PEMBAHASAN SOAL EAS MATEMATIKA I TAHUN 2020/2021

Ahmad Hisbu Zakiyudin

SOAL SESI 1

1. Diberikan $y = f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$
   (a) Dapatkan $y' = f'(x)$
   (b) Jika (x_0, y_0) titik pada kurva f dimana garis singgung dari f tegak lurus dengan garis $y = x$, maka tentukan titik (x_0, y_0) dan persamaan garis singgung di titik tersebut.

Solusi:

(a) Dapat dengan mudah diperoleh $y' = f'(x) = \dfrac{(x+2)(1)-(x+3)(1)}{(x+2)^2} = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$

(b) Ingat bahwa gradien garis singgung kurva pada suatu titik pada kurva adalah nilai turunan pertama pada titik tersebut. Tinjau bahwa gradien garis singgung yang dimaksud tegak lurus dengan garis $y = x$ sehingga gradien garis singgungnya adalah -1. Selanjutnya kita cari nilai x yang memenuhi $f'(x) = -1$

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} &= -1 \\ (x+2)^2 &= 1 \\ |x+2| &= 1 \end{aligned}$$

sehingga terdapat dua titik x_0 yang memenuhi, yaitu $x_0 = -3$ dan $x_0 = -1$.

i. Untuk $x_0 = -3$ kita peroleh $y_0 = f(x_0) = f(-3) = 0$ sehingga persamaan garis singgung di titik tersebut adalah

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y &= -1(x-(-3)) \\ y &= -x-3 \\ x+y+3 &= 0 \end{aligned}$$

ii. Untuk $x_0 = -1$, kita peroleh $y_0 = f(x_0) = f(-1) = 2$ sehingga persamaan garis singgung di titik tersebut adalah

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 2 &= -1(x-(-1)) \\ y &= -x+1 \\ x+y-1 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi terdapat dua titik (x_0, y_0) pada kurva $f(x)$ yang garis singgungnya tegak lurus dengan garis $y = x$, yaitu titik $(-3, 0)$ dengan garis singgung $x + y + 3 = 0$ dan titik $(-1, 2)$ dengan garis singgung $x + y - 1 = 0$

2. Diketahui $f'(x) = \sqrt{3x+4}$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Didefinisikan $F(x) = f(g(x))$, dapatkan $F'(x)$
   Solusi:
   Untuk mendapatkan $F'(x)$ ingat kembali aturan rantai

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = g'(x)\sqrt{3g(x)+4} = 2x\sqrt{3x^2+1}$$

3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \begin{cases} 4x-2, & x < 1 \\ (x-2)(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$ pada $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$
   Solusi:
   Akan kita cari masing-masing nilai maksimum dan minimum $f(x)$ pada selang $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ dan $\left[1, \frac{7}{2}\right]$

   i. Untuk selang $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, diperoleh $f(x) = 4x - 2$ dan $f'(x) = 4$, sehingga $f'(x) > 0$ untuk setiap x pada selang tersebut, serta $f(x)$ tidak memiliki titik stasioner. Oleh karena itu, dapat dicek pada batas selangnya, yaitu $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ adalah nilai minimum. Sedangkan nilai maksimumnya tidak ada, tetapi mendekati $\lim\limits_{x \to 1^-} 4x - 2 = 2$.

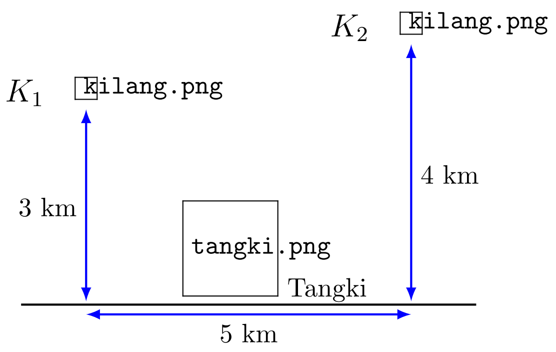
   ii. Untuk selang $\left[1, \frac{7}{2}\right]$, diperoleh $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ dan $f'(x) = 2x - 5$. Dapat diperoleh pula $f''(x) = 2$ sehingga $f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0$, artinya $x = \dfrac{5}{2}$ merupakan nilai minimum relatif. Selanjutnya dapat dicek nilai $f(x)$ pada batas selang dan titik stasioner

$$\begin{aligned} f(1) &= (1-2)(1-3) = 2 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2} - 2\right)\left(\frac{5}{2} - 3\right) = -\frac{1}{4} \\ f\left(\frac{7}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2} - 2\right)\left(\frac{7}{2} - 3\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

   sehingga nilai minimum pada selang $\left[1, \frac{7}{2}\right]$ adalah $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ dan maksimum adalah $f(1) = 2$

   Apabila kedua hasil tersebut digabungkan, dapat diperoleh nilai maksimum dan minimum global berturut-turut $f(1) = 2$ dan $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Selain itu, diperoleh pula maksimum relatif dan minimum relatif berturut-turut $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{4}$ dan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

4. Terdapat dua Kilang minyak lepas pantai, Kilang 1 berjarak 3 km dan Kilang 2 berjarak 4 km dari daratan, jarak Kilang 1 dan Kilang 2 adalah 5 km. Akan dibangun Tangki untuk menampung hasil kilang. Tangki terletak di daratan antara Kilang 1 dan Kilang 2 (lihat gambar). Tentukan letak Tangki dengan jarak minimum dari Kilang 1 dan Kilang 2.



Solusi:
Misalkan terdapat P_1 dan P_2 di daratan sehingga sehingga $P_1K_1 = 3$ km dan $P_2K_2 = 4$ km merupakan jarak antara Kilang 1 dan Kilang 2 ke daratan, akibatnya $P_1P_2 = 5$ km. Selanjutnya misalkan Tangki berada di titik T dan $P_1T = x$, sehingga $P_2T = 5 - x$. Oleh karena itu, dapat diperoleh jarak antara Kilang 1 dengan Tangki adalah $K_1T = \sqrt{K_1P_1 + P_1T^2} = \sqrt{x^2+9}$, serta jarak antara Kilang 2 dengan Tangki adalah $K_2T = \sqrt{K_2P_2 + P_2T} = \sqrt{16+(5-x)^2}$. Karena kita perlu mencari jarak minimum K_1T dan K_2T sekaligus, maka jika kita jumlahkan jarak keduanya, pasti minimum juga. Misalkan jumlah jarak keduanya adalah $y = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{16+(5-x)^2}$, maka minimumnya adalah titik x saat $\dfrac{dy}{dx} = 0$ yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} + \frac{2(5-x)(-1)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}} &= 0 \\
\frac{x\sqrt{x^2-10x+41} + (x-5)\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2-10x+41}} &= 0 \\
x\sqrt{x^2-10x+41} + (x-5)\sqrt{x^2+9} &= 0 \\
x\sqrt{x^2-10x+41} &= (5-x)\sqrt{x^2+9} \\
x^2(x^2-10x+41) &= (x^2-10x+25)(x^2+9) \\
x^4 - 10x^3 + 41x^2 &= x^4 + 9x^2 - 10x^3 - 90x + 25x^2 + 225 \\
7x^2 + 90x - 225 &= 0 \\
(x+15)(7x-15) &= 0
\end{aligned}$$

Karena $0 < x < 5$, maka $x = \dfrac{15}{7}$. Jadi jarak minimum Kilang 1 dengan Tangki adalah

$$K_1T = \sqrt{9+x^2} = \sqrt{9 + \left(\frac{15}{7}\right)^2} = \frac{3}{7}\sqrt{74} \text{ km}$$

serta jarak minimum Kilang 2 dengan Tangki adalah

$$K_2T = \sqrt{16+(5-x)^2} = \sqrt{16 + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2} = \frac{4}{7}\sqrt{74} \text{ km}$$

5. Tentukan nilai integral berikut

(a) $\displaystyle\int_0^2 |3x-2|\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$ jika $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 3$

Solusi:

(a) Tinjau bahwa $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2, & x \geq \frac{2}{3} \\ 2-3x, & x < \frac{2}{3} \end{cases}$ sehingga

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |3x-2|\,dx &= \int_0^{\frac{2}{3}} (2-3x)\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 (3x-2)\,dx \\
&= \left[2x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{\frac{2}{3}}^2 \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

(b) Misalkan $u = \frac{1}{x}$ sehingga $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$.
Batas atas integral menjadi $u = \frac{1}{1} = 1$ dan batas bawahnya menjadi $u = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Pada soal diketahui bahwa $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ sehingga

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= \int_2^1 -f(u)\,du \\
&= -\int_2^1 f(u)\,du \\
&= \int_1^2 f(u)\,du \\
&= 3
\end{aligned}$$

SOAL SESI 2

1. Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari $x^3y^2 - 3xy^2 + x + y\sin x = 5$

   Solusi:

   Ingat kembali aturan perkalian dan aturan rantai pada turunan, serta sifat-sifat turunan dan turunan fungsi implisit. Turunkan kedua ruas terhadap x, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^3y^2 - 3xy^2 + x + y\sin x] &= \frac{d}{dx}[5] \\
\frac{d}{dx}[x^3y^2] - \frac{d}{dx}[3xy^2] + \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[y\sin x] &= \frac{d}{dx}[5] \\
3x^2y^2 + 2x^3y\frac{dy}{dx} - \left(3y^2 + 6xy\frac{dy}{dx}\right) + 1 + \sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x &= 0 \\
3x^2y^2 - 3y^2 + y\cos x + 1 + \left(2x^3y - 6xy + \sin x\right)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\left(2x^3y - 6xy + \sin x\right)\frac{dy}{dx} &= 3y^2 - 3x^2y^2 - y\cos x - 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{3y^2(1-x^2) - y\cos x - 1}{2xy(x^2-3) + \sin x}
\end{aligned}$$

2. Tentukan semua titik pada kurva $y^2 - x^2 + 5 = 0$ yang terdekat ke titik $(0, 4)$

   Solusi:

   Tinjau persamaan jarak titik x ke 0 dan titik y ke 4 yaitu $P = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$. Diketahui pula bahwa $y^2 - x^2 + 5 = 0$ sehingga $P = \sqrt{y^2 + 5 + (y-4)^2}$. Untuk mencari jarak terdekat, kita gunakan turunan, dan supaya mudah dapat dicari turunan dari $P^2 = 2y^2 - 8y + 21$ terhadap y yang bernilai 0, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dP^2}{dy} &= 4y - 8 = 0 \\
y &= 2
\end{aligned}$$

   Karena $y = 2$, maka $x = \pm 3$. Dengan demikian, titik pada kurva $y^2 - x^2 + 5 = 0$ dengan jarak terdekat ke $(0, 4)$ adalah titik $(-3, 2)$ dan $(3, 2)$ dengan jarak $P = \sqrt{3^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13}$

3. Diketahui $f(x) = 6x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}}$

   (a) Dengan uji turunan pertama, periksa titik kritisnya dan jenis maksimum-minimumnya

   (b) Dengan uji turunan kedua, periksa titik beloknya

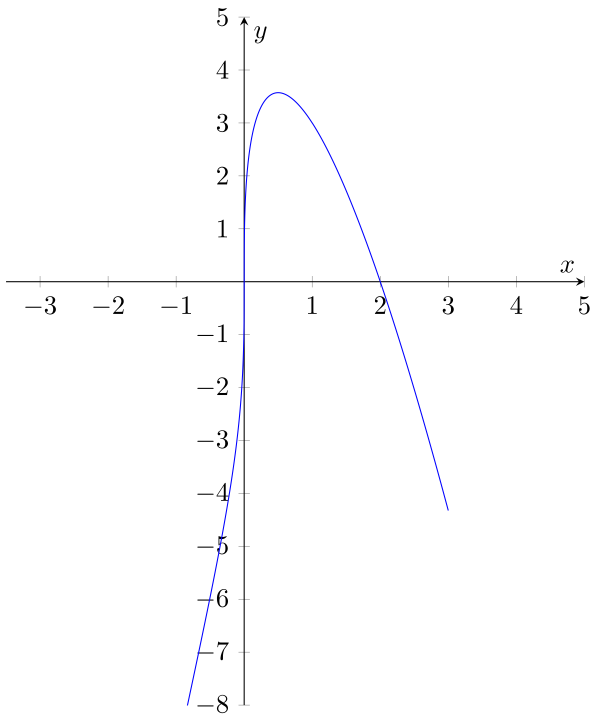
   (c) Sketsa grafik fungsi tersebut.

   Solusi:

   (a) Tinjau $f'(x) = 2x^{-\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - 4\sqrt[3]{x} = \dfrac{2-4x}{\sqrt[3]{x^2}}$. Selanjutnya, untuk menentukan titik kritis, yaitu nilai x sehingga pembilang bernilai 0 atau penyebut bernilai 0. Saat pembilang bernilai nol, yaitu titik stasioner adalah $x = \dfrac{1}{2}$. Sedangkan saat penyebut bernilai 0, yaitu ketika $x = 0$ adalah titik singular. Perhatikan bahwa tanda $f'(x)$ berubah dari positif ke negatif di $x = \dfrac{1}{2}$ dan hanya titik tersebut yang merupakan titik stasioner, sehingga $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{2\sqrt[3]{2}}$ adalah maksimum global.

(b) Untuk mendapatkan titik belok, tinjau $f''(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{1}{x}+1\right)$. Dapat dengan mudah diperoleh bahwa $x = 0$ dan $x = -1$ merupakan titik kritis dari $f'(x)$. Perhatikan bahwa $f''(x) < 0$ pada selang $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ sehingga $f(x)$ cekung ke bawah pada selang tersebut, serta $f''(x) > 0$ pada selang $(-1, 0)$ sehingga $f(x)$ cekung ke atas pada selang tersebut. Karena terjadi perubahan kecekungan pada $x = -1$ dan $x = 0$, maka titik $(-1, f(-1)) = (-1, -9)$ dan titik $(0, f(0)) = (0, 0)$ merupakan titik belok kurva $f(x)$.

(c) Sebelum menggambar sketsa grafik, cek titik potong dengan sumbu$-x$ dan sumbu$-y$. Titik potong dengan sumbu$-x$ saat $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}}(2 - x) = 0$, yaitu pada titik $x = 0$ dan $x = 2$. Titik potong dengan sumbu$-y$ saat $x = 0$ yaitu titik $(0, 0)$. Dapat diperoleh sketsa grafiknya adalah



4. Diketahui $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$. Tentukan selang di mana $f(x)$

(a) Naik

(b) Turun

(c) Cekung ke bawah

(d) Cekung ke atas

(e) Tentukan nilai x untuk semua titik belok

Solusi:

Tinjau $f'(x) = \frac{x^2 + 2 - x(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x^2+2)^2}$, maka $f'(x) = 0$ ketika $x = -\sqrt{2}$ dan $x = \sqrt{2}$. Dapat diperoleh $f'(x) < 0$ pada selang $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, serta $f'(x) > 0$

pada selang $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Selanjutnya tinjau

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+2)^2 - (2-x^2)(2(x^2+2)(2x))}{(x^2+2)^4} = \frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})}{(x^2+2)^3}$$

. Dapat diperoleh $f''(x) < 0$ pada selang $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$ dan $f''(x) > 0$ pada selang $(-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$

(a) Karena $f(x)$ kontinu, maka $f(x)$ naik pada selang $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(b) Karena $f(x)$ kontinu, maka $f(x)$ turun pada selang $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

(c) $f(x)$ cekung ke bawah saat $f''(x) < 0$, yaitu pada selang $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (0, \sqrt{6})$

(d) $f(x)$ cekung ke atas saat $f''(x) > 0$, yaitu pada selang $(-\sqrt{6}, 0) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$

(e) Titik belok yaitu titik saat $f(x)$ berubah kecekungannya, yaitu saat $f''(x) = 0$. Kita peroleh titik beloknya adalah $\left(-\sqrt{6}, \frac{-\sqrt{6}}{8}\right)$, $(0, 0)$, serta $\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$

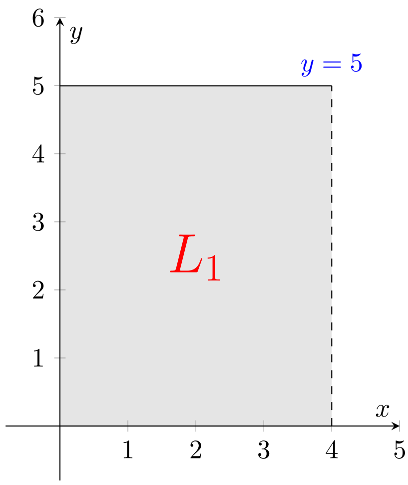
5. Dengan menggunakan rumus luas dari geometri bidang, hitunglah:

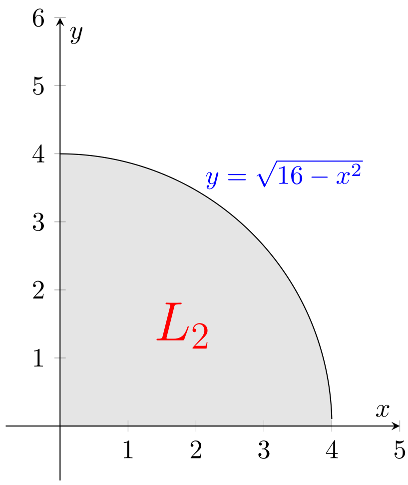
(a) $\displaystyle\int_0^4 5 - \sqrt{16 - x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int 5 + \sqrt{8x - x^2}\, dx$

Solusi:

(a) Dengan sifat integral, kita punya $\displaystyle\int_0^4 5 - \sqrt{16-x^2}\, dx = \int_0^4 5\, dx - \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$. Integral tersebut, dapat diinterpretasikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = 5$ dikurangi dengan luas daerah di bawah kurva $y = \sqrt{16 - x^2}$ dari 0 sampai 4. Tinjau bahwa $y = \sqrt{16 - x^2}$ merupakan setengah lingkaran pada sumbu$-y$ positif dengan pusat $(0, 0)$ dan jari-jari 4. Oleh karena itu, jika kita gambar daerahnya adalah

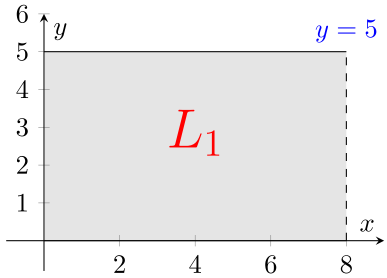


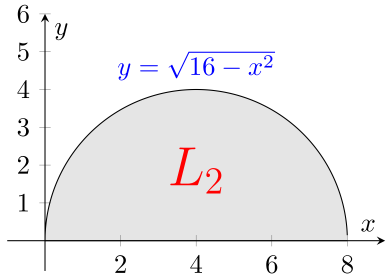


Mudah terlihat bahwa L_1 merupakan persegi panjang dengan panjang 5 dan lebar 4 sehingga $L_1 = 5 \times 4 = 20$ dan L_2 merupakan seperempat lingkaran dengan jari-jari 4 sehingga $L_2 = \frac{1}{4}\pi(4)^2 = 4\pi$. Dapat diperoleh hasil integralnya adalah $L_1 - L_2 = 20 - 4\pi$.

(b) Dengan sifat integral, kita punya $\displaystyle\int 5 + \sqrt{8x - x^2}\, dx = \int 5\, dx + \int \sqrt{16 - (x-4)^2}\, dx$. Integral tersebut, dapat diinterpretasikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = 5$

ditambah dengan luas daerah di bawah kurva $y = \sqrt{16-(x-4)^2}$. Tinjau bahwa $y = \sqrt{16-(x-4)^2}$ merupakan setengah lingkaran pada sumbu$-y$ positif dengan pusat (4,0) dan jari-jari 4. Seharusnya, integral ini memiliki batas atas dan batas bawah, karena tidak diketahui dari soal, dapat diasumsikan batas bawah adalah 0 dan batas atasnya adalah 8, sehingga jika kita gambar daerahnya adalah





Mudah terlihat bahwa L_1 merupakan persegi panjang dengan panjang 8 dan lebar 5 sehingga $L_1 = 8 \times 5 = 40$ dan L_2 merupakan setengah lingkaran dengan jari-jari 4 sehingga $L_2 = \frac{1}{2}\pi(4)^2 = 8\pi$. Dapat diperoleh hasil integralnya adalah $L_1 + L_2 = 40 + 8\pi$.

SOAL SESI 3

1. Diberikan fungsi sepotong-sepotong: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1; & x \geq 2 \\ x^2 + 1; & x < 2 \end{cases}$

   (a) Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di $x = 2$

   (b) Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel (dapat diturunkan) di $x = 2$

   (c) Tentukan $f'(x)$

   (d) Sketsa grafik $f(x)$ dan $f'(x)$

   Solusi:

   (a) $f(x)$ kontinu di titik $x = c$ jika dan hanya jika memenuhi tiga syarat, yaitu

   i. $f(c)$ ada, yaitu $f(2) = 3(2) - 1 = 5$

   ii. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada nilainya.
   Tinjau $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 + 1 = 5$ dan $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3x - 1 = 5$ sehingga $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$

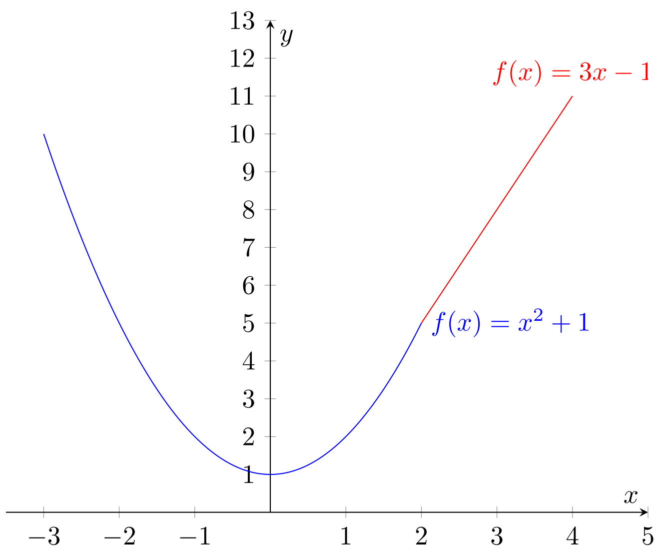
   iii. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, yaitu $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$

   Jadi $f(x)$ kontinu di $x = 2$

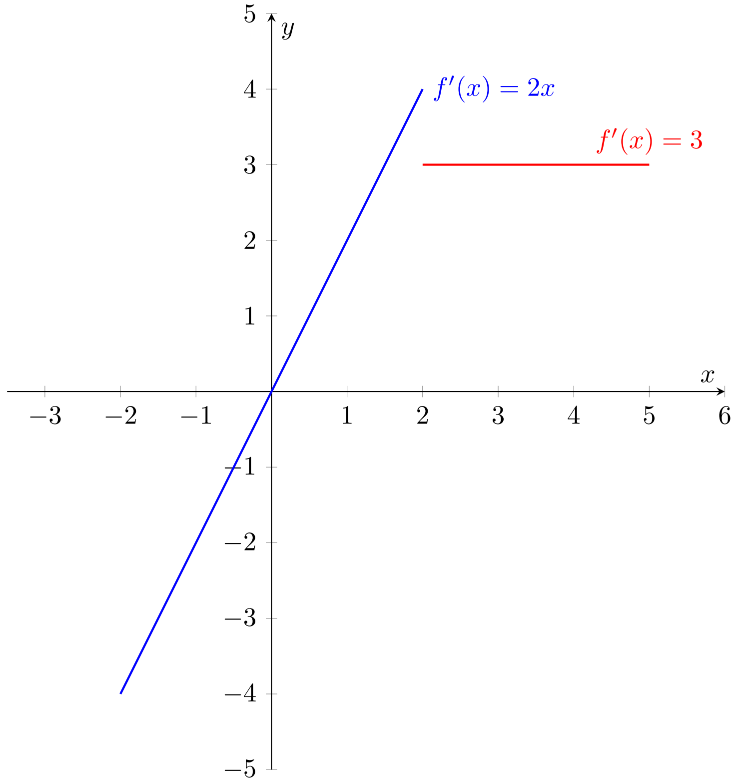
   (b) Dapat diturunkan di $x = c$ jika $f'_-(c) = f'_+(c)$
   Tinjau $f'_-(2) = 2(2) = 4$ dan $f'_+(2) = 3$, sehingga $f(x)$ tidak dapat diturunkan di $x = 2$

   (c) Karena $f(x)$ tidak dapat diturunkan di $x = 2$, maka $f(x)$ kita bagi menjadi dua selang yaitu untuk $x < 2$ dan untuk $x > 2$. Untuk $x < 2$ diperoleh $f'(x) = 2x$ sedangkan untuk $x > 2$ diperoleh $f'(x) = 3$, sehingga $f'(x) = \begin{cases} 3; & x > 2 \\ 2x; & x < 2 \end{cases}$

   (d) Tinjau bahwa $f(x)$ untuk $x < 2$ merupakan fungsi kuadrat yang digeser 1 satuan ke atas dan untuk $x \geq 2$ merupakan fungsi linear dengan gradien 3 dan digeser ke bawah sebanyak 1 satuan sehingga grafik fungsi $f(x)$ adalah



Tinjau pula bahwa $f'(x)$ untuk $x < 2$ merupakan fungsi linear dengan gradien 2 dan untuk $x > 2$ merupakan fungsi konstan, sehingga grafiknya adalah



2. Diberikan hiperbola E dengan persamaan $xy = \sqrt{2}$ dan hiperbola F dengan persamaan $x^2 - y^2 = 1$. Jika P dan Q adalah titik potong kedua kurva tersebut, serta g_1 berturut-turut adalah garis singgung hiperbola F dan g_2 adalah garis singgung hiperbola E di titik P dan di titik Q

   (a) Dapatkan koordinat titik potong P dan Q

   (b) Bagaimana kedudukan kedua garis singgung tersebut, apakah sejajar atau tegak lurus. Buktikan.

   Solusi:

   (a) Dari $xy = \sqrt{2}$, maka $y = \dfrac{\sqrt{2}}{x}$, sehingga

$$\begin{aligned}
x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2 &= 1 \\
\frac{x^4 - 2}{x^2} &= 1 \\
\frac{x^4 - x^2 - 2}{x^2} &= 0 \\
\frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)}{x^2} &= 0
\end{aligned}$$

   Diperoleh titik potong kedua kurva tersebut adalah saat $x = -\sqrt{2}$ dan $x = \sqrt{2}$, yaitu $P(-\sqrt{2}, -1)$ dan $Q(\sqrt{2}, 1)$

(b) Untuk menentukan kedudukan kedua garis singgung, cukup dicek gradiennya. Untuk gradien garis singgung hiperbola F pada titik $P(-\sqrt{2}, -1)$, cek nilai $\frac{dy}{dx}$ saat titik P, yaitu

$$\begin{aligned} 2x - 2y\frac{dy}{dx} &= \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \\ m_{g_1} &= \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Untuk gradien garis singgung hiperbola E pada titik $Q(\sqrt{2}, 1)$, cek nilai $\frac{dy}{dx}$ saat titik Q, yaitu

$$\begin{aligned} y + x\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\ m_{g_2} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $m_{g_1} m_{g_2} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, artinya kedua garis singgung tersebut tegak lurus.

3. Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{5x}{x+2}$

(a) Dapatkan semua asimtotnya

(b) Dapatkan titik kritis, titik belok jika ada.

(c) Sketsalah grafik fungsi tersebut

Solusi:

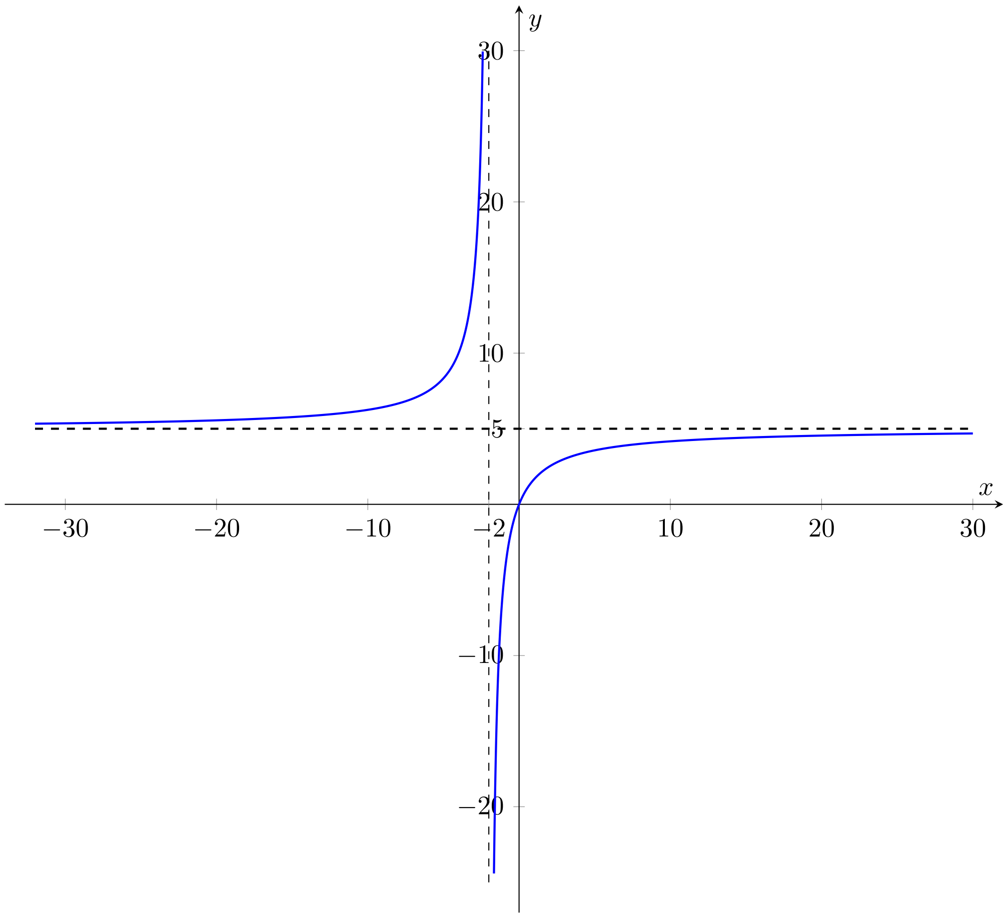
(a) Asimtot tegak, yaitu saat penyebut bernilai 0 adalah garis $x = -2$.
Karena derajat pembilang sama dengan derajat penyebut, maka $f(x)$ memiliki asimtot datar dan tidak memiliki asimtot miring, yaitu

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{x+2} = 5 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{5x}{x+2} = 5$$

sehingga asimtot datarnya adalah garis $y = 5$.

(b) Titik kritis saat $f(x)$ tidak terdefinisi dan $f'(x) = 0$. $f(x)$ tidak terdefinisi saat $x = -2$ serta tinjau $f'(x) = \dfrac{5(x+2) - 5x}{(x+2)^2} = \dfrac{10}{(x+2)^2} > 0$, artinya tidak memiliki titik stasioner. Selanjutnya, tinjau bahwa $f''(x) = -\dfrac{20}{(x+2)^3}$ yang bernilai positif saat $x < -22$ dan negatif saat $x > -2$, artinya kecekungannya berubah pada $x = -2$, akan tetapi $f(x)$ tidak kontinu pada $x = -2$ sehingga tidak memiliki titik belok.

(c) Tinjau bahwa $f(x)$ melewati titik $(0, 0)$ sehingga grafiknya adalah



4. Segitiga samakaki mempunyai dua titik sudut atas pada kurva $y = 9 - x^2$ dan satu titik sudut bawah pada titik $(0, -1)$. dapatkan ukuran segitiga samakaki tersebut dengan luas terbesar

Solusi:

Tinjau bahwa kurva $y = 9 - x^2$ simetris terhadap sumbu$-y$, dan titik sudut bawah segitiga pada $(0, -1)$ sehingga titik $x = a$ dan titik $x = -a$ merupakan titik pada segitiga samakaki. Misalkan saat $x = a$ diperoleh $y = b = 9 - a^2$, maka alas segitiga sama kaki tersebut adalah $a - (-a) = 2a$ dan tingginya adalah $b - (-1) = b + 1$. Akibatnya diperoleh persamaan luas segitiga adalah $L = \frac{1}{2} 2a(b+1) = a(b+1) = a(9-a^2+1) = 10a - a^3$, maka luasnya maksimum ketika $\frac{dL}{da} = 0$, yaitu

$$\frac{dL}{da} = 10 - 3a^2 = 0$$
$$(\sqrt{10} - a\sqrt{3})(\sqrt{10} + a\sqrt{3}) = 0$$

Diperoleh $a = \sqrt{\frac{10}{3}}$ dan $b = \frac{17}{3}$. Jadi alasnya adalah $2a = \frac{2}{3}\sqrt{30}$ dan tingginya adalah $b + 1 = \frac{20}{3}$ sehingga luasnya $L = \frac{20\sqrt{30}}{9}$

5. Diberikan fungsi $F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\sin t}{1+\cos t}\,dt$. Dengan menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus II, hitunglah $F\left(\frac{\pi}{4}\right), F'\left(\frac{\pi}{4}\right), F''\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Solusi:

Berdasarkan sifat integral, diperoleh

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+\cos t}\,dt = 0$$

Berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus 2, diperoleh bahwa $F'(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ sehingga

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

Kita punya $F'(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ sehingga

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \frac{\cos x(1+\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1}{1+\cos x} \\
F''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= 2-\sqrt{2}
\end{aligned}$$

SOAL SESI 4

1. Dapatkan rumusan untuk $\dfrac{d^n y}{dx^2}$ dari $y = \sin^2 x$

   Solusi:
   Tinjau $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ untuk $n = 1, 2, 3, ...$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \sin 2x = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 2\cos 2x = -2\cos(2x + \pi)\\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -4\sin 2x = -4\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)\\
\frac{d^4y}{dx^4} &= -8\cos 2x = -8\cos(2x + 2\pi)\\
\frac{d^5y}{dx^5} &= 16\sin 2x = -16\cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

   sehingga polanya berulang tiap 4 kali, serta dapat diperoleh $\dfrac{d^n y}{dx^n} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

2. Diketahui $y(x) = 16x^2 - x^4$

   (a) Dengan uji turunan pertama tentukan titik kritisnya dan jenis maksimum-minimumnya

   (b) Dengan uji turunan kedua tentukan titik beloknya

   (c) Sketsalah grafik fungsi tersebut

   Solusi:

   (a) Titik kritis yaitu x ketika $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) = 32x - 4x^3 &= 0\\
4x(8 - x^2) &= 0\\
4x(\sqrt{8} - x)(\sqrt{8} + x) &= 0
\end{aligned}$$

   Diperoleh titik kritis yang merupakan titik stasioner pada $x = -\sqrt{8}, x = 0, x = \sqrt{8}$. Selanjutnya, tinjau bahwa $f'(x) \leq 0$ untuk selang $[-\sqrt{8}, 0] \cup [\sqrt{8}, +\infty)$ sehingga $f(x)$ turun pada selang tersebut, serta $f'(x) \geq 0$ untuk selang $(-\infty, -\sqrt{8}] \cup [0, \sqrt{8}]$ sehingga $f(x)$ naik pada selang tersebut. Oleh karena itu $f(-\sqrt{8}) = f(\sqrt{8}) = 64$ merupakan maksimum global dan $f(0) = 0$ merupakan minimum lokal

   (b) Titik belok yaitu titik x ketika $f''(x) = 0$

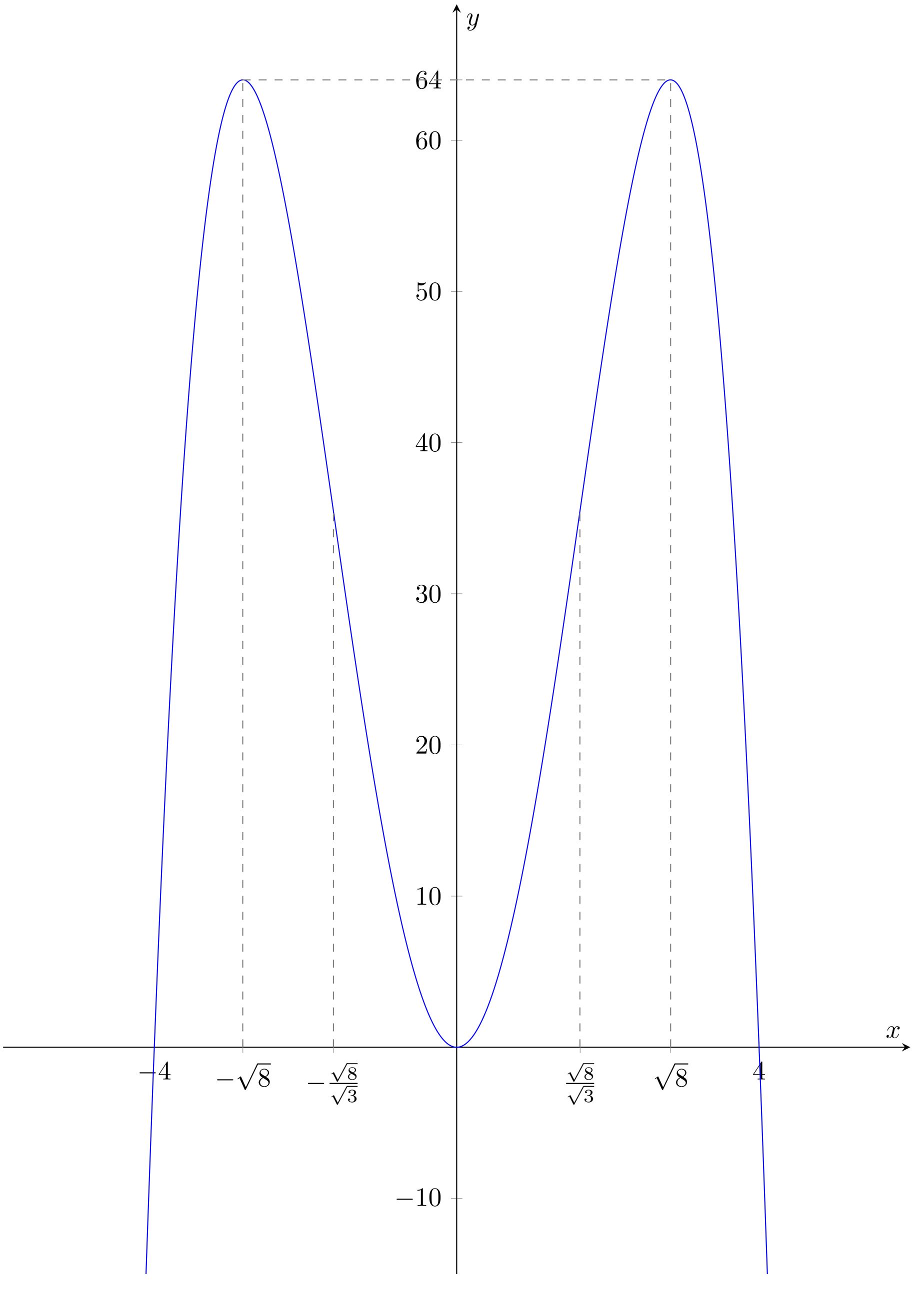
$$\begin{aligned}
f''(x) = 32 - 12x^2 &= 0\\
4(8 - 3x^2) &= 0\\
(\sqrt{8} - x\sqrt{3})(\sqrt{8} + x\sqrt{3}) &= 0
\end{aligned}$$

   Diperoleh titik belok adalah $x = -\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ dan $x = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$

(c) Sebelum sketsa grafik fungsinya, akan ditentukan kecekungan fungsi terlebih dahulu. Tinjau bahwa $f''(x) < 0$ untuk selang $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ sehingga $f(x)$ cekung ke bawah pada selang tersebut, serta $f''(x) > 0$ untuk selang $\left(-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}\right)$ sehingga $f(x)$ cekung ke atas pada selang tersebut.
Selanjutnya dapat ditentukan perpotongan $f(x)$ dengan sumbu x yaitu $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) = 16x^2 - x^4 &= 0 \\ x^2(16 - x^2) &= 0 \\ x^2(4 - x)(4 + x) &= 0 \end{aligned}$$

sehingga berpotongan dengan sumbu x pada titik $x = -4, x = 0$, dan $x = 4$. Dengan demikian, sketsa grafiknya adalah



3. (a) Tuliskan Teorema Nilai Rata-rata
   (b) Diberikan $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada selang $[-1, 8]$
   Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk menentukan nilai c sehingga $f'(c) = \dfrac{f(8) - f(-1)}{8 - (-1)}$

   Solusi:

   (a) Jika $f(x)$ dapat diturunkan pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$, maka terdapat sedikitnya satu titik c dalam (a, b) sehingga

   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

   (b) Tinjau bahwa $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt[3]{x}}$ yang jelas tidak dapat diturunkan pada setiap titik di $(-1, 8)$ yaitu pada $x = 0$, sehingga teorema tersebut sebenarnya tidak berlaku. Akan tetapi, akan kita coba cari apakah terdapat c yang memenuhi

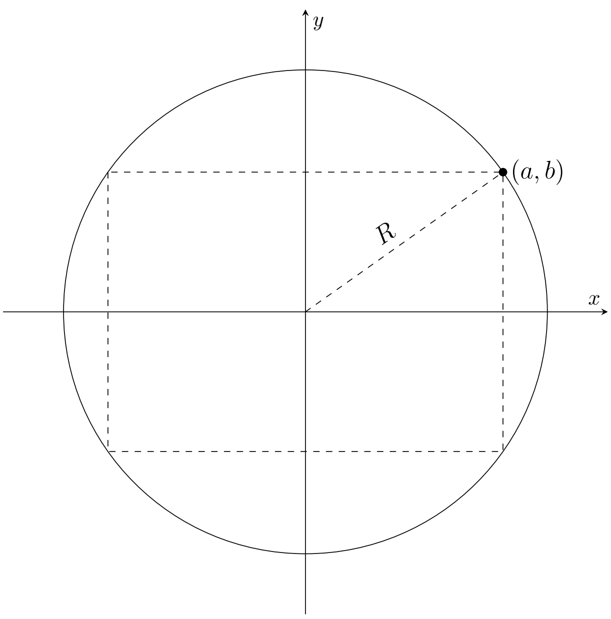
   $$\begin{aligned} f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} &= \frac{8^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}}{8 - (-1)} \\ \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} &= \frac{3}{9} \\ c &= 8 \end{aligned}$$

   Jadi terdapat nilai c yang memenuhi persamaan tersebut, tetapi c tidak pada $(-1, 8)$, dan $f(x)$ tidak dapat diturunkan pada $x = 0$. Dengan demikian, hal ini tidak menyalahi Teorema Nilai Rata-rata.

4. Tentukan ukuran tabung dengan isi terbesar yang dapat dibuat dalam bola berjari-jari R.

   Solusi:

   Misalkan jari-jari tabung adalah a, maka untuk mencari tingginya, kita dapat membuat proyeksi 2 dimensi untuk tabung dalam bola. Proyeksinya akan berbentuk seperti persegi panjang dalam lingkaran berikut



Tanpa mengurangi keumuman, misalkan pusat lingkaran adalah $(0,0)$ dan jari-jarinya sama seperti jari-jari bola, yaitu R sehingga dapat diperoleh persamaan lingkaran $x^2+y^2=R^2$. Selanjutnya, karena jari-jari tabung adalah a, maka $a^2+y^2=R^2$. Misalkan pula titik (a,b) melewati lingkaran, sehingga tinggi tabungnya adalah $2b$. Jadi kita punya $a^2+b^2=R^2$ atau $a^2=R^2-b^2$. Oleh karena itu diperoleh volume tabung

$$V=\pi a^2(2b)=2\pi(R^2-b^2)b=2\pi(R^2b-b^3)$$

Volume terbesar atau maksimum ketika $\dfrac{dV}{db}=0$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dV}{db}&=2\pi(R^2-3b^2)=0\\(R-b\sqrt{3})(R+b\sqrt{3})&=0\end{aligned}$$

Karena $b>0$, diperoleh $b=\dfrac{R}{3}\sqrt{3}$ sehingga $a^2=\dfrac{2R^2}{3}$. Dengan kata lain ukuran jari-jari tabung yaitu $a=\dfrac{R}{3}\sqrt{6}$ dan tingginya adalah $2b=\dfrac{2R}{3}\sqrt{3}$, serta volumenya adalah $V=2\pi\left(R^2\dfrac{R}{3}\sqrt{3}-\left(\dfrac{R}{3}\sqrt{3}\right)^3\right)=\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$

5. Selesaikan integral berikut:

   (a) $\displaystyle\int \sin 2x\sqrt{2-3\sin^2 x}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \left(5x^2-15x+\frac{45}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

   Solusi:

   (a) Misalkan $u=2-3\sin^2 x$ sehingga $du=-3\sin 2x\,dx$ dan diperoleh

   $$\begin{aligned}\int \sin 2x\sqrt{2-3\sin^2 x}\,dx&=\int -\frac{1}{3}\sqrt{u}\,du\\&=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du\\&=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}+C\\&=-\frac{2}{9}(2-3\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

   (b) Perhatikan bahwa $5x^2-15x+\dfrac{45}{4}=5\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$, sehingga

   $$\begin{aligned}\int\left(5x^2-15x+\frac{45}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx&=\int\left(5\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\\&=\sqrt{5}\int\left(x-\frac{3}{2}\right)dx\\&=\sqrt{5}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right)+C\end{aligned}$$