PEMBAHASAN SOAL ETS MATEMATIKA II TAHUN 2021/2022

Ahmad Hisbu Zakiyudin

SOAL KELAS 10-16

1. Dapatkan turunan f^{-1} dari fungsi

$$f(x) = 8x^7 + 2x^3 + 3x + 7$$

2. Hitung integral berikut:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 16}}, \left(x > \frac{4}{3}\right)$$

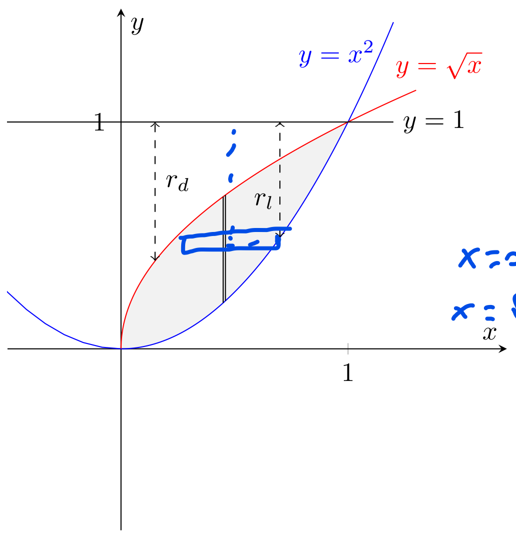
3. Hitung integral berikut:

$$\int \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x}\, dx$$

4. Hitunglah integral berikut:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2 x}{1 - \tan x}\, dx$$

5. Dapatkan volume benda padat yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}, y = x^2$ diputar terhadap garis $y = 1$.
Penyelesaian:
Metode Cakram
Perhatikan sketsa grafik berikut (benda putarnya gambar sendiri hehe :D)



$x = y^2$
$x = \sqrt{y}$

$\int 2\pi r h\, dy$

$r = 1 - y$

$h = 2\pi \int_0^1 (1-y)(y^2 - \sqrt{y})\, dy$

Tinjau bahwa jari-jari dalamnya adalah $r_d = 1 - y = 1 - \sqrt{x}$ dan jari-jari luar adalah

$\int_0^1 y^2 - \sqrt{y} - y^3 + y\sqrt{y}\ dy$

$\frac{y^3}{3} - \frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^4}{4} + \frac{2}{5} y^{5/2} \Big|_0^1$

$-\frac{7}{12} + \frac{-35 + 24}{60} = -\frac{11}{60}$

$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

$-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{-4-3}{12} = \frac{-7}{12} + \frac{2}{5}$

$r_l = 1 - y = 1 - x^2$ serta batasnya adalah dari $x = 0$ hingga $x = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
V = \pi \int_a^b r_l^2 - r_d^2 \, dx &= \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 - (1 - \sqrt{x})^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 - (1 - 2\sqrt{x} + x) \, dx \\
&= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{4x\sqrt{x}}{3} \right]_0^1 \\
&= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right] \\
&= \frac{11\pi}{30}
\end{aligned}$$

SOAL KELAS 26-32

1. Hitung integral berikut:

$$\int \frac{\sinh \sqrt{5x}}{\sqrt{5x}} \, dx$$

2. Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari

$$y = \frac{x^3 \sqrt[4]{5x^2 + 12}}{(1 + x^2)^4}$$

3. Hitung integral berikut:

$$\int \sin 2x \cos^2 x \, dx$$

4. Hitunglah integral berikut:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x + 4)}$$

5. Dapatkan volume benda padat yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh $y = x, y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0$ diputar terhadap sumbu x.

SOAL KELAS 34-40

1. Dapatkan x dari persamaan

$$\ln \frac{1}{x} + \ln 9x^4 = \ln 3x$$

Penyelesaian:
Ingat bahwa $\ln a + \ln b = \ln ab$ dan $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ sehingga

$$\begin{aligned}\ln \frac{1}{x} + \ln 9x^4 &= \ln 3x \\ \ln \frac{9x^4}{x} - \ln 3x &= 0 \\ \ln \frac{9x^3}{3x} &= 0 \\ \ln 3x^2 &= 0\end{aligned}$$

Ingat jika $y = \ln x$, maka $e^y = x$ sehingga

$$e^0 = 3x^2$$

Karena persamaannya berlaku untuk $x > 0$, diperoleh

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Hitung integral berikut:

$$\int x^3 3^{x^4}\, dx$$

Penyelesaian:
Misalkan $x^4 = u$ sehingga $4x^3\, dx = du$ dan diperoleh

$$\int x^3 3^{x^4}\, dx = \int \frac{1}{4} 3^u\, du$$

Ingat bahwa $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ sehingga

$$\begin{aligned}\int x^3 3^{x^4}\, dx &= \frac{1}{4} \times \frac{3^u}{\ln 3} + C \\ &= \frac{3^{x^4}}{4 \ln 3} + C\end{aligned}$$

3. Hitung integral berikut:

$$\int \frac{x^5 + 2x + 1}{x^3 - x}\, dx$$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{x^5+2x+1}{x^3-x} &= \frac{x^5+(-x^3+x^3-x+x)+2x+1}{x^3-x}\\ &= \frac{x^5-x^3+x^3-x+3x+1}{x^3-x}\\ &= \frac{x^2(x^3-x)}{x^3-x}+\frac{x^3-x}{x^3-x}+\frac{3x+1}{x^3-x}\\ &= x^2+1+\frac{3x+1}{x^3-x}\end{aligned}$$

Selanjutnya tinjau dekomposisi pecahan dari $\frac{3x+1}{x^3-x}$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{x^3-x} = \frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\\ &= \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}+\frac{C}{x+1}\\ &= \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}+\frac{C}{x+1}\\ &= \frac{((A+B)x-A)(x+1)+C(x(x-1))}{x(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(A+B)x-Ax-A+Cx^2-Cx}{x(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

Diperoleh $A=-1, B=2, C=-1$ sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+2x+1}{x^3-x}\,dx &= \int x^2+1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}+x-\ln x+2\ln|x-1|-\ln|x+1|+C\end{aligned}$$

4. Hitunglah integral berikut

$$\int_{-3/2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx$$

Penyelesaian:

Misalkan $2x+3=u$ sehingga $2\,dx=du$. Untuk $x=-\frac{3}{2}$, maka $u=0$, dan untuk $x=0$, maka $u=3$. Diperoleh pula $x=\frac{u-3}{2}$ sehingga $x+2=\frac{u+1}{2}$. Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-3/2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}\,dx &= \int_0^3 \frac{u+1}{4\sqrt{u}}\,du\\ &= \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4}\int_a^3 \sqrt{u}+u^{-\frac{1}{2}}\,du\\ &= \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4}\left[\frac{2u\sqrt{u}}{3}+2\sqrt{u}\right]_a^3\\ &= \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4}\left[2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\frac{2a\sqrt{a}}{3}-2\sqrt{a}\right]=\sqrt{3}\end{aligned}$$

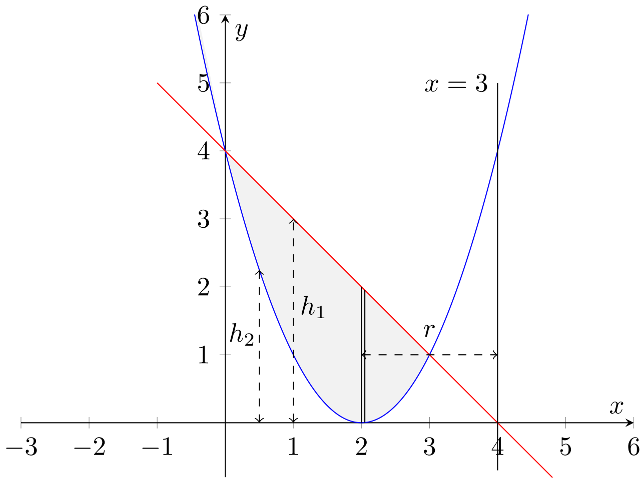
5. Dapatkan volume benda padat yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh $y = (x-2)^2, x+y = 4$ diputar pada $x = 4$.

   Penyelesaian:

   Tinjau bahwa $y = 4 - x$ sehingga titik potongnya adalah

$$\begin{aligned} 4 - x &= x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

   Untuk $x = 0$, maka $y = 4$, dan untuk $x = 3$, maka $y = 1$. Diperoleh titik potongnya adalah $(0,4)$ dan $(3,1)$. Berikut grafiknya



   Perhatikan bahwa jika kita gunakan metode cakram, maka kita perlu membagi daerah integrasi menjadi dua bagian, yaitu untuk $0 \leq y \leq 1$ dan $1 \leq y \leq 4$, karena batas-batas fungsinya berbeda. Oleh karena itu, digunakan metode cincin silinder supaya lebih mudah. Tinjau bahwa jari-jarinya adalah $r = 4 - x$ dan tingginya $h = h_1 - h_2 = 4 - x - (x-2)^2 = -x^2 + 3x$. Batasnya adalah dari $x = 0$ sampai $x = 3$

$$\begin{aligned} V = 2\pi \int_a^b rh\,dx &= 2\pi \int_0^3 (4-x)(-x^2+3x)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^3 -4x^2 + 12x + x^3 - 3x^2\,dx \\ &= 2\pi \int_0^3 x^3 - 7x^2 + 12x\,dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2\right]_0^3 \\ &= 2\pi \left[\frac{81}{4} - \frac{189}{3} + 54 - 0\right] \\ &= \frac{45\pi}{2} \end{aligned}$$

   Jadi volume benda putar yang terjadi adalah $V = \dfrac{45\pi}{2}$

SOAL KELAS 41-47

1. Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari

$$y = x^2 \cosh^2(\sqrt{x})$$

2. Hitung integral berikut:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^{2t}\sqrt{1+e^t}\,dt$$

3. Hitung integral berikut:

$$\int \sin^{\frac{1}{3}} t \cos^3 t\,dt$$

4. Dapatkan limit berikut:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^x$$

5. Sketsa daerah yang dibatasi oleh $y = x, y = \dfrac{1}{x}, x = 2, y = 0$ dan dapatkan luasnya.

SOAL KELAS 56-63

1. Dapatkan penyelesaian dari persamaan

$$\ln(e^{-x} - 1) = x$$

Penyelesaian:
Ingat bahwa jika $y = \ln x$, maka $x = e^y$ sehingga

$$\begin{aligned}
\ln(e^{-x} - 1) &= x \\
e^{-x} - 1 &= e^x \\
1 - e^x &= e^{2x}
\end{aligned}$$

Misalkan $e^x = u$, diperoleh

$$\begin{aligned}
u^2 + u - 1 &= 0 \\
u &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-(4)(1)(-1)}}{2(1)} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Karena $e^x > 0$, akibatnya

$$e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x = \ln e^x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

2. Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari

$$y = \tan^{-1}(xe^{3x})$$

Penyelesaian:
Ingat bahwa jika $y = \tan^{-1}(x)$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Selanjutnya, misalkan $p = xe^{3x}$, dengan aturan perkalian diperoleh

$$\frac{dp}{dx} = 1(e^{3x}) + x(3e^{3x}) = e^{3x} + 3xe^{3x}$$

Dengan aturan rantai, didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dp}\frac{dp}{dx} \\ &= \frac{1}{1+p^2} \times \left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right) \\ &= \frac{e^{3x} + 3xe^{3x}}{1+(xe^{3x})^2}\end{aligned}$$

3. Hitung integral berikut:

$$\int \frac{dx}{5+5\sin x}$$

Penyelesaian:
Misalkan $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ sehingga $2\tan^{-1} u = x$ dan $\dfrac{2}{1+u^2}\,du = dx$.
Dari sini, didapatkan $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ sehingga

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$

Selanjutnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5+5\sin x} &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\sin x} \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{2}{1+u^2+2u}\,du \\ &= \frac{2}{5}\int (u+1)^{-2}\,du \\ &= -\frac{2}{5(u+1)}+C \\ &= -\frac{2}{5\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}+C\end{aligned}$$

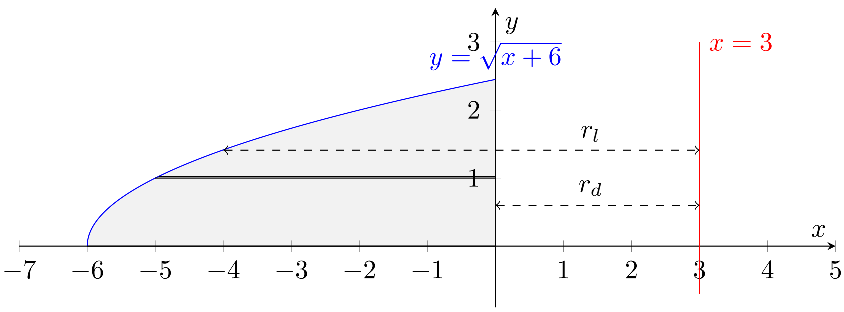
4. Hitung integral berikut:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}\,dx$$

Penyelesaian:
Misalkan $1-2\cos x = u$ sehingga $2\sin x\,dx = du$ dengan batas atas $u = 1-2\cos\frac{\pi}{2} = 1$ dan batas bawah $u = 1-2\cos\frac{\pi}{3} = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du \\ &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{u^{-1/2}}{2}\,du \\ &= \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2}\times(2u^{1/2})\Big|_a^1 \\ &= \lim_{a\to 0^+} 1-\sqrt{a} = 1\end{aligned}$$

5. Dapatkan volume benda padat yang diperoleh bila daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x+6}, y = 0, x = 0$ diputar pada garis $x = 3$
Penyelesaian:
Metode Cakram
Perhatikan sketsa grafik berikut (benda putarnya gambar sendiri hehe :D)



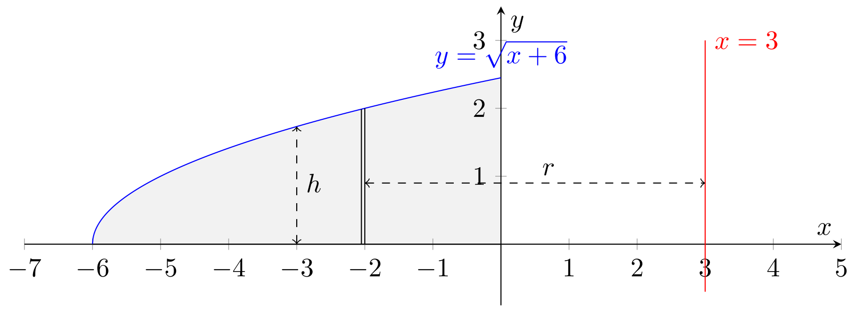
Perhatikan bahwa $x = y^2-6, y \geq 0$.
Jari-jari dalamnya adalah $r_d = 3$ dan jari-jari luar adalah $r_l = 3-x = 3-(y^2-6) = 9-y^2$.

Perhatikan bahwa batasnya adalah dari $y = 0$ hingga $y = \sqrt{6}$, maka

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b r_l^2 - r_d^2 \, dy &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left(9 - y^2\right)^2 - (3)^2 \ dy \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} 81 - 18y^2 + y^4 - 9 \, dy \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} y^4 - 18y^2 + 72 \, dy \\ &= \pi \left[\frac{y^5}{5} - 6y^3 + 72y\right]_0^{\sqrt{6}} \\ &= \pi \left[-\frac{36\sqrt{6}}{5} - 36\sqrt{6} + 72\sqrt{6}\right] \\ &= \frac{216\sqrt{6}}{5}\pi \end{aligned}$$

Metode Cincin Silinder

Berikut adalah sketsa grafiknya, dalam hal ini $r = 3 - x$ sedangkan tinggnya $h = \sqrt{x+6}$



Perhatikan bahwa batasnya adalah dari $x = -6$ hingga $x = 0$, diperoleh

$$V = 2\pi \int_a^b rh \, dx = 2\pi \int_{-6}^{0} (3 - x)\sqrt{x+6} \, dx$$

Misalkan $x + 6 = u$ sehingga $x = u - 6$ dan $du = dx$. Untuk $x = -6$, maka $u = 0$, dan untuk $x = 0$, maka $u = 6$, diperoleh

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^6 (3 - (u - 6))\sqrt{u} \, du \\ &= 2\pi \int_0^6 9\sqrt{u} - u\sqrt{u} \, du \\ &= 2\pi \left[\frac{9(2u\sqrt{u})}{3} + \frac{2u^2\sqrt{u}}{5}\right]_0^6 \\ &= 2\pi \left[6(6)\sqrt{6} - \frac{2(6)^2\sqrt{6}}{5}\right] \\ &= \frac{216\sqrt{6}}{5}\pi \end{aligned}$$

Jadi volume benda putar yang terjadi adalah $V = \dfrac{216}{5}\pi$