PEMBAHASAN SOAL ETS MATEMATIKA I TAHUN 2021/2022

Ahmad Hisbu Zakiyudin

Soal Integral

1. Hitunglah integral berikut menggunakan teknik substitusi

$$\int \frac{8x^3}{(3+x^4)^2}\,dx$$

Penyelesaian:
Misalkan $u = 3 + x^4$ sehingga $du = 4x^3\,dx$ diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{8x^3}{(3+x^4)^2}\,dx &= \int \frac{2(4x^3)\,dx}{(3+x^4)^2}\\ &= \int \frac{2}{u^2}\,du\\ &= -\frac{2}{u} + C\\ &= -\frac{2}{3+x^4} + C\end{aligned}$$

2. Hitunglah integral berikut

$$\int_1^3 \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+8x+27}}\,dx$$

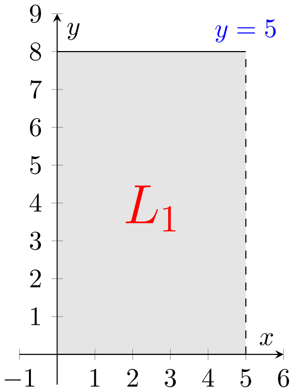
Penyelesaian:
Misalkan $u = x^2 + 8x + 27$ sehingga $du = 2x + 8\,dx$. Selanjutnya jika $x = 1$, diperoleh $u = 1 + 8 + 27 = 36$, jika $x = 3$, diperoleh $u = 9 + 24 + 27 = 60$. Didapatkan

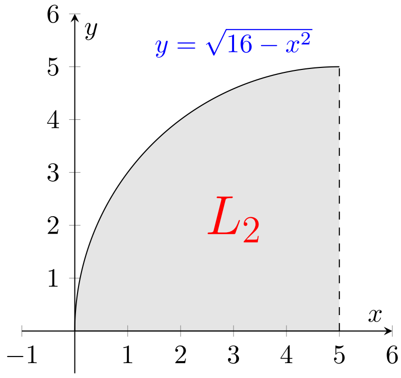
$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+8x+27}}\,dx &= \int_{36}^{60} \frac{du}{\sqrt{u}}\\ &= 2u^{1/2}\Big|_{36}^{60}\\ &= 2\sqrt{60} - 2\sqrt{36}\\ &= 4\sqrt{15} - 12\end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan rumus luas geometri, hitung nilai integral berikut

$$\int_0^5 8 - \sqrt{10x - x^2}\,dx$$

Penyelesaian:
Dengan sifat integral, kita punya $\int_0^5 8 - \sqrt{10x-x^2}\,dx = \int_0^5 8\,dx - \int_0^5 \sqrt{25-(x-5)^2}\,dx$. Integral tersebut, dapat diinterpretasikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = 8$ dikurangi dengan luas daerah di bawah kurva $y = \sqrt{25-(x-5)^2}$. Tinjau bahwa $y = \sqrt{25-(x-5)^2}$ merupakan setengah lingkaran pada sumbu$-y$ positif dengan pusat $(5, 0)$ dan jari-jari 5. Sketsa daerahnya adalah





Mudah terlihat bahwa L_1 merupakan persegi panjang dengan panjang 8 dan lebar 5 sehingga $L_1 = 8 \times 5 = 40$ dan L_2 merupakan seperempat lingkaran dengan jari-jari 5 sehingga $L_2 = \frac{1}{4}\pi(5)^2 = \frac{25}{4}\pi$. Dapat diperoleh hasil integralnya adalah $L_1 - L_2 = 40 - \frac{25}{4}\pi$.

4. Selesaikan integral berikut

$$\int \sqrt[3]{4x^2 - 20x + 25}\, dx$$

Penyelesaian:
Tinjau bahwa $4x^2 - 20x + 25 = 4\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$ sehingga

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}\, dx &= \int \sqrt[3]{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)^{2/3} dx \\
&= \sqrt[3]{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)^{5/3} \times \frac{1}{\frac{5}{3}} + C \\
&= \frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^{5/3} + C
\end{aligned}$$

5. Jika diberikan $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t^2 - 2t}{t^3 - 1}\, dt$ untuk $-\infty < x < \infty$, maka tentukan selang supaya F naik dan F turun.
Untuk mencari selang naik atau turun, perlu dicari dulu $F'(x)$. Dengan menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus II

$$F'(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 1} = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Karena $x^2 + x + 1 > 0$, diperoleh pembuat nolnya adalah $x = 0, x = 1, x = 2$.
Didapatkan $F'(x) \leq 0$ pada selang $(-\infty, 0] \cup (1, 2]$ sehingga $F(x)$ turun pada selang tersebut.
Didapatkan pula $F'(x) \geq 0$ pada selang $[0, 1) \cup [2, +\infty)$ sehingga $F(x)$ naik pada selang tersebut.

6. Jika $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t}{(3+t^2)^2}\, dt$, maka dapatkan $F(0), F(1), F(-1), F'(-1)$. [Petunjuk: Gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II]
Penyelesaian:

Ingat bahwa $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
F(0) &= \int_0^0 \frac{t}{(3+t^2)^2}\,dt = 0\\
F(1) &= \int_1^1 \frac{t}{(3+t^2)^2}\,dt = 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya tinjau bahwa $f(t) = \dfrac{t}{(3+t^2)^2}$ adalah fungsi ganjil karena

$$f(-t) = \frac{-t}{(3+(-t)^2)^2} = -\frac{t}{(3+t^2)^2} = -f(t)$$

Ingat bahwa jika $f(x)$ fungsi ganjil, maka $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ sehingga

$$F(-1) = \int_{-1}^1 \frac{t}{(3+t^2)^2}\,dt = 0$$

Selanjutnya cari $F'(x)$ dengan Teorema Fundamental Kalkulus II dan aturan rantai, kita punya

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{x^2}{(3+(x^2)^2)^2}\frac{d}{dx}[x^2] - \frac{x}{(3+x^2)^2}\frac{d}{dx}[x]\\
&= \frac{x^2}{(3+x^4)^2} - \frac{x}{(3+x^2)^2}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
F'(-1) &= \frac{(-1)^2}{(3+(-1)^4)^2} - \frac{-1}{(3+(-1)^2)^2}\\
&= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

7. Hitunglah integral berikut:

$$\int_{-5}^0 |2x+8|\,dx$$

Penyelesaian:

Tinjau bahwa $|2x+8| = \begin{cases} 2x+8, & x \geq -4 \\ -2x-8, & x < -4 \end{cases}$ sehingga integralnya menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{0} |2x+8|\,dx &= \int_{-5}^{-4} -2x-8\,dx + \int_{-4}^{0} 2x+8\,dx \\ &= -x^2-8x\Big|_{-5}^{-4} + x^2+8x\Big|_{-4}^{0} \\ &= -16+32-(-25+40)+0-(16-32) \\ &= 17 \end{aligned}$$

8. Diberikan $f(x)$ fungsi ganjil dengan $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,dx = 3$. Tentukan

$$\int_{-2}^{2} (\cos x)f(x) + (\sin x)f^4(x) + f^2(x)\,dx$$

Penyelesaian:
Perhatikan bahwa $\cos x$ fungsi genap karena $\cos(-x) = \cos(x)$, sedangkan $\sin x$ fungsi ganjil karena $\sin(-x) = -\sin x$. Selanjutnya, jika $f(x)$ fungsi ganjil dan $g(x)$ fungsi genap, maka

$$\begin{aligned} f^2(-x) = f(-x)f(-x) = [-f(x)][-f(x)] &= f^2(x) \\ f^4(-x) = f^2(-x)f^2(-x) &= f^4(x) \\ f(-x)g(-x) &= -f(x)g(x) \end{aligned}$$

sehingga $f^2(x), f^4(x)$ fungsi genap dan $f(x)g(x)$ fungsi ganjil.
Didapatkan bahwa $(\cos x)f(x)$ fungsi ganjil serta $(\sin x)f^4(x)$ dan $f^2(x)$ fungsi genap.
Ingat bahwa untuk $f(x)$ fungsi ganjil dan $g(x)$ fungsi genap, berlaku

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 0 \qquad \text{dan} \qquad \int_{-a}^{a} g(x) = 2\int_0^a g(x)$$

Didapatkan

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} (\cos x)f(x) + (\sin x)f^4(x) + f^2(x)\,dx &= \int_{-2}^{2} (\cos x)f(x)\,dx + \int_{-2}^{2} (\sin x)f^4(x)\,dx + \int_{-2}^{2} f^2(x)\,dx \\ &= 0 + 0 + 2\int_0^2 f^2(x)\,dx \\ &= 2(3) = 6 \end{aligned}$$

9. Hitunglah integral berikut

$$\int \cos(4x)\sin(20x)\,dx$$

Penyelesaian:

Ingat bahwa

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

sehingga $\cos a \sin b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$. Didapatkan

$$\cos(4x)\sin(20x) = \frac{1}{2}[\sin(24x) - \sin(-16x)] = \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)]$$

Selanjutnya ingat bahwa

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

untuk suatu $a \neq 0$. Dari sini, diperoleh

$$\begin{aligned}\int \cos(4x)\sin(20x)\, dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}\cos(24x) - \frac{1}{16}\cos(16x)\right] + C \\ &= -\frac{1}{48}\cos(24x) - \frac{1}{32}\cos(16x) + C\end{aligned}$$