1 Persamaan Parametrik

Persamaan kurva yang titik-titiknya bergantung pada suatu parameter. Biasanya dituliskan

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

Orientasi kurva parametrik merupakan arah pertambahan parameter. Kurva parametrik dapat digambarkan dengan mengeliminasi parameter, tetapi menghilangkan informasi orientasi.

2 Turunan Persamaan Parametrik

Jika $x(t)$ dan $y(t)$ mempunyai turunan pertama terhadap t yang kontinu dan $\frac{dx}{dt} \neq 0$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Turunan keduanya sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Kurva parametrik memiliki garis singgung vertikal jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} \neq 0$. Sedangkan jika $\frac{dx}{dt} \neq 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, maka kurvanya memiliki garis singgung horizontal.

3 Panjang Busur Kurva Parametrik

Jika persamaan parametrik

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

ditelusuri tepat sekali saat t bertambah dari a ke b dan $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ fungsi kontinu untuk $a \leq t \leq b$, maka panjang busur kurvanya adalah

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

4 Luas Permukaan Kurva Parametrik

Luas permukaan kurva yang diputar terhadap sumbu$-x$

$$S = \int_a^b 2\pi y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Luas permukaan kurva yang diputar terhadap sumbu$-y$

$$S = \int_a^b 2\pi x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

5 Koordinat Kutub dan Koordinat Siku-Siku

Titik $P(x, y)$ pada koordinat siku-siku memiliki koordinat $P(r, \theta)$ pada koordinat kutub dengan hubungan

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

dan

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

6 Grafik dalam Koordinat Kutub

Lingkaran yang berpusat di $(0, 0)$ dan berjari-jari a memiliki persamaan

$$r = a$$

Lingkaran yang berpusat di sumbu$-x$ dan melewati titik $(0, 0)$ serta berjari-jari a memiliki persamaan

$$r = 2a\cos\theta \qquad \text{atau} \qquad r = -2a\cos\theta$$

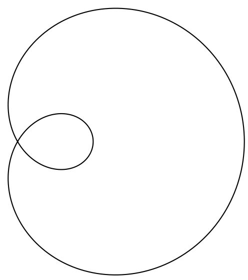
Lingkaran yang berpusat di sumbu$-y$ dan melewati titik $(0, 0)$ serta berjari-jari a memiliki persamaan

$$r = 2a\sin\theta \qquad \text{atau} \qquad r = -2a\sin\theta$$

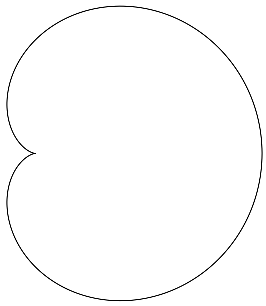
Kardioida dan limacons memiliki persamaan sebagai berikut

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad \text{atau} \qquad r = a \pm b\sin\theta$$

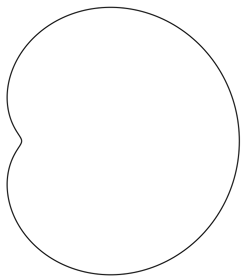
dengan $a > 0, b > 0$
Jika $a < b$, maka terbentuk limacons berikut



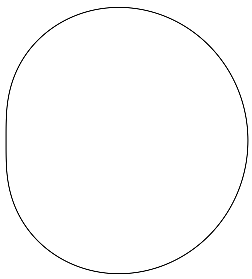
Jika $a = b$, maka terbentuk kardioida berikut



Jika $b < a < 2b$, maka terbentuk limacons cekung berikut



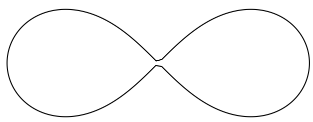
Jika $a \geq 2b$, maka terbentuk limacons cembung berikut



Lemniscate memiliki persamaan

$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta \qquad \text{atau} \qquad r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$$

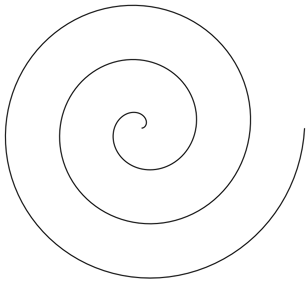
merupakan kurva yang berbentuk baling-baling sebagai berikut



Posisi relatif ke sumbu kutub bergantung pada tanda di depan a^2 dan apakah $\sin 2\theta$ atau $\cos 2\theta$ yang muncul dalam persamaan.
Spiral memiliki persamaan bentuk

$$r = a\theta \quad (\theta \leq 0)$$

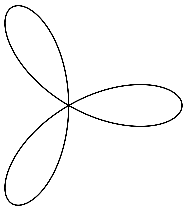
dengan kurva berikut



Kurva rose yang memiliki persamaan

$$r = a \sin n\theta \qquad \text{atau} \qquad r = a \cos n\theta$$

berbentuk sebagai berikut



Kurva ini memiliki n daun jika n ganjil dan $2n$ daun jika n genap

7 Luas dalam Koordinat Kutub

Jika $r = f(\theta)$ kontinu dan tak negatif untuk $\alpha \leq \theta \leq \beta$ dan $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, maka luas kurvanya

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

8 Volume Benda Putar dalam Koordinat Kutub

Volume benda putar yang diputar terhadap sumbu$-x$ dan dibatasi oleh $\theta_1 = \alpha$ dan $\theta_2 = \beta$ adalah

$$V = \int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \, d\theta$$

Volume benda putar yang diputar terhadap sumbu$-y$ dan dibatasi oleh $\theta_1 = \alpha$ dan $\theta_2 = \beta$ adalah

$$V = \int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3 \cos\theta \, d\theta$$

9 Turunan Persamaan Kurva Kutub

Jika $r = f(\theta)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta \frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta \frac{dr}{d\theta}}$$

10 Panjang Busur Kurva Kutub

Jika kurva $r = f(\theta)$ ditelusuri tepat sekali untuk θ bertambah dari α ke β dan $\dfrac{dr}{d\theta}$ kontinu untuk $\alpha \le \theta \le \beta$, maka panjang busur kurva

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

11 Latihan Soal

1. (a) Buatlah sketsa kurva dari persamaan parametrik

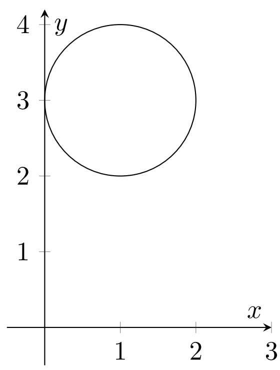
$$x = 1 + \cos t, \quad y = 3 - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

   (b) Dapatkan panjang busur dari kurva tersebut.

   (c) Dapatkan semua nilai parameter t yang menyebabkan kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal

Penyelesaian:

(a) Tinjau bahwa $\cos t = x - 1$ dan $\sin t = 3 - y$ sehingga $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = (x-1)^2 + (3-y)^2$
Diperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di $(1, 3)$ dan berjari-jari 1. Karena $0 \le t \le 2\pi$, maka kurvanya merupakan satu lingkaran penuh sebagai berikut



(b) Karena kurvanya merupakan satu lingkaran penuh dengan jari-jari 1, maka panjang busurnya adalah keliling lingkaran yaitu $2\pi r = 2\pi$
Dapat dihitung pula dengan rumus panjang busur untuk kurva parametrik, yaitu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Tinjau

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \text{ dan } \frac{dy}{dt} = -\cos t$$

serta $a = 0$ dan $b = 2\pi$ sehingga

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= t\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

(c) Kurva tersebut mempunyai garis singgung vertikal jika $\dfrac{dx}{dt} = 0$ dan $\dfrac{dy}{dt} \neq 0$, yaitu saat $t = 0$, $t = \pi$, dan $t = 2\pi$

2. Dapatkan panjang busur dari kurva $r = a\cos\theta + b\sin\theta$. (Berikan gambar sketsa kurvanya). Perhatikan: bilangan b dan a dalam soal ini adalah dua digit terakhir NRP anda. Misalkan NRP anda adalah 06111940000076 maka $b = 7$ dan $a = 6$, jika a atau b adalah 0 ganti dengan angka 10.

Penyelesaian:

Ingat rumus panjang busur untuk kurva kutub $r = f(\theta)$ jika kurvanya ditelusuri keseluruhan satu kali untuk θ bergerak dari $\theta = \alpha$ ke $\theta = \beta$ adalah

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (-a\sin\theta + b\cos\theta)^2 \\ &= a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Tinjau bahwa kurva tersebut ditelusuri keseluruhan satu kali untuk θ bergerak dari $\theta = 0$ ke $\theta = \pi$, karena titik $(a, 0)$ dan titik $(-a, \pi)$ merupakan titik yang sama dalam koordinat kutub. Jadi diperoleh

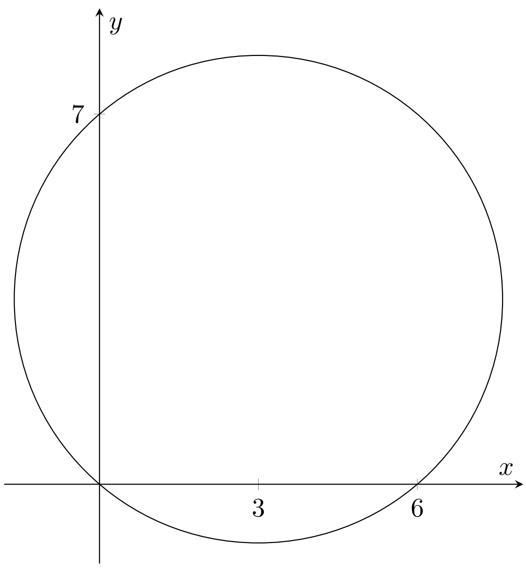
$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, d\theta \\ &= \theta\sqrt{a^2 + b^2}\Big|_0^\pi \\ &= \pi\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Untuk menggambar kurvanya, ingat bahwa $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ dan $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$, serta $x^2 + y^2 = r^2$

sehingga

$$\begin{aligned}
r &= a\cos\theta + b\sin\theta \\
r &= \frac{ax}{r} + \frac{by}{r} \\
r^2 &= ax + by \\
x^2 + y^2 - ax - by &= 0 \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2}{4}
\end{aligned}$$

Jadi kurvanya merupakan lingkaran yang berpusat di $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ dan berjari-jari $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
Jika $a = 6$ dan $b = 7$, maka lingkarannya berpusat di $(3, 3.5)$ dan berjari-jari $\frac{\sqrt{85}}{2}$, serta memotong titik $(0,0), (6,0)$, dan $(0,7)$ sebagai berikut



Cara lain untuk mendapatkan panjang busurnya adalah menghitung keliling lingkaran tersebut yang berjari-jari $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, yaitu $S = 2\pi r = 2\pi \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$

3. Diberikan partikel bergerak sepanjang kurva $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \sqrt{8 + 2t - t^2} \end{cases}$ dengan $-2 \le t \le 1$

   (a) Nyatakan dalam persamaan kutub $r = f(\theta)$ dengan lintasan θ

   (b) Tentukan panjang lintasan kurva tersebut

   (c) Sketsa persamaan kurva tersebut dan arah lintasannya

Penyelesaian:

(a) Perhatikan bahwa $t = 1 - x$ sehingga

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{8 + 2(1-x) - (1-x)^2} \\ &= \sqrt{8 + 2 - 2x - 1 + 2x - x^2} \\ &= \sqrt{9 - x^2} \end{aligned}$$

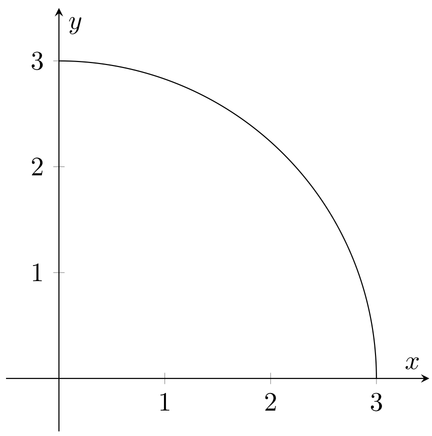
Ingat bahwa $y = r\sin\theta$ dan $x = r\cos\theta$ sehingga

$$\begin{aligned} r\sin\theta &= \sqrt{9 - r^2\cos^2\theta} \\ r^2\sin^2\theta &= 9 - r^2\cos^2\theta \\ r^2 &= 9 \end{aligned}$$

Dapat diambil $r = f(\theta) = 3$. Untuk $t = -2$, maka $x = r\cos\theta = 3$ sehingga $\theta = 0$, dan untuk $t = 1$, maka $x = r\cos\theta = 0$ sehingga $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Jadi $r = f(\theta) = 3$ dengan $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

(b) Tinjau bahwa $r = 3$ dengan $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ merupakan seperempat lingkaran dengan jari-jari $r = 3$ di kuadran pertama, sehingga panjang lintasan kurva tersebut merupakan seperempat keliling lingkaran yaitu $\dfrac{1}{4} \cdot 2\pi r = \dfrac{3}{2}\pi$

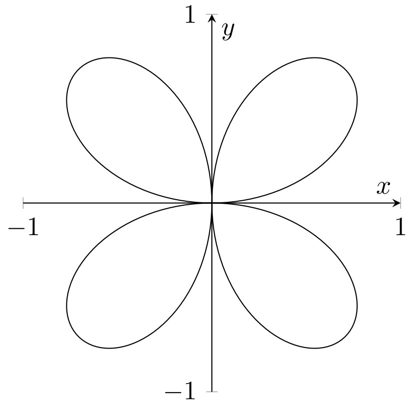
(c) Dari jawaban (b) sudah diperoleh bentuk kurvanya.
Sedangkan untuk arah lintasannya, tinjau bahwa x berkurang dan y bertambah ketika t bergerak dari -2 ke 1, sehingga arahnya berlawanan arah jarum jam. Berikut sketsanya



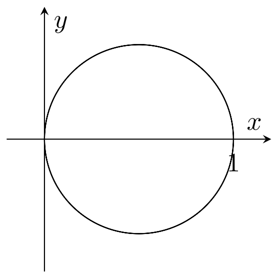
4. Gambarkan dan dapatkan luas irisan dari $r = \sin 2\theta$ dan $r = \cos\theta$

Penyelesaian:

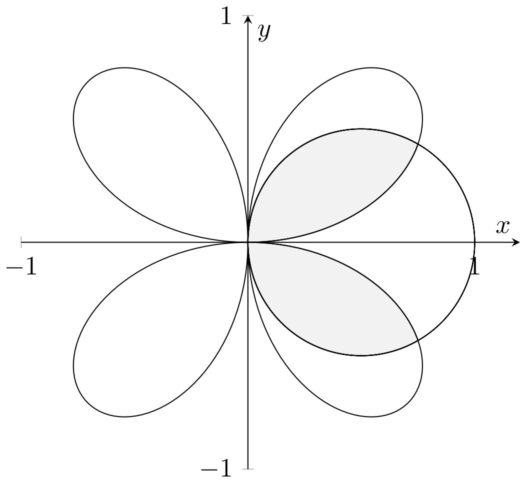
Perhatikan bahwa $r_1 = \sin 2\theta$ merupakan kurva rose dengan n genap sehingga memiliki 4 daun sebagai berikut



Sedangkan $r = \cos\theta$ merupakan lingkaran yang berpusat di $(0.5, 0)$ dan berjari-jari 0.5 sebagai berikut



Dapat diperoleh irisannya sebagai berikut



Perhatikan bahwa kurvanya simetris sehingga cukup hitung luas pada kuadran I kemudian kalikan 2. Tinjau titik perpotongan pada kuadran I adalah

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 \\ \sin 2\theta &= \cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta &= 0 \\ \cos\theta(2\sin\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh perpotongannya ketika $\cos\theta = 0$ yaitu $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ untuk $r_2 = \cos\theta$ dan $\theta_1 = 0$ untuk $r_1 = \sin 2\theta$. Ketika $\sin\theta = \frac{1}{2}$, maka $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{6}$. Jadi, luas irisan kurva pada kuadran I dapat dirumuskan

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} r_1^2 \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r_2^2 \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right] \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{3}{32}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Jadi luas total irisan adalah $2L = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\sqrt{3}$

5. Dapatkan kemiringan garis singgung pada kurva $r = 3\sin 3\theta$ di $\theta = \frac{\pi}{4}$

Penyelesaian:

Ingat bahwa kemiringan garis singgung kurva di suatu titik merupakan turunan persamaan kurva tersebut di titik itu, dan turunan persamaan kurva kutub adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta\frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta}}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin 3\theta\cos\theta + \sin\theta(9\cos 3\theta)}{-3\sin 3\theta\sin\theta + \cos\theta(9\cos 3\theta)}$$

Untuk $\theta = \frac{\pi}{4}$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{-3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}}{-\frac{3}{2} - \frac{9}{2}} \\
&= \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Jadi kemiringan garis singgung pada kurva $r = 3\sin 3\theta$ di $\theta = \frac{\pi}{4}$ adalah $\frac{1}{2}$