SOAL LATIHAN 6.7

Nomor 3

Didefinisikan $F(x)$ dengan $F(x) = \int_1^x (t^3 + 1)\, dt$

(a) Gunakan Teorema Fundamental Kalkulus Kedua untuk mendapatkan $F'(x)$

(b) Periksa hasil bagian (a) dengan mengintegralkan kemudian menurunkan

Jawaban Nomor 3

(a) Berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus Kedua, dapat diperoleh

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (t^3 + 1)\, dt = x^3 + 1$$

(b) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x (t^3 + 1)\, dt &= \left.\frac{t^4}{4} + t\right|_1^x \\ &= \frac{x^4}{4} + x - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh $F'(x) = x^3 + 1$.

Nomor 15

Misal $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2 + 4}\, dt$. Dapatkan $F(0), F'(0), F''(0)$.

Jawaban Nomor 15

Perhatikan bahwa $F(0) = \int_0^0 \frac{\sin t}{t^2 + 4}\, dt$. Ingat sifat integral bahwa $\int_a^a f(x)\, dx = 0$, sehingga diperoleh $F(0) = 0$.
Selanjutnya, dengan Teorema Fundamental Kalkulus Kedua, didapatkan $F'(x) = \frac{\sin t}{t^2 + 4}$ sehingga $F'(0) = \frac{0}{0 + 4} = 0$.
Kemudian, dengan aturan turunan, didapatkan

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{(t^2 + 4)\cos t - 2t \sin t}{(t^2 + 4)^2} \\ F''(0) &= \frac{(0 + 4)\cos 0 - 2(0)\sin 0}{(0 + 4)^2} \\ &= \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nomor 17

Misal $F(x) = \int_1^x \frac{t + \sin \pi t}{t^2 + 1}\, dt$. Dapatkan $F(1), F'(1), F''(1)$.

Jawaban No 17

Dengan sifat integral, kita punya $F(1) = \int_1^1 \frac{t + \sin \pi t}{t^2 + 1}\, dt = 0$

Selanjutnya, dengan Teorema Fundamental Kalkulus Kedua, didapatkan $F'(x) = \frac{x + \sin \pi x}{x^2 + 1}$ sehingga $F'(1) = \frac{1 + \sin \pi}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$.
Kemudian dengan aturan turunan, didapatkan

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{(1 + \pi \cos \pi x)(x^2 + 1) - 2x(x + \sin \pi x)}{(x^2 + 1)^2} \\
F''(1) &= \frac{(1 + \pi \cos \pi)(1^2 + 1) - 2(1 + \sin \pi)}{(1 + 1)^2} \\
&= \frac{(1 - \pi)(2) - 2(1)}{2^2} \\
&= \frac{-2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Nomor 20

Misal $F(x) = \int_0^x \frac{2t - 3}{4t^2 + 7}\, dt$ untuk $-\infty < x < +\infty$

(a) Dapatkan interval di mana F naik dan F turun.

(b) Dapatkan interval di mana F cekung ke atas dan F cekung ke bawah.

Jawaban Nomor 20

(a) Dengan teorema fundamental kalkulus 2, diperoleh

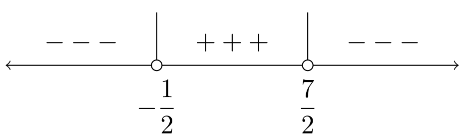
$$F'(x) = \frac{2x - 3}{4x^2 + 7}$$

Karena penyebutnya $4x^2 + 7 \geq 7$, titik kritisnya hanyalah $x = \frac{3}{2}$. Untuk selang $(-\infty, \frac{3}{2}]$, diperoleh $F'(x) \leq 0$ sehingga turun pada selang tersebut. Sedangkan untuk selang $[\frac{3}{2}, +\infty)$, diperoleh $F'(x) \geq 0$ sehingga naik pada selang tersebut.

(a) Tinjau

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{2(4x^2 + 7) - (2x - 3)(8x)}{(4x^2 + 7)^2} \\
&= \frac{-8x^2 + 24x + 14}{(4x^2 + 7)^2} \\
&= \frac{-2(2x - 7)(2x + 1)}{(4x^2 + 7)^2}
\end{aligned}$$

Uji titik untuk $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = -\frac{7}{2}$, diperoleh



Dari sini diperoleh bahwa $F(x)$ cekung ke bawah pada selang $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{2}, +\infty)$ serta cekung ke atas pada selang $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

Nomor 22

Nyatakan $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} |t|\, dt$ dalam bentuk sepotong-sepotong yang tidak menggunakan integral.

Jawaban Nomor 22

Ingat bahwa $|t| = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ -t, t < 0 \end{cases}$, sehingga bentuk dari $F(x)$ menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{x} |t|\, dt &= \int_{-2}^{0} -t\, dt + \int_{0}^{x} t\, dt \\ &= \left.\frac{-t^2}{2}\right|_{-2}^{0} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0}^{x} \\ &= \frac{-(-2)^2}{2} - 0 + \frac{x^2}{2} - 0 \\ &= \frac{x^2}{2} - 2 \end{aligned}$$

Nomor 27

Dapatkan $\displaystyle\frac{d}{dx} \int_{3}^{\sin x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$

Jawaban Nomor 27

Dengan Teorema Fundamental Kalkulus 2 dan aturan rantai, kita punya

$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{g(x)} f(t)\, dt = f(g(x))g'(x)$$

sehingga

$$\frac{d}{dx} \int_{3}^{\sin x} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{1+\sin^2 x} \cos x$$

Nomor 28

Buktikan bahwa fungsi

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_{0}^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

adalah konstan pada interval $(0, +\infty)$.

Jawaban Nomor 28

Dengan Teorema Fundamental Kalkulus Kedua dan aturan rantai kita punya

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0\end{aligned}$$

Karena $F'(x) = 0$ untuk semua $x > 0$, diperoleh bahwa $F(x)$ konstan pada $(0, +\infty)$.

Nomor 30a

Dapatkan $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\, dt$

Jawaban Nomor 30a

Misalkan a suatu konstanta dengan $x^2 < a < x^3$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\, dt &= \int_{x^2}^{a} \sin^2 t\, dt + \int_{a}^{x^3} \sin^2 t\, dt \\ &= -\int_{a}^{x^2} \sin^2 t\, dt + \int_{a}^{x^3} \sin^2 t\, dt\end{aligned}$$

sehingga dengan Teorema Fundamental Kalkulus Kedua dan aturan rantai, kita dapatkan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\, dt &= \frac{d}{dx}\left[-\int_{a}^{x^2} \sin^2 t\, dt + \int_{a}^{x^3} \sin^2 t\, dt\right] \\ &= \frac{d}{dx}\int_{a}^{x^2} (-\sin^2 t)\, dt + \frac{d}{dx}\int_{a}^{x^3} \sin^2 t\, dt \\ &= -2x\sin^2(x^2) + 3x^2\sin^2(x^3)\end{aligned}$$