Soal Kuis Bab Turunan

1. Selidiki apakah $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x > -2 \\ 3 - 2x, & x \leq -2 \end{cases}$ dapat diturunkan di mana-mana?

2. Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari $y^3 = y + x^3y^2$.

3. Misalkan l adalah panjang diagonal persegi panjang yang sisi-sisinya x dan y. Asumsikan x dan y adalah fungsi waktu.
   (a) Bagaimana hubungan $\frac{dl}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$?
   (b) Jika x bertambah dengan laju 2 cm/det dan y berkurang dengan laju 1 cm/det. Seberapa cepat panjang diagonal berubah jika pada saat itu $x = 5$ cm dan $y = 12$ cm. Apakah diagonal bertambah atau berkurang pada saat itu?

4. Tentukan semua nilai k sedemikian hingga $\frac{x^2}{k} + \frac{k}{x}$ mempunyai ekstrem relatif pada $x = 2$.

5. Tentukan volume maksimum, beserta tinggi dan jari-jari kerucut dengan panjang sisi miring adalah L. (Nyatakan dalam variabel L)

Jawaban

1. Tinjau bahwa $x^2 + 3$ dan $3 - 2x$ adalah polinomial sehingga cukup ditinjau untuk $x = -2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f'_-(-2) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(-2+h)^2 + 3 - (3 - 2(-2))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{4 - 4h + h^2 + 3 - 3 - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} -4 + h = -4 \\
f'_+(-2) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{3 - 2(-2+h) - (3 - 2(-2))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h}{h} = -2
\end{aligned}$$

   Karena $f'_-(-2) \neq f'_+(-2)$, maka $f(x)$ tidak dapat diturunkan pada $x = -2$.

2. Dengan turunan implisit dan aturan perkalian, didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[y^3] &= \frac{d}{dx}\left[y + x^3y^2\right] \\
3y^2\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dx} + 3x^2y^2 + x^3(2y)\frac{dy}{dx} \\
3y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2x^3y\frac{dy}{dx} &= 3x^2y^2 \\
(3y^2 - 2x^3y - 1)\frac{dy}{dx} &= 3x^2y^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2y^2}{3y^2 - 2x^3y - 1}
\end{aligned}$$

3. Karena l adalah panjang diagonal persegi panjang dengan panjang sisi-sisinya adalah x dan y, maka $l^2 = x^2 + y^2$

   (a) Turunkan terhadap t diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[l^2] &= \frac{d}{dt}[x^2 + y^2] \\
2l\frac{dl}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\
l\frac{dl}{dt} &= x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

   (b) Dari soal, kita punya

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=5} = 2 \text{ cm/det} \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=12} = -1 \text{ cm/det}$$

   Saat $x = 5$ cm dan $y = 12$ cm diperoleh $l = 13$ cm.

Yang ditanyakan soal adalah $\left.\frac{dl}{dt}\right|_{l=13}$.
Dengan jawaban bagian (a), diperoleh

$$\begin{aligned} 13\frac{dl}{dt} &= 5(2) - 12(1) \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{2}{13} \end{aligned}$$

Jadi diagonal berkurang $\frac{2}{13}$ cm/det pada saat itu.

4. Pada soal, diinginkan ekstrem relatif pada $x = 2$ sehingga turunan pertama dari $\frac{x^2}{k} + \frac{k}{x}$pada titik $x = 2$ bernilai 0. Perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{k} + \frac{k}{x^2}\right] = \frac{2x}{k} - \frac{k}{x^2}$$

Saat $x = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{4}{k} - \frac{k}{4} &= 0 \\ \frac{16 - k^2}{4k} &= 0 \\ \frac{(4-k)(4+k)}{4k} &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $k = 4$ dan $k = -4$.

5. Misalkan jari-jari kerucut adalah r dan tingginya adalah t, maka diperoleh hubungan antara tinggi, jari-jari, dan panjang sisi miring dari kerucut adalah $L^2 = r^2 + t^2$.
Selanjutnya, ingat bahwa volume kerucut adalah $V = \frac{\pi}{3}r^2t$. Karena $r^2 = L^2 - t^2$, maka

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}(L^2 - t^2)t \\ V &= \frac{\pi}{3}(tL^2 - t^3) \end{aligned}$$

Volume maksimumnya dicapai ketika $\frac{dV}{dt} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(L^2 - 3t^2) &= 0 \\ 3t^2 &= L^2 \\ t^2 &= \frac{1}{3}L^2 \end{aligned}$$

Karena tinggi tidak mungkin negatif atau $t > 0$, maka $t = \frac{L}{\sqrt{3}}$.
Dapat diperoleh $r = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Diperoleh pula $V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{L^3}{\sqrt{3}} - \frac{L^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2L^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi L^3}{9\sqrt{3}}$.