PEMBAHASAN SOAL ETS MATEMATIKA I TAHUN 2021/2022

Ahmad Hisbu Zakiyudin

Soal Kelas 1-10

1. Selesaikan pertidaksamaan berikut:

$$\frac{a}{x+1} - \frac{b}{x+2} \geq 0$$

dimana a, b adalah dua digit terakhir NRP.

Contoh: Jika NRP anda adalah 5002201148, maka gunakan $a = 4, b = 8$; Jika a atau b adalah 0 ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

Tinjau syarat penyebut yaitu $x + 1 \neq 0$ dan $x + 2 \neq 0$ sehingga $x \neq -1$ dan $x \neq -2$. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\frac{a}{x+1} - \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) - b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(a-b)x + 2a - b}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

Jika $a = 4$ dan $b = 8$ diperoleh

$$\frac{-4x}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \tag{1}$$

sehingga pembuat nolnya adalah $x = 0$ dan titik kritisnya $x = -2, x = -1$.

Jika $x < -2$, maka persamaan (1) bernilai positif.

Jika $-2 < x < -1$, maka persamaan (1) bernilai negatif.

Jika $-1 < x \leq 0$, maka persamaan (1) bernilai positif atau 0.

Jika $x > 0$, maka persamaan (1) bernilai negatif.

Penyelesaiannya adalah daerah yang bernilai tak negatif yaitu $x < -2$ atau $-1 < x \leq 0$.

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee -1 < x \leq 0\}$.

2. Hitunglah $(-i-1)^{49}(\cos\frac{\pi}{40} + i\sin\frac{\pi}{40})^{20}$

Penyelesaian:

Misalkan $z = -i - 1$, maka $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ dan $\tan\theta = \dfrac{-1}{-1} = 1$ pada kuadran III sehingga $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$. Diperoleh $z = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4})\right)$.

Ingat bahwa jika $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ sehingga

$$\begin{aligned}
z^{49} &= \left(\sqrt{2}\right)^{49}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 49\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\cdot 49\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{49}\left[\cos\left(-\frac{147\pi}{4} + 38\pi\right) + i\sin\left(-\frac{147\pi}{4} + 38\pi\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{49}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{49}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}\right] \\
&= -2^{24}(1+i)
\end{aligned}$$

Dapat diperoleh pula untuk $w = \cos\frac{\pi}{40} + i\sin\frac{\pi}{40}$, maka

$$\begin{aligned} w^{20} &= \cos\left(\frac{\pi}{40}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{40}\cdot 20\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

Jadi

$$(-i-1)^{49}\left(\cos\frac{\pi}{40} + i\sin\frac{\pi}{40}\right)^{20} = -2^{24}(1+i)i = -2^{24}(i-1) = 2^{24}(1-i)$$

3. Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{t} - \frac{1}{u} - \frac{3}{v} &= 3 \\ \frac{2}{t} - \frac{3}{u} + \frac{1}{v} &= -13 \\ \frac{2}{t} - \frac{3}{v} &= -11 \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Misalkan $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{u}$, dan $z = \frac{1}{v}$, maka diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} -2x - y - 3z &= 3 \\ 2x - 3y + z &= -13 \\ 2x - 3z &= -11 \end{aligned}$$

Dapat diperoleh matriks A dan b sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -13 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dapat dicari solusi x, y, z dengan aturan cramer, yaitu

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

dengan A_i merupakan matriks A yang kolom ke-i diganti dengan matriks b, sehingga

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -13 & -3 & 1 \\ -11 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 2 & -13 & 1 \\ 2 & -11 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -13 \\ 2 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan aturan Sarrus, dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\det A = & \ (-2)(-3)(-3) + (-1)(1)(2) + (-3)(2)(0) \\
& - (-3)(-3)(2) - (-2)(1)(0) - (-1)(2)(-3) \\
= & -44 \\
\det A_1 = & \ (3)(-3)(-3) + (-1)(1)(-11) + (-3)(-13)(0) \\
& - (-3)(-3)(-11) - (3)(1)(0) - (-1)(-13)(-3) \\
= & \ 176 \\
\det A_2 = & \ (-2)(-13)(-3) + (3)(1)(2) + (-3)(2)(-11) \\
& - (-3)(-13)(2) - (-2)(1)(-11) - (3)(2)(-3) \\
= & -88 \\
\det A_3 = & \ (-2)(-3)(-11) + (-1)(-13)(2) + (3)(2)(0) \\
& - (3)(-3)(2) - (-2)(-13)(0) - (-1)(2)(-11) \\
= & -44
\end{aligned}$$

sehingga

$$x = \frac{176}{-44} = -4 \qquad y = \frac{-88}{-44} = 2 \qquad z = \frac{-44}{-44} = 1$$

Diperoleh $t = -\frac{1}{4}$, $u = \frac{1}{2}$, dan $v = 1$.

4. Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$. Dapatkan
   (a) $(f \circ g)(x)$ beserta domainnya
   (b) $(g \circ f)(x)$ beserta domainnya

Penyelesaian:

(a) Perhatikan bahwa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{4 - x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{|x|}$$

Tinjau bahwa domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

Kita punya $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ dan $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$ sehingga $D_{f \circ g} = \left\{x \neq 0 \;\middle|\; \frac{2}{x} \leq -1 \vee \frac{2}{x} \geq 1\right\}$.
Untuk $\frac{2}{x} \leq -1$, diperoleh $\frac{2 + x}{x} \leq 0$ sehingga $-2 \leq x < 0$.
Untuk $\frac{2}{x} \geq 1$, diperoleh $\frac{2 - x}{x} \geq 0$ sehingga $0 < x \leq 2$.
Jadi $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 2\}$.

(b) Perhatikan bahwa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$$

Tinjau bahwa domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Kita punya $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ dan $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$ sehingga $D_{g \circ f} = \{x \leq -1 \vee x \geq 1 \mid x \neq 0\}$ atau $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$.

5. Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-9}{|x|-3}$

   (a) Nyatakan $f(x)$ dalam bentuk fungsi sepotong-sepotong

   (b) Selidiki di titik mana $f(x)$ diskontinu

Penyelesaian:

(a) Tinjau bahwa $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

sehingga untuk $x \geq 0$, maka $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ dengan $x \neq 3$

dan untuk $x < 0$, maka $f(x) = \dfrac{x^2-9}{-x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{-(x+3)} = 3-x$ dengan $x \neq -3$

Jadi diperoleh

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 0 \wedge x \neq 3 \\ 3-x, & x < 0 \wedge x \neq -3 \end{cases}$$

(b) Tinjau bahwa $f(x)$ tidak terdefinisi pada titik $x = 3$ dan $x = -3$ sehingga diskontinu pada titik tersebut. Akan tetapi, titik diskontinuitasnya dapat dihilangkan dengan mendefinisikan $f(x)$ pada titik $x = 3$ dengan limitnya, yaitu $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$, serta titik $x = -3$ dengan $\lim_{x \to -3} f(x) = 6$