PERTEMUAN 6
ASISTENSI MATEMATIKA I
PEMBAHASAN SOAL EAS 2020

Ahmad Hisbu Zakiyudin

Soal Latihan 1.1

12a) Dapatkan dy/dx dengan diferensiasi logaritmik dari $y = x^{\cos 2x}$

17) Sketsalah grafik $y = x^{1/\ln x}$

21) Misalkan $f(x) = e^{|x|}$

(a) Apakah f kontinu di $x = 0$?

(b) Apakah f dapat diturunkan di $x = 0$

(c) Sketsalah grafik dari f

Jawab: Uraikan dulu menjadi bentuk $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$

(a) i. $f(0) = e^0 = 1$ ada

ii. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} = e^0 = 1$ dan $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$ sehingga $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

iii. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

Jadi $f(x)$ kontinu di $x = 0$

(b) Tinjau bahwa $f'_-(x) = -e^{-x}$ dan $f'_+(x) = e^x$ sehingga $f'_-(x) \neq f'_+(x)$. Jadi $f(x)$ tidak dapat diturunkan di $x = 0$

25) Satu dari fungsi dasar pada Matematika Statistika adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right]$$

di mana μ dan σ adalah konstanta sehingga $\sigma > 0$ dan $-\infty < \mu < +\infty$

(a) Tentukan titik belok dan titik ekstrim relatifnya

(b) Dapatkan $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ dan $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(c) Sketsalah grafik f

Jawab: Tinjau

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right] \times \left(-\frac{2}{2\sigma}(\frac{x-\mu}{\sigma})\right) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right]$$

Cari $f''(x)$ dengan aturan perkalian

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right] - \frac{x-\mu}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right] \times \left(-\frac{2}{2\sigma}(\frac{x-\mu}{\sigma})\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right] + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right] \end{aligned}$$

Soal Latihan 1.2

1. Dapatkan $f^{-1}(x)$ dari

    b) $f(x) = 7x - 6$

    d) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

    f) $f(x) = e^{1/x}$

    h) $f(x) = \begin{cases} 2x, x \leq 0 \\ x^2, x > 0 \end{cases}$

2. Gunakan Persamaan (1.31) untuk mendapatkan turunan f^{-1}, dan cek kembali kerjaan Anda dengan diferensiasi implisit

    b) $f(x) = 1/x^2, x > 0$

    d) $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$

9d) Berapakah nilai x sehingga berlaku $\tan(\tan^{-1} x) = x$

15c) Buatlah sketsa grafik dari $y = \cos^{-1} \frac{1}{3}x$

27a) Buktikan $\sin^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

28) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$

    b) $y = \cos^{-1}(2x+1)$

    e) $y = \sec^{-1}(x^7)$

    h) $y = \dfrac{1}{tan^{-1}x}$

    k) $y = \ln(\cos^{-1} x)$

    n) $y = x^2(sin^{-1}x)^3$

    q) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

    t) $\tan^{-1}(xe^{2x})$

29) Hitung integral berikut:

    b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

    e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

    h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

Soal Latihan 1.3

2a) Buktikan kesamaan $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$

4) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$

(a) $y = \sinh(4x - 8)$

d) $y = \operatorname{sech}(e^{2x})$

h) $y = \sinh^3(2x)$

5) Hitung integral dari

(a) $\displaystyle\int \sinh^6 x \cosh x \, dx$

d) $\displaystyle\int \coth^2 x \operatorname{csch}^2 x \, dx$

g) $\displaystyle\int \tanh^6 x \operatorname{sech}^3 x \, dx$

16) (a) Buktikan $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$

(b) Gunakan bagian (a) untuk mendapatkan turunan dari $\cosh^{-1} x$

21) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari persamaan berikut

i) $y = \sinh^{-1}(1/x)$

j) $\cosh^{-1}(\cosh x)$

k) $y = \ln(\cosh^{-1} x)$

l) $y = \sqrt{\coth^{-1} x}$

m) $y = e^x \operatorname{sech}^{-1} x$

n) $y = x^2(\sinh^{-1} x)^3$

o) $y = \sinh^{-1}(\tanh x)$

p) $y = \cosh^{-1}(\sinh^{-1} x)$

q) $y = \tanh^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Soal Tambahan

Misal $F(x) = f(2g(x))$ dengan $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ untuk $0 \le x \le 2$, dan $g(x) = f^{-1}(x)$. Dapatkan $F'(3)$

Kita punya $F'(x) = 2f'(2g(x))g'(x)$, selanjutnya akan kita cari $g'(x) = (f^{-1})'(x)$.

Misalkan $y = f^{-1}(x)$, maka

$$x = f(y) = y^4 + y^3 + 1$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dy} = 4y^3 + 3y^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{4y^3 + 3y^2}$$

Perhatikan bahwa $g(3) = f^{-1}(3)$, dan ingat jika $y = f(x)$ maka $x = f^{-1}(y)$ sehingga $g(3)$ merupakan penyelesaian dari $x^4 + x^3 + 1 = 3$.

Mudah terlihat bahwa $x = 1$ memenuhi persamaan tersebut sehingga $g(3) = 1$.

Ingat bahwa $g(x) = f^{-1}(x) = y$ sehingga $y = g(3) = 1$ dan diperoleh

$$g'(3) = (f^{-1})'(3) = \frac{1}{4(1)^3 + 3(1)^2} = \frac{1}{7}$$

Substitusi semua yang telah diperoleh maka

$$F'(3) = 2f'(2g(3))g'(3) = \frac{2f'(2)}{7}$$

Dapat kita tentukan bahwa $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$ sehingga $f'(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 = 44$ dan

$$F'(3) = \frac{2 \times 44}{7} = \frac{88}{7}$$