dari fungsi tersebut di sekitar $x = -1$.
- (b) Dapatkan deret Taylor fungsi tersebut di sekitar $x = -1$ dan nyatakan dalam notasi sigma.

SOAL SESI 2 (Kelas 10-18 dan 45-61)

SOAL SESI 4 (Kelas 48-63)

1. Dapatkan luas permukaan dari kurva $y = |2x - 4|$, $1 \leq x \leq 3$ diputar terhadap sumbu $-x$
2. Diberikan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = 4$
 - (a) Sketsa daerah tersebut.
 - (b) Dapatkan titik berat daerah tersebut.
 - (c) Dapatkan volume daerah tersebut jika diputar terhadap garis $y = 8 - 2x$
3. Diberikan kurva kutub $r = 2(1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 - (a) Dapatkan kemiringan garis singgung pada kurva kutub tersebut di titik $\theta = \frac{\pi}{3}$
 - (b) Dapatkan semua titik (r, θ) pada kurva kutub tersebut di mana garis singgungnya vertikal.
4. Sketsa grafik daerah di dalam kurva kutub $r = 6 \sin \theta$ dan di luar kurva kutub $r = 2 + 2 \sin \theta$, selanjutnya hitung luas daerah tersebut.
5. Diberikan fungsi $f(x) = e^{-x}$
 - (a) Dapatkan polinomial Maclaurin derajat 5 dari fungsi tersebut
 - (b) Dapatkan deret Maclaurin fungsi tersebut dan nyatakan dalam notasi sigma.