PERTEMUAN 5
ASISTENSI MATEMATIKA I
BAB 7.3 — 7.7

Ahmad Hisbu Zakiyudin

1. Diberikan turunan fungsi kontinu, yaitu $f'(x) = \dfrac{9-4x^2}{\sqrt[3]{x+1}}$, tentukan semua titik kritis dan tentukan apakah maksimum relatif, minimum relatif, atau bukan keduanya.

   Solusi:
   Perhatikan bahwa $f'(x) = \dfrac{(3-2x)(3+2x)}{\sqrt[3]{x+1}}$, titik kritis adalah pembuat nol pembilang dan penyebut, yaitu $x = -\dfrac{3}{2}; x = -1; x = \dfrac{3}{2}$.
   Apabila dicek, tanda $f'(x)$ berubah dari positif ke negatif di $x = -\dfrac{3}{2}$, dari negatif ke positif di $x = -1$, dan dari positif ke negatif di $x = \dfrac{3}{2}$. Dengan demikian, terdapat maksimum relatif pada $x = -\dfrac{3}{2}$ dan $x = \dfrac{3}{2}$ serta minimum relatif pada $x = -1$.

2. Tentukan nilai k sedemikian hingga $x^2 + \dfrac{k}{x}$ memiliki ekstrim relatif pada $x = 3$.
   Solusi:
   Tinjau $f'(x) = 2x - \dfrac{k}{x^2}$, karena ekstrim relatif di $x = 3$, maka $f'(x) = 0$ di titik tersebut, sehingga $2(3) - \dfrac{k}{9} = 0$. Jadi $k = 54$

3. Buatlah sketsa grafik fungsi rasional $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$, tunjukkan semua asimtot tegak, datar, dan miring.

   Solusi:

   (a) **Simetri**
   Pergantian x dengan $-x$ mengubah persamaan, sehingga tidak simetri dengan sumbu y

   (b) **Perpotongan dengan sumbu** x.
   Saat $y = 0$, diperoleh perpotongan dengan sumbu x di $x = -1$ dan $x = 3$

   (c) **Perpotongan dengan sumbu** y.
   Saat $x = 0$, diperoleh perpotongan dengan sumbu y di $y = -\dfrac{3}{2}$

   (d) **Asimtot tegak**.
   Saat penyebut bernilai 0, yaitu $x = -2$

   (e) **Asimtot datar**
   Tinjau bahwa derajat pembilang lebih dari derajat penyebut sehingga $f(x)$ tidak memiliki asimtot datar, tetapi memiliki asimtot miring

   (f) **Asimtot Miring**
   Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-2x-3}{x+2} &= \frac{x^2-2x+4x-4x-3-5+5}{x+2} \\
&= \frac{x^2+2x-4x-8+5}{x+2} \\
&= \frac{(x+2)(x-4)+5}{x+2} \\
&= x-4+\frac{5}{x+2}
\end{aligned}$$

   sehingga asimtot miringnya adalah garis $y = x - 4$

(g) **Turunan**

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{(2x-2)(x+2)-(1)(x^2-2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2x+4)(x+2)^2-2(x+2)(x^2+4x-1}{(x+2)^4} = \frac{10}{(x+2)^3}$$

(h) **Selang naik dan turun**

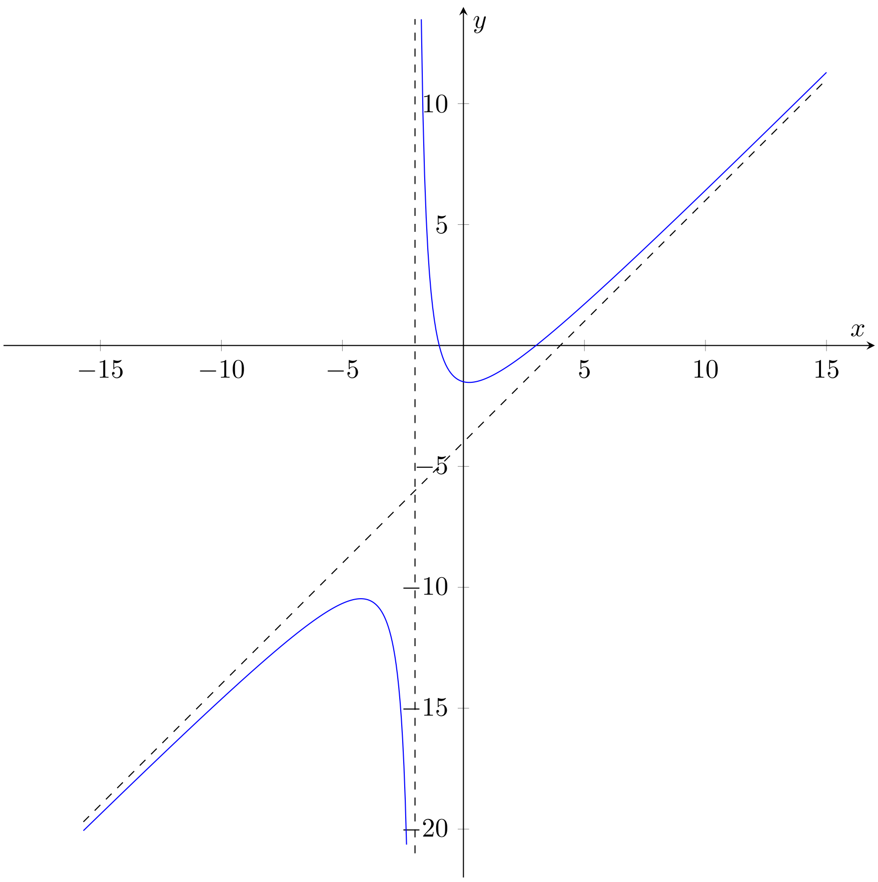
Titik stasioner diperoleh $x = -2-\sqrt{5}$ dan $x = -2+\sqrt{5}$, serta titik kritis lain yaitu $x = -2$

Tanda $f'(x)$ berubah dari positif ke negatif di $x = -2-\sqrt{5}$, sehingga maksimum relatif pada $x = -2-\sqrt{5}$. Kemudian, tanda $f'(x)$ berubah dari negatif ke positif di $x = -2+\sqrt{5}$, sehingga minimum relatif pada $x = -2+\sqrt{5}$.

(i) **Kecekungan**

Karena $f''(x) > 0$ untuk $x > -2$, maka grafik cekung ke atas, serta $f''(x) < 0$ untuk $x < -2$, maka grafik cekung ke bawah.

Dengan demikian grafiknya adalah



4. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = \cos(\sin x)$ pada $[0, \pi]$

   Solusi:

   Tinjau bahwa $f'(x) = -\sin(\sin x)\cos x$, maka titik stasionernya adalah ketika $f'(x) = 0$, yaitu di $\sin(\sin x) = 0$ atau $\cos x = 0$ sehingga $x = 0$ atau $x = \frac{\pi}{2}$. Cek nilai $f(x)$ pada titik stasioner dan batas domainnya

   $$\begin{aligned} f(0) &= \cos(\sin 0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \cos(1) \approx 0.5403 \\ f(\pi) &= \cos(\sin \pi) = 1 \end{aligned}$$

   Karena $\cos(1) < 1$, maka minimumnya adalah pada titik $\left(\frac{\pi}{2}, \cos(1)\right)$, serta maksimum pada $(0, 1)$ dan $(\pi, 1)$

5. Berapa kemiringan terkecil yang mungkin untuk garis singgung kurva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$.

   Solusi:

   Tinjau persamaan kemiringan garis singgungnya, yaitu

   $$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$$

   Selanjutnya, untuk mencari kemiringan terkecil, kita perlu mencari nilai minimum dari m. Titik stasioner dari m ketika $m' = 0$ yaitu $6x - 6 = 0$ atau $x = 1$. Perhatikan bahwa tanda m' di $x = 1$ berawal dari negatif ke positif, sehingga jelas titik stasioner $x = 1$ merupakan titik yang membuat m minimum. Jadi kemiringan terkecil garis singgungnya adalah $m = 3(1)^2 - 6(1) + 5 = 2$.

6. Buktikan bahwa jika $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai dua akar real yang berlainan, maka titik tengah antara dua akar ini adalah titik stasioner untuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   Solusi:

   Tinjau bahwa titik stasioner $f(x)$ adalah $f'(x) = 2ax + b = 0$ yaitu pada $x = -\frac{b}{2a}$. Berdasarkan Teorema Vieta, kita tahu jumlah akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $\frac{-b}{a}$. Misalkan kedua akar yang berbeda tersebut adalah $x_1 + x_2$ sehingga titik tengahnya adalah $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$. Dengan demikian terbukti.

7. Tentukan ukuran tabung dengan isi terbesar yang dapat dibuat dalam bola berjari-jari R.

   Solusi:

   Sketsa terlebih dahulu tabung di dalam bola.

   Misalkan jari-jari tabung adalah a, maka untuk mencari tingginya, kita dapat membuat proyeksi 2 dimensi untuk tabung dalam bola. Proyeksinya akan berbentuk seperti persegi panjang dalam lingkaran. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan pusat lingkaran adalah $(0, 0)$ dan jari-jarinya sama seperti jari-jari bola, yaitu R sehingga dapat diperoleh persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = R^2$. Selanjutnya, karena jari-jari tabung adalah a, maka $a^2 + y^2 = R^2$. Misalkan pula titik (a, b) melewati lingkaran, sehingga tinggi tabungnya adalah $2b$. Jadi kita punya $a^2 + b^2 = R^2$ atau $b = \sqrt{R^2 - a^2}$. Oleh karena itu diperoleh volume tabung

$$V = \pi a^2(2b) = 2\pi a^2\sqrt{R^2 - a^2} = 2\pi\sqrt{a^4R^2 - a^6}$$

Volume terbesar atau maksimum ketika $\dfrac{dV}{da} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dV}{da} &= \frac{2\pi}{2\sqrt{a^4R^2 - a^6}} \times 4a^3R^2 - 6a^5\\ 0 &= \frac{\pi a^3(4R^2 - 6a^2)}{\sqrt{a^4R^2 - a^6}}\\ 0 &= \frac{\pi a^3(2R - a\sqrt{6})(2R + a\sqrt{6})}{\sqrt{a^4R^2 - a^6}}\end{aligned}$$

Karena $a > 0$, diperoleh $a = \dfrac{2R}{\sqrt{6}} = \dfrac{R}{3}\sqrt{6}$ sehingga

$$V = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^4 R^2 - \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^6} = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$$

8. Tabung tertutup mempunyai isi V kubik satuan volume. Tunjukkan bahwa luas permukaan minimum dicapai ketika tinggi tabung sama dengan diameter dasar.

Solusi:
Perhatikan bahwa rumus volume tabung dengan tinggi t dan jari-jari r adalah $V = \pi r^2 t$ sehingga $t = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Selanjutnya, tinjau bahwa luas permukaan tabung tertutup adalah $L = 2(\pi r^2) + 2\pi rt = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$. Luas maksimum ketika $\dfrac{dL}{dr} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} &= 0\\ V &= 2\pi r^3\\ \pi r^2 t &= 2\pi r^3\\ t &= 2r = d\end{aligned}$$

Terbukti bahwa luas permukaan minimum dicapai ketika tinggi tabung sama dengan diameter dasar.

9. Trapesium dilukiskan dalam setengah lingkaran berjari-jari 2 sehingga satu sisi berada pada diameter. Tentukan luas maksimum trapesium.

Solusi:
Tanpa mengurangi keumuman, misalkan lingkaran dengan jari-jari 2 tersebut berpusat di $(0, 0)$ sehingga persamaannya adalah $x^2 + y^2 = 4$. Kita tahu salah satu sisi yang sejajar pada trapesium tersebut pada diameternya sehingga panjangnya 4, dan misalkan panjang sisi sejajar yang lain adalah $2a$, serta tingginya adalah b, sehingga (a, b) merupakan titik pada lingkaran tersebut. Jadi diperoleh persamaan luas trapesiumnya adalah $L = \dfrac{2a + 4}{2}b = (a + 2)b$. Karena (a, b) pada lingkaran, maka $b = \sqrt{4 - a^2}$ sehingga $L = (a + 2)\sqrt{4 - a^2}$.

Luasnya akan maksimum ketika $\dfrac{dL}{da} = 0$ yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dL}{da} = \sqrt{4-a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{4-a^2}}(a+2) &= 0\\ \frac{4-a^2-a^2-2}{\sqrt{4-a^2}} &= 0\\ 2(1-a)(1+a) &= 0\end{aligned}$$

Karena $a > 0$, maka $a = 1$, sehingga luas maksimummnya adalah $L = (1+2)\sqrt{4-1^2} = 3\sqrt{3}$

10. Tentukan semua titik pada kurva $x^2 - y^2 = 1$ terdekat ke $(0, 2)$

Solusi:

Tinjau persamaan jarak titik x ke 0 dan titik y ke 2 yaitu $P = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$. Diketahui pula bahwa $x^2 - y^2 = 1$ sehingga $P = \sqrt{1 + y^2 + (y-2)^2}$. Untuk mencari jarak terdekat, kita gunakan turunan, dan supaya mudah dapat dicari turunan dari $P^2 = 2y^2 - 4y + 5$ terhadap y yang bernilai 0, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dP^2}{dy} &= 4y - 4 = 0\\ y &= 1\end{aligned}$$

Karena $y = 1$, maka $x = \pm\sqrt{2}$. Dengan demikian, titik pada kurva $x^2 - y^2 = 1$ dengan jarak terdekat ke $(0, 2)$ adalah titik $(-\sqrt{2}, 1)$ dan $(\sqrt{2}, 1)$ dengan jarak $P = \sqrt{2-4+5} = \sqrt{3}$.

11. Tunjukkan bahwa hipotesa Teorema Rolle terpenuhi pada selang yang diberikan dan tentukan semua nilai c yang memenuhi dari $f(x) = x^2 - 6x + 8; [2, 4]$

Solusi:

Karena $f(x)$ polinomial, maka $f(x)$ terdiferensial di mana-mana. Mudah dicek bahwa $f(4) = f(2) = 0$. Berdasarkan hipotesa Teorema Rolle, terdapat sedikitnya satu titik c dalam (a, b) yang memenuhi $f'(c) = 0$. Tinjau bahwa $f'(c) = 2c - 6 = 0$ sehingga $c = 3 \in (2, 4)$. Jadi hipotesa Teorema Rolle terpenuhi.

12. Diberikan $f(x) = \tan x$

   (a) Tunjukkan bahwa tidak ada titik c dalam $(0, \pi)$ sedemikian hingga $f'(c) = 0$, meskipun $f(0) = f(\pi) = 0$

   (b) Terangkan mengapa hasil pada bagian (a) tidak melanggar Teorema Rolle

Solusi:

   (a) Tinjau bahwa $f'(c) = \sec^2 c = \dfrac{1}{\sin^2 c}$, jelas bahwa tidak ada c yang memenuhi.

   (b) Hasil bagian (a) tidak melanggar Teorema Rolle karena $f(x)$ tidak terdiferensial pada setiap titik di $(0, \pi)$ yaitu pada $x = \dfrac{\pi}{2}$, serta tidak kontinu pada titik tersebut.

13. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan bahwa $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

    Solusi:

    Misalkan $f(p) = \sin p$, maka $f(p)$ terdiferensial pada (x, y) dan kontinu pula pada $[x, y]$ sehingga jika c pada (x, y) dapat kita terapkan Teorema Nilai Rata-rata

    $$f'(c) = \cos c = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

    Tinjau bahwa $-1 \leq \cos c \leq 1$, dengan kata lain $|\cos c| \leq 1$, maka kita peroleh

    $$|\cos c| = \left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leq 1$$
    $$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

14. Jika $0 < x < y$, maka $\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(x + y)$

    Solusi:

    Misalkan $f(p) = \sqrt{p}$, maka $f(p)$ terdiferensial pada (x, y) dan kontinu pula pada $[x, y]$ sehingga jika c pada (x, y) dapat kita terapkan Teorema Nilai Rata-rata

    $$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x}$$

    Tinjau bahwa $0 < x < c < y$ sehingga $\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{c}}$ dan diperoleh

    $$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x}$$
    $$y - x > 2\sqrt{xy} - 2x$$
    $$y + x > 2\sqrt{xy}$$
    $$\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(x + y)$$

15. Jika f dan g fungsi yang mempunyai $f'(x) = g(x)$ dan $g'(x) = f(x)$ untuk semua x, maka $f^2(x) - g^2(x)$ konstan

    Solusi:

    Misalkan $F(x) = f^2(x) - g^2(x)$ sehingga $F(x)$ dapat diturunankan di (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$. Kemudian diperoleh $F'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$. Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata, maka kita punya

    $$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = 0$$
    $$F(b) = F(a)$$

    Karena $F(b) = F(a)$ untuk setiap a, b maka $F(x)$ konstan.