PEMBAHASAN SOAL ETS MATEMATIKA II TAHUN 2020/2021

Ahmad Hisbu Zakiyudin

SOAL KELAS 1-9

1. Diberikan $f(x) = 1 - e^{-1+x}$
   (a) Dapatan $f^{-1}(x)$
   (b) Sketsa grafik dari $y = f(x)$ dan $y = f^{-1}(x)$ dalam satu sistem koordinat. Sertai label untuk masing-masing grafiknya.

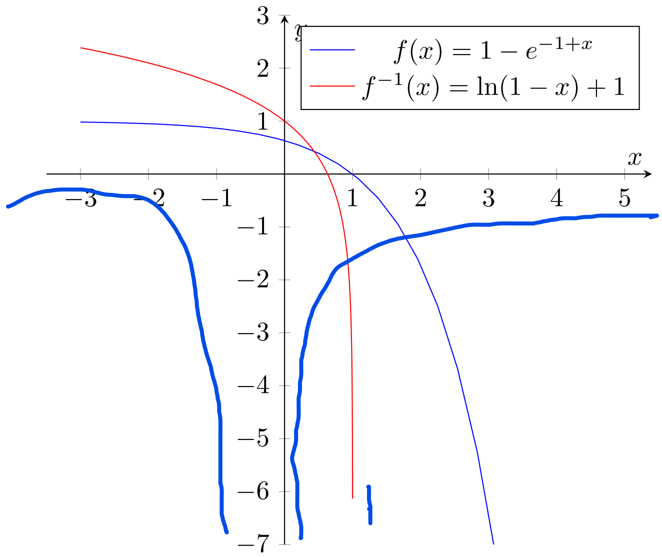
   Solusi:

   (a) Misalkan $x = f(y)$ kemudian nyatakan dalam $y = f^{-1}(x)$

$$
\begin{aligned}
x &= 1 - e^{-1+y} \\
e^{-1+y} &= 1 - x \\
\ln(e^{-1+y}) &= \ln(1-x) \\
-1 + y &= \ln(1-x) \\
y &= \ln(1-x) + 1
\end{aligned}
$$

   Jadi $f^{-1}(x) = \ln(1-x) + 1$

   (b) Berikut sketsa grafiknya



2. Hitunglah

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 2}{x^3 + x}\, dx$$

   Solusi:

   Tinjau bahwa

$x^3 + x = x(x^2+1)$

$$
\begin{aligned}
x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 2 &= x^4 + x^2 + x^3 + 4x^2 + 2x + 2 \\
&= x(x^3 + x) + (x^3 + x) + \boxed{4x^2 + x + 2} \\
&= (x^3 + x)(x + 1) + \boxed{2x^2 + 2} + \boxed{2x^2 + x} \\
&= (x^3 + x)(x + 1) + 2(\cancel{x^2 + 1}) + \cancel{x}(2x + 1)
\end{aligned}
$$

sehingga

$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3+5x^2+2x+2}{x^3+x} &= \frac{(x^3+x)(x+1)+2(x^2+1)+x(2x+1)}{x(x^2+1)}\\ &= x+1+\boxed{\frac{2}{x}+\frac{2x+1}{x^2+1}}\\ &= x+1+\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^3+5x^2+2x+2}{x^3+x}\,dx &= \int x+1+\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}+x+2\ln|x|+\ln|x^2+1|+\tan^{-1}(x)+C\end{aligned}$$

3. Selesaikan integral berikut

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solusi:
Misalkan $-\sqrt{x}=u$ sehingga $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du$ atau $\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=-2\,du$. Untuk $x=0$, maka $u=0$, dan untuk $x\to\infty$, maka $u\to-\infty$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^{-\infty} e^u(-2\,du)\\ &= 2\int_{-\infty}^0 e^u\,du\\ &= \lim_{a\to-\infty} 2\int_a^0 e^u\,du\\ &= 2\cdot\lim_{a\to-\infty} e^u\Big|_a^0\\ &= 2\cdot\lim_{a\to-\infty} e^0-e^a\\ &= 2\cdot\lim_{a\to-\infty} 1-e^a\end{aligned}$$

Tinjau bahwa $\lim\limits_{a\to-\infty} e^a=0$ sehingga

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

4. Misalkan f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensial dengan $a\neq 0$. $b\neq 0$, dan

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=a,\quad \lim_{x\to+\infty} g'(x)=b$$

Tentukan $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}=\cdots$

Solusi:

Karena merupakan bentuk tak tentu, maka dengan aturan L'hopital, dapat diperoleh

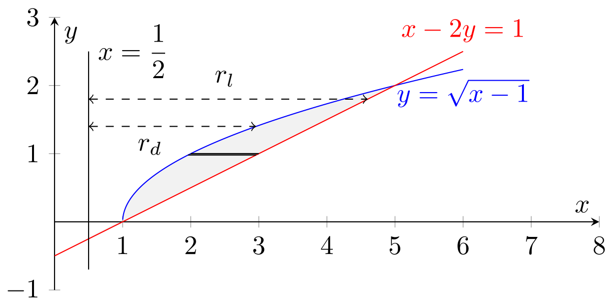
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)/f(x)}{g'(x)/g(x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)g(x)}{g'(x)f(x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \times \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} \\
&= \frac{a}{b} \times \lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)} \\
&= \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} \\
&= 1
\end{aligned}$$

5. Diberikan bidang datar yang dibatasi kurva: $y = \sqrt{x-1}$ dan $x - 2y = 1$ jika diputar menurut garis $x = \frac{1}{2}$. Sketsalah dan tentukan volume benda putar yang terjadi!

Solusi:

Metode Cakram

Tinjau bahwa $x = 1 + 2y$ sehingga $y = \sqrt{2y}$, diperoleh $y^2 = 2y$, maka $y = 0$ atau $y = 2$. Untuk $y = 0$, maka $x = 1$ dan untuk $y = 2$, maka $x = 5$. Diperoleh titik potongnya adalah $(1, 0)$ dan $(5, 2)$. Berikut sketsa grafiknya (benda putarnya gambar sendiri hehe :D)



Perhatikan bahwa $x = y^2 + 1, y \geq 0$ dan $x = 1 + 2y$.

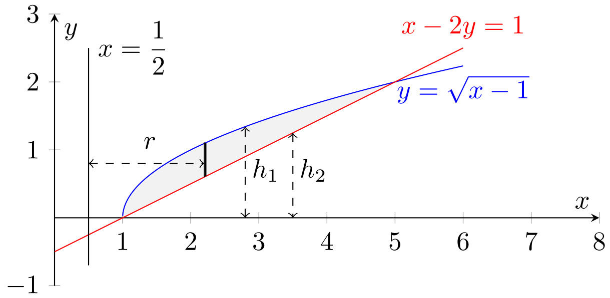
Jari-jari dalamnya adalah $r_d = y^2 + 1 - \frac{1}{2}$ dan jari-jari luar adalah $r_l = 1 + 2y - \frac{1}{2}$.

Perhatikan bahwa batasnya adalah dari $y = 0$ hingga $y = 2$, maka

$$\begin{aligned}
V = \pi\int_a^b r_l^2 - r_d^2\, dy &= \pi\int_0^2 \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y^2 + \frac{1}{2}\right)^2 dy \\
&= \pi\int_0^2 4y^2 + 2y + \frac{1}{4} - y^4 - y^2 - \frac{1}{4}\, dy \\
&= \pi\int_0^2 -y^4 + 3y^2 + 2y\, dy \\
&= \pi\left[-\frac{y^5}{5} + y^3 + y^2\right]_0^2 \\
&= \pi\left[-\frac{32}{5} + 8 + 4\right] \\
&= \frac{28}{5}\pi
\end{aligned}$$

Metode Cincin Silinder

Tinjau bahwa jari-jarinya adalah $r = x - \frac{1}{2}$, sedangkan tingginya $h = \sqrt{x-1} - \frac{x-1}{2}$



Perhatikan bahwa batasnya adalah dari $x = 1$ hingga $x = 5$, diperoleh

$$V = 2\pi \int_a^b rh\, dx = 2\pi \int_1^5 \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x-1} - \frac{x-1}{2}\right) dx$$

Misalkan $x - 1 = u$ sehingga $x = u + 1$ dan $du = dx$. Untuk $x = 1$, maka $u = 0$, dan untuk $x = 5$, maka $u = 4$, diperoleh

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^4 \left(u + 1 - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{u} - \frac{u}{2}\right) du \\
&= 2\pi \int_0^4 u\sqrt{u} + \frac{1}{2}\sqrt{u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{4}\, du \\
&= 2\pi \left[\frac{2u^2\sqrt{u}}{5} + \frac{u\sqrt{u}}{3} - \frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{8}\right]_0^4 \\
&= 2\pi \left[\frac{2(4)^2\sqrt{4}}{5} + \frac{4\sqrt{4}}{3} - \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{8}\right] \\
&= \frac{28}{5}\pi
\end{aligned}$$

Jadi volume benda putar yang terjadi adalah $V = \frac{28}{5}\pi$

SOAL KELAS 10-18

1. Temperatur air yang dimasak di dalam ketel dimodelkan dalam bentuk $T = 75e^{-kt} + 22$ di mana T adalah temperatur air t menit setelah kompor dimatikan, dan k adalah konstanta positif.

   (a) Tentukan tingkat perubahan temperatur dalam bentuk k.

   (b) Setelah 5 menit, temperatur air adalah $70°C$. Tentukan nilai k. Tuliskan jawaban dalam bentuk logaritma natural.

   (c) Berapa menit waktu yang dibutuhkan agar temperature air menjadi lebih dingin ke $55°C$? Tuliskan jawaban dalam bentuk logaritma natural

   Solusi:

   (a) Nyatakan k dalam fungsi T dan t

$$\begin{aligned} T - 22 &= 75e^{-kt} \\ \frac{T-22}{75} &= e^{-kt} \\ \ln\left(\frac{T-22}{75}\right) &= \ln(e^{-kt}) \\ \ln\left(\frac{T-22}{75}\right) &= -kt \\ k &= -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{T-22}{75}\right) \end{aligned}$$

   (b) Dalam 5 menit temperatur air menjadi $70°C$ sehingga

$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{70-22}{75}\right) \\ &= -\frac{1}{5}\ln(0,64) \end{aligned}$$

   (c) Perhatikan bahwa $t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T-22}{75}\right)$ sehingga

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{-\frac{1}{5}\ln(0,64)}\ln\left(\frac{55-20}{75}\right) \\ &= \frac{5\ln(0,47)}{\ln(0,64)} \end{aligned}$$

2. Selesaian integral berikut ini:

   (a) $\int x \ln^2 x \, dx$

   (b) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$

   Solusi:

   (a) Misalkan $x = e^p$ sehingga $dx = e^p \, dp$, maka

$$\begin{aligned} \int x \ln^2 x \, dx &= \int e^{2p} \ln^2(e^p) \, dp \\ &= \int p^2 e^{2p} \, dp \end{aligned}$$

   Misalkan $p^2 = u$ sehingga $2p \, dp = du$, dan $e^{2p} \, dp = dv$ sehingga $v = \frac{e^{2p}}{2}$, maka dengan integral parsial diperoleh

$$\begin{aligned} \int x \ln^2 x \, dx &= \frac{p^2 e^{2p}}{2} - \int \frac{2pe^{2p}}{2} \, dp \\ &= \frac{p^2 e^{2p}}{2} - \int pe^{2p} \, dp \end{aligned}$$

   Misalkan pula $p = u$ dan $e^{2p} \, dp = dv$ sehingga $dp = du$ dan $v = \frac{e^{2p}}{2}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \int x \ln^2 x \, dx &= \frac{p^2 e^{2p}}{2} - \int pe^{2p} \, dp \\ &= \frac{p^2 e^{2p}}{2} - \left(\frac{pe^{2p}}{2} - \int \frac{e^{2p}}{2} \, dp \right) \\ &= \frac{p^2 e^{2p} - pe^{2p}}{2} + \frac{e^{2p}}{4} + C \\ &= e^{2p} \left(\frac{2p^2 - 2p + 1}{4} \right) + C \\ &= x^2 \left(\frac{2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1}{4} \right) + C \end{aligned}$$

   (b) Tinjau bahwa $x^2 + 6x + 12 = (x + 3)^2 + 3$.
   Misalkan $x + 3 = \sqrt{3}u$ sehingga $dx = \sqrt{3} \, du$, maka

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 12} &= \frac{1}{(x + 3)^2 + 3} \, dx \\ &= \int \frac{\sqrt{3}}{3u^2 + 3} \, du \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{u^2 + 1} \, du \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1}(u) + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x + 3}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

3. Hitunglah $\lim\limits_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

Solusi:

CARA I

Tinjau bahwa $(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}}$. Cari terlebih dahulu $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\ln(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{3^x+5^x}{5^x}\times 5^x\right)}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+1\right)+\ln 5^x}{x}
\end{aligned}$$

Tinjau bahwa $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = 0$ karena $0<\dfrac{3}{5}<1$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\ln(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(0+1)+x\ln 5}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln 5}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\ln 5\\
&= \ln 5
\end{aligned}$$

Jadi

$$\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}e^{\ln(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\ln 5} = 5$$

CARA II

Tinjau bahwa $5^x \le 3^x+5^x \le 2\cdot 5^x$ sehingga $5 \le (3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} \le 2^{\frac{1}{x}}\cdot 5$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}5 \le \lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} &\le \lim_{x\to\infty}5\cdot 2^{\frac{1}{x}}\\
5 \le \lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} &\le 5
\end{aligned}$$

Berdasarkan teorema apit, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}} = 5$$

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = 2+|x-1|$ dan $y = -\dfrac{1}{5}x+7$, serta sketsalah grafiknya.

Solusi:

Tinjau bahwa untuk $y = 2+|x-1|$ adalah fungsi nilai mutlak yang digeser ke kanan 1 satuan dan ke atas 2 satuan. Sedangkan $y = -\dfrac{1}{5}x+7$ adalah persamaan garis dengan gradien $-\dfrac{1}{5}$.

$f(x) = |x|$ $\qquad$ $f(x) = |x-1|$

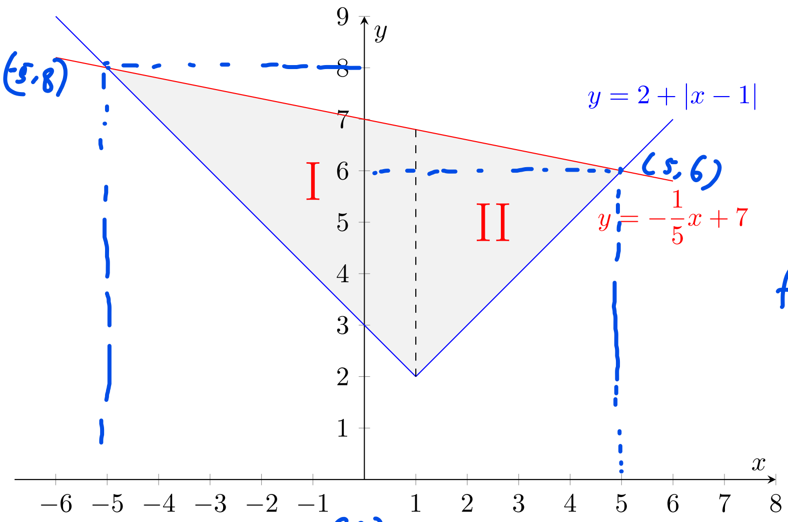
Untuk mencari titik potongnya, tinjau $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ \boxed{-x+1} & x < 1 \end{cases}$, sehingga untuk $x \geq 1$

$$2 + x - 1 = -\frac{1}{5}x + 7$$
$$\frac{6}{5}x = 6$$
$$\boxed{x = 5}$$

Karena $x = 5$, maka $y = 2 + |5-1| = 6$. Untuk $\boxed{x < 1}$

$$2 - x + 1 = -\frac{1}{5}x + 7$$
$$\frac{4}{5}x = -4$$
$$\boxed{x = -5}$$

Karena $x = -5$, maka $y = 2 + |-5-1| = 8$. Diperoleh titik potongnya adalah $\boxed{(-5, 8)}$ dan $\boxed{(5, 6)}$. Untuk grafiknya, dapat kita potong menjadi dua bagian sebagai berikut



$f(x) = 2 + |x-1|$
$= 2 - x + 1$

Untuk daerah I, luasnya adalah $\int_{-5}^{1} \overbrace{\boxed{-\frac{1}{5}x + 7}}^{f(x)} - \overbrace{\boxed{(2 - x + 1)}}^{g(x)}\, dx$. Sedangkan daerah II, luasnya adalah $\int_{1}^{5} \underbrace{-\frac{1}{5}x + 7}_{f(x)} - \overbrace{\boxed{(2 + x - 1)}}^{g(x)}\, dx$ sehingga luas totalnya adalah

$$\begin{aligned} L &= \int_{-5}^{1} -\frac{1}{5}x + 7 - (2 - x + 1)\, dx + \int_{1}^{5} -\frac{1}{5}x + 7 - (2 + x - 1)\, dx \\ &= \int_{-5}^{1} \frac{4}{5}x + 4\, dx + \int_{1}^{5} -\frac{6}{5}x + 6\, dx \\ &= \frac{2}{5}x^2 + 4x \Big|_{-5}^{1} - \frac{3}{5}x^2 + 6x \Big|_{1}^{5} \\ &= \left(\frac{2}{5} + 4\right) - (10 - 20) + (-15 + 30) - \left(-\frac{3}{5} + 6\right) \\ &\boxed{= 24} \end{aligned}$$

5. Sketsa dataran yang dibatasi oleh $y = 4 - 2x,\ y = 4 - x^2$, selanjutnya tentukan volume benda putar jika dataran tersebut diputar terhadap garis $x = 3$.

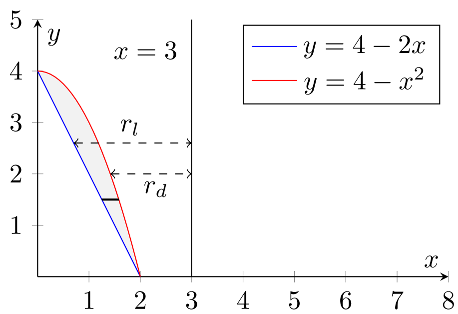
Solusi:

Metode Cakram

Tinjau titik potongnya, yaitu

$$\begin{aligned} 4 - 2x &= 4 - x^2 \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $x = 0$ diperoleh $y = 4$, dan untuk $x = 2$, diperoleh $y = 0$, sehingga titik potongnya adalah $(0, 4)$ dan $(2, 0)$. Berikut grafiknya



Perhatikan bahwa untuk $x \geq 0$, $x = \sqrt{4-y}$ dan $x = \dfrac{4-y}{2}$.

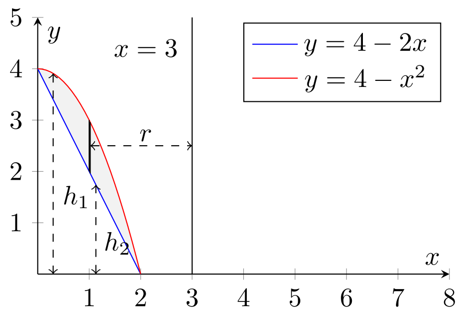
Jari-jari dalamnya $r_d = 3 - \sqrt{4-y}$, sedangkan jari-jari luarnya $r_l = 3 - \dfrac{4-y}{2} = \dfrac{y+2}{2}$.

Perhatikan bahwa batasnya adalah dari $y = 0$ hingga $y = 4$, maka

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b r_l^2 - r_d^2 \, dy &= \pi \int_0^4 \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 - (3 - \sqrt{4-y})^2 \, dy \\ &= \pi \int_0^4 \frac{y^2+4y+4}{4} - (9 - 6\sqrt{4-y} + 4 - y) \, dy \\ &= \pi \int_0^4 \frac{y^2}{4} + 2y - 12 + 6\sqrt{4-y} \, dy \\ &= \pi \left[\frac{y^3}{12} + y^2 - 12y - 4(4-y)\sqrt{4-y}\right]_0^4 \\ &= \pi \left[\left(\frac{16}{3} + 16 - 48 - 0 - \left(-4(4)\sqrt{4}\right)\right)\right] \\ &= \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Metode Cincin Silinder

Tinjau bahwa jari-jarinya adalah $r = 3-x$, sedangkan tingginya $h = 4-x^2-(4-2x) = 2x-x^2$



Perhatikan bahwa batasnya adalah dari $x = 0$ hingga $x = 2$, diperoleh

$$\begin{aligned}
V = 2\pi \int_a^b rh\,dx &= 2\pi \int_0^2 (3-x)(2x-x^2)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^2 6x - 5x^2 + x^3\,dx \\
&= 2\pi \left[3x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right] \\
&= 2\pi \left[3(2)^2 - \frac{5(2)^3}{3} + \frac{2^4}{4}\right] \\
&= \frac{16}{3}\pi
\end{aligned}$$

Jadi volume benda putar tersebut adalah $V = \dfrac{16}{3}\pi$

SOAL KELAS 19-27

1. Diberikan fungsi f dengan $f(x) = x^7 + 6x^5 + 4x^3 + x + 1$.

   (a) Tunjukkan bahwa f^{-1} diferensiabel pada selang $(-\infty, +\infty)$

   (b) Misalkan $y = f^{-1}(x)$. Dapatkan turunan dari f^{-1} dengan terlebih dahulu menghitung $\dfrac{dx}{dy}$

   (c) Dapatkan turunan dari f^{-1} dengan menggunakan diferensiasi implisit.

   Solusi:

   (a) Untuk menunjukkan bahwa f^{-1} diferensiabel pada suatu selang, cukup kita tunjukkan bahwa turunan dari $f(x)$ tak nol untuk setiap x pada selang tersebut. Tinjau bahwa $f'(x) = 7x^6 + 30x^4 + 12x^2 + 1 > 0$ untuk setiap x pada selang $(-\infty, +\infty)$ sehingga f^{-1} diferensiabel pada selang tersebut.

   (b) Misalkan $y = f^{-1}(x)$ sehingga $x = f(y) = y^7 + 6y^5 + 4y^3 + y + 1$ dan diperoleh

   $$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= 7y^6 + 30y^4 + 12y^2 + 1 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} &= \frac{1}{7y^6 + 30y^4 + 12y^2 + 1} \end{aligned}$$

   (c) Misalkan $y = f^{-1}(x)$ sehingga $x = f(y) = y^7 + 6y^5 + 4y^3 + y + 1$ dan diperoleh

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^7 + 6y^5 + 4y^3 + y + 1] \\ 1 &= 7y^6\frac{dy}{dx} + 30y^4\frac{dy}{dx} + 12y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} \\ 1 &= (7y^6 + 30y^4 + 12y^2 + 1)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{7y^6 + 30y^4 + 12y^2 + 1} \end{aligned}$$

2. Selesaikan

   $$\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}\,dx$$

   $\sqrt{a^2+x^2}$, $x = a\tan\theta$

   $2 = (\sqrt{2})^2$

   Solusi:

   CARA I

   Misalkan $x = \sqrt{2}\tan u$ sehingga $dx = \sqrt{2}\sec^2 u$ du, maka

   $x^2 = 2\tan^2 u$

   $$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\cancel{\sqrt{2}}\sec^2 u\sqrt{2(1+\tan^2 u)}}{\cancel{\sqrt{2}}\tan u}\,du \\ &= \sqrt{2}\int \frac{\sec^3 u}{\tan u}\,du \\ &= \sqrt{2}\int \csc u\sec^2 u\,du \\ &= \sqrt{2}\int \csc u(1+\tan^2 u)\,du \\ &= \sqrt{2}\int \csc u + \tan u\sec u\,du \end{aligned}$$

   $\sqrt{1+\tan^2 u} = \sqrt{\sec^2 u}$
   $\sec u$

   $\sec u = \dfrac{1}{\cancel{\cos u}} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sin u}{\cancel{\cos u}}}$
   $= \csc u$

Ingat bahwa $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$ sehingga $\displaystyle\int \tan u \sec u \, du = \sec u$, diperoleh

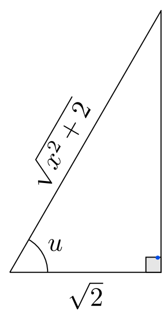
$$
\begin{aligned}
\int \csc u + \tan u \sec u \, du &= \int \csc u \times \frac{\csc u + \cot u}{\csc u + \cot u} \, du + \sec u \\
&= \sec u + \int \frac{\csc^2 u + \csc u \cot u}{\boxed{\csc u + \cot u}} \, du
\end{aligned}
$$

Misalkan $p = \csc u + \cot u$ sehingga $dp = -\csc u \cot u - \csc^2 u = -(\csc^2 u + \csc u \cot u)\, du$, maka

$$
\begin{aligned}
\boxed{\int \frac{\csc^2 u + \csc u \cot u}{\csc u + \cot u} \, du} &= \int -\frac{1}{p} \, dp \\
&= -\ln |p| \\
&= -\ln |\csc u + \cot u|
\end{aligned}
$$

Karena $x = \sqrt{2}\tan u$, maka $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

$\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \tan u$



depan

samping

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$

$\csc u = \dfrac{1}{\sin u}$

$\cot u = \dfrac{\cos u}{\sin u}$

Diperoleh

$$
\sec u = \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} \qquad \csc u = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} \qquad \cot u = \frac{\sqrt{2}}{x}
$$

Jadi

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} \, dx &= \sqrt{2} \int \csc u + \tan u \sec u \, du \\
&= \sqrt{2}(\sec u - \ln |\csc u + \cot u|) + C \\
&= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}\ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x} \right| + C
\end{aligned}
$$

CARA II

Tinjau bahwa

$$
\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} = \frac{x^2+2}{x\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{x\sqrt{x^2+2}}
$$

sehingga

$$
\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} \, dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{x\sqrt{x^2+2}} \, dx
$$

(i) Untuk $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$. Misalkan $u = x^2+2$ sehingga $du = 2x\,dx$, maka

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx &= \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du \\ &= \sqrt{u} \\ &= \sqrt{x^2+2}\end{aligned}$$

(ii) Untuk $\int \frac{2}{x\sqrt{x^2+2}}\,dx$. Misalkan $x = \sqrt{2}u$ sehingga $dx = \sqrt{2}\,du$, maka

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x\sqrt{x^2+2}}\,dx &= \int \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}u\sqrt{2u^2+2}}\,du \\ &= \int \frac{\sqrt{2}}{u\sqrt{u^2+1}}\,du \\ &= -\sqrt{2}\operatorname{csch}^{-1}|u| \\ &= -\sqrt{2}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right|\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx + \int \frac{2}{x\sqrt{x^2+2}}\,dx \\ &= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right| + C\end{aligned}$$

Catatan: Hasil kedua integral ekuivalen meski terlihat berbeda.
Hasil lainnya

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,dx &= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}\tanh^{-1}\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}\right| + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,dx &= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}\coth^{-1}\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}\right| + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,dx &= \sqrt{x^2+2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|\sqrt{\frac{x^2+2}{2}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{x^2+2}{2}}-1\right|\right) + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,dx &= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{x}\right| + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\,dx &= \sqrt{x^2+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln|\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}| - \ln|\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}|\right) + C\end{aligned}$$

3. Dapatkan nilai integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$$

Solusi:

Misalkan $1-\sin x = u$ sehingga $-\cos x\,dx = du$. Untuk $x=0$, maka $u=1$, dan untuk $x=\frac{\pi}{2}$, maka $u=0$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx &= \int_1^0 -\frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= \lim_{a\to0^+}\int_a^1 u^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \lim_{a\to0^+} 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_a^1 \\
&= \lim_{a\to0^+} 2(1-\sqrt{a}) = 2
\end{aligned}$$

4. Selesaikan

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx \rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Solusi:

Tinjau bahwa $2x^2+3 = 2(x^2+1)+1$ sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{\boxed{2(x^2+1)+1}}{(x^2+1)^2}\,dx \rightarrow \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \\
&= \int \frac{2}{\underbrace{x^2+1}_{\tan^{-1}(x)}}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx
\end{aligned}$$

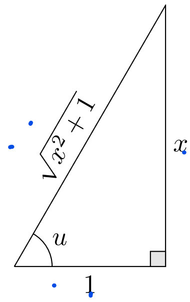
Misalkan $x = \tan u$ sehingga $dx = \sec^2 u\,du$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{2\sec^2 u}{\tan^2 u+1}\,du + \int \frac{\sec^2 u}{(\tan^2 u+1)^2}\,du \\
&= \int \frac{2\sec^2 u}{\sec^2 u}\,du + \int \frac{\sec^2 u}{\sec^4 u}\,du \\
&= \int 2\,du + \int \cos^2 u\,du \\
&= 2u + \frac{1}{2}\int 1+\cos 2u\,du \\
&= 2u + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C
\end{aligned}$$

$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$

$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$

Karena $x = \tan u$, maka $u = \tan^{-1} x$.



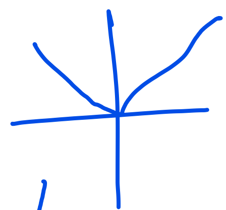
Diperoleh pula $\sin u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ dan $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sehingga

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u = 2 \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Jadi

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + 5\tan^{-1} x\right) + C$$

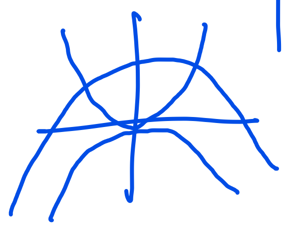
$+C$



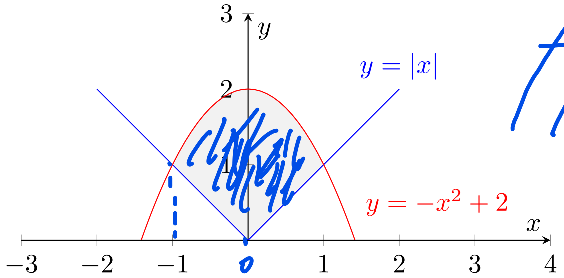
5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = |x|; y = -x^2 + 2$

Solusi:

Tinjau bahwa titik potongnya adalah $(-1, 2)$ dan $(1, 2)$



$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Untuk $x < 0$, $|x| = -x$, sedangkan untuk $x \geq 0$, $|x| = x$ sehingga luasnya

$$L = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2 + 2 + x\,dx + \int_0^1 -x^2 + 2 - x\,dx$$

$-(-x)$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$
$$= -\left(-\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) + \frac{(-1)^2}{2}\right) - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{7}{3}$$

082257622058

SOAL KELAS 37-44

1. Jika $F(x) = f(2g(x))$, dengan $f(x) = x^4 + x^3 + 1; 0 \leq x \leq 2$ dan $g(x) = f^{-1}(x)$. Dapatkan $F'(3)$

   Solusi:

   Kita punya $F'(x) = 2f'(2g(x))g'(x)$, selanjutnya akan kita cari $g'(x) = (f^{-1})'(x)$.

   Misalkan $y = f^{-1}(x)$, maka

   $$x = f(y) = y^4 + y^3 + 1$$

   sehingga diperoleh

   $$\frac{dx}{dy} = 4y^3 + 3y^2$$
   $$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{4y^3 + 3y^2}}$$

   Perhatikan bahwa $g(3) = f^{-1}(3)$, ~~dan ingat jika $y = f(x)$ maka $x = f^{-1}(y)$~~ sehingga $g(3)$ merupakan penyelesaian dari $x^4 + x^3 + 1 = 3$.

   Mudah terlihat bahwa $x = 1$ memenuhi persamaan tersebut sehingga $\boxed{g(3) = 1}$

   Ingat bahwa $g(x) = f^{-1}(x) = y$ sehingga $\boxed{y = g(3) = 1}$ dan diperoleh

   $$g'(3) = (f^{-1})'(3) = \frac{1}{4(1)^3 + 3(1)^2} = \frac{1}{7}$$

   Substitusi semua yang telah diperoleh maka

   $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

   $$F'(3) = 2f'(2g(3))g'(3) = \boxed{\frac{2f'(2)}{7}}$$

   $\frac{2f'(2)}{7}$

   Dapat kita tentukan bahwa $f'(x) = \underline{4x^3 + 3x^2}$ sehingga $\underline{f'(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2} = \boxed{44}$ dan

   $$F'(3) = \frac{2 \times 44}{7} = \frac{88}{7}$$

2. Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \tan(\cos^{-1} x)$

   Solusi:

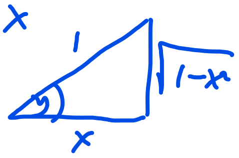
   Ingat bahwa $\frac{d}{dx} \tan x = \boxed{\sec^2 x}$ dan $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ serta aturan rantai, diperoleh

   $$\frac{d}{dx}[\tan(\cos^{-1} x)] = \sec^2(\cos^{-1} x) \frac{d}{dx}[\cos^{-1} x]$$
   $$= \sec^2(\cos^{-1} x) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$
   $$= -\frac{1}{\cos^2(\cos^{-1} x)\sqrt{1 - x^2}}$$
   $$= -\frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$$

$\cos^2(\cos^{-1}(x)) = x^2$

$y = \cos^{-1}(x)$

$\cos y = x$



$f'(x)$

$f(x) = \tan(\cos^{-1}(x))$

$= \tan(y)$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - 1\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{-\cancel{x^2} - 1 + \cancel{x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

3. Hitunglah

$$\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^3\theta - \tan^2\theta}\,d\theta$$

Solusi:

Misalkan $x = \tan\theta$ sehingga $dx = \sec^2\theta\,d\theta$, diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^3\theta - \tan^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{1}{x^3 - x^2}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx\end{aligned}$$

Tinjau dekomposisi pecahannya yaitu

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{(Ax+B)(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)}\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}A + C &= 0 \\ B - A &= 0 \\ -B &= 1\end{aligned}$$

Jadi $A = -1,\ B = -1$ dan $C = 1$ sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^3\theta - \tan^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx \\ &= \int -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| \\ &= \frac{1}{\tan\theta} + \ln\left|\frac{\tan\theta - 1}{\tan\theta}\right| \\ &= \cot\theta + \ln|\cot\theta| + C\end{aligned}$$

4. Hitunglah
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^3}$$

Solusi:

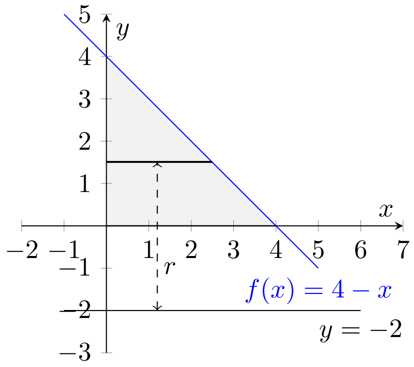
Misalkan $u = 2x-1$ sehingga $du = 2\,dx$. Untuk $x = 0$, maka $u = -1$ dan untuk $x \to -\infty$, maka $u \to -\infty$. Karena titik diskontinunya yaitu $x = \frac{1}{2}$ tidak di dalam interval batas integral, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^3} &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{du}{2u^3} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \int_{a}^{-1} \frac{du}{u^3} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2u^2}\right]_a^{-1} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2(-1)^2} - \left(-\frac{1}{2(a)^2}\right)\right) \\
&= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}(0-1) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

5. Gunakan metode cincin silinder untuk menentukan volume benda padat yang dibentuk oleh daerah dibatasi fungsi $f(x) = 4-x$ dan sumbu-x pada interval $x \in [0,4]$ dan diputar terhadap $y = -2$

Solusi:

Tinjau bahwa jari-jarinya adalah $r = y-(-2) = y+2$, sedangkan tingginya $h = 4-y$



Batasnya adalah $y = 0$ hingga $y = 4$. Dengan metode cincin silinder diperoleh

$$\begin{aligned}
V = 2\pi \int_a^b rh\,dx &= 2\pi \int_0^4 (y+2)(4-y)\,dy \\
&= 2\pi \int_0^4 -y^2 + 2y + 8\,dy \\
&= 2\pi \left[-\frac{y^3}{3} + y^2 + 8y\right]_0^4 \\
&= 2\pi \left[-\frac{64}{3} + 16 + 32\right] = \frac{160}{3}\pi
\end{aligned}$$

SOAL KELAS 45-52

1. Dapatkan turunan pertama dari
$$y = \frac{x^3 \sqrt[5]{5x^2+12}}{(1+x^3)^4}$$

   Solusi:
   Bentuk tersebut terlihat cukup rumit, akan lebih mudah jika kita gunakan diferensiasi logaritmik, yaitu dengan mengoperasikan fungsi logaritma natural pada kedua ruas
$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(\frac{x^3 \sqrt[5]{5x^2+12}}{(1+x^3)^4}\right) \\
\ln y &= \ln(x^3) + \ln(\sqrt[5]{5x^2+12}) - \ln((1+x^3)^4) \\
\ln y &= 3\ln x + \frac{1}{5}\ln(5x^2+12) - 4\ln(1+x^3) \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{3}{x} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5x^2+12} \times 10x - \frac{4}{1+x^3} \times 3x^2 \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{3}{x} + \frac{2x}{5x^2+12} - \frac{12x^2}{1+x^3} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{3}{x} + \frac{2x}{5x^2+12} - \frac{12x^2}{1+x^3}\right] \\
\frac{dy}{dx} &= \left[\frac{x^3 \sqrt[5]{5x^2+12}}{(1+x^3)^4}\right]\left[\frac{3}{x} + \frac{2x}{5x^2+12} - \frac{12x^2}{1+x^3}\right]
\end{aligned}$$

2. Hitung integral berikut ini:

   (a)
$$\int \frac{2t-1}{t+t^{\frac{3}{5}}}\,dt$$

   (b)
$$\int \frac{2x+1}{2x^3-x^2}\,dx$$

   Solusi:

   (a) Misalkan $t^{\frac{1}{5}} = u$ sehingga $\frac{1}{5t^{\frac{4}{5}}}\,dt = du$, dapat diperoleh
$$\begin{aligned}
\frac{2t-1}{t+t^{\frac{3}{5}})}\,dt &= \frac{2t-1}{t^{\frac{4}{5}}(t^{\frac{1}{5}}+t^{-\frac{1}{5}}}\,dt \\
&= \frac{5(2u^5-1)}{u+u^{-1}}\,du \\
&= \frac{5(2u^6-u)}{u^2+1}\,du \\
2u^6 - u &= 2(u^6+u^4) - 2u^4 - u \\
&= 2u^4(u^2+1) - 2(u^4+u^2) + 2u^2 - u \\
&= 2u^4(u^2+1) - 2u^2(u^2+1) + 2(u^2+1) - 2 - u
\end{aligned}$$

Bentuk integralnya menjadi

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t-1}{t+t^{\frac{3}{5}}}\,dt &= 5\int \frac{2u^4(u^2+1)-2u^2(u^2+1)+2(u^2+1)-2-u}{u^2+1}\,du \\
&= 5\int 2u^4-2u^2+2-\frac{u}{u^2+1}-\frac{2}{u^2+1}\,du \\
&= 5\left[\frac{2}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+2u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)-2\tan^{-1}u\right]+C \\
&= 2t-\frac{10}{3}t^{\frac{3}{5}}+10t^{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}\ln(t^{\frac{2}{5}}+1)-10\tan^{-1}t^{\frac{1}{5}}+C
\end{aligned}$$

(b) Tinjau bahwa $2x^3-x^2=x^2(2x-1)$ sehingga dekomposisi pecahannya

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{2x^3-x^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{2x-1} \\
&= \frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{2x-1} \\
&= \frac{(Ax+B)(2x-1)+Cx^2}{x^2(2x-1)} \\
&= \frac{(2A+C)x^2+(2B-A)x-B}{2x^3-x^2}
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$2A+C=0 \qquad \text{dan} \qquad 2B-A=2 \qquad \text{dan} \qquad -B=1$$

Jadi $A=-4, B=-1$, dan $C=8$, sehingga

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{2x^3-x^2}\,dx &= \int -\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{2x-1}\,dx \\
&= -4\ln|x|+\frac{1}{x}+4\ln|2x-1|+C
\end{aligned}$$

3. Selesaikan

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Solusi:

Karena titik diskotinunya, yaitu $x=1$ berada dalam interval batas integral, maka

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Selanjutnya, hitung integral tak tentunya dahulu. Misalkan $x-1=u$ sehingga $dx=du$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} \\
&= \int u^{-\frac{1}{3}}\,du \\
&= \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+C \\
&= \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C
\end{aligned}$$

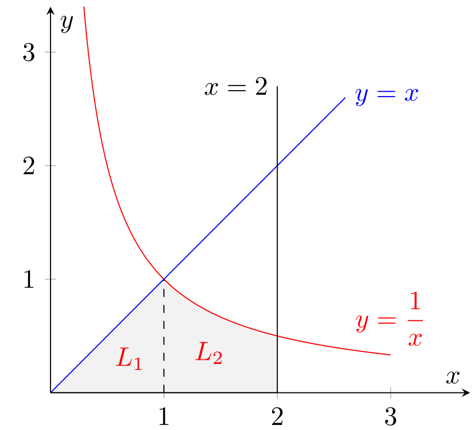
Dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\
&= \lim_{a\to 1^-} \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a \\
&= \lim_{a\to 1^-} \frac{3}{2}\left[(a-1)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2} \\
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{b\to 1^+} \int_b^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\
&= \lim_{b\to 1^+} \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_b^4 \\
&= \lim_{b\to 1^+} \frac{3}{2}\left[(4-1)^{\frac{2}{3}} - (b-1)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}
\end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)$$

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, sumbu x, dan $x = 2$.
Solusi:
Tinjau bahwa titik potongnya adalah $(1,1)$ dan $(1,-1)$. Sketsa daerahnya adalah



Luasnya dapat dibagi menjadi dua daerah seperti pada gambar, dengan batas dari $x = 0$ sampai $x = 1$ dan $x = 1$ sampai $x = 2$, sehingga

$$\begin{aligned}
L = L_1 + L_2 &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \ln x|_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 1
\end{aligned}$$

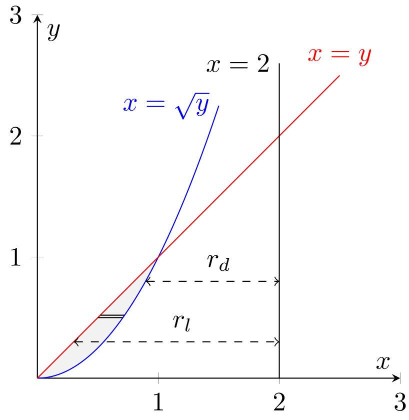
Jadi luasnya adalah $\dfrac{1}{2} + \ln 2$ satuan luas.

5. Tentukan volume dari benda padat yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x, y = x^2$ diputar terhadap $x = 2$.

Solusi:

Metode Cakram

Tinjau bahwa kedua kurva berpotongan pada $(0, 0)$ dan $(1, 1)$ sehingga sketsanya



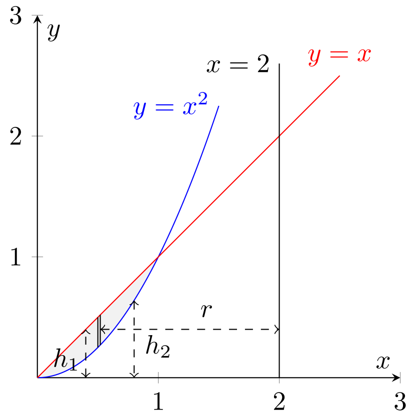
Perhatikan bahwa untuk $x > 0$, $x = \sqrt{y}$ dan $x = y$.

Jari-jari dalamnya adalah $r_d = 2 - \sqrt{y}$ dan jari-jari luar adalah $r_l = 2 - y$. Perhatikan pula batasnya dari $y = 0$ hingga $y = 1$, maka

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b r_l^2 - r_d^2 \, dy &= \pi \int_0^1 (2-y)^2 - (2-\sqrt{y})^2 \, dy \\ &= \pi \int_0^1 4 - 4y + y^2 - 4 + 4\sqrt{y} - y \, dy \\ &= \pi \int_0^1 y^2 + 4\sqrt{y} - 5y \, dy \\ &= \pi \left[\frac{y^3}{3} + \frac{8y\sqrt{y}}{3} - \frac{5y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{5}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Metode Cincin Silinder

Tinjau bahwa jari-jarinya adalah $r = 2 - x$ sedangkan tingginya $h = x - x^2$.



Perhatikan bahwa batasnya dari $x = 0$ hingga $x = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b rh\,dx &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(x-x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 2x - 3x^2 + x^3\,dx \\ &= 2\pi \left[x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= 2\pi \left[1 - 1 + \frac{1}{4}\right] \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Jadi volumenya adalah $\frac{\pi}{2}$ satuan volume.

SOAL KELAS 53-61

1. Diberikan bahwa untuk $x > 0, x \neq 1$, dan $y \neq 1$

$$\log_x y = \log_y x \qquad \text{dan} \qquad \log_x(x-y) = \log_y(x+y)$$

Tunjukkan bahwa $x^4 - x^2 - 1 = 0$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \log_x y = \frac{1}{\log_y x} &= \log_y x \\ \log_y^2(x) - 1 &= 0 \\ (\log_y(x) - 1)(\log_y(x) + 1) &= 0 \\ \log_y(x) &= \pm 1 \\ y = x \vee \frac{1}{y} &= x \end{aligned}$$

Jika $x = y$, maka $x - y = 0$ sehingga tidak memenuhi syarat domain pada persamaan kedua. Jadi $x = \frac{1}{y}$, sehingga

$$\begin{aligned} \log_x\left(x - \frac{1}{x}\right) &= \log_{\frac{1}{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ \log_x\left(x - \frac{1}{x}\right) &= -\log_x\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ \log_x\left(x - \frac{1}{x}\right) + \log_x\left(x + \frac{1}{x}\right) &= 0 \\ \log_x\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] &= 0 \\ \log_x\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) &= 0 \\ x^0 = 1 &= x^2 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Diperoleh $x^4 - 1 = x^2$ sehingga $x^4 - x^2 - 1 = 0$. Terbukti.

2. Selesaikan

$$\int \frac{x^4+2}{x^3+9x}\,dx$$

Solusi:

Tinjau bahwa $x^4 + 2 = x^2(x^2+9) - 9x^2 + 2$. Selanjutnya akan dicari dekomposisi dari $\frac{-9x^2+2}{x^3+9x}$, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{-9x^2+2}{x(x^2+9)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + 9A}{x^3+9x} \end{aligned}$$

Diperoleh

$$A + B = -9 \qquad \text{dan} \qquad C = 0 \qquad \text{dan} \qquad 9A = 2$$

Jadi $A = \frac{2}{9}$, $B = -\frac{83}{9}$, dan $C = 0$, maka

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+2}{x^3+9x}\,dx &= \int \frac{x^2(x^2+9) - 9(x^2+9) + 83}{x(x^2+9)}\,dx \\ &= \int x + \frac{2}{9x} - \frac{83x}{9(x^2+9)}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{9}\ln x - \frac{83}{18}\ln(x^2+9) + C\end{aligned}$$

3. Dapatkan nilai integral berikut ini jika konvergen:

$$\int_{-3/2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx$$

Solusi:
Misalkan $2x + 3 = u$ sehingga $2\,dx = du$. Untuk $x = -\frac{3}{2}$, maka $u = 0$, dan untuk $x = 0$, maka $u = 3$. Diperoleh pula $x = \frac{u-3}{2}$ sehingga $x + 2 = \frac{u+1}{2}$. Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-3/2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx &= \int_0^3 \frac{u+1}{4\sqrt{u}}\,du \\ &= \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{4}\int_a^3 \sqrt{u} + u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{4}\left[\frac{2u\sqrt{u}}{3} + 2\sqrt{u}\right]_a^3 \\ &= \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{4}\left[2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{2a\sqrt{a}}{3} - 2\sqrt{a}\right] = \sqrt{3}\end{aligned}$$

4. Hitung

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sqrt{x}}$$

Solusi:
Cara I
Tinjau bahwa $(\sin x)^{\sqrt{x}} = e^{\ln(\sin x)^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)} = e^{\frac{\ln(\sin x)}{1/\sqrt{x}}}$. Dari sini diperoleh bentuk tak tentu, sehingga dapat digunakan aturan L'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{1/\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2x\sqrt{x}}{\tan x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x} \times \lim_{x\to 0^+} (-2x) \\ &= 1 \times 0 = 0\end{aligned}$$

Jadi

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{1/\sqrt{x}}} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{1/\sqrt{x}}\right)} = e^0 = 1$$

Cara II

Perhatikan bahwa $-1 \leq \sin x \leq 1$ sehingga $(-1)^{\sqrt{x}} \leq (\sin x)^{\sqrt{x}} \leq 1^{\sqrt{x}}$, akibatnya

$$1 = \lim_{x\to 0^+} (-1)^{\sqrt{x}} \leq \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sqrt{x}} \leq \lim_{x\to 0^+} 1^{\sqrt{x}} = 1$$

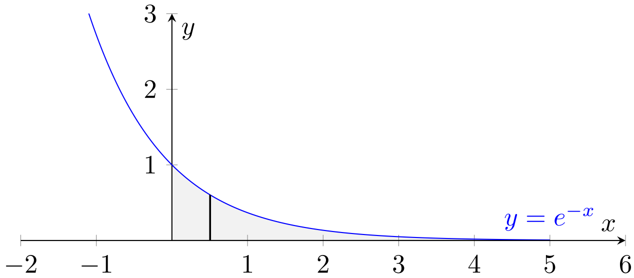
Dengan teorema apit, didapatkan $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sqrt{x}} = 1$

5. Diberikan R adalah daerah yang dibatasi oleh sumbu x, kurva $y = e^{-x}$, dan sumbu y. Jika R diputar terhadap sumbu x, tentukan volume benda pejal yang dihasilkan.

Solusi:

Dalam pembahasan ini, digunakan metode cakram, karena jika menggunakan metode cincin silinder, integralnya akan lebih sulit untuk dihitung.

Tinjau bahwa jari-jarinya $r_l = e^{-x}$ dan $r_d = 0$. Batas integralnya dari $x = 0$ sampai x menuju tak hingga



Diperoleh

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b r_l^2 - r_d^2 \, dx &= \pi \int_0^\infty e^{-2x} \, dx \\ &= \pi \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-2x} \, dx \\ &= \pi \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{2e^{2x}} \Big|_0^a \\ &= \pi \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{2e^{2a}} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Jadi volume benda putar yang terjadi adalah $V = \dfrac{\pi}{2}$

SOAL KELAS 62-70

1. (a) Dapatkan penyelesaian dari persamaan $\ln(e^{-x} - 1) = x$

   (b) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari $y = \ln(\cosh^{-1} x)$

   Solusi:

   (a) Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{-x} - 1 \\
e^{2x} &= 1 - e^x \\
e^{2x} + e^x - 1 &= 0 \\
e^x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

   Karena $e^x > 0$, maka $e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ sehingga $x = \ln\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

   (b) Ingat kembali aturan rantai, turunan dari $\ln x$ dan $\cosh^{-1} x$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}\ln(\cosh^{-1} x) &= \frac{1}{\cosh^{-1} x} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{(\cosh^{-1} x)\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

2. Diberikan $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. Tentukan nilai eksak dari: $\cos\theta, \tan\theta$, dan $\cot\theta$.

   Solusi:

   Dapat diperoleh bahwa $\sin\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dengan $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ sehingga θ yang memenuhi adalah $-\frac{\pi}{3}$. Jadi dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\
\tan\theta &= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \\
\cot\theta &= \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3. Selesaikan
$$\int \frac{4x-1}{2x^3-x^2}\,dx$$

Solusi:
Tinjau bahwa $2x^3 - x^2 = x^2(2x-1)$ sehingga dekomposisi pecahannya adalah

$$\begin{aligned}\frac{4x-1}{2x^3-x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2x-1}\\ &= \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{2x-1}\\ &= \frac{(Ax+B)(2x-1)+Cx^2}{x^2(2x-1)}\\ &= \frac{2Ax^2+2Bx-Ax-B+Cx^2}{x^2(2x-1)}\\ &= \frac{(2A+C)x^2+(2B-A)x-B}{x^2(2x-1)}\end{aligned}$$

Dapat diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}2A+C &= 0\\ 2B-A &= 4\\ -B &= -1\end{aligned}$$

Kita dapatkan $A=-2, B=1, C=4$ sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-1}{2x^3-x^2}\,dx &= \int -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{2x-1}\\ &= -2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|2x-1| + C\end{aligned}$$

4. Selesaikan integral dari
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

Solusi:
Misalkan $e^{-t} = u$ sehingga $-e^{-t}\,dt = du$. Untuk $t \to -\infty$, maka $u \to +\infty$ dan untuk $t \to \infty$, maka $u \to 0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt &= \int_{+\infty}^{0} -\frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \lim_{a\to+\infty} \tan^{-1}(u)\Big|_0^a\\ &= \lim_{a\to+\infty} \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(0)\\ &= \lim_{a\to+\infty} \tan^{-1}(a) - 0\end{aligned}$$

Tinjau bahwa $\lim_{a\to+\infty} \tan^{-1}(a) = \frac{\pi}{2}$ sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

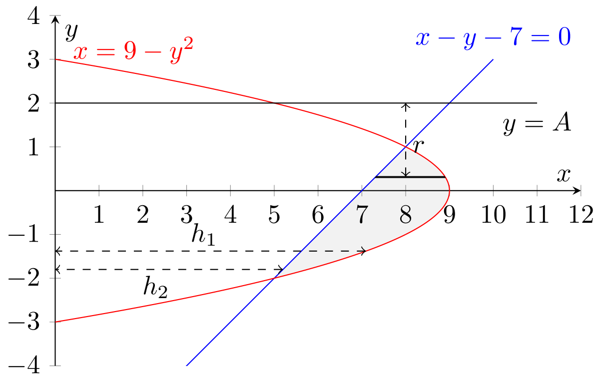
5. Dapatkan volume benda putar yang terjadi jika dataran yang dibatasi oleh kurva $x = 9 - y^2$ dan $x - y - 7 = 0$, diputar terhadap garis $y = A$, di mana A adalah digit terakhir NRP anda. Jika digit terakhir adalah 0 maka ganti dengan 10 (sertai dengan gambar)

Solusi:

Tinjau bahwa $x = y + 7$ sehingga titik potongnya adalah

$$\begin{aligned} y + 7 &= 9 - y^2 \\ y^2 + y - 2 &= 0 \\ (y+2)(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $y = -2$, maka $x = 5$, dan untuk $y = 1$, maka $x = 8$. Diperoleh titik potongnya adalah $(5, -2)$ dan $(8, 1)$. Berikut grafiknya



Perhatikan bahwa jika kita gunakan metode cakram, maka kita perlu membagi daerah integrasi menjadi dua bagian, yaitu untuk $5 \le x \le 8$ dan $8 \le x \le 9$, karena batas "atas" fungsinya berbeda. Oleh karena itu, gunakan metode cincin silinder supaya lebih mudah. Tinjau bahwa $1 \le A \le 10$, $A \in \mathbb{N}$, sehingga titik perpotongan "atas" kedua kurva berada pada garis $y = A$ atau di bawahnya, maka jari-jarinya $r = A - y$ dan tingginya $h = 9 - y^2 - (y+7) = -y^2 - y + 2$. Batasnya adalah dari $y = -2$ sampai $y = 1$

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b rh\, dy &= 2\pi \int_{-2}^{1} (A - y)(-y^2 - y + 2)\, dy \\ &= 2\pi \int_{-2}^{1} y^3 + (1-A)y^2 - (2+A)y + 2A\, dy \\ &= 2\pi \left[\frac{y^4}{4} + \frac{1-A}{3}y^3 - \frac{2+A}{2}y^2 + 2Ay\right]_{-2}^{1} \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1-A}{3} - \frac{2+A}{2} + 2A\right) - \left(4 - \frac{8(1-A)}{3} - 2(2+A) - 4A\right)\right] \\ &= \frac{18A+9}{2}\pi \end{aligned}$$