PEMBAHASAN SOAL EAS MATEMATIKA II TAHUN 2020/2021

Ahmad Hisbu Zakiyudin

SOAL SESI 1 (Kelas 19-44)

1. Dapatkan luas permukaan yang terbentuk, jika kurva $x^2 - 4x + y^2 = 0$ yang terletak di kuadran pertama dan diputar pada sumbu$-x$ sepanjang $0 \leq x \leq 2$

   Penyelesaian:

   Tinjau bahwa $x^2 - 4x + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4 = 0$ sehingga merupakan persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 0)$ dan berjari-jari 2. Karena terletak pada kuadran pertama dan $0 \leq x \leq 2$, maka akan terbentuk seperempat lingkaran dengan jari-jari 2, sehingga jika diputar pada sumbu$-x$ akan terbentuk setengah bola yang luas permukaannya adalah $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$. Jadi luas permukaan yang terbentuk adalah $\frac{1}{2} \times 4\pi \times 2^2 = 8\pi$.

   Dapat dihitung pula menggunakan integral. Persamaan kurva yang digunakan adalah $y = f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ karena $y > 0$ pada kuadran pertama. Ingat rumus luas permukaan kurva $y = f(x)$ antara $x = a$ dan $x = b$ terhadap sumbu$-x$ adalah

   $$K = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

   dengan syarat $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$. Tinjau

   $$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{4x - x^2}\right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{4x - x^2}} \times (4 - 2x)\right)^2 \\ &= 1 + \frac{x^2 - 4x + 4}{4x - x^2} \\ &= \frac{4}{4x - x^2} \end{aligned}$$

   Dapat diperoleh luas permukaannya

   $$\begin{aligned} K &= \int_0^2 2\pi\sqrt{4x - x^2}\sqrt{\frac{4}{4x - x^2}}\, dx \\ &= \int_0^2 2\pi \times 2\, dx \\ &= 4\pi x\Big|_0^2 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

2. Dengan Dalil Guldin I, dapatkan titik berat dataran homogen yang dibatasi kurva $y = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ dan sumbu$-x$. Sketsa grafiknya.

   Penyelesaian:

   Tinjau bahwa $y = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ dapat diubah menjadi $y^2 + (x-2)^2 = 1,\ y > 0$ merupakan persamaan setengah lingkaran dengan titik pusat lingkarannya adalah $(2, 0)$ dan berjari-jari 1. Diperoleh titik berat pada sumbu$-x$ terletak pada $x = 2$ sedangkan pada sumbu$-y$ dapat kita cari dengan Dalil Guldin I. Ingat pada Dalil Guldin I berlaku

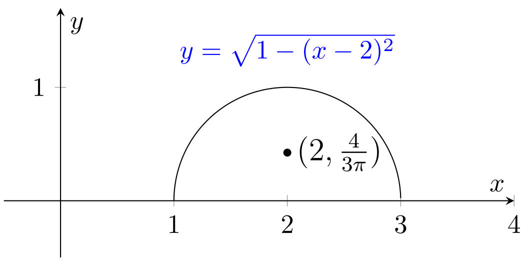
   $$V = 2\pi \cdot \bar{y}L$$

dengan V isi benda putar, $\bar{y}$ jarak antara titik berat dataran ke sumbu putar, dan L luas dataran.

Dataran tersebut jika diputar terhadap sumbu$-x$ akan terbentuk sebuah bola dengan volume $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$. Luas dataran tersebut merupakan luas setengah lingkaran dengan jari-jari 1, yaitu $\frac{1}{2} \times \pi r^2 = \frac{\pi}{2}$. Dapat diperoleh titik berat pada sumbu-y adalah

$$\frac{4}{3}\pi = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$\bar{y} = \frac{4}{3\pi}$$

Berikut sketsa grafiknya



3. (a) Buatlah sketsa kurva dari persamaan parametrik

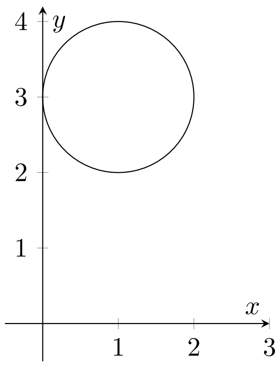
$$x = 1 + \cos t, \quad y = 3 - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(b) Dapatkan panjang busur dari kurva tersebut.

(c) Dapatkan semua nilai parameter t yang menyebabkan kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal

Penyelesaian:

(a) Tinjau bahwa $\cos t = x-1$ dan $\sin t = 3-y$ sehingga $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = (x-1)^2 + (3-y)^2$ Diperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di $(1, 3)$ dan berjari-jari 1. Karena $0 \le t \le 2\pi$, maka kurvanya merupakan satu lingkaran penuh sebagai berikut



(b) Karena kurvanya merupakan satu lingkaran penuh dengan jari-jari 1, maka panjang busurnya adalah keliling lingkaran yaitu $2\pi r = 2\pi$

Dapat dihitung pula dengan rumus panjang busur untuk kurva parametrik, yaitu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Tinjau

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \text{ dan } \frac{dy}{dt} = -\cos t$$

serta $a = 0$ dan $b = 2\pi$ sehingga

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= t\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

(c) Kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal jika $\dfrac{dx}{dt} = 0$ dan $\dfrac{dy}{dt} \neq 0$, yaitu saat $t = 0$, $t = \pi$, dan $t = 2\pi$

4. Dapatkan panjang busur dari kurva $r = a\cos\theta + b\sin\theta$. (Berikan gambar sketsa kurvanya). Perhatikan: bilangan b dan a dalam soal ini adalah dua digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $b = 7$ dan $a = 6$, jika a atau b adalah 0 ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

Ingat rumus panjang busur untuk kurva kutub $r = f(\theta)$ jika kurvanya ditelusuri keseluruhan satu kali untuk θ bergerak dari $\theta = \alpha$ ke $\theta = \beta$ adalah

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (-a\sin\theta + b\cos\theta)^2 \\ &= a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

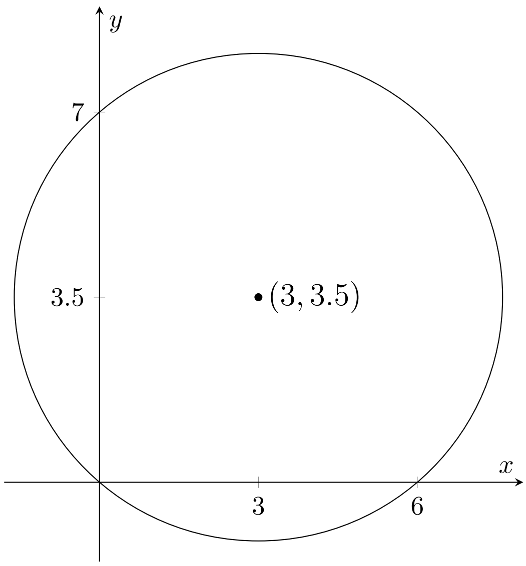
Tinjau bahwa kurva tersebut ditelusuri keseluruhan satu kali untuk θ bergerak dari $\theta = 0$ ke $\theta = \pi$, karena titik $(a, 0)$ dan titik $(-a, \pi)$ merupakan titik yang sama dalam koordinat kutub. Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, d\theta \\ &= \theta\sqrt{a^2 + b^2}\Big|_0^\pi \\ &= \pi\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Untuk menggambar kurvanya, ingat bahwa $\frac{x}{r} = \cos\theta$ dan $\frac{y}{r} = \sin\theta$, serta $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga

$$\begin{aligned} r &= a\cos\theta + b\sin\theta \\ r &= \frac{ax}{r} + \frac{by}{r} \\ r^2 &= ax + by \\ x^2 + y^2 - ax - by &= 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} &= 0 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2}{4} \end{aligned}$$

Jadi kurvanya merupakan lingkaran yang berpusat di $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ dan berjari-jari $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
Jika $a = 6$ dan $b = 7$, maka lingkarannya berpusat di $(3, 3.5)$ dan berjari-jari $\frac{\sqrt{85}}{2}$, serta memotong titik $(0,0), (6,0)$, dan $(0,7)$ sebagai berikut



Cara lain untuk mendapatkan panjang busurnya adalah menghitung keliling lingkaran tersebut yang berjari-jari $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, yaitu $S = 2\pi r = 2\pi\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \pi\sqrt{a^2+b^2}$

5. (a) Gunakan uji yang sesuai untuk menentukan apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1} \text{ konvergen atau divergen}$$

(b) Dapatkan jumlahan deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{3^k} + \frac{6}{(k+3)(k+4)}\right]$$

Penyelesaian:

(a) Dengan Prinsip Informal I, suku konstan yaitu 1 pada penyebut dapat dihilangkan tanpa memengaruhi konvergensi deret tersebut, sehingga bentuknya menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

Bentuk tersebut merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = \frac{4}{3}$ dan $r = \frac{1}{3}$ yang jelas konvergen.

(b) Tinjau bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{3^k} + \frac{6}{(k+3)(k+4)}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(k+3)(k+4)}$$

Perhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{3^k}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = \frac{7}{3}$ dan $r = \frac{1}{3}$ sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{3^k} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{7}{2}$$

Perhatikan pula $\frac{6}{(k+3)(k+4)} = 6\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$ sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(k+3)(k+4)} &= \lim_{k\to\infty} 6\Bigg[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \\
&\qquad + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) + \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)\Bigg] \\
&= \lim_{k\to\infty} 6\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{k+4}\right] \\
&= 6\left[\frac{1}{4} - 0\right] = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Jadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{7}{3^k} + \frac{6}{(k+3)(k+4)}\right] = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$$

SOAL SESI 2 (Kelas 10-18 dan 45-61)

1. Hitung luas permukaan benda putar dari $y^2 - 10x + x^2 - 10y + 25 = 0$ diputar terhadap titik pusat.

   Penyelesaian:

   Perhatikan bahwa persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ sehingga merupakan lingkaran yang memiliki titik pusat di $(5,5)$ dan berjari-jari $r = 5$. Karena benda putarnya diputar terhadap titik pusat, maka akan terbentuk sebuah bola yang luas permukaannya adalah $K = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$

2. Suatu bidang datar dibatasi oleh kurva $x^2 = ay$ dan garis $y = a$

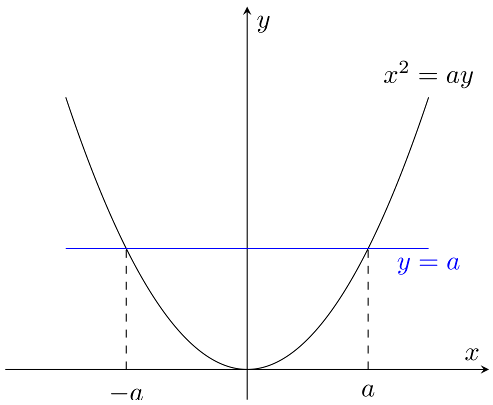
   (a) Dapatkan pusat massa bidang datar tersebut (Berikan gambar sketsa bidangnya)

   (b) Dengan dalil Guldin, hitung volume yang terjadi jika bidang datar pada point (a) tersebut diputar terhadap garis $y = 2a$

   Perhatikan: bilangan a dalam soal ini adalah digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $a = 6$, jika a adalah 0 ganti dengan angka 10

   Penyelesaian:

   (a) Sketsa dulu bidang datarnya

   Karena bidang datar tersebut simetris terhadap sumbu$-y$, maka $\bar{x} = 0$.

   Selanjutnya akan dicari $\bar{y}$. Titik potong kedua kurva pada titik $(-a, a)$ dan (a, a) sehingga batas pengintegralannya dari $x = -a$ sampai $x = a$. Ingat rumus titik berat untuk $\bar{y}$ yaitu

   $$\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx}{\displaystyle\int_a^b (y_1 - y_2)\, dx}$$

   dengan $y_1 \geq y_2$ pada $[a, b]$.

Dalam soal ini, $y_1 = a$ dan $y_2 = \dfrac{x^2}{a}$, dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx &= \int_{-a}^a \left(a^2 - \frac{x^4}{a^2}\right)\,dx \\
&= a^2x - \frac{x^5}{5a^2}\Big|_{-a}^a \\
&= \left(a^3 - \frac{a^3}{5}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{5}\right) \\
&= \frac{8a^3}{5} \\
\int_a^b (y_1 - y_2)\,dx &= \int_{-a}^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right)\,dx \\
&= ax - \frac{x^3}{3a}\Big|_{-a}^a \\
&= \left(a^2 - \frac{a^2}{3}\right) - \left(-a^2 + \frac{a^2}{3}\right) \\
&= \frac{4a^2}{3}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx}{\displaystyle\int_a^b (y_1 - y_2)\,dx} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\frac{8a^3}{5}}{\frac{4a^2}{3}} \\
&= \frac{3a}{5}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $Z(\bar{x}, \bar{y}) = Z(0, \frac{3a}{5})$

(b) Ingat pada Dalil Guldin I berlaku

$$V = 2\pi \cdot \bar{y}L$$

dengan V isi benda putar, $\bar{y}$ jarak antara titik berat dataran ke sumbu putar, dan L luas dataran. Karena diputar terhadap garis $y = 2a$, maka $\bar{y}$ yang dimaksud adalah

$$\bar{y} = 2a - \frac{3a}{5} = \frac{7a}{5}$$

. Luas dataranya telah dihitung pada jawaban bagian (a) yaitu

$$L = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx = \frac{4a^2}{3}$$

Dapat diperoleh

$$V = 2\pi \cdot \bar{y}L = 2\pi \cdot \frac{7a}{5} \cdot \frac{4a^2}{3} = \frac{56a^3\pi}{15}$$

3. Buatlah sketsa dan dapatkan panjang kurva yang dibentuk oleh kurva:

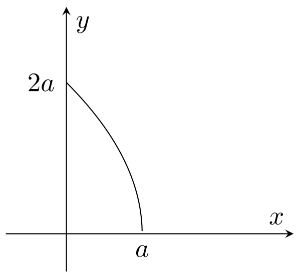
$$r = \frac{2a}{1+\cos\theta} \text{ dan } r = 2a(1+\cos\theta) \text{ di } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Penyelesaian:

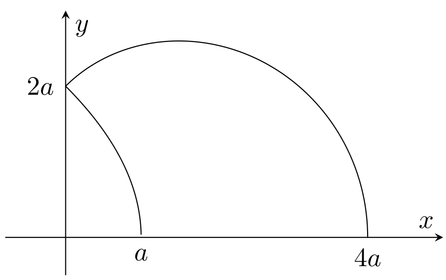
Transformasikan ke koordinat cartesius untuk membuat sketsa $r_1 = \dfrac{2a}{1+\cos\theta}$. Ingat bahwa $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ dan $r^2 = x^2 + y^2$ sehingga

$$\begin{aligned} r + r\cos\theta &= 2a \\ \sqrt{x^2+y^2} + x &= 2a \\ x^2 + y^2 &= (2a-x)^2 \\ x^2 + y^2 &= 4a^2 - 4ax + x^2 \\ 4ax &= 4a^2 - y^2 \\ x &= a - \frac{y^2}{4a} \end{aligned}$$

yang merupakan kurva parabola mendatar. Untuk $\theta = 0$, maka $x = r\cos\theta = r = \dfrac{2a}{1+1} = a$ dan $y = r\sin\theta = 0$. Untuk $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, maka $x = 0$ dan $y = r = \dfrac{2a}{1+0} = 2a$. Diperoleh sketsa berikut



Sedangkan $r_2 = 2a(1+\cos\theta)$ merupakan kardioida. Untuk $\theta = 0$, maka $x = r\cos\theta = r = 2a(1+1) = 4a$ dan $y = r\sin\theta = 0$. Untuk $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, maka $x = 0$ dan $y = r = 2a(1+0) = 2a$. Dapat diperoleh sketsa gabungan kedua kurva sebagai berikut



sehingga panjang busur kedua kurva tersebut adalah

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad \text{dan} \qquad S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r_2^2 + \left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Untuk S_1, tinjau

$$\begin{aligned}
r_1^2 + \left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{2a}{1+\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}\left[\frac{2a}{1+\cos\theta}\right]\right)^2 \\
&= \frac{4a^2}{(1+\cos\theta)^2} + \left(\frac{-2a\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right)^2 \\
&= \frac{4a^2}{(1+\cos\theta)^2} + \frac{4a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4} \\
&= \frac{4a^2(1+\cos\theta)^2 + 4a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4} \\
&= \frac{4a^2 + 8a^2\cos\theta + 4a^2\cos^2\theta + 4a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4} \\
&= \frac{8a^2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^4} \\
&= \frac{8a^2}{(1+\cos\theta)^3} \\
&= \frac{8a^2}{(1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)^3} \\
&= \frac{a^2}{\cos^6\frac{\theta}{2}} = a^2\sec^6\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Karena $\sec\frac{\theta}{2} \geq 0$ untuk $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, maka

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sec^6\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sec^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Selanjutnya akan dihitung integral tak tentu

$$I = \int \sec^3 u\,du$$

dengan mengggunakan rumus reduksi

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2}x\tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$

sehingga

$$I = \int \sec^3 u\,du = \frac{\sec u\tan u}{2} + \frac{1}{2}\int \sec u\,du$$

Selanjutnya hitung

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \sec u\,du \\
&= \int \frac{\sec u(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u}\,du \\
&= \int \frac{\sec^2 u + \sec u\tan u}{\sec u + \tan u}\,du
\end{aligned}$$

Misalkan $p = \sec u + \tan u$ sehingga $dp = (\sec^2 u + \sec u \tan u)\, du$ sehingga

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{p}\, dp \\ &= \ln |p| + C_1 \\ &= \ln |\sec u + \tan u| + C_1 \end{aligned}$$

Jadi

$$I = \frac{\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|}{2} + C$$

Misalkan $\dfrac{\theta}{2} = u$ sehingga $d\theta = 2\, du$ dan batas atasnya menjadi $u = \dfrac{\pi}{4}$ sedangkan batas bawahnya tetap $u = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sec^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u\, du \\ &= 2a \left[\frac{\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2a \left[\frac{(\sqrt{2})(1) + \ln |\sqrt{2} + 1|}{2} - \frac{(1)(0) + \ln |1 + 0|}{2} \right] \\ &= a(\sqrt{2} + \ln |1 + \sqrt{2}|) \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk S_2, tinjau

$$\begin{aligned} r_2^2 + \left(\frac{dr_2}{d\theta} \right)^2 &= (2a(1 + \cos\theta))^2 + \left(\frac{d}{d\theta} [2a(1 + \cos\theta)] \right)^2 \\ &= 4a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) + (2a(-\sin\theta))^2 \\ &= 4a^2 + 8a^2 \cos\theta + 4a^2 \cos^2\theta + 4a^2 \sin^2\theta \\ &= 8a^2(1 + \cos\theta) \\ &= 8a^2(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \\ &= 16a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Karena $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ untuk $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, maka

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta \\ &= (4a)(2) \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 = 4a\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi panjang keseluruhan kurva yang dimaksud adalah

$$
\begin{aligned}
S = S_1 + S_2 &= a\sqrt{2} + a\ln|1+\sqrt{2}| + 4a\sqrt{2} \\
&= a(5\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|)
\end{aligned}
$$

4. Selesaikan

   (a) Tentukan konvergensi barisan $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;
   Dari jawaban tersebut, tentukan konvergensi $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   (b) Dengan uji perbandingan, tentukan deret berikut konvergen ataukah divergen?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n}$$

Penyelesaian:

(a) Akan dicari $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = L_1$
Misalkan $\dfrac{1}{n} = k$, maka $k \to 0^+$ karena $n \to +\infty$, sehingga

$$L_1 = \lim_{k\to 0^+}\frac{\sin\pi k}{k} = \pi$$

Jadi barisan $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke π
Selanjutnya tinjau,

$$\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1}\times n\sin\frac{\pi}{n}$$

Dapat diperoleh $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = L_2$
Akibatnya

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = L_1\cdot L_2 = \frac{\pi}{2}$$

Jadi barisan $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\dfrac{\pi}{2}$

(b) Tinjau bahwa $0 \le \sin^2(5n) \le 1$ sehingga $2^n\sin^2(5n) \le 2^n$
Tinjau pula $0 \le \cos^2 n \le 1$ sehingga $4^n \le 4^n + \cos^2 n$ dan $\dfrac{1}{4^n+\cos^2 n} \le \dfrac{1}{4^n}$
Akibatnya

$$\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n} \le \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$$

Karena $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ merupakan deret geometri tak hingga dengan $a = 1$ dan $r = \dfrac{1}{2}$ yang jelas konvergen sehingga deret $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2 n}$ juga konvergen.

5. Buktikan $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ konvergen jika $p > 1$

Penyelesaian:

Uji konvergensi deret tersebut dengan uji integral berikut

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$

Misalkan $\ln x = u$ sehingga $\frac{1}{x}\,dx = du$, akan dihitung dulu integralnya tanpa menggunakan batas integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx &= \int \frac{1}{u^p}\,du \\
&= \int u^{-p}\,du \\
&= \frac{u^{1-p}}{1-p} \\
&= \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}
\end{aligned}$$

Dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_2^{a} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{(\ln a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p} \right) \\
&= \frac{1}{1-p} \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right)
\end{aligned}$$

Jika $p > 1$, diperoleh

$$\frac{1}{1-p} \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) = \frac{1}{1-p} \left(0 - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) = \frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$$

Dapat disimpulkan deret tersebut konvergen jika $p > 1$

Jika $p < 1$, maka $p - 1 < 0$ sehingga

$$\frac{1}{1-p} \left(\lim_{a\to\infty} \frac{1}{(\ln a)^{p-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{p-1}} \right) = \infty$$

Dapat disimpulkan deret tersebut divergen jika $p < 1$

SOAL SESI 3 (Kelas 1-9 dan 62-70)

1. Dapatkan panjang kurva $y = 75\cosh\frac{x}{75}$ dari $x = -150$ ke $x = 150$

Penyelesaian:

Ingat bahwa panjang kurva $y = f(x)$ dari $x = a$ ke $x = b$ dan $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ adalah

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Tinjau

$$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \left(\frac{d}{dx}\left[75\cosh\left(\frac{x}{75}\right)\right]\right)^2 \\ &= 1 + \left(75\sinh^2\left(\frac{x}{75}\right)\cdot\frac{1}{75}\right)^2 \\ &= 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{75}\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{x}{75}\right) \end{aligned}$$

Karena $y = 75\cosh\frac{x}{75}$ kontinu pada $[-150, 150]$ dan nilainya selalu positif, maka

$$\begin{aligned} S &= \int_{-150}^{150} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{75}\right)}\, dx \\ &= \int_{-150}^{150} \cosh\left(\frac{x}{75}\right)\, dx \\ &= 75\sinh\left(\frac{x}{75}\right)\Big|_{-150}^{150} \\ &= 75(\sinh(2) - \sinh(-2)) \\ &= 75(\sinh(2) + \sinh(2)) \\ &= 150\sinh(2) \end{aligned}$$

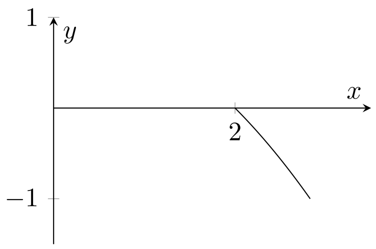
2. Diberikan persamaan kurva $x = 2\sqrt{1-y};\ \ -1 \le y \le 0$

   (a) Buatlah sketsa grafik persamaan kurvanya

   (b) Dapatkan luas permukaan benda putar jika kurva diputar terhadap sumbu y

Penyelesaian:

(a) Perhatikan bahwa persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk $x^2 = 4 - 4y$ atau $y = \dfrac{4 - x^2}{4}$ yang merupakan persamaan parabola dengan $-1 \le y \le 0$ dan $x \ge 0$. Untuk $y = -1$ diperoleh $x = 2\sqrt{2}$ dan untuk $y = 0$ diperoleh $x = 2$ sebagai berikut



(b) Untuk luas permukaan benda putar yang terbentuk, dapat digunakan persamaan yang diberikan pada soal yaitu $x = g(y) = 2\sqrt{1-y}$ dengan $-1 \leq y \leq 0$. Ingat rumus luas permukaan benda putar dari kurva yang diputar terhadap sumbu$-y$ yaitu

$$K = \int_a^b 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
K &= \int_{-1}^{0} 2\pi(2\sqrt{1-y})\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\left[2\sqrt{1-y}\right]\right)^2}\, dy \\
&= 4\pi \int_{-1}^{0} \sqrt{1-y}\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-y}}\right)^2}\, dy \\
&= 4\pi \int_{-1}^{0} \sqrt{1-y}\sqrt{\frac{1-y+1}{1-y}}\, dy \\
&= 4\pi \int_{-1}^{0} \sqrt{2-y}\, dy \\
&= 4\pi \left[-\frac{2}{3}(2-y)^{3/2}\right]_{-1}^{0} \\
&= -\frac{8\pi}{3}\left[2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right] \\
&= \frac{8\pi}{3}\left[3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right]
\end{aligned}$$

3. Diberikan partikel bergerak sepanjang kurva $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \sqrt{8 + 2t - t^2} \end{cases}$ dengan $-2 \leq t \leq 1$

(a) Nyatakan dalam persamaan kutub $r = f(\theta)$ dengan lintasan θ

(b) Tentukan panjang lintasan kurva tersebut

(c) Sketsa persamaan kurva tersebut dan arah lintasannya

Penyelesaian:

(a) Perhatikan bahwa $t = 1 - x$ sehingga

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{8 + 2(1-x) - (1-x)^2} \\
&= \sqrt{8 + 2 - 2x - 1 + 2x - x^2} \\
&= \sqrt{9 - x^2}
\end{aligned}$$

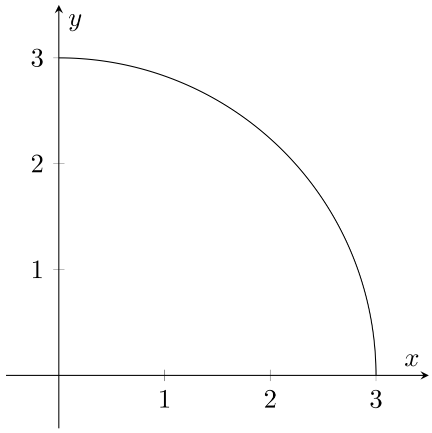
Ingat bahwa $y = r\sin\theta$ dan $x = r\cos\theta$ sehingga

$$\begin{aligned}
r\sin\theta &= \sqrt{9 - r^2\cos^2\theta} \\
r^2\sin^2\theta &= 9 - r^2\cos^2\theta \\
r^2 &= 9
\end{aligned}$$

Dapat diambil $r = f(\theta) = 3$. Untuk $t = -2$, maka $x = r\cos\theta = 3$ sehingga $\theta = 0$, dan untuk $t = 1$, maka $x = r\cos\theta = 0$ sehingga $\theta = \frac{\pi}{2}$. Jadi $r = f(\theta) = 3$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(b) Tinjau bahwa $r = 3$ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ merupakan seperempat lingkaran dengan jari-jari $r = 3$ di kuadran pertama, sehingga panjang lintasan kurva tersebut merupakan seperempat keliling lingkaran yaitu $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{3}{2}\pi$

(c) Dari jawaban (b) sudah diperoleh bentuk kurvanya.
Sedangkan untuk arah lintasannya, tinjau bahwa x berkurang dan y bertambah ketika t bergerak dari -2 ke 1, sehingga arahnya berlawanan arah jarum jam. Berikut sketsanya



4. Selesaikan:

(a) Diberikan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2}$
Tuliskan 5 suku pertama barisan, dan dapatkan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(b) Jika diberikan barisan $(a_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ dan $(b_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ maka selidiki tentang konvergensi dari: 1.$(a_n + b_n)$; 2.$(a_n \cdot b_n)$; 3. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

Penyelesaian:

(a) Tinjau bahwa

$$a_n = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{n^2} = \frac{\frac{n}{2}(1 + (2n-1))}{n^2} = 1$$

untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$. Diperoleh $(a_n) = (1, 1, 1, \dots)$ sehingga $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ merupakan 5 suku pertama barisan tersebut dan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(b) i. Tinjau $(a_n + b_n) = (1, 1, 1, \dots)$ sehingga barisan tersebut konvergen ke 1

ii. Tinjau $(a_n \cdot b_n) = (0, 0, 0, \dots)$ sehingga barisan tersebut konvergen ke 0

iii. Tinjau untuk $n = 2$, $\frac{a_n}{b_n}$ tidak terdefinisi sehingga konvergensi barisan $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ tidak dapat ditentukan

5. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{1 - ax}$

(a) Dapatkan deret Maclaurin dari $f(x)$ (Nyatakan dalam notasi sigma)

(b) Gunakan hasil dari (a) untuk mendapatkan deret Maclaurin dari fungsi $f(x) = \frac{1}{(1 - ax)^2}$

Perhatikan: bilangan a dalam soal ini adalah digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $a = 6$, jika $a = 0$ ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

(a) Tinjau

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-ax} \\
f'(x) &= \frac{a}{(1-ax)^2} \\
f''(x) &= \frac{a \cdot 2a}{(1-ax)^3} \\
f'''(x) &= \frac{a \cdot 2a \cdot 3a}{(1-ax)^4} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \frac{a \cdot 2a \cdot 3a \cdots ka}{(1-ax)^{k+1}} = \frac{k!a^k}{(1-ax)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= a \\
f''(0) &= a \cdot 2a \\
f'''(0) &= a \cdot 2a \cdot 3a \\
&\vdots \\
f^{(k)}(0) &= a \cdot 2a \cdot 3a \cdots ka = k!a^k
\end{aligned}
$$

Diperoleh deret Maclaurin dari $f(x)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots \\
&= 1 + (a)(x) + \frac{2!a^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k!a^k}{k!}x^k + \cdots \\
&= 1 + (ax) + (ax)^2 + \cdots (ax)^k + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k
\end{aligned}
$$

Alternatif penyelesaian dengan metode substitusi.

Tinjau deret Maclaurin dari $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Dengan metode substitusi diperoleh deret Maclaurin dari $f(x)$ adalah

$$
\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k
$$

(b) Tinjau $\frac{d}{dx}(ax)^k = ka(ax)^{k-1}$ sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-ax}\right) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k \\
\frac{a}{(1-ax)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} ka(ax)^{k-1} \\
\frac{a}{(1-ax)^2} &= a \sum_{k=0}^{\infty} k(ax)^{k-1} \\
\frac{1}{(1-ax)^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(ax)^{k-1} = 1 + 2(ax) + 3(ax)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$