



TESIS - SM255401

**KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK
KELAS PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM
DI RUANG GEODESIK BESERTA APLIKASINYA**

AHMAD HISBU ZAKIYUDIN
NRP 6002241016

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2026



TESIS - SM255401

**KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI
UNTUK KELAS PEMETAAN NONEKSPANSIF
DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK BESERTA
APLIKASINYA**

AHMAD HISBU ZAKIYUDIN
NRP 6002241016

DOSEN PEMBIMBING:
Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

**Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2026**



THESIS - SM255401

CONVERGENCE OF SABRI'S ITERATIVE SCHEME FOR THE GENERALIZED CLASS OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN GEODESIC SPACES AND ITS APPLICATIONS

AHMAD HISBU ZAKIYUDIN
NRP 6002241016

SUPERVISOR:
Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

**Department of Mathematics
Faculty of Science and Data analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2026**

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Telah disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Matematika (M.Mat)

di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

Ahmad Hisbu Zakiyudin

NRP: 6002241016

Tanggal Ujian: 20 Januari 2026

Periode Wisuda: April 2026

Disetujui oleh:

Pembimbing:

1. Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si. (.....)
NIP. 19910522 201504 1 001

Penguji:

1. Dr. Mahmud Yunus, M.Si (.....)
NIP. 19620407 198703 1 005
2. Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si (.....)
NIP. 19691004 199402 2 001
3. Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT (.....)
NIP. 19700831 199403 1 003

Kepala Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

**KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS
PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK
BESERTA APLIKASINYA**

Nama Mahasiswa : Ahmad Hisbu Zakiyudin
NRP : 6002241016
Pembimbing : Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

Abstrak

Teori titik tetap, yang diawali oleh Teorema Titik Tetap Banach untuk pemetaan kontraktif, telah berkembang secara signifikan dengan mencakup kelas pemetaan yang lebih luas seperti pemetaan nonekspansif dan perumumannya. Berbagai skema iterasi, seperti Mann, Ishikawa, dan Agarwal, Thakur, JK dan yang lainnya, telah dikembangkan untuk aproksimasi titik tetap dari kelas-kelas pemetaan tersebut di berbagai ruang, baik itu di ruang linear seperti ruang Banach maupun di ruang tak linear seperti ruang geodesik. Baru-baru ini, Sabri dkk. mengusulkan skema iterasi baru dengan tingkat konvergensi yang lebih cepat dibanding skema iterasi lainnya pada ruang Banach konveks seragam. Pada penelitian ini, didapatkan syarat cukup untuk konvergensi- Δ dan kuat dari skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang metrik geodesik $CAT_p(0)$. Berdasarkan percobaan numerik, skema iterasi ini memiliki laju konvergensi yang lebih cepat dibandingkan skema iterasi JK, Thakur, Agarwal, dan Abbas. Selain itu, didapatkan pula aplikasi dari skema ini untuk permasalahan optimasi, tepatnya untuk meminimalisasi fungsi dan rekonstruksi citra tomografi.

Kata-kunci: *aproksimasi titik tetap, pemetaan nonekspansif, ruang geodesik, skema iterasi, masalah optimasi*

CONVERGENCE OF SABRI'S ITERATIVE SCHEME FOR THE GENERALIZED CLASS OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN GEODESIC SPACES AND ITS APPLICATIONS

Name : Ahmad Hisbu Zakiyudin
NRP : 6002241016
Supervisor : Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

Abstract

The Fixed Point theory, originating from Banach's Fixed Point Theorem for contractive mappings, has developed significantly to encompass a wider classes of mappings, such as nonexpansive mappings and their generalizations. Various iterative schemes, such as Mann, Ishikawa, and Agarwal, Thakur, JK, and others, have been developed for fixed point approximations of these classes of mappings in various spaces, both in linear spaces such as Banach spaces and in nonlinear spaces such as geodesic spaces. Recently, Sabri et al. proposed a new iterative scheme with faster convergence rates than previous iterative schemes in uniformly convex Banach spaces. In this study, we will analyze the convergence of Sabri's iterative scheme in geodesic spaces for approximating fixed points of (α, β, γ) -nonexpansive mappings. In this study, we obtain the Δ and strong convergence results of Sabri's iteration scheme for the fixed point approximation of the (α, β, γ) -non-expansive mapping in the geodesic metric space $CAT_p(0)$. Based on numerical experiments, this iteration scheme has a faster convergence rate than the JK, Thakur, Agarwal, and Abbas iteration schemes. In addition, we obtain applications of this scheme for optimization problems, specifically for minimization problems and tomography image reconstruction.

Keywords: *fixed point approximation, nonexpansive mapping, geodesic space, iterative scheme, optimization problems*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas berkah, rahmat, dan Ridho-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul:

“KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS
PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK
BESERTA APLIKASINYA”

sebagai salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Magister Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Nursalim, Ibu Kusnul, dan adik Nadhira, serta keluarga besar Imam Zuhdi yang telah memberikan dukungan, nasehat, dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
2. Bapak Dr. mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si. selaku dosen pembimbing sekaligus dosen wali yang telah memberikan arahan dan bimbingan dengan penuh kesabaran kepada penulis.
3. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si, Ibu Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si, dan Bapak Imam Mukhlash S.Si, M.T selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan dalam tesis ini.
4. Seluruh keluarga besar Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember atas dukungan dan bantuannya.

Akhir kata, semoga Tesis ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 05 Januari 2026

Ahmad Hisbu Zakiyudin

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	iii
LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR NOTASI	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Ruang Metrik Geodesik	7
2.3 Ruang $CAT_p(0)$	9
2.4 Pemetaan Nonekspansif	20
2.5 Aproksimasi Titik Tetap dari Pemetaan Nonekspansif	28
BAB 3 METODE PENELITIAN	31
3.1 Tahapan Penelitian	31
3.2 Diagram Alir Penelitian	33
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1 Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di Ruang $CAT_p(0)$	35

4.2	Konvergensi Skema Iterasi Sabri untuk Pemetaan (α, β, γ) - nonekspansif	44
4.3	Percobaan Numerik	49
4.4	Aplikasi pada Masalah Optimasi	56
4.4.1	Masalah Minimalisasi	56
4.4.2	Rekonstruksi Citra	64
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	73
5.1	Kesimpulan	73
5.2	Saran	74
	DAFTAR PUSTAKA	75
	LAMPIRAN	79
	BIODATA PENULIS	95

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Hubungan antara ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, Banach, ruang $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik ...	14
Gambar 3.1	Blok Diagram Penelitian.	33
Gambar 4.1	Diagram Alir Skema Iterasi Sabri pada Ruang $CAT_p(0)$	45
Gambar 4.2	Galat $d(x_n, x^*)$ (dalam log) vs iterasi.....	53
Gambar 4.3	Galat $d(x_n, x^*)$ (skala log) vs iterasi.....	64
Gambar 4.4	Diagram Data Sinogram ke Ruang Euclid dalam Rekonstruksi Citra	66
Gambar 4.5	Hubungan ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik	67
Gambar 4.6	Diagram alir skema iterasi Sabri untuk rekonstruksi citra tomografi	68
Gambar 4.7	Data awal sinogram dan citra asli	69
Gambar 4.8	Hasil rekonstruksi citra pada iterasi ke-5, 10, 30, dan 60	70

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan JK	51
Tabel 4.2	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Thakur.....	51
Tabel 4.3	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Abbas.....	52
Tabel 4.4	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Agarwal	52
Tabel 4.5	Galat $d(x_n, x^*)$	53
Tabel 4.6	Iterasi dengan parameter $a_n = 0.42, b_n = 0.83, c_n = 0.31$..	54
Tabel 4.7	Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}, b_n = \frac{2}{n+3}, c_n = \frac{4n+2}{7n+4}$...	54
Tabel 4.8	Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{\sqrt{4n+9}}{2n+13}, b_n = 0.8, c_n = 1 - \frac{n^2}{\sqrt{n^7+3}}$	55
Tabel 4.9	Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{n^3}{n^5+1}, b_n = \frac{1}{n+1}, c_n = \frac{3n+4}{5n^2+4}$	55
Tabel 4.10	Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^5+1}{5n^7+9}, b_n = 1 - \frac{3}{n+5}, c_n = 1 - \frac{\sqrt{n^3+8}}{5n^5+9}$	55
Tabel 4.11	Hasil simulasi sebanyak 55 iterasi untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK	60
Tabel 4.12	Galat simulasi $d(x_n, x^*)$ untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK	62
Tabel 4.13	Parameter simulasi rekonstruksi citra	69
Tabel 4.14	MSE dan PSNR Rekonstruksi Citra	71

DAFTAR NOTASI

\mathbb{R}	: Himpunan semua bilangan real
\mathbb{R}^+	: Himpunan semua bilangan real positif
\mathbb{N}	: Himpunan semua bilangan asli
\mathbb{R}^n	: Himpunan semua vektor kolom dengan n komponen real
$\mathbf{0}$: Vektor yang semua anggotanya bernilai 0
$d(x, y)$: Metrik antara titik x dan y
$(d(x, y))^p$: Perkalian dari $d(x, y)$ dengan $d(x, y)$ sebanyak p kali
$:=$: Didefinisikan
\neq	: Tidak sama dengan
\geq	: Lebih besar atau sama dengan
\leq	: Lebih kecil atau sama dengan
$>$: Lebih besar
$<$: Lebih kecil
\nless	: Tidak kurang dari
\subset	: Himpunan bagian sejati
\subseteq	: Himpunan bagian tak sejati
\cup	: Operasi gabungan pada himpunan
\cap	: Operasi irisan pada himpunan
\emptyset	: Himpunan kosong
∞	: Tak hingga
$\ x\ $: Norm dari x
$\ x\ _p$: Norm p dari x
$\%$: Persentase
$ x $: Harga mutlak dari x
∂	: Turunan parsial
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$: Limit barisan (x_n)
\sup	: Supremum (batas atas terkecil)
\limsup	: Limit superior
Tx	: Hasil pemetaan dari x oleh T
$Fix(T)$: Titik tetap dari pemetaan T
\triangle	: Segitiga
\bar{x}	: Titik komparasi

$\overline{\Delta}$: Segitiga komparasi
$sgn(x)$: Fungsi tanda dari x
\oplus	: Operasi konveks antara dua titik pada ruang geodesik (Oplus)
$J_{\lambda}^f(x)$: Operator resolvent λ dari f
P_C	: Proyeksi titik terdekat pada himpunan C
A^*	: Transformasi adjoin dari transformasi A
$argmin_{y \in X} f(y)$: Nilai $y \in X$ sehingga $f(y)$ minimum

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penulisan Tesis.

1.1 Latar Belakang

Teorema Titik Tetap Banach merupakan temuan awal yang mengilhami berkembangnya teori mengenai titik tetap dan berbagai macam aplikasinya di bidang matematika maupun sains terapan. Teorema ini menyatakan bahwa jika $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan kontraktif pada suatu himpunan bagian tertutup W dari ruang Banach B , yaitu terdapat konstanta $c \in [0, 1)$ sehingga

$$\|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\| \quad (1.1)$$

untuk setiap $x, y \in W$, maka pemetaan T memiliki tepat satu titik tetap (Banach, 1922). Jika konstanta c boleh bernilai 1, pemetaan tersebut dinamakan pemetaan nonekspansif. Pemetaan ini merupakan perluasan dari pemetaan kontraktif yang memainkan peranan penting dalam teori titik tetap, terutama dalam memastikan eksistensi serta konvergensi solusi dari berbagai permasalahan. Namun, berbeda dengan pemetaan kontraktif, pemetaan nonekspansif tidak selalu memiliki titik tetap yang tunggal. Selain itu, terdapat syarat cukup untuk keberadaan titik tetap pada kelas pemetaan ini, yaitu jika W merupakan himpunan bagian tertutup dan terbatas dari ruang Banach konveks seragam (Browder, 1965).

Dengan menggunakan teori titik tetap, eksistensi solusi dari suatu model matematika dapat dijamin dengan mendefinisikan pemetaan yang bersesuaian. Walaupun demikian, solusi tersebut tidak selalu dalam bentuk eksak, atau mungkin sulit untuk diperoleh secara analitik, sehingga diperlukan solusi numerik. Untuk mendapatkan solusi numeriknya, diperlukan suatu algoritma iterasi yang konvergen ke solusi dari model tersebut.

Pada pemetaan kontraktif Banach, skema iterasi Picard merupakan

skema iterasi paling sederhana yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi numerik dari suatu model matematika. Namun, skema ini tidak selalu konvergen untuk pemetaan nonekspansif (Krasnosel'skii, 1955). Pada tahun 1953, Mann memperkenalkan skema iterasinya yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif, tetapi skemanya juga tidak selalu konvergen pada pemetaan pseudo-kontraktif (Mann, 1953). Mengatasi hal tersebut, Ishikawa mengembangkan skema iterasi dua tahap untuk mendapatkan nilai aproksimasi titik tetap dari pemetaan pseudo-kontraktif (Ishikawa, 1974). Berbagai variasi dan pengembangan skema iterasi untuk pemetaan nonekspansif ini juga terus bermunculan, sebagaimana oleh (Noor, 2000; Agarwal, O'Regan dan Sahu, 2007; Abbas dan Nazir, 2014; Thakur, Thakur dan Postolache, 2016; Ahmad, Ullah, Arshad dan Ma, 2021). Tidak hanya itu, berbagai jenis pemetaan nonekspansif juga dikembangkan oleh berbagai peneliti, antara lain: pemetaan Suzuki nonekspansif (Suzuki, 2008), pemetaan α -nonekspansif (Aoyama dan Kohsaka, 2011), pemetaan yang memenuhi kondisi (C_μ) (García-Falset, Llorens-Fuster dan Suzuki, 2011), pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif (Pant dan Pandey, 2019), serta pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif (Ullah, Ahmad, Hammad dan George, 2023).

Konvergensi dari skema iterasi terhadap titik tetap dari berbagai macam jenis pemetaan juga diteliti di berbagai macam jenis ruang, baik itu ruang linear seperti ruang Hilbert dan ruang Banach, maupun di ruang geodesik. (lihat (Ariza-Ruiz, Leuştean dan López-Acedo, 2014; Bridson dan Haefliger, 1999; Dehghan dan Roojin, 2014; Kirk dan Shahzad, 2014; Kumam dan Chaipunya, 2018), dan referensi di dalamnya). Pada dasarnya, ruang geodesik adalah ruang yang memiliki suatu geodesik, atau lintasan terpendek di antara dua titik. Ruang ini memungkinkan struktur nonlinier sehingga model matematika nonlinier dapat dimodelkan dengan lebih akurat. Salah satu contoh dari ruang ini adalah ruang $CAT(0)$ yang lengkap atau dapat disebut juga ruang Hadamard. Pada tahun 2017, Khamsi dkk. mengembangkan ruang yang lebih umum dari $CAT(0)$ yaitu ruang $CAT_p(0)$ dan membuktikan bahwa pemetaan nonekspansif pada himpunan bagian tak kosong yang tertutup, terbatas, dan konveks, dari ruang $CAT_p(0)$ selalu memiliki titik tetap (Khamsi dan Shukri, 2017). Kemudian Salisu dkk. mendapatkan konvergensi dari skema iterasi JK untuk pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C_μ) di ruang $CAT_p(0)$. Mereka juga mendapatkan

aplikasinya untuk masalah optimasi. Kemudian mereka memberikan hasil eksperimen numeriknya (Salisu, Minjibir, Kumam dan Sriwongsa, 2022).

Baru-baru ini, Sabri dkk. memperkenalkan skema iterasi baru untuk aproksimasi titik tetap pada pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif di ruang Banach konveks seragam. Melalui eksperimen numerik, mereka mendapatkan tingkat konvergensi yang lebih cepat dibanding beberapa skema iterasi lainnya (Sabri, Alhaidary dan Sadiq, 2025). Pada penelitian ini, akan diselidiki syarat-syarat konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$, khususnya untuk pemetaan nonekspansif tipe (α, β, γ) yang diberikan oleh Ullah dkk. Kemudian akan dilakukan eksperimen numerik dengan skema iterasi tersebut serta didapatkan aplikasinya pada masalah optimasi.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka konsep baru yang diangkat dalam perumusan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana syarat perlu dan cukup untuk konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif?
2. Bagaimana laju konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk mendapatkan aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dibanding dengan skema iterasi lainnya secara numerik?
3. Bagaimana aplikasi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ pada masalah optimasi?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Laju konvergensi yang dibandingkan adalah laju dari skema iterasi Sabri, JK, Thakur, dan Agarwal berdasarkan banyaknya iterasi yang diperlukan.
2. Terdapat dua masalah optimasi yang dibahas, yaitu
 - (a) permasalahan minimalisasi fungsi, lebih tepatnya mencari titik $x \in X$ sehingga $f(x) \leq f(y)$ untuk setiap $y \in X$, dengan X adalah

suatu himpunan tak kosong dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang memenuhi kondisi konveks *proper lower semicontinuous*.

- (b) permasalahan *split feasibility problem* yang kemudian diterapkan dalam rekonstruksi citra tomografi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan syarat perlu dan cukup untuk konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.
2. Mengetahui laju konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk mendapatkan aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dibanding dengan skema iterasi lainnya secara numerik.
3. Mendapatkan aplikasi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ pada masalah optimasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Sebagai kontribusi pada pengembangan teori titik tetap, khususnya pada analisis konvergensi skema iterasi untuk kelas pemetaan yang lebih umum dan ruang yang lebih umum, yaitu pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.
2. Sebagai bahan kajian dan perbandingan mengenai laju konvergensi antara skema iterasi Sabri dengan skema iterasi lainnya.
3. Sebagai alternatif penyelesaian masalah optimasi, khususnya untuk minimalisasi fungsi dan rekonstruksi citra.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bagian ini dipaparkan penelitian terdahulu yang berkaitan dengan penelitian ini. Demikian juga diberikan beberapa definisi, lemma, teorema serta beberapa contoh terkait sebagai dasar teori yang menjadi referensi dalam penelitian.

2.1 Penelitian Terdahulu

Bermula dari teorema titik tetap Banach dengan skema iterasi Picard, penelitian mengenai titik tetap dan aproksimasinya terus berkembang hingga saat ini. Dari yang awalnya pemetaan kontraksi, kemudian dikembangkan menjadi pemetaan nonekspansif dan berbagai perumumannya. Tidak seperti pemetaan kontraktif yang titik tetapnya terjamin ada dan tunggal jika di ruang Banach lengkap, pemetaan nonekspansif mensyaratkan beberapa kondisi lain, yaitu titik tetapnya ada jika pemetaannya adalah pemetaan diri sendiri dari himpunan bagian tertutup dan terbatas dari ruang Banach konveks seragam. Walaupun sudah dijamin ada, titik tetapnya juga tidak selalu tunggal (Browder, 1965).

Untuk mendapatkan titik tetap dari pemetaan nonekspansif yang sulit diperoleh secara langsung, diperlukan berbagai macam skema iterasi yang konvergen ke titik tetapnya dengan mendapatkan nilai aproksimasinya. Skema iterasi pertama yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif diperoleh oleh Mann pada tahun 1953 (Mann, 1953). Kemudian Ishikawa mengembangkannya menjadi skema iterasi dua tahap karena skema iterasi Mann gagal konvergen pada pemetaan pseudo-kontraktif (Ishikawa, 1974). Dari hasil yang diperoleh Mann dan Ishikawa, Noor kemudian mengembangkan skema iterasi untuk aproksimasi titik tetap menjadi skema iterasi tiga tahap (Noor, 2000). Selanjutnya, pada tahun 2007 Agarwal mengenalkan skema iterasinya dengan memodifikasi skema iterasi yang dikenalkan oleh Mann (Agarwal dkk., 2007). Pada tahun berikutnya, Suzuki memperkenalkan pemetaan nonekspansif yang baru dengan melemahkan kondisi pemetaannya. Pemetaan baru tersebut ia namakan sebagai pemetaan yang memenuhi kondisi (C) (Suzuki, 2008).

García-Falset dkk. kemudian juga mengembangkan pemetaan tersebut dengan memperumum kondisinya (García-Falset dkk., 2011).

Penelitian lain terkait skema iterasi untuk pemetaan nonekspansif diperoleh Abbas dan Nazir. Mereka mengenalkan skema iterasi baru yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif biasa dan mendapatkan aplikasinya untuk masalah minimalisasi dengan konstrain dan masalah *feasibility* (Abbas dan Nazir, 2014). Berikutnya, Thakur juga mengenalkan skema iterasi baru yang konvergen lebih cepat daripada skema iterasi sebelum-sebelumnya untuk pemetaan nonekspansif Suzuki di ruang Banach (Thakur dkk., 2016).

Pemetaan nonekspansif beserta aproksimasi titik tetapnya tidak hanya dipelajari dalam ruang Banach, tetapi juga dalam ruang metrik lain, khususnya ruang metrik geodesik. Ruang ini merupakan ruang yang memiliki struktur geodesik, yaitu lintasan terpendek di antara dua titik. Ruang ini memiliki keunggulan dalam hal struktur nonlinier, sehingga dapat memodelkan suatu permasalahan nonlinier secara lebih akurat. Salah satu contoh dari ruang ini adalah ruang $CAT(0)$. Kemudian ruang tersebut diperumum oleh Khamsi dkk. menjadi ruang $CAT_p(0)$ (Khamsi dan Shukri, 2017). Salah satu hasil aproksimasi titik tetap di ruang tersebut didapatkan oleh Calder dkk. dengan mengenalkan skema iterasi Agarwal pertubasi di ruang $CAT_p(0)$. Mereka menggunakan tiga pemetaan nonekspansif biasa dan mendapatkan hasil konvergensi- Δ dengan skema iterasi tersebut (Calderon, Khamsi dan Martinez-Moreno, 2021).

Dalam ruang Banach, Pant dan Pandey mengusulkan perumuman baru dari pemetaan nonekspansif yang dikenal sebagai pemetaan nonekspansif tipe Reich–Suzuki. Skema iterasi yang mereka gunakan adalah skema iterasi Thakur dan ruang yang digunakan adalah ruang hiperbolik (Pant dan Pandey, 2019). Kemudian, Ahmad dkk. mengenalkan skema iterasi baru yang dinamakan skema iterasi JK yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C) (Ahmad dkk., 2021). Hasil menarik juga diperoleh Ullah dkk. dengan mengenalkan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif yang juga perumuman dari pemetaan nonekspansif (Ullah dkk., 2023). Arif dkk. mendapatkan hasil konvergensi dari skema iterasi JK untuk pemetaan jenis tersebut (Arif, Aphane, Ullah, Noorwali, Nawaz dan Ullah, 2025).

Selain mengalami berbagai pengembangan dalam bentuk perumuman kelas pemetaan, pemetaan nonekspansif beserta skema iterasi yang

menyertainya juga memiliki beragam aplikasi di berbagai bidang. Perumuman tersebut mencakup perluasan dari pemetaan nonekspansif klasik ke berbagai kelas pemetaan yang lebih umum dengan kondisi kontraktivitas yang lebih lemah. Beberapa aplikasi yang diperoleh antara lain pada persamaan diferensial, persamaan integral, masalah optimasi, rekonstruksi citra, dan bidang terkait lainnya (Byrne, 2003; Ramage, Lopez Gutierrez, Fischer, Sekula, Santaella, Scarfe, Brasil dan de Oliveira-Santos, 2023; Salisu dkk., 2022).

sitasi

Hasil terbaru di ruang Banach diperoleh Sabri dkk. dengan mengenalkan skema iterasinya yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Skema iterasi yang mereka peroleh secara numerik juga lebih cepat konvergen dibanding skema iterasi sebelumnya (Sabri dkk., 2025). Hasil terbaru juga, Salisu dkk. meneliti terkait pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C_λ) di ruang $CAT_p(0)$. Mereka mendapatkan bahwa pemetaan tersebut memiliki sifat *demiclosedness*. Kemudian, skema iterasi yang mereka gunakan adalah skema iterasi JK. Dengan skema iterasi tersebut, mereka mendapatkan beberapa teorema terkait dengan konvergen- Δ maupun konvergen kuat untuk pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C_λ) . Lebih lanjut lagi, mereka juga mendapatkan beberapa aplikasi dari hasil yang mereka peroleh sekaligus memberikan hasil numeriknya (Salisu dkk., 2022).

2.2 Ruang Metrik Geodesik

Pada bagian ini dikenalkan konsep terkait ruang metrik geodesik. Secara intuisi, ruang metrik geodesik adalah ruang metrik dengan sifat terdapat jalur terpendek di antara dua titik dari ruang metrik tersebut. Jalur terpendek di sini tidak selalu garis lurus seperti yang ada di \mathbb{R}^2 , tetapi jalurnya bisa melengkung atau berkelok asalkan lintasannya memiliki panjang minimum terhadap metriknya. Berikut diberikan definisi ruang metrik geodesik secara formal.

Definisi 2.2.1. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan (X, d) adalah ruang metrik dan $x, y \in X$. Pemetaan kontinu $G : [0, 1] \rightarrow X$ disebut geodesik yang menghubungkan x dan y jika memenuhi

$$(a) \ G(0) = x,$$

$$(b) \ G(1) = y$$

(c) $d(G(t), G(s)) = |t - s|d(x, y)$ untuk setiap $t, s \in [0, 1]$.

Ruang metrik (X, d) disebut sebagai ruang metrik geodesik jika setiap elemen $x, y \in X$ dihubungkan oleh suatu geodesik.

Untuk selanjutnya, ruang metrik geodesik dinotasikan sebagai (X, d, G) . Pada ruang metrik geodesik, himpunan titik-titik pada geodesik yang menghubungkan x dan y dituliskan sebagai $[x \sim y]$. Kemudian, berikut diberikan contoh ruang metrik geodesik dan bukan ruang metrik geodesik.

Contoh 2.2.1. (Bridson dan Haefliger, 1999) Setiap ruang bernorma $(V, \|\cdot\|)$ dengan metrik $d(v, w) = \|v - w\|$ untuk setiap $v, w \in V$ adalah ruang metrik geodesik dengan geodesik yang menghubungkan v dan w didefinisikan sebagai

$$G(t) = (1 - t)v + tw, \quad \text{untuk setiap } t \in [0, 1].$$

Penjelasan dari Contoh 2.2.1 adalah sebagai berikut.

Diperhatikan bahwa $G(0) = v$, $G(1) = w$, dan

$$\begin{aligned} d(G(t), G(s)) &= \|(1 - t)v + tw - (1 - s)v - sw\| \\ &= \|(t - s)(w - v)\| \\ &= |t - s|\|w - v\| \\ &= |t - s|d(v, w), \end{aligned}$$

untuk setiap $t, s \in [0, 1]$. Dengan demikian, G adalah geodesik yang menghubungkan v dan w , sehingga setiap ruang bernorma adalah ruang metrik geodesik.

Contoh 2.2.2. Diberikan $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ dengan metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \neq y \\ 0 & \text{jika } x = y. \end{cases}$$

Ruang metrik (X, d) bukan ruang metrik geodesik karena untuk $x = 0$ dan $y = 1$, serta $t = \frac{1}{2}$, tidak ada $G(t) \in X$ sehingga

$$d(0, G(t)) = d(G(t), 1) = \frac{1}{2}d(0, 1) = \frac{1}{2}.$$

Konsep segitiga geodesik merupakan konsep dasar yang digunakan

dalam mendefinisikan ruang $CAT(0)$ dan ruang $CAT_p(0)$. Berikut ini diberikan definisi segitiga geodesik.

Definisi 2.2.2. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan (X, d, G) ruang metrik geodesik. Suatu segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di ruang metrik geodesik berisi tiga titik $p, q, r \in X$ sebagai titik sudut dan geodesik di antara dua titik tersebut, yaitu $[p \sim q], [p \sim r], [q \sim r]$, disebut sebagai sisi dari segitiganya.

Untuk selanjutnya, titik yang terletak pada suatu segitiga geodesik $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ dituliskan sebagai $z \in \triangle(x_1, x_2, x_3)$ jika $z \in [x_i \sim x_j]$ untuk suatu $i, j \in \{1, 2, 3\}$ dengan $i \neq j$. Titik $z \in [x_i \sim x_j]$ direpresentasikan oleh $z = (1-t)x_i \oplus tx_j$ dengan $t = \frac{d(x_i, z)}{d(x_i, x_j)}$ dan \oplus adalah operasi geodesik. Contoh dari segitiga geodesik di ruang metrik geodesik diberikan sebagai berikut.

Contoh 2.2.3. Sebagaimana pada Contoh 2.2.1, setiap ruang bernorma $(V, \|\cdot\|)$ adalah ruang metrik geodesik. Misalkan dipilih $V = \mathbb{R}^2$ dan $p = (0, 0), q = (1, 0), r = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, maka segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di ruang tersebut memiliki titik sudut p, q, r dan sisi-sisi segitiga geodesik yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} [p \sim q] &= \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} = \{(t, 0) \mid t \in [0, 1]\}, \\ [p \sim r] &= \{(1-t)p + tr \mid t \in [0, 1]\} = \{(0, t) \mid t \in [0, 1]\}, \\ [q \sim r] &= \{(1-t)q + tr \mid t \in [0, 1]\} = \{(1-t, t) \mid t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Titik $z = (0.5, 0)$ terletak pada sisi $[p \sim q]$ dari segitiga geodesik tersebut dan dapat dituliskan sebagai $z = (1-t)p \oplus tq$ dengan $t = 0.5$ dan operasi geodesik \oplus sama dengan operasi penjumlahan vektor.

Untuk selanjutnya, pada suatu segitiga geodesik $\triangle(x_1, x_2, x_3)$, setiap titik $z \in [x_i \sim x_j]$ dengan $i, j \in \{1, 2, 3\}$ dan $i \neq j$, dinotasikan sebagai $z = (1-t)x_i \oplus tx_j$ dengan $t = \frac{d(x_i, z)}{d(x_i, x_j)}$.

2.3 Ruang $CAT_p(0)$

Sebelum membahas mengenai ruang $CAT_p(0)$, terlebih dahulu dikenalkan ruang $CAT(0)$, sebab ruang $CAT_p(0)$ adalah perumuman dari ruang $CAT(0)$. Ruang $CAT(0)$ sejatinya adalah ruang geodesik, tetapi dengan syarat tambahan bahwa setiap segitiga geodesik di ruang tersebut memenuhi ketaksamaan $CAT(0)$. Untuk itu, berikut diberikan konsep dari segitiga komparasi.

Definisi 2.3.1. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ pada ruang metrik geodesik (X, d, G) . Suatu segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ adalah suatu segitiga di ruang bernorma $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ yang memenuhi $d(p, q) = \|\bar{p} - \bar{q}\|, d(p, r) = \|\bar{p} - \bar{r}\|$, dan $d(q, r) = \|\bar{q} - \bar{r}\|$.

Contoh 2.3.1. (Eskandani dan Raeisi, 2018) Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ dengan metrik \tilde{d} yang didefinisikan untuk setiap $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sebagai

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_1^2 - x_2 + y_2 - y_1^2)^2}.$$

Ruang metrik tersebut adalah ruang metrik geodesik dengan geodesik yang menghubungkan x dan y didefinisikan sebagai

$$G(t) = \left((1-t)x_1 + ty_1, ((1-t)x_1 + ty_1)^2 - (1-t)(x_1^2 - x_2) - t(y_1^2 - y_2) \right),$$

untuk setiap $t \in [0, 1]$. Untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ dengan $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2)$, dan $r = (r_1, r_2) \in (\mathbb{R}^2, \tilde{d})$, segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ di ruang Euclid $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ dapat dibentuk dengan memilih titik $\bar{p} = (p_1, p_1^2 - p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_1^2 - q_2)$, $\bar{r} = (r_1, r_1^2 - r_2) \in \mathbb{R}^2$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \tilde{d}(p, q) &= \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_1^2 - p_2 + q_2 - q_1^2)^2} = \|\bar{p} - \bar{q}\|_2, \\ \tilde{d}(p, r) &= \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_1^2 - p_2 + r_2 - r_1^2)^2} = \|\bar{p} - \bar{r}\|_2, \\ \tilde{d}(q, r) &= \sqrt{(q_1 - r_1)^2 + (q_1^2 - q_2 + r_2 - r_1^2)^2} = \|\bar{q} - \bar{r}\|_2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, berikut ini diberikan definisi ruang $CAT(0)$.

Definisi 2.3.2. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan ruang metrik geodesik (X, d, G) dan ruang Euclid $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Ruang (X, d, G) disebut sebagai ruang $CAT(0)$ jika untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r) \in X$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$, terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in \mathbb{R}^2$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}$ berlaku $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$.

Contoh 2.3.2. Sebagaimana Contoh 2.3.1, ruang metrik geodesik $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ adalah ruang $CAT(0)$ karena untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$, terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ di ruang Euclid $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ berlaku $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$.

Contoh 2.3.3. (Bridson dan Haefliger, 1999) Setiap ruang Hilbert adalah ruang $CAT(0)$.

Khamisi mengembangkan ruang yang lebih umum, yaitu ruang $CAT_p(0)$, dengan $p \geq 2$, dengan mengganti segitiga komparasi pada ruang $CAT(0)$ dari yang awalnya segitiga di \mathbb{R}^2 menjadi segitiga di ℓ_p . Berikut ini definisi dari ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 2.3.3. (Khamisi dan Shukri, 2017) Diberikan ruang metrik geodesik (X, d, G) dan ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ untuk $p \geq 2$. Ruang (X, d, G) disebut sebagai ruang $CAT_p(0)$, untuk $p \geq 2$, jika untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r) \in X$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$, terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in \ell_p$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}$ berlaku $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_p$.

Contoh 2.3.4. (Khamisi dan Shukri, 2017) Ruang $CAT(0)$ adalah ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 2$.

Contoh 2.3.5. (Khamisi dan Shukri, 2017) Setiap ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p \geq 2$ adalah ruang $CAT_p(0)$.

Penjelasan dari Contoh 2.3.5 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa setiap ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p \geq 2$ adalah ruang metrik geodesik. Misalkan $\triangle(p, q, r)$ adalah segitiga geodesik di $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p, q, r \in \ell_p$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$. Dapat dipilih segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in (\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$, dan $\bar{r} = r$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}$ berlaku $\bar{x} = x$ dan $\bar{y} = y$. Dengan demikian, diperoleh

$$d(x, y) = \|x - y\|_p = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p,$$

yang menunjukkan bahwa ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p \geq 2$ adalah ruang $CAT_p(0)$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan sebuah lema yang menyatakan bahwa ruang $CAT_p(0)$ dengan $p > 2$ bukan merupakan ruang $CAT(0)$.

Lema 2.3.1. (Khamisi dan Shukri, 2017) Untuk $p > 2$ ruang $CAT_p(0)$ bukan merupakan ruang $CAT(0)$.

Berikut ini diberikan sebuah contoh ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 3$ yang bukan merupakan ruang Banach dan bukan pula ruang $CAT(0)$.

Contoh 2.3.6. Diberikan $X = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3 < \infty\}$ dan untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in X$ didefinisikan metrik

$$d(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.1)$$

Didefinisikan pula geodesik yang menghubungkan $w = (w_1, w_2, w_3, \dots)$ dan $z = (z_1, z_2, z_3, \dots)$, yaitu $G: [0, 1] \rightarrow X$ dengan $G(t) := (1-t)w \oplus tz$ sebagai

$$G(t) = (\alpha_1(t), \alpha_1(t)^3 - (1-t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2), \alpha_3(t), \alpha_4(t), \dots), \quad (2.2)$$

dengan $\alpha_i(t) = (1-t)w_i + tz_i$ untuk $i = 1, 3, 4, 5, \dots$.

Ruang (X, d, G) merupakan ruang $CAT_p(0)$, tetapi bukan ruang Banach dan bukan ruang $CAT(0)$.

Penjelasan dari Contoh 2.3.6 dapat diuraikan sebagai berikut.

Untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$, didefinisikan pemetaan $M: X \rightarrow X$ sebagai $M(x) = (x_1, x_1^3 - x_2, x_3, \dots)$. Pemetaan ini merupakan pemetaan bijektif yang memetakan setiap titik $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ ke titik lain $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots) \in X$ dengan $\bar{x}_i = x_i$ untuk setiap $i = 1, 3, 4, 5, \dots$ dan $\bar{x}_2 = x_1^3 - x_2$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in X$, berlaku

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\bar{x}_i - \bar{y}_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \|\bar{x} - \bar{y}\|_3. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa (X, d, G) merupakan ruang metrik yang lengkap, selanjutnya diamati bahwa

$$G(0) = (w_1, w_2, w_3, \dots) = w \quad \text{dan} \quad G(1) = (z_1, z_2, z_3, \dots) = z.$$

Diamati pula untuk $i = 1, 3, 4, 5, \dots$

$$\beta_i(t, s) = \alpha_i(t) - \alpha_i(s) = (1-t)w_i + tz_i - ((1-s)w_i + sz_i) = (s-t)(w_i - z_i)$$

serta

$$\begin{aligned}\beta_2(t, s) &= \alpha_1(t)^3 - (\alpha_1(t)^3 - (1-t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2)) \\ &\quad - \alpha_1(s)^3 + (\alpha_1(s)^3 - (1-s)(w_1^3 - w_2) - s(z_1^3 - z_2)) \\ &= (s-t)(w_1^3 - w_2 - z_1^3 + z_2).\end{aligned}$$

Didapatkan bahwa

$$d(G(t), G(s)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i(t, s)|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = |s-t|d(w, z).$$

Hal ini berarti $G(t)$ merupakan geodesik pada X . Kemudian, untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r) \in X$ dengan $p = (p_1, p_2, p_3, \dots), q = (q_1, q_2, q_3, \dots), r = (r_1, r_2, r_3, \dots) \in X$, diperoleh bahwa terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in X$ dengan $\bar{p} = (p_1, p_1^3 - p_2, p_3, \dots), \bar{q} = (q_1, q_1^3 - q_2, q_3, \dots), \bar{r} = (r_1, r_1^3 - r_2, r_3, \dots)$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned}d(p, q) &= \left(|p_1 - q_1|^3 + |p_1^3 - p_2 - q_1^3 + q_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |p_i - q_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{p} - \bar{q}\|_3, \\ d(p, r) &= \left(|p_1 - r_1|^3 + |p_1^3 - p_2 - r_1^3 + r_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |p_i - r_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{p} - \bar{r}\|_3, \\ d(q, r) &= \left(|q_1 - r_1|^3 + |q_1^3 - q_2 - r_1^3 + r_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |q_i - r_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{q} - \bar{r}\|_3.\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk setiap titik $x, y \in \triangle(p, q, r)$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$, diperoleh bahwa terdapat titik $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ dengan $\bar{x} = (x_1, x_1^3 - x_2, x_3, \dots), \bar{y} = (y_1, y_1^3 - y_2, y_3, \dots)$ sehingga berlaku

$$d(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{x} - \bar{y}\|_3.$$

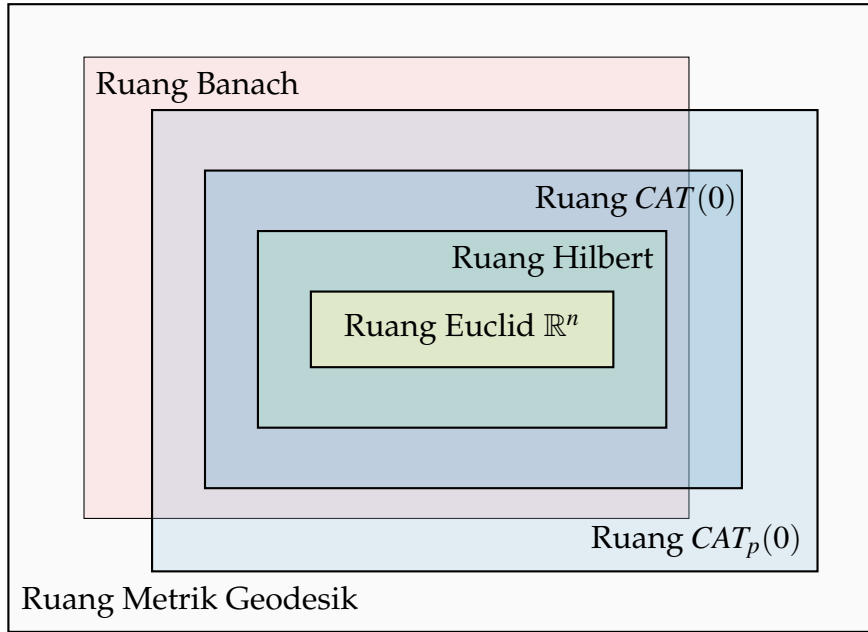
Jadi (X, d, G) merupakan ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 3$. Selanjutnya,

diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 d(\alpha x, 0) &= \left(|\alpha x_1|^3 + |(\alpha x_1)^3 - \alpha x_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |\alpha x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= |\alpha| \left(|x_1|^3 + |\alpha^2 x_1^3 - x_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &\neq \alpha d(x, 0),
 \end{aligned}$$

sehingga tidak bisa didapatkan norma dari metrik tersebut, yang berarti bukan ruang Banach. Berdasarkan Lema 2.3.1, ruang ini juga bukan merupakan ruang $CAT(0)$ karena $p \neq 2$.

Diagram Venn pada Gambar 2.3 mengilustrasikan hubungan antara ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, Banach, ruang $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik.



Gambar 2.1: Hubungan antara ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, Banach, ruang $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik

Berikut ini diberikan beberapa konsep yang berlaku pada ruang $CAT_p(0)$ dengan $p \geq 2$.

Definisi 2.3.4. (Khamsi dan Shukri, 2017) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu himpunan bagian $\mathcal{M} \subseteq X$ disebut konveks jika $[x \sim y] \subseteq \mathcal{M}$

untuk setiap $x, y \in \mathcal{M}$.

Dua contoh berikut ini mengilustrasikan konsep himpunan konveks dan bukan konveks pada ruang $CAT_p(0)$.

Contoh 2.3.7. Dipilih ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan himpunan bagian $\mathcal{M} = \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $x = (0, x_2), y = (0, y_2) \in \mathcal{M}$, geodesik yang menghubungkan x dan y adalah $[x \sim y] = \{G(t) \mid t \in [0, 1], G(0) = x, G(1) = y\}$ dengan

$$\begin{aligned} G(t) &= \left((1-t)0 + t0, ((1-t)0 + t0)^2 - (1-t)(0^2 - x_2) - t(0^2 - y_2) \right) \\ &= (0, (1-t)x_2 + ty_2). \end{aligned}$$

Karena $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, maka $(1-t)x_2 + ty_2 \in \mathbb{R}$, sehingga $[x \sim y] = \{(0, (1-t)x_2 + ty_2) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \mathcal{M}$. Dengan demikian, himpunan bagian \mathcal{M} adalah himpunan konveks di ruang $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$.

Contoh 2.3.8. Dipilih ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan himpunan bagian $\mathcal{M} = \{(b, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Himpunan bagian tersebut tidak konveks karena terdapat $x = (1, 0), y = (-1, 0) \in \mathcal{M}$ sehingga

$$\begin{aligned} G(t) &= \left((1-t)1 + t(-1), ((1-t)1 + t(-1))^2 - (1-t)(1^2 - 0) - t((-1)^2 - 0) \right) \\ &= (1-2t, (1-2t)^2 - 1). \end{aligned}$$

Untuk $t = \frac{1}{2}$, diperoleh $G\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \notin \mathcal{M}$, sehingga himpunan bagian \mathcal{M} tidak konveks di ruang $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$.

Definisi berikut ini menyatakan konsep barisan terbatas di ruang $CAT_p(0)$ yang secara langsung diadaptasi dari konsep barisan terbatas di ruang metrik pada umumnya.

Definisi 2.3.5. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X disebut terbatas jika terdapat $B > 0$ dan $M \in X$ sehingga $d(x_n, M) < B$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Pada ruang ini, konvergensi lemah yang umum digunakan pada ruang Banach digantikan dengan konsep konvergensi- Δ (Delta-convergence). Berikut ini diberikan definisi pusat asimtotik dan konvergensi- Δ di ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 2.3.6. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $\{x_n\}$ adalah barisan terbatas di X . Pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}$ di suatu $CAT_p(0)$ didefinisikan sebagai

$$A(\{x_n\}) := \{x \in X \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \inf_{y \in X} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, x_n)\} \quad (2.3)$$

Contoh 2.3.9. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = (0, (-1)^n) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut adalah barisan terbatas karena untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\tilde{d}(x_n, x_m) = \sqrt{(0-0)^2 + (0^2 - (-1)^n + (-1)^m - 0^2)^2} = |(-1)^n - (-1)^m| \leq 2.$$

Selanjutnya, ditentukan pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}$. Diketahui bahwa untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, berlaku

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(x, x_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_1^2 - x_2 + (-1)^n - 0^2)^2} \\ &= \max \left\{ \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2 + 1)^2}, \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2 - 1)^2} \right\}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\inf_{y \in X} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(y, x_n) = \inf_{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \max \left\{ \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}, \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 - 1)^2} \right\}.$$

Nilai minimum dari fungsi $f(y_1, y_2) = \max \left\{ \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}, \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 - 1)^2} \right\}$ adalah 1 yang terjadi pada titik $(0, 0)$, sehingga

$$A(\{x_n\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}((x_1, x_2), x_n) = 1\} = \{(0, 0)\}.$$

Dengan demikian, pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}$ adalah $\{(0, 0)\}$.

Lema berikut ini menyatakan keunikan pusat asimtotik dari suatu barisan terbatas di ruang $CAT_p(0)$.

Lema 2.3.2. (Salisu dkk., 2022) Pusat asimtotik dari suatu barisan terbatas di ruang $CAT_p(0)$ memiliki tepat satu elemen.

Definisi 2.3.7. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $\{x_n\}$ adalah barisan terbatas di X . Barisan $\{x_n\}$ disebut sebagai konvergen- Δ ke

suatu titik $x \in X$ (dinotasikan $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$) jika $\{x\}$ adalah pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$.

Contoh 2.3.10. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut adalah barisan terbatas karena untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\tilde{d}(x_n, x_m) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(0^2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - 0^2\right)^2} = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq 1.$$

Selanjutnya, ditentukan pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$. Diketahui bahwa untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2, \tilde{d})$, berlaku

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(x, x_{n_k}) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1 - 0)^2 + \left(x_1^2 - x_2 + \frac{1}{n_k} - 0^2\right)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2)^2}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\inf_{y \in X} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(y, x_{n_k}) = \inf_{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2)^2}.$$

Nilai minimum dari fungsi $f(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2)^2}$ adalah 0 yang terjadi pada titik $(0, 0)$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} A(\{x_{n_k}\}) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}((x_1, x_2), x_{n_k}) = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Karena pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}$ adalah $\{(0, 0)\}$, maka barisan $\{x_n\}$ konvergen- Δ ke titik $(0, 0)$, yaitu $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0, 0)$.

Contoh 2.3.11. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = (0, (-1)^n) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sebagaimana pada Contoh 2.3.9, barisan tersebut adalah barisan terbatas dan pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}$ adalah $\{(0, 0)\}$. Kemudian, diperhatikan bahwa terdapat subbarisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ dengan $x_{n_k} = (0, 1)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Diketahui

bahwa untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, berlaku

$$\begin{aligned}\limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(x, x_{n_k}) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_1^2 - x_2 + 1 - 0^2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\inf_{y \in X} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(y, x_{n_k}) = \inf_{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}.$$

Nilai minimum dari fungsi $f(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}$ adalah 0 yang terjadi pada titik $(0, 1)$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}A(\{x_{n_k}\}) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}((x_1, x_2), x_{n_k}) = 0\} \\ &= \{(0, 1)\}.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat ditentukan pusat asimtotik dari subbarisan lain, yaitu $\{x_{m_k}\}$ dengan $x_{m_k} = (0, -1)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Pusat asimtotik dari subbarisan tersebut adalah $A(\{x_{m_k}\}) = \{(0, -1)\}$. Jadi terdapat dua subbarisan dari $\{x_n\}$ yang memiliki pusat asimtotik berbeda, sehingga barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen- Δ .

Untuk konvergensi kuat di ruang $CAT_p(0)$, konsepnya sama dengan konvergensi kuat di ruang metrik pada umumnya, yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.3.8. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $\{x_n\}$ adalah barisan di X . Barisan $\{x_n\}$ disebut konvergen kuat ke suatu titik $x \in X$ (dinotasikan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Contoh 2.3.12. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu ruang $CAT(0)$ $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut konvergen kuat ke titik $x = (0, 0)$ karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\tilde{d}(x_n, x) = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(0^2 - \frac{1}{n} - 0^2\right)^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Teorema 2.3.1. Diberikan ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G) . Jika $\{x_n\}$ adalah barisan di X yang konvergen kuat, maka $\{x_n\}$ konvergen- Δ dan terbatas.

Definisi 2.3.9. Ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen kuat ke titik $x \in X$.

Definisi berikut ini menyatakan konsep himpunan kompak di ruang $CAT_p(0)$ yang secara langsung diadaptasi dari konsep himpunan kompak di ruang metrik pada umumnya.

Definisi 2.3.10. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu himpunan bagian $\mathcal{M} \subseteq X$ disebut kompak jika setiap barisan di \mathcal{M} memiliki subbarisan yang konvergen kuat ke suatu titik di \mathcal{M} .

Berikut ini diberikan definisi mengenai sifat demiclosedness pada pemetaan di ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 2.3.11. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Pemetaan $T : X \rightarrow X$ disebut memiliki sifat **demiclosedness** jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq X$ yang konvergen- Δ ke $x \in X$ dan memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, maka berlaku $x = Tx$.

Contoh 2.3.13. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $T((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right)$ untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Diketahui bahwa titik tetap dari T adalah $(0, 0)$. Misalkan $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ adalah barisan yang konvergen- Δ ke titik $(0, 0)$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. Dari sini didapatkan $A(x_n) = (0, 0)$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(T((0, 0)), x_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(0 - x_{n1})^2 + (0^2 - 0 + x_{n2} - 0^2)^2} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}((0, 0), x_n). \end{aligned}$$

Hal ini berarti, $T((0, 0)) \in A(\{x_n\})$ sehingga $T((0, 0)) = (0, 0)$. Dengan demikian, pemetaan T memiliki sifat demiclosedness.

Dalam tesis ini dinotasikan $(d(x, y))^p$ sebagai perkalian dari $d(x, y)$ dengan $d(x, y)$ sebanyak p kali yaitu

$$(d(x, y))^p = \underbrace{d(x, y) \cdot d(x, y) \cdots d(x, y)}_{p \text{ kali}}.$$

Selanjutnya, berikut ini diberikan ketaksamaan penting yang berlaku pada ruang $CAT_p(0)$.

Lema 2.3.3. (Calderon dkk., 2021) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Jika $x, y, z \in X$ dan $t \in [0, 1]$, maka

1. $d((1-t)x \oplus tz, y) \leq (1-t)d(x, y) + td(z, y)$.
2. $(d((1-t)x \oplus tz, y))^p \leq (1-t)(d(x, y))^p + t(d(z, y))^p - \frac{t(1-t)}{2^{p-1}}(d(x, z))^p$.

Selain itu, berikut ini diberikan teorema yang menyatakan kondisi konvergensi- Δ dari suatu barisan di ruang $CAT_p(0)$.

Teorema 2.3.2. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X yang tertutup dan konveks. Diberikan pula $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan yang memiliki titik tetap dan memenuhi sifat demiclosedness 2.3.11. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan di W yang memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ dan barisan $\{d(x_n, x^*)\}$ konvergen di \mathbb{R} untuk setiap x^* titik tetap dari T , maka barisan $\{x_n\}$ konvergen- Δ ke titik tetap dari T .

2.4 Pemetaan Nonekspansif

Pemetaan nonekspansif merupakan salah satu jenis pemetaan yang memiliki banyak aplikasi di berbagai bidang. Pemetaan ini merupakan perluasan dari kontraktif yang dikenalkan oleh Banach. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari pemetaan nonekspansif.

Definisi 2.4.1. (Browder, 1965) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan nonekspansif jika untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \quad (2.4)$$

Contoh 2.4.1. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, \infty)$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai $Tx = |x|$ untuk setiap $x \in W$ adalah pemetaan nonekspansif karena untuk setiap $x, y \in W$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Pemetaan nonekspansif ini juga mengalami perluasan, salah satu perluasannya adalah pemetaan nonekspansif kuasi. Berikut adalah definisi dan contoh dari pemetaan nonekspansif kuasi.

Definisi 2.4.2. Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan nonekspansif kuasi jika untuk setiap titik tetap dari T yaitu y dan $x \in W$ berlaku

$$\|Tx - y\| \leq \|x - y\|. \quad (2.5)$$

Contoh 2.4.2. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 3]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{jika } x \in [0, 1], \\ 1, & \text{jika } x \in (1, 3], \end{cases}$$

merupakan pemetaan nonekspansif kuasi, karena titik tetap dari T adalah $y = 0$ dan untuk setiap $x \in [0, 1]$ diperoleh

$$|Tx - y| = \left| \frac{x}{3} - 0 \right| = \frac{x}{3} \leq x = |x - 0| = |x - y|,$$

serta untuk setiap $x \in (1, 3]$ diperoleh

$$|Tx - y| = |1 - 0| = 1 \leq x = |x - 0| = |x - y|.$$

Pemetaan ini bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 2 = |0 - 2| = |x - y|.$$

Pada tahun 2008, Suzuki juga mengenalkan bentuk lain pemetaan nonekspansif, yaitu pemetaan Suzuki nonekspansif atau pemetaan yang memenuhi kondisi (C) yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.4.3. (Suzuki, 2008) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan yang memenuhi kondisi (C) jika untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\| \implies \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \quad (2.6)$$

Pemetaan ini merupakan kondisi lemah dari pemetaan nonekspansif karena ketaksamaan nonekspansif wajib terpenuhi hanya untuk dua titik yang memenuhi kondisi $\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$.

Contoh 2.4.3. (Suzuki, 2008) Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 3]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 3, \\ 1, & \text{jika } x = 3, \end{cases}$$

merupakan pemetaan yang memenuhi kondisi (C), tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.3 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 3$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 0| = 0 \leq |x - y|,$$

dan untuk $x = y = 3$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |1 - 1| = 0 = |x - y|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 3$ dan $y = 3$ dibagi dua kasus, yaitu

- untuk $x \in [0, 2]$, diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 \leq |x - 3|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi dan

- untuk $x \in (2, 3)$, diperoleh

$$\frac{1}{2}|x - Tx| = \frac{1}{2}|x - 0| = \frac{x}{2} > 1 > |x - 3| = |x - y|,$$

dan

$$\frac{1}{2}|y - Ty| = \frac{1}{2}|3 - 1| = 1 > |x - 3| = |x - y|,$$

sehingga premis pada kondisi (C) tidak terpenuhi.

Hal ini menunjukkan bahwa pemetaan tersebut memenuhi kondisi (C). Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif

karena untuk $x = 2.5$ dan $y = 3$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 0.5 = |2.5 - 3| = |x - y|.$$

Kemudian, García-Falset dkk. memperumum pemetaan Suzuki nonekspansif dengan mengganti konstanta $\frac{1}{2}$ menjadi konstanta $\mu \in (0, 1)$. Pemetaan tersebut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.4. (García-Falset dkk., 2011) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan yang memenuhi kondisi (C_μ) jika terdapat $\mu \in (0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\mu \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \implies \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (2.7)$$

Contoh 2.4.4. (García-Falset dkk., 2011) Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 1]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{jika } x \neq 1, \\ \frac{7}{11}, & \text{jika } x = 1, \end{cases}$$

merupakan pemetaan yang memenuhi kondisi (C_μ) dengan $\mu = \frac{3}{4}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.4 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 1$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{|x - y|}{2} \leq |x - y|,$$

dan untuk $x = y = 1$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{7}{11} - \frac{7}{11} \right| = 0 = |x - y|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 1$ dan $y = 1$ dibagi dua kasus, yaitu

- untuk $x \in [0, \frac{8}{11}]$, diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{x}{2} - \frac{7}{11} \right| = \left| \frac{11x - 14}{22} \right| \leq |x - 1| = |x - y|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi dan

- untuk $x \in (\frac{8}{11}, 1)$, diperoleh

$$\mu|x - Tx| = \frac{3}{4}\left|x - \frac{x}{2}\right| = \frac{3x}{8} > \frac{3}{11} > |x - 1| = |x - y|,$$

sehingga premis pada kondisi (C_μ) tidak terpenuhi.

Hal ini menunjukkan bahwa pemetaan tersebut memenuhi kondisi (C_μ) dengan $\mu = \frac{3}{4}$. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 1$ dan $y = \frac{9}{11}$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{7}{11} - \frac{9}{22}\right| = \frac{5}{22} > \frac{2}{11} = \left|1 - \frac{9}{11}\right| = |x - y|.$$

Pemetaan tersebut juga bukan merupakan pemetaan yang memenuhi kondisi (C) karena untuk $x = \frac{81}{110}$ dan $y = 1$ diperoleh

$$\frac{1}{2}|x - Tx| = \frac{1}{2}\left|\frac{81}{110} - \frac{81}{220}\right| = \frac{81}{440} < \frac{29}{110} = |x - 1| = |x - y|,$$

tetapi

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{81}{220} - \frac{7}{11}\right| = \frac{59}{220} > \frac{29}{110} = |x - y|.$$

Di sisi lain, Aoyama dan Kohsaka juga mengembangkan pemetaan nonekspansif menjadi pemetaan α -nonekspansif. Berikut adalah definisi dan contoh dari pemetaan α -nonekspansif.

Definisi 2.4.5. (Aoyama dan Kohsaka, 2011) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan α -nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha\|x - Ty\|^2 + \alpha\|y - Tx\|^2 + (1 - 2\alpha)\|x - y\|^2. \quad (2.8)$$

Contoh 2.4.5. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 2]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 2, \\ 1, & \text{jika } x = 2, \end{cases}$$

merupakan pemetaan α -nonekspansif dengan $\alpha = \frac{1}{2}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.5 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty|^2 = |0 - 0|^2 = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Ty|^2 + \frac{1}{2}|y - Tx|^2 + 0 \cdot |x - y|^2,$$

dan untuk $x = y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty|^2 = |1 - 1|^2 = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Ty|^2 + \frac{1}{2}|y - Tx|^2 + 0 \cdot |x - y|^2,$$

sehingga Ketaksamaan (2.8) terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 2$ dan $y = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty|^2 &= |0 - 1|^2 = 1 \leq 2 + \frac{1}{2}|x - 1|^2 \\ &= \frac{1}{2}|x - 1|^2 + \frac{1}{2}|2 - 0|^2 + 0 \cdot |x - 2|^2 \\ &= \frac{1}{2}|x - Ty|^2 + \frac{1}{2}|y - Tx|^2 + 0 \cdot |x - y|^2, \end{aligned}$$

sehingga Ketaksamaan (2.8) terpenuhi. Jadi, pemetaan tersebut merupakan pemetaan α -nonekspansif. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 2 = |0 - 2| = |x - y|.$$

Pant dan Pandey di tahun 2019 mengenalkan pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.6. (Pant dan Pandey, 2019) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - Tx\| + \alpha\|y - Ty\| + (1 - 2\alpha)\|x - y\|. \quad (2.9)$$

Contoh 2.4.6. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 4]$. Pemetaan

$T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 4, \\ 1, & \text{jika } x = 4, \end{cases}$$

merupakan pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif dengan $\alpha = \frac{1}{2}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.6 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 4$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 0| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|y - Ty| + 0 \cdot |x - y|,$$

dan untuk $x = y = 4$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |1 - 1| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|y - Ty| + 0 \cdot |x - y|,$$

sehingga Ketaksamaan (2.9) terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 4$ dan $y = 4$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |0 - 1| = 1 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}|x - 0| \\ &= \frac{1}{2}|x - 0| + \frac{1}{2}|4 - 1| + 0 \cdot |x - 4| \\ &= \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|y - Ty| + 0 \cdot |x - y|, \end{aligned}$$

sehingga Ketaksamaan (2.9) terpenuhi. Jadi, pemetaan tersebut merupakan pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 4$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 4 = |0 - 4| = |x - y|.$$

Hasil terbaru, tahun 2023 Ullah dkk. mengenalkan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Definisi 2.4.7. (Ullah dkk., 2023) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $\gamma \in$

$[0, 1)$ dan $\alpha + \gamma \leq 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + \beta\|x - Tx\| + \gamma\|x - Ty\|. \quad (2.10)$$

Berikut ini diberikan contoh dari pemetaan tersebut.

Contoh 2.4.7. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 2]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 2, \\ 1, & \text{jika } x = 2, \end{cases}$$

merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.7 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 0| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|,$$

dan untuk $x = y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |1 - 1| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|,$$

sehingga Ketaksamaan (2.10) terpenuhi. Selanjutnya, untuk $x \neq 2$ dan $y = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |0 - 1| = 1 \leq \left| \frac{y}{2} \right| \\ &\leq \left| \frac{x - y}{2} \right| + \left| \frac{x}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|, \end{aligned}$$

serta untuk $x = 2$ dan $y \neq 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |1 - 0| = 1 \leq \frac{3}{2} = \left| x - \frac{1}{2} \right| \\ &\leq \left| \frac{x - 1}{2} \right| + \left| \frac{x}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|, \end{aligned}$$

sehingga Ketaksamaan (2.10) terpenuhi. Jadi, pemetaan tersebut merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 2 = |0 - 2| = |x - y|.$$

2.5 Aproksimasi Titik Tetap dari Pemetaan Nonekspansif

Salah satu cara untuk mendapatkan titik tetap dari suatu pemetaan f adalah dengan mendapatkan nilai x_0 yang memenuhi persamaan titik tetap yaitu, $x_0 = f(x_0)$. Akan tetapi, menyelesaikan persamaan tersebut tidak selalu mudah, khususnya untuk persamaan tak linier. Oleh karena itu, nilai pendekatan atau aproksimasi dari titik tetap diperlukan.

Untuk melakukan aproksimasi, tentunya diperlukan algoritma atau dalam hal ini adalah skema iterasi yang konvergen ke titik tetap dari pemetaan tersebut. Untuk pemetaan yang bersifat kontraktif, skema iterasi Picard adalah skema iterasi paling sederhana yang dapat digunakan. Diberikan X adalah himpunan tak kosong dan $T : X \rightarrow X$ adalah suatu pemetaan, serta $x_1 \in X$, maka $\{x_n\}$ yang didefinisikan sebagai $x_{n+1} = T(x_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan yang dihasilkan oleh skema iterasi Picard. Namun, skema ini tidak selalu konvergen untuk pemetaan yang bersifat nonekspansif. Sebagai ilustrasi, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.5.1. Diberikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 1 - x$. Pemetaan ini adalah pemetaan nonekspansif dengan titik tetap adalah $x = \frac{1}{2}$, tetapi untuk setiap $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ iterasi Picard menghasilkan barisan $\{x, 1 - x, x, 1 - x, x, \dots\}$ yang divergen.

Pada tahun 1953, Mann memperkenalkan skema iterasinya yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif yang diberikan sebagai berikut (Mann, 1953).

Definisi 2.5.1. Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Mann didefinisikan sebagai

$$x_{k+1} = (1 - a_k)x_k + a_kTx_k, \quad (2.11)$$

dengan $\{a_k\} \subseteq (0, 1]$.

Berbagai perkembangan skema iterasi juga terus bermunculan hingga saat ini dengan salah satu tujuannya adalah mencari skema iterasi yang tercepat untuk aproksimasi titik tetap dari suatu pemetaan. Untuk selanjutnya, berikut ini diberikan skema iterasi yang konvergen ke titik tetap dari pemetaan nonekspansif diperumum di ruang Banach.

Definisi 2.5.2. (Agarwal dkk., 2007) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Agarwal didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} y_k &= (1 - b_k)x_k + b_kTx_k, \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)Tx_k + a_kTy_k, \end{cases} \quad (2.12)$$

dengan $\{a_k\}, \{b_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.3. (Abbas dan Nazir, 2014) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Abbas didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= (1 - c_k)x_k + c_kTx_k, \\ y_k &= (1 - b_k)Tx_k + b_kTq_k, \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)Ty_k + a_kTq_k, \end{cases} \quad (2.13)$$

dengan $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.4. (Thakur dkk., 2016) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C). Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Thakur didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= (1 - c_k)x_k + c_kTx_k, \\ y_k &= T((1 - b_k)x_k + b_kq_k), \\ x_{k+1} &= Ty_k, \end{cases} \quad (2.14)$$

dengan $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.5. (Ahmad dkk., 2021) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu

pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi JK didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= (1 - c_k)x_k + c_kTx_k, \\ y_k &= Tq_k, \\ x_{k+1} &= T((1 - a_k)Tq_k + a_kTy_k), \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan $\{a_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.6. (Sabri dkk., 2025) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Sabri didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= T((1 - c_k)x_k + c_kTx_k), \\ y_k &= T(Tq_k), \\ x_{k+1} &= T((1 - a_k)Tq_k + a_kTy_k), \end{cases} \quad (2.16)$$

dengan $\{a_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan beberapa tahapan penelitian yang akan dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

3.1 Tahapan Penelitian

(a) Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan tinjauan pustaka dengan fokus utama meliputi konsep mengenai titik tetap, ruang $CAT_p(0)$, pemetaan nonekspansif dan perumumannya, serta terkait skema iterasi. Akan dilakukan kajian terkait syarat-syarat untuk konvergensi dari suatu skema iterasi untuk mendapatkan nilai aproksimasi titik tetap dari pemetaan nonekspansif dan perumumannya. Kemudian dikaji pula konsep-konsep yang ada pada ruang $CAT_p(0)$, seperti dari definisi, sifat-sifat, dan hasil penting lainnya yang berkaitan dengan aproksimasi titik tetap dari pemetaan nonekspansif di ruang tersebut.

(b) Mengkaji Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.

Pada tahap ini pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif yang awalnya didefinisikan untuk ruang Banach akan dikaji di ruang $CAT_p(0)$. Beberapa lema dan teorema yang berlaku untuk pemetaan tersebut akan diperluas dalam konteks ruang $CAT_p(0)$.

(c) Mendapatkan Konvergensi dari Skema Iterasi Sabri di Ruang $CAT_p(0)$ untuk Aproksimasi Titik Tetap dari Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Tahapan ini memiliki tujuan untuk membuktikan bahwa barisan yang diperoleh dari skema iterasi Sabri konvergen titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$. Beberapa syarat untuk barisan tersebut konvergen, baik itu konvergen- Δ maupun konvergen kuat akan diselidiki pada tahap ini.

(d) Melakukan Percobaan Numerik.

Untuk memvalidasi hasil teoritis pada tahap sebelumnya, dilakukan eksperimen numerik. Dalam tahap ini, dilakukan percobaan dengan mendefinisikan suatu pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang

$CAT_p(0)$, kemudian titik tetap dari pemetaan tersebut akan didekati dengan menggunakan skema iterasi Sabri. Dalam percobaan ini, juga akan digunakan beberapa variasi parameter. Selanjutnya, jumlah iterasi dari skema iterasi Sabri akan dibandingkan dengan beberapa skema iterasi lainnya yang telah ada sebelumnya. Hasil yang diperoleh akan disajikan dalam bentuk tabel.

- (e) Mendapatkan Aplikasi dari Skema Iterasi Sabri untuk Masalah Optimasi.

Banyak masalah dalam bidang optimisasi, seperti *convex feasibility problem* atau masalah minimalisasi, dapat diformulasikan ulang sebagai masalah pencarian titik tetap. Dalam tahap ini akan diidentifikasi masalah yang relevan dan menyelesaikannya dengan skema iterasi Sabri.

- (f) Diseminasi.

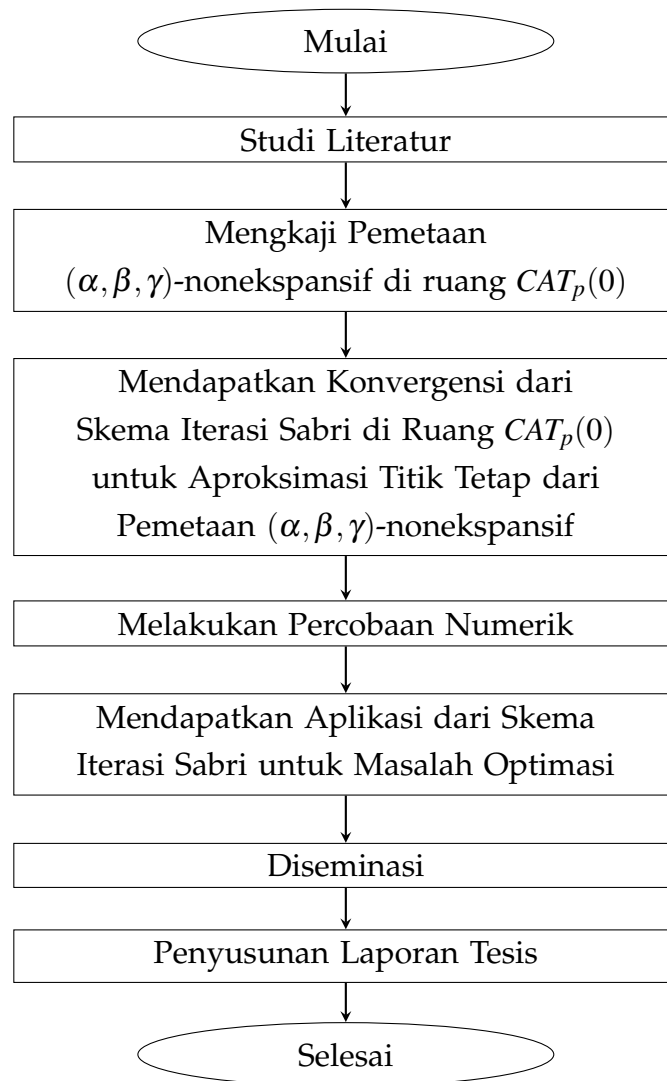
Pada tahap diseminasi, dilakukan penulisan artikel ilmiah dan akan dipublikasikan pada seminar internasional atau jurnal internasional bereputasi.

- (g) Penyusunan Laporan Tesis.

Pada tahap ini, dilakukan penulisan laporan tesis yang meliputi seluruh hasil penelitian, baik itu hasil teoritis maupun hasil numerik. Penjelasan dari hasil tersebut ditulis secara rinci, terstruktur, dan lengkap. Selain itu, kesimpulan dari penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya akan dituliskan dalam laporan tesis.

3.2 Diagram Alir Penelitian

Diagram alir untuk penelitian ini disajikan dalam Gambar 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.1: Blok Diagram Penelitian.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini disajikan perluasan dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif pada ruang $CAT_p(0)$ yang meliputi definisi dan sifat-sifat pemetaannya. Kemudian, disajikan pula konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan tersebut. Selanjutnya, dilakukan percobaan numerik terkait konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Selain itu, didapatkan pula aplikasi dari skema iterasi Sabri untuk masalah optimasi, khususnya untuk masalah minimalisasi fungsi dan rekonstruksi citra.

4.1 Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di Ruang $CAT_p(0)$

Pada bagian ini, disajikan definisi, contoh, dan sifat-sifat dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$. Sifat yang didapatkan dari pemetaan ini disajikan dalam Lema 4.2.1, yang menunjukkan bahwa pemetaan ini memenuhi kondisi nonekspansif kuasi. Kemudian, pada Lema 4.1.2 didapatkan ketaksamaan penting yang melibatkan pemetaan tersebut. Selain itu, didapatkan pula bahwa pemetaan ini memenuhi sifat *demiclosedness* yang ditunjukkan oleh Lema 4.1.3. Tiga Lema tersebut berperan penting untuk pembuktian konvergensi skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Berikut ini disajikan definisi dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 4.1.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X , pemetaan $f : W \rightarrow W$ disebut sebagai pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $\alpha + \gamma \leq 1, \gamma \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Ty). \quad (4.1)$$

Selanjutnya, diberikan contoh dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$. Namun, sebelum itu diberikan dulu contoh ruang yang digunakan sebagai berikut.

Contoh berikut ini merupakan contoh dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan ruang $CAT_p(0)$ yang diberikan pada Contoh 2.3.6.

Contoh 4.1.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ sebagaimana dalam Contoh 2.3.6. Diberikan pula $W = \{(w_1, w_2, 0, 0, \dots) \mid w_1 \in [1, 5], w_2 \in [1, 125]\} \subset X$. dan pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$T((w_1, w_2, 0, 0, \dots)) = \begin{cases} \left(\frac{w_1+3}{4}, \frac{(w_1+3)^3}{64}, 0, 0, \dots \right), & \text{jika } w_1 \in [1, 3) \\ \left(\frac{w_1+2}{4}, \frac{(w_1+2)^3}{64}, 0, 0, \dots \right), & \text{jika } w_1 \in [3, 5]. \end{cases}$$

Pemetaan T adalah pemetaan $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ -nonekspansif, tetapi bukan pemetaan nonekspansif. Titik tetap dari T adalah $(1, 1, 0, 0, \dots)$.

Penjelasan dari Contoh 4.1.1 diuraikan berikut ini.

Diambil sebarang $u, v \in W$ dengan $u = (u_1, u_2, 0, 0, \dots)$, $v = (v_1, v_2, 0, 0, \dots)$.

Dimisalkan $D(u, v) = \alpha d(u, v) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tv)$.

Kasus 1. Untuk $u_1, v_1 \in [1, 3)$, diperoleh

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(u_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \frac{3}{4} \left(\left| u_1 - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left| \frac{u_1+3}{4} - \frac{v_1+3}{4} \right| \\ &= \left(\left| \frac{u_1+3}{4} - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+3)^3}{64} - \left(\frac{v_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= d(Tu, Tv). \end{aligned}$$

Kasus 2. Untuk $u_1, v_1 \in [3, 5]$, diperoleh

$$\begin{aligned}
D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1 + 2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1 + 2}{4} \right)^3 + \frac{(u_1 + 2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{3}{4} \left(\left| u_1 - \frac{v_1 + 2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1 + 2}{4} \right)^3 + \left(\frac{v_1 + 2}{4} \right)^3 \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left| \frac{u_1 + 2}{4} - \frac{v_1 + 2}{4} \right| \\
&= \left(\left| \frac{u_1 + 2}{4} - \frac{v_1 + 2}{4} \right|^3 \right. \\
&\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1 + 2}{4} \right)^3 - \frac{(u_1 + 2)^3}{64} - \left(\frac{v_1 + 2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1 + 2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= d(Tu, Tv).
\end{aligned}$$

Kasus 3. Untuk $u_1 \in [3, 5]$ dan $v_1 \in [1, 3)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1 + 2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1 + 2}{4} \right)^3 + \frac{(u_1 + 2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{3}{4} \left(\left| u_1 - \frac{v_1 + 3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1 + 3}{4} \right)^3 + \frac{(v_1 + 3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1 + 2}{4} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Karena $u_1 \in [3, 5]$, maka $\frac{1}{12}|3u_1 - 2| \geq \frac{7}{12} > \frac{1}{4}$, sehingga

$$\begin{aligned}
D(u, v) &\geq \frac{1}{4}|u_1 - v_1| + \frac{1}{4} \\
&\geq \left| \frac{u_1}{4} - \frac{v_1}{4} - \frac{1}{4} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left| \frac{u_1+2}{4} - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 \right. \\
&\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1+2}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+2)^3}{64} - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= d(Tu, Tv).
\end{aligned}$$

Kasus 4. Untuk $u_1 \in [1, 3]$ dan $v_1 \in [3, 5]$, diperoleh

$$\begin{aligned}
D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(u_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{3}{4} \left(\left| u_1 - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+3}{4} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4} \left(\left| u_1 - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4} |u_1 - v_1| + \frac{1}{4} |u_1 - 1| + \frac{3}{16} |4u_1 - v_1 - 2|.
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
d(Tu, Tv) &= \left(\left| \frac{u_1+3}{4} - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 \right. \\
&\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+3)^3}{64} - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4} |u_1 - v_1 + 1|,
\end{aligned}$$

sehingga untuk membuktikan bahwa $D(u, v) \geq d(Tu, Tv)$, akan dibuktikan bahwa

$$f(u_1, v_1) := |u_1 - v_1| + |u_1 - 1| + \frac{3}{4} |4u_1 - v_1 - 2| - |u_1 - v_1 + 1| \geq 0,$$

untuk setiap $u_1 \in [1, 3]$ dan $v_1 \in [3, 5]$. Diamati bahwa $1 \leq u_1 < 3 \leq v_1$, sehingga

$$f(u_1, v_1) = v_1 - u_1 + u_1 - 1 + \frac{3}{4} |4u_1 - v_1 - 2| - |u_1 - v_1 + 1|$$

$$= v_1 - 1 + \frac{3}{4}|4u_1 - v_1 - 2| - |u_1 - v_1 + 1|.$$

Dari sini, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u_1} &= \frac{3(4u_1 - v_1 - 2)}{4|4u_1 - v_1 - 2|} \times 4 - \frac{u_1 - v_1 + 1}{|u_1 - v_1 + 1|} \\ &= 3 \operatorname{sgn}(4u_1 - v_1 - 2) - \operatorname{sgn}(u_1 - v_1 + 1) \neq 0,\end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v_1} &= 1 + \frac{3(4u_1 - v_1 - 2)}{4|4u_1 - v_1 - 2|} \times (-1) - \frac{u_1 - v_1 + 1}{|u_1 - v_1 + 1|} \times (-1) \\ &= 1 + \frac{3}{4} \operatorname{sgn}(4u_1 - v_1 - 2) - \operatorname{sgn}(u_1 - v_1 + 1) \neq 0,\end{aligned}$$

artinya $f(u_1, v_1)$ tidak memiliki titik pelana. Walaupun begitu, $f(u_1, v_1)$ memiliki titik kritis, yaitu saat $|4u_1 - v_1 - 2| = 0$ atau $|u_1 - v_1 + 1| = 0$. Hal ini berarti nilai minimumnya berada pada titik kritis atau pada titik-titik batas domainnya.

(a) pada titik kritis

Jika $|4u_1 - v_1 - 2| = 0$, didapat $v_1 = 4u_1 - 2$ sehingga

$$f(u_1, v_1) = 4u_1 - 3 - 3|u_1 - 1|.$$

Karena $u_1 \geq 1$ didapat

$$f(u_1, v_1) = 4u_1 - 3 - 3u_1 + 3 = u_1 \geq 1 > 0.$$

Kemudian, jika $|u_1 - v_1 + 1| = 0$, didapat $v_1 = u_1 + 1$ sehingga

$$f(u_1, v_1) = u_1 + \frac{9}{4}|u_1 - 1| \geq u_1 \geq 1 > 0.$$

(b) pada titik batas domain

i. Jika $u_1 = 1$, didapatkan

$$f(u_1, v_1) \geq f(1, v_1) = v_1 - 1 + \frac{3}{4}|2 - v_1| - |2 - v_1|.$$

Karena $v_1 \geq 3$, diperoleh

$$f(u_1, v_1) \geq v_1 - 1 - \frac{1}{4}(v_1 - 2) = \frac{3}{4}v_1 - \frac{1}{3} \geq \frac{7}{4} > 0.$$

ii. Jika $u_1 \rightarrow 3^-$, didapatkan

$$f(u_1, v_1) \geq \lim_{u_1 \rightarrow 3^-} f(u_1, v_1) = v_1 - 1 + \frac{3}{4}|10 - v_1| - |4 - v_1|.$$

A. Jika $v_1 \in [4, 5]$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(u_1, v_1) &\geq v_1 - 1 + \frac{3}{4}(10 - v_1) - (v_1 - 4) \\ &= \frac{21}{2} - \frac{3}{4}v_1 \\ &\geq \frac{21}{2} - \frac{15}{4} \\ &= \frac{27}{4} \\ &> 0. \end{aligned}$$

B. Jika $v_1 \in [3, 4]$, didapatkan

$$f(u_1, v_1) \geq v_1 - 1 + \frac{3}{4}(10 - v_1) - (4 - v_1) = \frac{5}{4}v_1 + \frac{5}{2} > 0.$$

iii. Jika $v_1 = 3$, didapatkan

$$f(u_1, v_1) \geq f(u_1, 3) = 2 + \frac{3}{4}|4u_1 - 5| - |u_1 - 2|.$$

Karena $u_1 \in [1, 3)$, maka nilai maksimum dari $|u_1 - 2|$ adalah 1 sehingga

$$f(u_1, v_1) \geq 2 + \frac{3}{4}|4u_1 - 5| - 1 \geq 1 > 0.$$

iv. Jika $v_1 = 5$, didapatkan

$$f(u_1, v_1) \geq f(u_1, 5) = 4 + \frac{3}{4}|4u_1 - 7| - |u_1 - 4|.$$

Karena $u_1 \in [1, 3)$, maka

$$\begin{aligned} f(u_1, v_1) &\geq 4 + \frac{3}{4}|4u_1 - 7| - (4 - u_1) \\ &= \frac{3}{4}|4u_1 - 7| + u_1 \\ &\geq u_1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Dari uraian tersebut didapatkan bahwa $f(u_1, v_1) \geq 0$ untuk setiap $u_1 \in [1, 3)$ dan $v_1 \in [3, 5]$ sehingga berlaku pula $\alpha d(u, v) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tv) \geq d(Tu, Tv)$.

Karena semua tinjauan kasus di atas menghasilkan $\alpha d(u, v) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tv) \geq d(Tu, Tv)$ untuk setiap $u, v \in [1, 5]$, maka T adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{3}$, dan $\gamma = \frac{3}{4}$. Akan tetapi, T bukan pemetaan nonekspansif karena untuk $u = (\frac{29}{10}, \frac{29^3}{1000}, 0, 0, \dots)$ dan $v = (3, 27, 0, 0, \dots)$, didapatkan

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= \left(\left| \frac{\frac{29}{10} + 3}{4} - \frac{3 + 2}{4} \right|^3 \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(\frac{\frac{29}{10} + 3}{4} \right)^3 - \frac{(\frac{29}{10} + 3)^3}{64} - \frac{(3 + 2)^3}{64} + \left(\frac{3 + 2}{4} \right)^3 \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{9}{40} \\ &> \frac{1}{10} \\ &= \left(\left| 3 - \frac{29}{10} \right|^3 + \left| \left(\frac{29}{10} \right)^3 - \frac{29^3}{1000} - 3^3 + 27 \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= d(u, v). \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan titik tetap dari T , dicari $w = (w_1, w_2, 0, 0, \dots) \in W$ sehingga $T(w) = w$. Dari definisi T , terdapat dua kemungkinan, yaitu

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad w_1 &= \frac{w_1 + 3}{4}, \quad w_2 = \frac{(w_1 + 3)^3}{64}, \quad \text{atau} \\ \text{(ii)} \quad w_1 &= \frac{w_1 + 2}{4}, \quad w_2 = \frac{(w_1 + 2)^3}{64}. \end{aligned}$$

Dari (i) diperoleh $w_1 = w_2 = 1 \in [1, 3)$, sedangkan dari (ii) diperoleh $w_1 = \frac{2}{3} \notin [3, 5]$. Dengan demikian, titik tetap dari T adalah $(1, 1, 0, 0, \dots)$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan tiga lema penting untuk pembuktian konvergensi skema iterasi Sabri.

Lema 4.1.1. *Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X , serta $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Jika u adalah titik tetap dari T , maka untuk setiap $x \in W$ berlaku $d(Tx, Tu) \leq d(x, u)$.*

Bukti 4.1.1. *Diperhatikan bahwa u titik tetap dari T sehingga berlaku $u = Tu$, diperoleh*

$$\begin{aligned} d(u, Tx) &= d(Tu, Tx) \leq \alpha d(u, x) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tx) \\ &= \alpha d(u, x) + \beta d(u, u) + \gamma d(u, Tx) \\ &= \alpha d(x, u) + \gamma d(u, Tx). \end{aligned}$$

Dari sini didapatkan $(1 - \gamma)d(u, Tx) \leq \alpha d(x, u)$. Kemudian, karena $\alpha + \gamma \leq 1$, didapat $\alpha \leq 1 - \gamma$ sehingga

$$\frac{\alpha}{1 - \gamma} \leq 1.$$

Akibatnya

$$d(Tx, Tu) = d(Tu, Tx) = d(u, Tx) \leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} d(x, u) \leq d(x, u). \quad (4.2)$$

Teorema 4.1.1. *Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X , serta $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Jika $\alpha + \gamma \neq 1$ dan T memiliki titik tetap, maka titik tetap dari T tunggal.*

Bukti 4.1.2. *Misalkan u dan v adalah titik tetap dari T , maka berdasarkan Ketaksamaan (4.2) diperoleh*

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} d(u, v)$$

Karena $\alpha, \gamma \in [0, 1]$, $\gamma \neq 1$, dan $\alpha + \gamma \neq 1$, didapatkan bahwa $0 \leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} < 1$ sehingga $d(u, v) = 0$. Dengan demikian $u = v$, yang berarti bahwa titik tetap dari T tunggal.

Lema 4.1.2. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X , serta $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Untuk setiap $x, y \in W$, ketaksamaan berikut ini berlaku:

$$d(x, Ty) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x, y) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x, Tx). \quad (4.3)$$

Bukti 4.1.3. Diamati bahwa untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\begin{aligned} d(x, Ty) &\leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) \\ &\leq d(x, Tx) + \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Ty) \\ &= (1 + \beta)d(x, Tx) + \alpha d(x, y) + \gamma d(x, Ty). \end{aligned}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)d(x, Ty) &\leq (1 + \beta)d(x, Tx) + \alpha d(x, y) \\ \iff d(x, Ty) &\leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x, y) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x, Tx). \end{aligned}$$

Lema 4.1.3. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X . Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif, maka T memiliki sifat **demiclosedness**.

Bukti 4.1.4. Diambil sebarang barisan $\{x_n\} \subseteq W$ yang terbatas dan konvergen- Δ ke $u_0 \in W$, serta memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. Berdasarkan definisi 2.3.7, diperoleh bahwa $u_0 \in A(\{x_n\})$. Kemudian, menggunakan ketaksamaan (4.3), didapatkan

$$d(x_n, Tu_0) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x_n, u_0) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x_n, Tx_n).$$

Selanjutnya, didapatkan bahwa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tu_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x_n, u_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, u_0).$$

Hal ini berarti $Tu_0 \in A(\{x_n\})$. Kemudian, berdasarkan Lema 2.3.2, dipunyai bahwa $A(\{x_n\})$ tepat memiliki satu elemen, yang berarti $u_0 = Tu_0$. Jadi T memiliki sifat **demiclosedness**.

4.2 Konvergensi Skema Iterasi Sabri untuk Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Pada bagian ini disajikan skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$ dan hasil terkait konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang tersebut. Terdapat dua lema penting yang digunakan untuk membuktikan konvergensi skema tersebut, yaitu pada Lema 4.2.1 yang menunjukkan bahwa barisan $d(x_n, x^*)$ adalah barisan turun, dengan x^* adalah titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif, serta pada Lema 4.2.2 yang menunjukkan bahwa barisan limit dari barisan $d(x_n, Tx_n)$ adalah 0. Kemudian, disajikan syarat eksistensi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif pada Teorema 4.2.1. Hasil konvergensi dari skema ini diberikan pada Teorema 4.2.2 yang memberikan syarat cukup untuk konvergensi $-\Delta$, sedangkan syarat cukup untuk konvergensi kuat diberikan oleh Teorema 4.2.3.

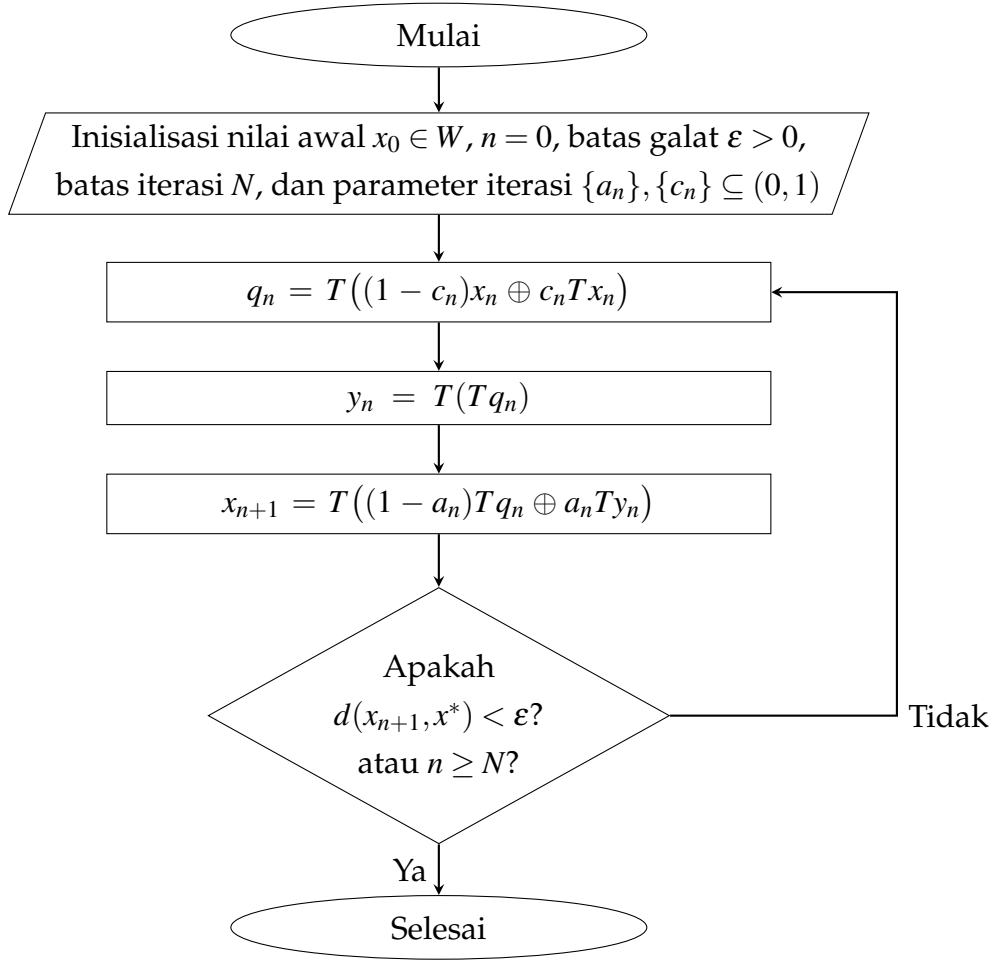
Berikut ini diberikan skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 4.2.1 (Skema Iterasi Sabri). Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X yang konveks. Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= T((1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n), \\ y_n &= T(Tq_n), \\ x_{n+1} &= T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n). \end{cases} \quad (4.4)$$

dengan $\{a_n\} \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\} \subseteq [0, 1]$.

Berikut ini adalah diagram alir dari skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$.



Gambar 4.1: Diagram Alir Skema Iterasi Sabri pada Ruang $CAT_p(0)$

Untuk selanjutnya, dinotasikan W sebagai himpunan bagian tak kosong yang konveks dari ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G) , serta $Fix(T)$ adalah himpunan semua titik tetap dari pemetaan T .

Lema 4.2.1. *Diberikan $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $Fix(T) \neq \emptyset$. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4), maka $d(x_{n+1}, x^*) \leq d(x_n, x^*)$ untuk setiap $x^* \in Fix(T)$.*

Bukti 4.2.1. *Diambil sebarang $x^* \in Fix(T)$, berdasarkan Lema 2.3.3 dan 4.1.1, didapatkan bahwa*

$$\begin{aligned}
 d(q_n, x^*) &= d(T((1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n), Tx^*) \\
 &\leq d((1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, x^*) \\
 &\leq (1 - c_n)d(x_n, x^*) + c_nd(Tx_n, x^*) \\
 &\leq (1 - c_n)d(x_n, x^*) + c_nd(x_n, x^*)
 \end{aligned}$$

$$= d(x_n, x^*).$$

Dengan cara yang sama, didapatkan pula

$$\begin{aligned} d(y_n, x^*) &= d(T(Tq_n), x^*) \\ &\leq d(Tq_n, x^*) \\ &\leq d(q_n, x^*) \\ &\leq d(x_n, x^*), \end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x^*) &= d(T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n), Tx^*) \\ &\leq d((1 - a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n, x^*) \\ &\leq (1 - a_n)d(Tq_n, x^*) + a_nd(Ty_n, x^*) \\ &\leq (1 - a_n)d(q_n, x^*) + a_nd(y_n, x^*) \\ &\leq (1 - a_n)d(x_n, x^*) + a_nd(x_n, x^*) \\ &= d(x_n, x^*). \end{aligned}$$

Lema 4.2.2. Diberikan $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}, \{c_n\} \subset (0, 1)$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Bukti 4.2.2. Diambil sebarang $x^* \in \text{Fix}(T)$, berdasarkan Lema 2.3.3 dan 4.1.1, didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} (d(q_n, x^*))^p &= (d(T((1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n), x^*))^p \\ &\leq (d((1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, x^*))^p \\ &\leq (1 - c_n)(d(x_n, x^*))^p + c_n(d(Tx_n, x^*))^p - \frac{c_n(1 - c_n)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p. \end{aligned}$$

Karena $a \leq c_k \leq b$, diperoleh $-c_n(1 - c_n) \leq a(1 - b)$ sehingga

$$\begin{aligned} (d(q_n, x^*))^p &\leq (1 - c_n)(d(x_n, x^*))^p + c_n(d(Tx_n, x^*))^p - \frac{a(1 - b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p \\ &= (d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1 - b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, didapatkan pula

$$\begin{aligned}(d(y_n, x^*))^p &= (d(T(Tq_n), x^*))^p \\ &\leq (d(q_n, x^*))^p \\ &\leq (d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p,\end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned}(d(x_{n+1}, x^*))^p &= (d(T((1-a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n), x^*))^p \\ &\leq (d((1-a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n, x^*))^p \\ &\leq (1-a_n)(d(Tq_n, x^*))^p + a_n(d(Ty_n, x^*))^p - \frac{c_n(1-c_n)}{2^{p-1}}(d(Tq_n, Ty_n))^p \\ &\leq (1-a_n)(d(q_n, x^*))^p + a_n(d(y_n, x^*))^p \\ &\leq (1-a_n) \left[(d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p \right] \\ &\quad + a_n \left[(d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p \right] \\ &= (d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p.\end{aligned}$$

Akibatnya

$$(d(x_n, Tx_n))^p \leq \frac{2^{p-1}}{a(1-b)} [(d(x_n, x^*))^p - (d(x_{n+1}, x^*))^p].$$

Selanjutnya, berdasarkan Lema 4.2.1, diperoleh bahwa $\{d(x_n, x^*)\}$ adalah barisan turun dan terbatas di bawah dengan batas bawah 0, sehingga $\{d(x_n, x^*)\}$ konvergen. Hal ini berarti $u_n = (d(x_n, x^*))^p$ juga konvergen dan diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$. Akibatnya, didapatkan

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, Tx_n))^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{p-1}}{a(1-b)} [(d(x_n, x^*))^p - (d(x_{n+1}, x^*))^p] = 0.$$

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Teorema berikut ini menyajikan syarat eksistensi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Teorema 4.2.1. Diberikan $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) sehingga $\{x_n\}$ terbatas dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, maka $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Bukti 4.2.3. Diambil sebarang $x^* \in A(\{x_n\})$, maka dengan ketaksamaan 4.3, diperoleh bahwa

$$d(x_n, Tx^*) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma} d(x_n, x^*) + \frac{1+\beta}{1-\gamma} d(x_n, Tx_n).$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, diperoleh

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx^*) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*).$$

Dari sini didapatkan $Tx^* \in A(\{x_n\})$, sehingga berdasarkan Lema 2.3.2, diperoleh bahwa $A(\{x_n\})$ tepat memiliki satu elemen, yang berarti $x^* = Tx^*$. Dengan demikian $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Selanjutnya, dua teorema berikut ini menyajikan hasil konvergensi dari skema Sabri, yakni konvergensi- Δ dan konvergensi kuat, untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Teorema 4.2.2. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X yang tertutup dan konveks. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ dan $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}, \{c_n\} \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}$ konvergen- Δ ke suatu titik tetap dari T .

Bukti 4.2.4. Diamati bahwa T merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Dari Lema 4.2.1, didapatkan bahwa $\{d(x_n, x^*)\}$ adalah barisan turun dan terbatas di bawah dengan batas bawah 0, sehingga $\{d(x_n, x^*)\}$ konvergen untuk setiap $x^* \in \text{Fix}(T)$. Kemudian, karena $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, maka berdasarkan Lema 4.2.2, didapatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0. \quad (4.5)$$

Selanjutnya, dari Lema 4.1.3, didapat bahwa T memiliki sifat demiclosedness. Hal ini berarti semua kondisi pada Teorema 2.3.2 terpenuhi, sehingga $\{x_n\}$ konvergen- Δ .

Untuk mendapatkan hasil konvergensi kuat, diperlukan syarat tambahan, yaitu himpunan W haruslah merupakan himpunan kompak.

Teorema 4.2.3. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari X yang tertutup, konveks, dan kompak. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ dan

$\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}, \{c_n\} \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}$ konvergen kuat ke suatu titik tetap dari T .

Bukti 4.2.5. Diperhatikan bahwa W adalah himpunan kompak, ini berarti ada subbarisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$ yang konvergen kuat ke $x \in W$. Akibatnya $\{x_{n_k}\}$ juga konvergen- Δ ke $x \in W$. Dengan menggunakan fakta bahwa W himpunan kompak dan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, maka berdasarkan Lema 4.2.2, diperoleh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0.$$

Kemudian dengan menggunakan sifat demiclosedness dari T , didapat bahwa $x \in \text{Fix}(T)$. Selanjutnya dari Lema 4.2.1 didapatkan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Dengan demikian, barisan $\{x_n\}$ konvergen kuat ke titik tetap dari T .

4.3 Percobaan Numerik

Pada bagian ini, dilakukan percobaan numerik untuk menguji laju konvergensi dari skema iterasi Sabri dibanding dengan skema iterasi lainnya. Untuk percobaan ini, terlebih dahulu dikenalkan skema iterasi JK yang dikembangkan pada ruang $CAT_p(0)$ oleh Salisu sebagai berikut.

Definisi 4.3.1 (Skema Iterasi JK). (Salisu dkk., 2022) Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi JK pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= (1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, \\ y_n &= Tq_n, \\ x_{n+1} &= T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n), \end{cases} \quad (4.6)$$

dengan $\{a_n\} \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\} \subseteq [0, 1]$.

Selain itu, berikut ini dikenalkan pula skema iterasi Thakur, Abbas, dan Agarwal pada ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 4.3.2 (Skema Iterasi Thakur). Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Thakur pada ruang $CAT_p(0)$

sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= (1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, \\ y_n &= T((1 - a_n)x_n \oplus b_nq_n), \\ x_{n+1} &= Ty_n, \end{cases} \quad (4.7)$$

dengan $\{a_n\} \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\} \subseteq [0, 1]$.

Definisi 4.3.3 (Skema Iterasi Abbas). Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Abbas pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= (1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, \\ y_n &= (1 - b_n)Tx_n \oplus b_nTq_n, \\ x_{n+1} &= (1 - a_n)Ty_n \oplus a_nTq_n, \end{cases} \quad (4.8)$$

dengan $\{a_n\} \subseteq [0, 1]$, $\{b_n\} \subseteq [0, 1]$, dan $\{c_n\} \subseteq [0, 1]$.

Definisi 4.3.4 (Skema Iterasi Agarwal). Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Agarwal pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} y_n &= (1 - c_n)x_n \oplus b_nTx_n, \\ x_{n+1} &= (1 - a_n)Tx_n \oplus a_nTy_n, \end{cases} \quad (4.9)$$

dengan $\{a_n\} \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\} \subseteq [0, 1]$.

Percobaan numerik dilakukan dengan perangkat lunak Google Colab yang menggunakan bahasa pemrograman Python. Digunakan beberapa variasi parameter, baik dari nilai awal x_0 maupun parameter di skema iterasinya, yaitu barisan $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. Pemetaan dan ruang yang digunakan dalam percobaan ini diambil dari Contoh 4.1.1 yang memiliki titik tetap $x^* = (1, 1, 0, 0, \dots)$.

Tabel 4.1: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan JK

Iterasi	Nilai x_n	
	Sabri	JK
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.032859, 1.101850, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.001080, 1.003243, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.000035, 1.000106, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000001, 1.000003, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)

Tabel 4.2: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Thakur

Iterasi	Nilai x_n	
	Sabri	Thakur
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.056397, 1.178912, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.003181, 1.009572, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.000179, 1.000538, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000010, 1.000030, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)

Untuk hasil numerik tiap iterasi, digunakan batas galat $d(x_{n+1}, x^*) < 10^{-6}$, sedangkan untuk jumlah iterasi yang diperlukan untuk konvergen dari masing-masing skema iterasi, digunakan batas galat $d(x_{n+1}, x^*) < 10^{-16}$. Dalam percobaan ini, laju konvergensi skema iterasi Sabri (4.4) dibandingkan dengan Skema iterasi JK (4.6), Thakur (4.7), Abbas 4.8, dan Agarwal (4.9). Kode dari percobaan ini dapat dilihat pada Lampiran A.1.

Pada Tabel 4.1, Tabel 4.2, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4 disajikan hasil numerik dari tiap iterasi dengan nilai awal $(2, 3, 0, 0, \dots)$ dan parameter $a_n = 0.42, b_n = 0.83, c_n = 0.31$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Tabel 4.3: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Abbas

Iterasi	Nilai x_n	
	n	Thakur
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.109842, 1.367048, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.012065, 1.036634, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.001325, 1.003981, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000146, 1.000437, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000016, 1.000048, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000002, 1.000005, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)

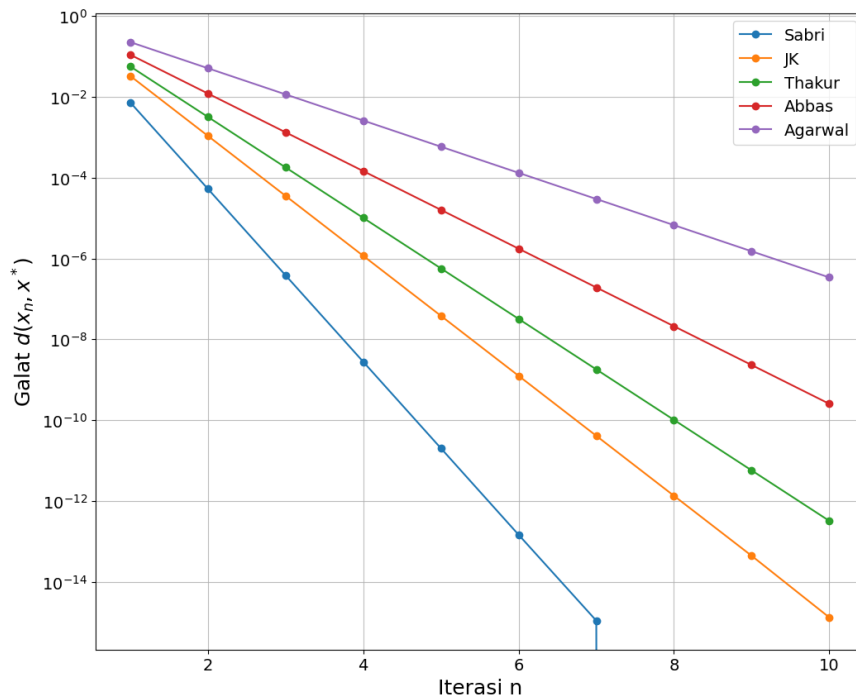
Tabel 4.4: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Agarwal

Iterasi	Nilai x_n	
	n	Agarwal
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.225588, 1.840912, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.050890, 1.160570, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.011480, 1.034837, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.002590, 1.007789, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000584, 1.001754, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000132, 1.000395, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000030, 1.000089, 0, 0, ...)
8	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000007, 1.000020, 0, 0, ...)
9	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000002, 1.000005, 0, 0, ...)
10	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)

Dengan galat kurang dari 10^{-6} , skema iterasi Sabri hanya membutuhkan 3 iterasi dibanding dengan JK dan Thakur (5 iterasi), Abbas (7 iterasi), dan Agarwal (10 iterasi). Pada Tabel 4.5, diberikan pula nilai galat $d(x_n, x^*)$ dari tiap iterasi. Gambar 4.2 juga memberikan gambaran mengenai penurunan galatnya.

Tabel 4.5: Galat $d(x_n, x^*)$

n	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
1	7.2×10^{-3}	3.2×10^{-2}	5.6×10^{-2}	1.0×10^{-1}	2.2×10^{-1}
2	5.2×10^{-5}	1.0×10^{-3}	3.1×10^{-3}	1.2×10^{-2}	5.0×10^{-2}
3	3.8×10^{-7}	3.5×10^{-5}	1.7×10^{-4}	1.3×10^{-3}	1.1×10^{-2}
4	2.7×10^{-9}	1.1×10^{-6}	1.0×10^{-5}	1.4×10^{-4}	2.5×10^{-3}
5	2.0×10^{-11}	3.8×10^{-8}	5.7×10^{-7}	1.5×10^{-5}	5.8×10^{-4}
6	1.4×10^{-13}	1.2×10^{-9}	3.2×10^{-8}	1.7×10^{-6}	1.3×10^{-4}
7	1.1×10^{-15}	4.1×10^{-11}	1.8×10^{-9}	1.9×10^{-7}	2.9×10^{-5}
8	0	1.3×10^{-12}	1.0×10^{-10}	2.1×10^{-8}	6.7×10^{-6}
9	0	4.4×10^{-14}	5.7×10^{-12}	2.3×10^{-9}	1.5×10^{-6}
10	0	1.3×10^{-15}	3.2×10^{-13}	2.5×10^{-10}	3.4×10^{-7}



Gambar 4.2: Galat $d(x_n, x^*)$ (dalam log) vs iterasi

Selanjutnya, pada Tabel 4.6, Tabel 4.7, Tabel 4.8, Tabel 4.9, dan Tabel 4.10, disajikan jumlah iterasi yang diperlukan sampai batas galat $d(x_{n+1}, x^*) < 10^{-16}$ dari masing-masing skema iterasi dengan nilai awal dan parameter yang berbeda. Nilai awal dipilih secara acak dengan batasan nilainya berada pada domain pemetaan yang digunakan. Pada tabel-tabel tersebut parameter barisan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ berturut-turut dipilih dengan kondisi konstan-konstan, turun-turun, naik-naik, naik-turun, dan turun-naik.

Tabel 4.6: Iterasi dengan parameter $a_n = 0.42, b_n = 0.83, c_n = 0.31$

Nilai Awal	Jumlah Iterasi				
x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	9	12	14	18	26
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	9	12	14	19	26
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	9	12	14	19	26
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	9	12	14	18	26
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	9	12	14	19	26
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	9	12	15	19	27
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	9	12	14	19	26

Tabel 4.7: Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}, b_n = \frac{2}{n+3}, c_n = \frac{4n+2}{7n+4}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi				
x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	9	12	14	15	27
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	9	12	14	15	27
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	9	12	15	16	27
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	9	12	14	15	26
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	9	12	14	16	27
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	9	12	15	16	28
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	9	12	14	15	27

Tabel 4.8: Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{\sqrt{4n+9}}{2n+13}$, $b_n = 0.8$, $c_n = 1 - \frac{n^2}{\sqrt{n^7+3}}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi				
x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	7	9	12	15	18
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	7	9	12	15	18
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	7	10	12	15	18
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	7	9	12	15	18
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	7	10	12	15	18
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	7	10	12	16	19
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	7	9	12	15	18

Tabel 4.9: Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{n^3}{n^5+1}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$, $c_n = \frac{3n+4}{5n^2+4}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi				
x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	7	10	14	24	26
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	7	10	14	24	26
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	7	10	14	25	26
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	7	10	13	24	25
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	7	10	14	25	26
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	7	10	14	25	26
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	7	10	14	25	26

Tabel 4.10: Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^5+1}{5n^7+9}$, $b_n = 1 - \frac{3}{n+5}$, $c_n = 1 - \frac{\sqrt{n^3+8}}{5n^5+9}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi				
x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	8	10	15	12	28
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	8	11	15	12	28
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	8	11	15	13	28
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	8	10	14	12	27
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	8	11	15	12	28
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	8	11	15	13	28
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	8	11	15	12	28

Hasil tersebut menunjukkan bahwa skema iterasi Sabri memiliki laju konvergensi yang lebih baik daripada yang lainnya secara numerik. Dengan parameter tertentu, skema tersebut hanya membutuhkan 7 iterasi untuk konvergen ke titik tetapnya dengan galat kurang dari 10^{-16} . Hasil ini secara intuitif dapat dijelaskan dari struktur iterasi Sabri yang melibatkan komposisi pemetaan nonekspansif T secara berlapis pada setiap langkah iterasi, sehingga jarak barisan iterasi terhadap titik tetap berkurang lebih signifikan pada setiap iterasi dibandingkan dengan skema iterasi lainnya.

4.4 Aplikasi pada Masalah Optimasi

Dalam bagian ini disajikan bahwa skema iterasi Sabri dapat digunakan pada masalah optimasi, khususnya untuk masalah minimalisasi dan rekonstruksi citra.

4.4.1 Masalah Minimalisasi

Diberikan suatu himpunan tak kosong X dan $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ adalah suatu pemetaan. Masalah pencarian titik yang meminimumkan fungsi f dapat diformulasikan sebagai mencari nilai

$$x \in X \text{ sehingga } f(x) \leq f(y), \text{ untuk setiap } y \in X. \quad (4.10)$$

Permasalahan ini merupakan permasalahan penting dalam bidang optimasi dan analisis tak linier. Selanjutnya, diperkenalkan operator resolvent dari suatu fungsi.

Definisi 4.4.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah suatu fungsi. Untuk $\lambda > 0$, operator resolvent λ dari f didefinisikan sebagai

$$J_\lambda^f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda} (d(x, y))^2 \right]. \quad (4.11)$$

Contoh 4.4.1. Diberikan $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ adalah ruang Banach yang juga merupakan $CAT_p(0)$. Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$ untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Untuk $\lambda > 0$ dan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, operator resolvent J_λ^f dari f adalah sebagai berikut.

$$J_\lambda^f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^2} \left[|y_1| + |y_2| + \frac{1}{2\lambda} (\|(x_1, y_2) - (y_1, y_2)\|_2)^2 \right]$$

$$= \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^2} \left[|y_1| + |y_2| + \frac{1}{2\lambda} ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) \right].$$

Untuk fungsi yang memenuhi kondisi konveks dan *proper lower semi-continuous*, himpunan solusi dari masalah (4.10) sama dengan himpunan titik tetap dari operator resolvent J_λ^f (lihat proposisi 6.5 pada (Ariza-Ruiz dkk., 2014)). Berikut ini diberikan definisi dari fungsi yang memenuhi kondisi tersebut dengan contoh yang diberikan pada Contoh 4.4.2.

Definisi 4.4.2. (Khamisi dan Shukri, 2017) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ disebut konveks secara geodesik jika untuk setiap $t \in (0, 1)$ dan $x, y \in X$, berlaku

$$f(tx \oplus (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Definisi 4.4.3. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ disebut *proper* jika himpunan $D(f) := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$.

Definisi 4.4.4. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ disebut *lower semi-continuous* pada suatu titik $x \in D(f)$ jika $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ untuk setiap barisan $\{x_n\}$ yang konvergen di $D(f)$ dengan limit $x \in X$. Jika f *lower semi-continuous* pada setiap titik di $D(f)$, maka f disebut *lower semi-continuous* pada X .

Berdasarkan hal tersebut, didapatkan Teorema berikut.

Teorema 4.4.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah fungsi yang memenuhi kondisi konveks dan *proper lower semi-continuous*. Untuk $x \in X$, barisan $\{x_n\}$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_n &= J_\lambda^f \left((1 - c_n)x_n \oplus c_n J_\lambda^f(x_n) \right) \\ y_n &= J_\lambda^f \left(J_\lambda^f(q_n) \right) \\ x_{n+1} &= J_\lambda^f \left((1 - a_n)J_\lambda^f(q_n) \oplus a_n J_\lambda^f(y_n) \right), \end{cases} \quad (4.12)$$

dengan $\{a_n\}, \{c_n\} \subseteq [a, b] \subset (0, 1)$ konvergen- Δ ke solusi dari permasalahan (4.10). Jika X kompak, maka $\{x_n\}$ konvergen kuat.

Bukti 4.4.1. Dengan menggunakan Lema 4 di (Jost, 1995), diketahui bahwa J_λ^f merupakan pemetaan nonekspansif, sehingga merupakan pemetaan

(α, β, γ) -nonekspansif juga. Akibatnya, dengan Teorema 4.2.2 diperoleh bahwa $\{x_n\}$ konvergen- Δ ke titik tetap dari J_λ^f . Jika X kompak, Teorema 4.2.3, menjamin bahwa konvergensinya kuat. Karena titik tetap dari J_λ^f sama dengan solusi dari permasalahan (4.10), artinya Teorema 4.4.1 terbukti.

Sebagai gambaran, dilakukan simulasi untuk contoh berikut ini.

Contoh 4.4.2. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ sebagaimana Contoh 2.3.6 dan $W = \{(x_1, x_2, 0, 0, \dots) \mid x_1, x_2 \in X\}$. Suatu fungsi $f : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 20|x_2 - x_1^3|^3 + |26 - x_1|^3, \quad \text{untuk } x = (x_1, x_2, 0, 0, \dots) \in W, \quad (4.13)$$

merupakan fungsi tak konveks pada definisi klasiknya, tetapi konveks secara geodesik dengan geodesik sebagaimana pada Contoh 2.3.6. Lebih lanjut, f merupakan fungsi yang proper lower semicontinuous dan mencapai nilai minimum saat $x_1 = 26$ dan $x_2 = 26^3$.

Penjelasan dari Contoh 4.4.2 diberikan sebagai berikut.

1. Pertama, ditunjukkan bahwa f tak konveks dalam definisi klasiknya, yaitu f memenuhi ketaksamaan

$$f((1-t)w + tz) \leq (1-t)f(w) + tf(z),$$

untuk setiap $t \in (0, 1)$ dan $w, z \in W$. Untuk menunjukkan bahwa f tidak konveks dalam definisi klasik, digunakan matriks Hessian, yaitu

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}.$$

Ingat kembali bahwa suatu fungsi $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ adalah konveks jika dan hanya jika matriks Hessian H adalah matriks semidefinit positif untuk setiap $x \in W$ (lihat (Boyd dan Vandenberghe, 2004)). Dapat dihitung bahwa

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -180(x_2 x_1^2 - x_1^5)|x_2 - x_1^3| - 3(26 - x_1)|26 - x_1|.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= -180 \left((2x_1x_2 - 5x_1^4)|x_2 - x_1^3| - \frac{3x_1^4(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|} \right) + \frac{6(26 - x_1)^2}{|26 - x_1|}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} &= \frac{-360x_1^2(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|}. \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= 60(x_2 - x_1^3)|x_2 - x_1|^3. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} &= \frac{-360x_1^2(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|}. \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= 60 \left(|x_2 - x_1^3| + \frac{(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|} \right).
\end{aligned}$$

Jika diambil $x_1 = 1$ dan $x_2 = 5$, diperoleh

$$H = \begin{bmatrix} -1290 & -1440 \\ -1440 & 480 \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa H memiliki persamaan karakteristik $p(\lambda) = \lambda^2 + 810\lambda - 2692800$ dengan akar-akar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-810 \pm \sqrt{810^2 - 4(2692800)}}{2},$$

yang jelas memiliki akar negatif. Jadi ada $x \in W$ sehingga matriks Hessian H memiliki nilai eigen negatif, yang berarti H bukan matriks semidefinit positif. Akibatnya f bukanlah fungsi konveks dalam definisi klasik.

2. Kedua, ditunjukkan bahwa f memenuhi Definisi 4.4.2, yaitu fungsi konveks secara geodesik. Sebelum itu, diperhatikan bahwa fungsi $p(x) = |x|^3$ adalah fungsi konveks, karena $p''(x) = \frac{6x^2}{|x|} \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dengan fakta tersebut, didapatkan bahwa untuk setiap $t \in (0, 1)$ dan $w, z \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}
f((1-t)w \oplus tz) &= f((1-t)w_1 + tz_1, ((1-t)w_1 + tz_1)^3 \\
&\quad - (1-t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2)) \\
&= 20|(1-t)(w_2 - w_1^3) + t(z_2 - z_1)^3|^3 \\
&\quad + |26 - ((1-t)w_1 + tz_1)|^3 \\
&\leq 20((1-t)|w_2 - w_1^3|^3 + t|z_2 - z_1^3|^3) \\
&\quad + |(1-t)(26 - w_1) + t(26 - z_1)|^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1-t)(20|w_2 - w_1^3|^3 + |26 - w_1|^3) \\
&\quad + t(20|z_2 - z_1^3|^3 + |26 - z_1|^3) \\
&= (1-t)f(w) + tf(z).
\end{aligned}$$

Jadi f adalah fungsi konveks secara geodesik.

Selanjutnya, diperhatikan bahwa $(0,0,0,\dots) \in D(f)$ sehingga $D(f) = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$, yang berarti f adalah fungsi *proper*. Diperhatikan pula bahwa f adalah fungsi kontinu, yang berarti juga memenuhi kondisi *lower semicontinuous*. Dalam hal ini kondisi pada Teorema 4.2.3 terpenuhi. Diperhatikan bahwa nilai minimum dari fungsi f pada Contoh 4.4.2 adalah 0, yang dicapai saat $x_2 - x_1^3 = 0$ dan $26 - x_1 = 0$, atau pada titik $x^* = (26, 17576, 0, 0, \dots)$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 4.4.1, barisan yang dihasilkan dari skema iterasi Sabri dan JK konvergen ke titik x^* .

Untuk ilustrasi, dilakukan simulasi numerik untuk Contoh 4.4.2 dengan perangkat lunak Google Colab yang menggunakan bahasa pemrograman python. Kode dari program ini dapat dilihat pada Lampiran A.2. Pada simulasi ini digunakan parameter $\lambda = 20$, $a_n = 0.34$, dan $c_n = 0.93$, serta nilai awal $x_0 = (10, 10, 0, 0, \dots)$. Simulasi dilakukan sebanyak 55 iterasi yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.11 dan Tabel 4.12. Galat dari simulasi ini juga digambarkan sebagai grafik dengan koordinat-y berskala log yang disajikan pada Gambar 4.3.

Tabel 4.11: Hasil simulasi sebanyak 55 iterasi untuk
Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK

n	Sabri	JK
0	(10.00000, 10.00000, 0, 0, ...)	(10.00000, 10.00000, 0, 0, ...)
1	(25.04431, 15708.11708, 0, 0, ...)	(22.68123, 11668.32829, 0, 0, ...)
2	(25.98980, 17555.31676, 0, 0, ...)	(25.96654, 17508.22787, 0, 0, ...)
3	(25.99672, 17569.35288, 0, 0, ...)	(25.99313, 17562.07883, 0, 0, ...)
4	(25.99816, 17572.26781, 0, 0, ...)	(25.99666, 17569.23601, 0, 0, ...)
5	(25.99874, 17573.44601, 0, 0, ...)	(25.99787, 17571.67427, 0, 0, ...)
6	(25.99905, 17574.07075, 0, 0, ...)	(25.99845, 17572.85677, 0, 0, ...)
7	(25.99924, 17574.45456, 0, 0, ...)	(25.99879, 17573.54447, 0, 0, ...)
8	(25.99937, 17574.71316, 0, 0, ...)	(25.99901, 17573.99088, 0, 0, ...)

Tabel 4.11 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
9	(25.99946, 17574.89874, 0, 0, ...)	(25.99916, 17574.30275, 0, 0, ...)
10	(25.99953, 17575.03819, 0, 0, ...)	(25.99928, 17574.53235, 0, 0, ...)
11	(25.99958, 17575.14668, 0, 0, ...)	(25.99936, 17574.70814, 0, 0, ...)
12	(25.99962, 17575.23343, 0, 0, ...)	(25.99943, 17574.84690, 0, 0, ...)
13	(25.99966, 17575.30434, 0, 0, ...)	(25.99949, 17574.95913, 0, 0, ...)
14	(25.99969, 17575.36336, 0, 0, ...)	(25.99953, 17575.05170, 0, 0, ...)
15	(25.99971, 17575.41324, 0, 0, ...)	(25.99957, 17575.12934, 0, 0, ...)
16	(25.99973, 17575.45593, 0, 0, ...)	(25.99960, 17575.19536, 0, 0, ...)
17	(25.99975, 17575.49287, 0, 0, ...)	(25.99963, 17575.25217, 0, 0, ...)
18	(25.99977, 17575.52516, 0, 0, ...)	(25.99966, 17575.30157, 0, 0, ...)
19	(25.99978, 17575.55360, 0, 0, ...)	(25.99968, 17575.34490, 0, 0, ...)
20	(25.99979, 17575.57886, 0, 0, ...)	(25.99970, 17575.38321, 0, 0, ...)
21	(25.99980, 17575.60142, 0, 0, ...)	(25.99971, 17575.41733, 0, 0, ...)
22	(25.99981, 17575.62171, 0, 0, ...)	(25.99973, 17575.44790, 0, 0, ...)
23	(25.99982, 17575.64004, 0, 0, ...)	(25.99974, 17575.47544, 0, 0, ...)
24	(25.99983, 17575.65669, 0, 0, ...)	(25.99975, 17575.50039, 0, 0, ...)
25	(25.99984, 17575.67187, 0, 0, ...)	(25.99976, 17575.52309, 0, 0, ...)
26	(25.99985, 17575.68578, 0, 0, ...)	(25.99978, 17575.54382, 0, 0, ...)
27	(25.99985, 17575.69856, 0, 0, ...)	(25.99978, 17575.56285, 0, 0, ...)
28	(25.99986, 17575.71034, 0, 0, ...)	(25.99979, 17575.58035, 0, 0, ...)
29	(25.99986, 17575.72124, 0, 0, ...)	(25.99980, 17575.59652, 0, 0, ...)
30	(25.99987, 17575.73136, 0, 0, ...)	(25.99981, 17575.61150, 0, 0, ...)
31	(25.99987, 17575.74077, 0, 0, ...)	(25.99982, 17575.62541, 0, 0, ...)
32	(25.99988, 17575.74954, 0, 0, ...)	(25.99982, 17575.63836, 0, 0, ...)
33	(25.99988, 17575.75775, 0, 0, ...)	(25.99983, 17575.65045, 0, 0, ...)
34	(25.99988, 17575.76543, 0, 0, ...)	(25.99983, 17575.66177, 0, 0, ...)
35	(25.99989, 17575.77265, 0, 0, ...)	(25.99984, 17575.67237, 0, 0, ...)
36	(25.99989, 17575.77943, 0, 0, ...)	(25.99984, 17575.68234, 0, 0, ...)
37	(25.99989, 17575.78583, 0, 0, ...)	(25.99985, 17575.69172, 0, 0, ...)
38	(25.99990, 17575.79186, 0, 0, ...)	(25.99985, 17575.70056, 0, 0, ...)
39	(25.99990, 17575.79757, 0, 0, ...)	(25.99986, 17575.70892, 0, 0, ...)
40	(25.99990, 17575.80297, 0, 0, ...)	(25.99986, 17575.71682, 0, 0, ...)
41	(25.99991, 17575.80809, 0, 0, ...)	(25.99986, 17575.72430, 0, 0, ...)
42	(25.99991, 17575.81295, 0, 0, ...)	(25.99987, 17575.73141, 0, 0, ...)

Tabel 4.11 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
43	(25.99991, 17575.81758, 0, 0, ...)	(25.99987, 17575.73815, 0, 0, ...)
44	(25.99991, 17575.82198, 0, 0, ...)	(25.99987, 17575.74457, 0, 0, ...)
45	(25.99991, 17575.82617, 0, 0, ...)	(25.99988, 17575.75068, 0, 0, ...)
46	(25.99992, 17575.83017, 0, 0, ...)	(25.99988, 17575.75651, 0, 0, ...)
47	(25.99992, 17575.83400, 0, 0, ...)	(25.99988, 17575.76207, 0, 0, ...)
48	(25.99992, 17575.83765, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.76739, 0, 0, ...)
49	(25.99992, 17575.84115, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.77247, 0, 0, ...)
50	(25.99992, 17575.84450, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.77733, 0, 0, ...)
51	(25.99992, 17575.84771, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.78200, 0, 0, ...)
52	(25.99993, 17575.85079, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.78647, 0, 0, ...)
53	(25.99993, 17575.85375, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.79076, 0, 0, ...)
54	(25.99993, 17575.85660, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.79489, 0, 0, ...)
55	(25.99993, 17575.85934, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.79885, 0, 0, ...)

Tabel 4.12: Galat simulasi $d(x_n, x^*)$ untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK

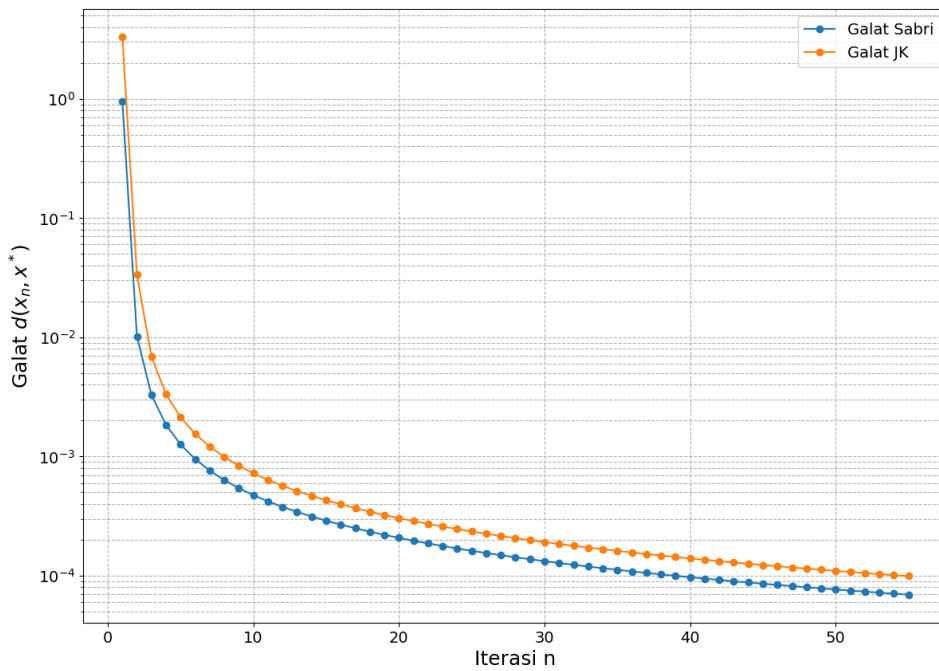
n	Galat Sabri	Galat JK
1	9.5×10^{-1}	3.3×10^0
2	1.0×10^{-2}	3.3×10^{-2}
3	3.2×10^{-3}	6.8×10^{-3}
4	1.8×10^{-3}	3.3×10^{-3}
5	1.2×10^{-3}	2.1×10^{-3}
6	9.5×10^{-4}	1.5×10^{-3}
7	7.6×10^{-4}	1.2×10^{-3}
8	6.3×10^{-4}	9.9×10^{-4}
9	5.4×10^{-4}	8.3×10^{-4}
10	4.7×10^{-4}	7.2×10^{-4}
11	4.2×10^{-4}	6.3×10^{-4}
12	3.7×10^{-4}	5.6×10^{-4}
13	3.4×10^{-4}	5.1×10^{-4}
14	3.1×10^{-4}	4.6×10^{-4}
15	2.8×10^{-4}	4.2×10^{-4}
16	2.6×10^{-4}	3.9×10^{-4}

Tabel 4.12 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
17	2.5×10^{-4}	3.6×10^{-4}
18	2.3×10^{-4}	3.4×10^{-4}
19	2.2×10^{-4}	3.2×10^{-4}
20	2.0×10^{-4}	3.0×10^{-4}
21	1.9×10^{-4}	2.8×10^{-4}
22	1.8×10^{-4}	2.7×10^{-4}
23	1.7×10^{-4}	2.5×10^{-4}
24	1.6×10^{-4}	2.4×10^{-4}
25	1.6×10^{-4}	2.3×10^{-4}
26	1.5×10^{-4}	2.2×10^{-4}
27	1.4×10^{-4}	2.1×10^{-4}
28	1.4×10^{-4}	2.0×10^{-4}
29	1.3×10^{-4}	1.9×10^{-4}
30	1.3×10^{-4}	1.9×10^{-4}
31	1.2×10^{-4}	1.8×10^{-4}
32	1.2×10^{-4}	1.7×10^{-4}
33	1.1×10^{-4}	1.7×10^{-4}
34	1.1×10^{-4}	1.6×10^{-4}
35	1.1×10^{-4}	1.6×10^{-4}
36	1.0×10^{-4}	1.5×10^{-4}
37	1.0×10^{-4}	1.5×10^{-4}
38	1.0×10^{-4}	1.4×10^{-4}
39	9.9×10^{-5}	1.4×10^{-4}
40	9.7×10^{-5}	1.3×10^{-4}
41	9.4×10^{-5}	1.3×10^{-4}
42	9.2×10^{-5}	1.3×10^{-4}
43	8.9×10^{-5}	1.2×10^{-4}
44	8.7×10^{-5}	1.2×10^{-4}
45	8.5×10^{-5}	1.2×10^{-4}
46	8.3×10^{-5}	1.2×10^{-4}
47	8.1×10^{-5}	1.1×10^{-4}
48	8.0×10^{-5}	1.1×10^{-4}
49	7.8×10^{-5}	1.1×10^{-4}
50	7.6×10^{-5}	1.0×10^{-4}

Tabel 4.12 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
51	7.5×10^{-5}	1.0×10^{-4}
52	7.3×10^{-5}	1.0×10^{-4}
53	7.2×10^{-5}	1.0×10^{-4}
54	7.0×10^{-5}	1.0×10^{-4}
55	6.9×10^{-5}	9.9×10^{-5}



Gambar 4.3: Galat $d(x_n, x^*)$ (skala log) vs iterasi

4.4.2 Rekonstruksi Citra

Selain dapat digunakan dalam minimalisasi fungsi, skema iterasi Sabri juga dapat digunakan dalam permasalahan *split feasibility*, yang memiliki aplikasi nyata dalam rekonstruksi citra. Permasalahan *split feasibility* ini dikenalkan oleh Censor dan Elfving pada tahun 1994, yang diformulasikan sebagai

$$\text{Cari titik } x^* \in C \text{ yang memenuhi } Ax^* \in Q, \quad (4.14)$$

dengan C dan Q berturut-turut adalah himpunan bagian tertutup dan konveks dari ruang Hilbert H_1 dan H_2 , serta $A : H_1 \rightarrow H_2$ adalah transformasi linier terbatas (Censor dan Elfving, 1994). Permasalahan

(4.14) disebut konsisten jika setidaknya memiliki satu solusi. Suatu titik $x^* \in C$ merupakan solusi dari permasalahan tersebut jika dan hanya jika x^* memenuhi persamaan titik tetap

$$x = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x, \quad (4.15)$$

dengan P_C dan P_Q adalah proyeksi titik terdekat pada C dan Q , secara berturut-turut, $\gamma > 0$, dan A^* adalah transformasi adjoin dari A (Feng, Shi dan Chen, 2019). Kemudian, berdasarkan Contoh 2.3.3, diketahui bahwa ruang Hilbert merupakan ruang $CAT(0)$ yang juga merupakan ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 2$. Selanjutnya, berdasarkan hasil dari Byrne (Byrne, 2003), pemetaan $T : C \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagai $T(x) = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x$ adalah pemetaan nonekspansif. Oleh karena itu, pemetaan ini juga merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Dari permasalahan tersebut, skema iterasi Sabri dapat digunakan sebagaimana Teorema berikut.

Teorema 4.4.2. *Diberikan ruang Hilbert H yang kompak dan C adalah himpunan bagian yang tertutup dan konveks dari H . Jika permasalahan (4.14) konsisten dengan solusi yang tunggal dan $\gamma \in (0, \frac{2}{k})$ dengan k adalah radius spektral dari A^*A , maka pemetaan $T : C \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagai*

$$T(x) = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x$$

merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif, serta barisan $\{x_n\}$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_n &= T((1 - c_n)x_n \oplus c_n T(x_n)) \\ y_n &= T(T(q_n)) \\ x_{n+1} &= T((1 - a_n)T(q_n) \oplus a_n T(y_n)) \end{cases}, \quad (4.16)$$

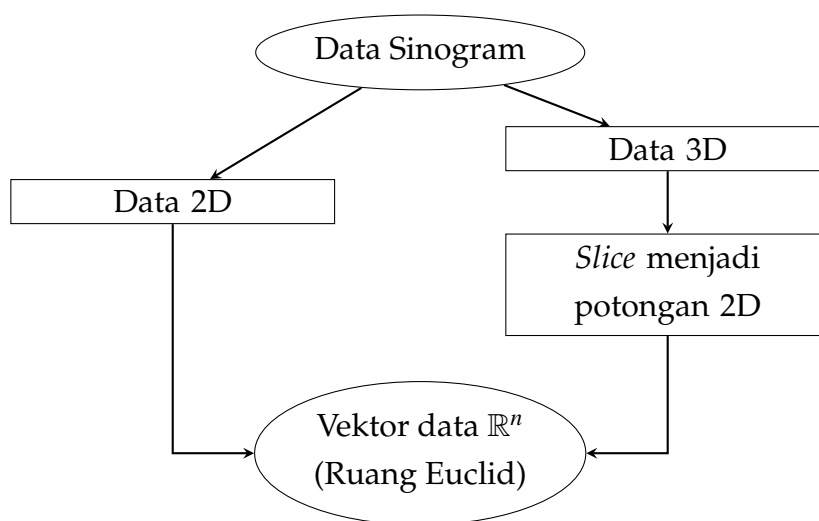
dengan $\{a_n\}, \{c_n\} \subseteq [a, b] \subset (0, 1)$ konvergen kuat ke solusi tunggal $x^ \in C$ dari permasalahan (4.14) untuk setiap nilai awal $x_0 \in C$.*

Bukti 4.4.2. Berdasarkan hasil dari Byrne (lihat (Byrne, 2003)), diperoleh bahwa pemetaan T yang memenuhi kondisi tersebut adalah pemetaan nonekspansif sehingga juga merupakan (α, β, γ) -nonekspansif. Kemudian, berdasarkan Contoh 2.3.5, didapatkan bahwa H adalah ruang $CAT(0)$ yang juga merupakan ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 2$. Akibatnya, dengan Teorema 4.2.3, diperoleh bahwa $\{x_n\}$

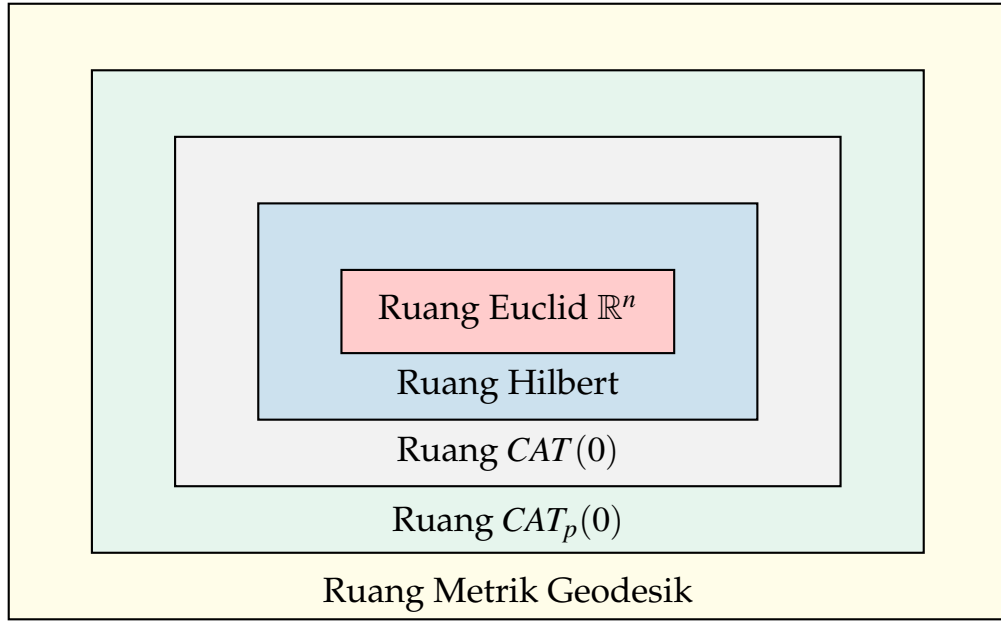
konvergen kuat ke titik tetap dari T , yang berarti $\{x_n\}$ konvergen kuat ke solusi tunggal dari $x^* \in C$.

Hasil ini dapat diterapkan pada permasalahan rekonstruksi citra tomografi. Permasalahan tersebut memiliki peranan penting dalam dunia medis, khususnya dalam rekonstruksi citra dari *CT-Scan*, yang datanya berupa proyeksi yang dikenal sebagai sinogram. Pada umumnya, rekonstruksi citra organ tubuh dari data sinogram dilakukan menggunakan proyeksi mundur berfilter (*filtered back projection*). Dari segi waktu komputasi, metode ini relatif cepat dalam menghasilkan citra. Namun, metode tersebut memiliki keterbatasan dalam kualitas citra yang dihasilkan, akibat tingginya tingkat derau. Untuk mereduksi derau pada citra hasil rekonstruksi, metode ini memerlukan dosis radiasi yang lebih tinggi pada pasien, yang berpotensi menimbulkan dampak negatif pada kesehatan pasien. Sebagai alternatif, rekonstruksi citra dapat dilakukan menggunakan proyeksi mundur tanpa filter yang dikombinasikan dengan algoritma skema iterasi. Pendekatan ini terbukti mampu mereduksi derau secara signifikan, yaitu sekitar 40% sampai 70% dibandingkan dengan metode proyeksi mundur berfilter (Ramage dkk., 2023).

Berikut ini diberikan gambaran bagaimana skema iterasi Sabri dapat diterapkan dalam rekonstruksi citra tomografi di ruang $CAT_p(0)$.



Gambar 4.4: Diagram Data Sinogram ke Ruang Euclid dalam Rekonstruksi Citra



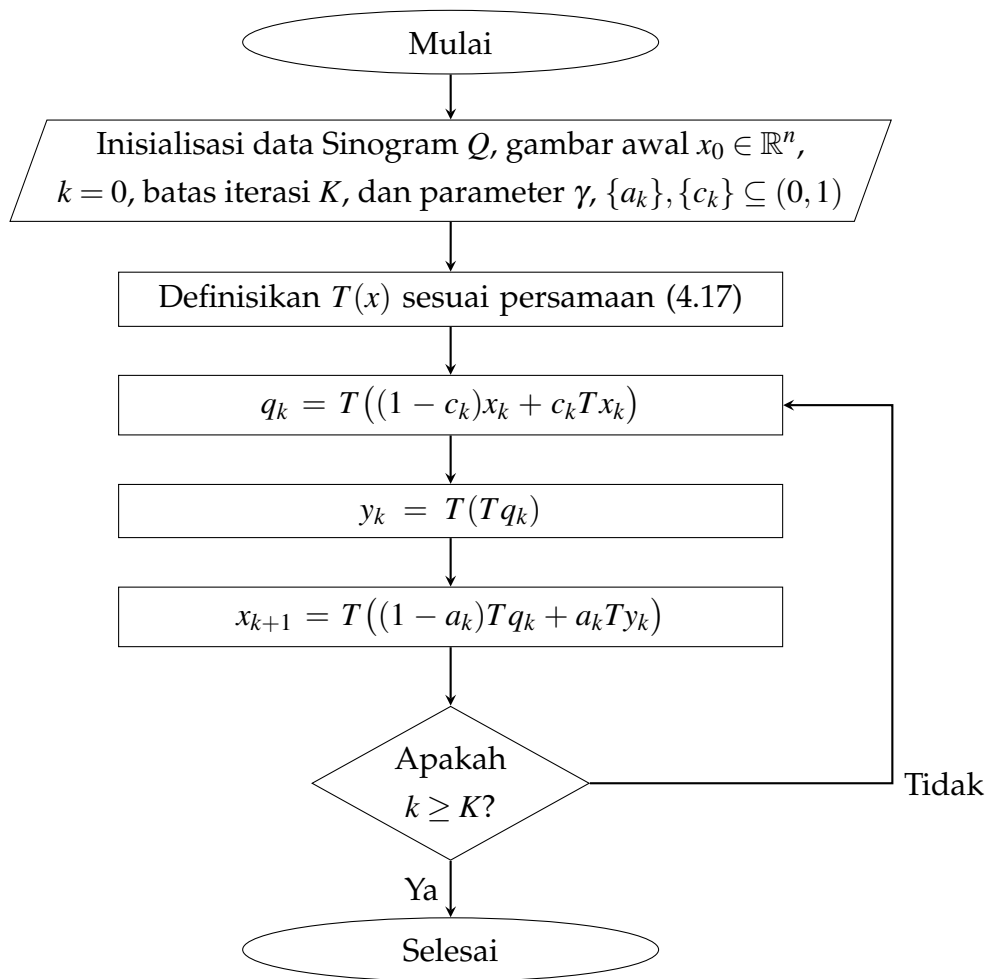
Gambar 4.5: Hubungan ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik

Pada bagian ini, dilakukan simulasi rekonstruksi citra tomografi berbasis skema iterasi Sabri. Transformasi maju A yang digunakan adalah transformasi Radon, sedangkan himpunan batas C dan Q adalah himpunan bagian yang konveks dari suatu ruang Euclid, yang masing-masing merepresentasikan solusi *feasible* untuk citra dan domain proyeksi. Pada simulasi ini, digunakan bahasa pemrograman Python dengan bantuan pustaka Scikit-image. Data citra yang digunakan adalah Shepp-Logan Phantom $x^* \in \mathbb{R}^n$ dengan resolusi 512×512 . Shepp-Logan Phantom dipilih karena merupakan model sintetik yang dirancang untuk menyerupai potongan gambar bagian dalam kepala manusia, sehingga sering digunakan dalam penelitian tomografi untuk menguji kemampuan algoritma rekonstruksi dalam membedakan struktur dengan tingkat kontras yang berbeda. Selanjutnya, data sinogram dibentuk sebagai $Q = Ax^*$ dengan menerapkan transformasi Radon pada sudut-sudut proyeksi yang terdistribusi merata pada interval $[0, 180^\circ)$. Tujuan simulasi ini adalah merekonstruksi citra x^* berdasarkan data sinogram tersebut menggunakan skema iterasi Sabri. Untuk itu, digunakan pemetaan

$$T(x) = P_C(x - \gamma A^*(Ax - Q)), \quad (4.17)$$

dengan A^* merupakan aproksimasi dari transformasi adjoint A yang diperoleh menggunakan proyeksi mundur tanpa filter, serta P_C menyatakan operator proyeksi ke himpunan batas $C = [0, 1]^n$.

Berikut ini diberikan diagram alir dari skema iterasi Sabri yang digunakan dalam simulasi rekonstruksi citra tomografi.



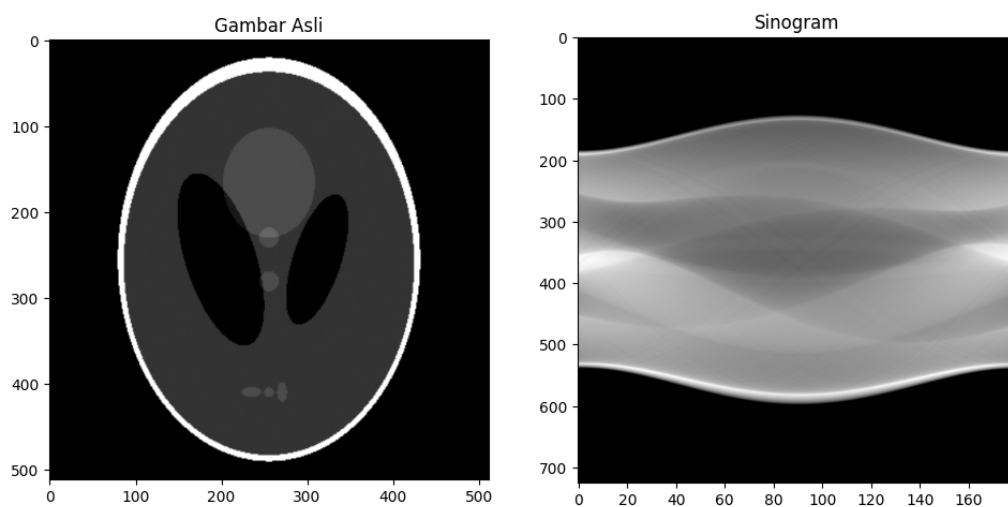
Gambar 4.6: Diagram alir skema iterasi Sabri untuk rekonstruksi citra tomografi

Selanjutnya, pada Tabel 4.13 diberikan parameter-parameter yang digunakan dalam simulasi rekonstruksi citra tomografi tersebut.

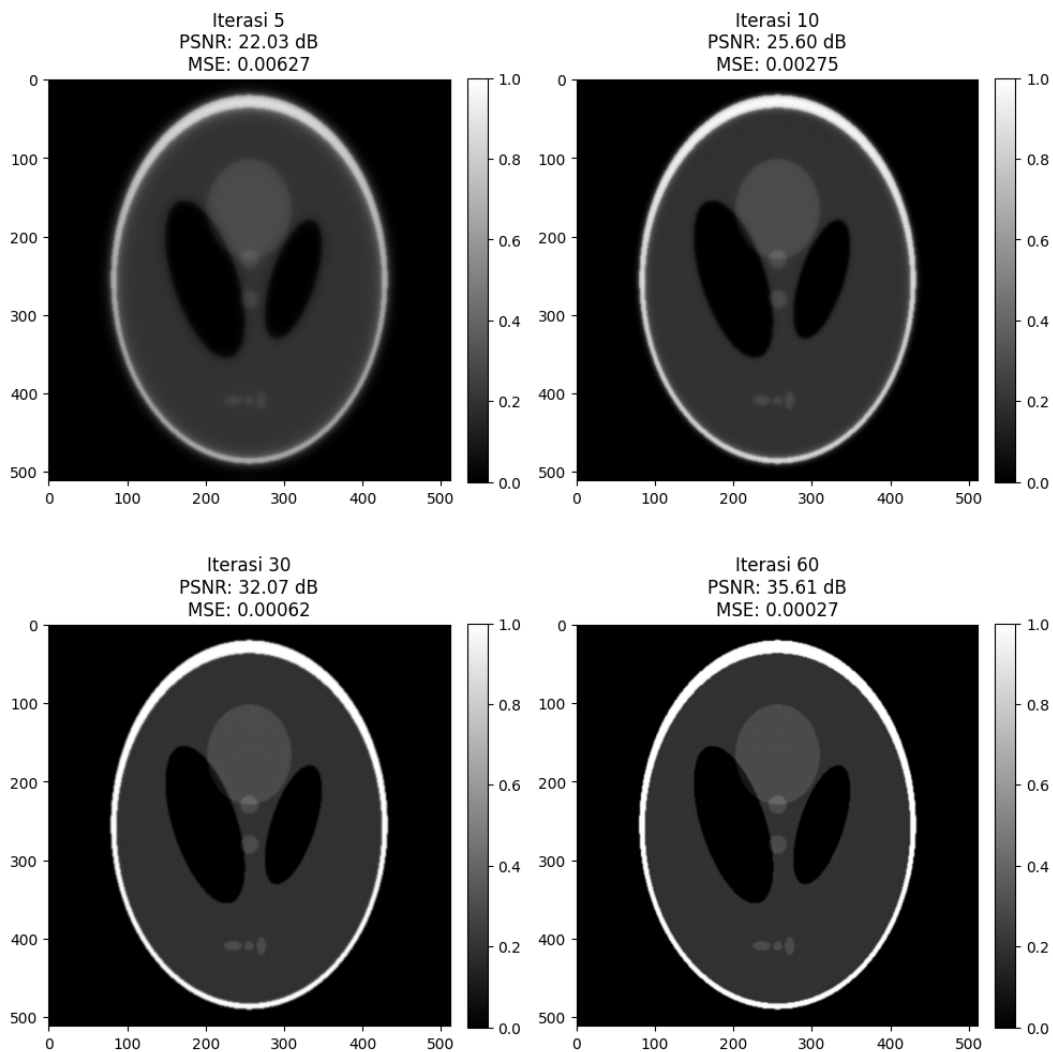
Tabel 4.13: Parameter simulasi rekonstruksi citra

Parameter	Nilai/Deskripsi
Ukuran gambar	512×512
Sudut proyeksi	180 terdistribusi merata pada $[0^\circ, 180^\circ)$
Transformasi maju A	Transformasi Radon
Transformasi adjoin A^*	Proyeksi mundur tanpa filter
Himpunan batas C	$[0, 1]^n$
Nilai awal x_0	$x_0 = \mathbf{0}$
Jumlah iterasi	60
Parameter γ	Konstan: 0.00245
Parameter a_n, c_n	Konstan: $a_n = 0.42, c_n = 0.31$
Implementasi	Google Colab dengan scikit-image, matplotlib

Data awal dari simulasi tersebut disajikan pada Gambar 4.7. Kemudian hasil simulasi dari rekonstruksi citra tersebut pada iterasi ke-5, 10, 30, dan 60 diberikan oleh Gambar 4.8. Pada iterasi ke-5, terlihat bahwa derau dari citra tersebut masih cukup tinggi, yang juga tertera pada nilai (*peak signal noise ratio*) PSNR, yaitu 22.03 dB. Nilai PSNR dari citra tersebut juga makin membesar pada iterasi ke-10 dan 30, serta untuk iterasi ke-60, nilai PSNR citra tersebut adalah 35.61 dB, yang mengindikasikan semakin sedikit derau pada citra.



Gambar 4.7: Data awal sinogram dan citra asli



Gambar 4.8: Hasil rekonstruksi citra pada iterasi ke-5, 10, 30, dan 60

Pada Tabel 4.14, diberikan nilai metrik PSNR dan MSE dari citra hasil rekonstruksi pada tiap iterasinya. Terlihat bahwa nilai galat, yaitu (*mean squared error*) dari citra tersebut relatif kecil pada iterasi ke-60, yaitu 2.7×10^{-4} , dibandingkan dengan galat pada iterasi pertama, yaitu 2×10^{-2} . Terlihat pula bahwa nilai metrik PSNR dan MSE tersebut turun pada tiap iterasinya, sesuai dengan peningkatan kualitas citra pada Gambar 4.8, yang menunjukkan bahwa skema iterasi Sabri dapat digunakan dalam rekonstruksi citra tomografi.

Tabel 4.14: MSE dan PSNR Rekonstruksi Citra

Iterasi ke- n	MSE	PSNR
1	0.020302	16.924673
2	0.013587	18.668847
3	0.010072	19.968693
4	0.007823	21.066098
5	0.006272	22.026258
6	0.005149	22.882519
7	0.004309	23.655780
8	0.003664	24.360387
9	0.003157	25.006683
10	0.002753	25.602432
11	0.002425	26.153733
12	0.002155	26.665575
13	0.001931	27.142128
14	0.001743	27.587012
15	0.001584	28.003332
16	0.001448	28.393736
17	0.001330	28.760530
18	0.001229	29.105746
19	0.001140	29.431187
20	0.001062	29.738458
21	0.000993	30.028997
22	0.000932	30.304104
23	0.000878	30.564968
24	0.000829	30.812682
25	0.000786	31.048254
26	0.000746	31.272582
27	0.000710	31.486496
28	0.000678	31.690770
29	0.000648	31.886142
30	0.000620	32.073295
31	0.000595	32.252847
32	0.000572	32.425370
33	0.000551	32.591386

Tabel 4.14 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-n	MSE	PSNR
34	0.000531	32.751347
35	0.000512	32.905658
36	0.000495	33.054684
37	0.000479	33.198752
38	0.000464	33.338168
39	0.000449	33.473223
40	0.000436	33.604183
41	0.000424	33.731285
42	0.000412	33.854741
43	0.000400	33.974740
44	0.000390	34.091450
45	0.000380	34.205025
46	0.000370	34.315610
47	0.000361	34.423339
48	0.000353	34.528338
49	0.000344	34.630725
50	0.000336	34.730611
51	0.000329	34.828102
52	0.000322	34.923289
53	0.000315	35.016256
54	0.000309	35.107081
55	0.000302	35.195841
56	0.000296	35.282605
57	0.000291	35.367439
58	0.000285	35.450403
59	0.000280	35.531556
60	0.000275	35.610951

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian dari bab-bab sebelumnya, berikut diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tesis ini dan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab 4, didapatkan kesimpulan dari tesis ini sebagai berikut.

1. Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif yang awalnya didefinisikan pada ruang Banach dapat diperluas pada ruang $CAT_p(0)$. Dalam ruang ini, pemetaan tersebut juga memenuhi sifat nonekspansif kuasi dan *demiclosedness*. Untuk mendapatkan nilai aproksimasi titik tetap dari pemetaan ini, dapat digunakan skema iterasi Sabri yang terbukti memiliki konvergensi- Δ dan kuat. Syarat cukup konvergensi- Δ dari aproksimasi titik tetap pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ adalah ruangnya lengkap, pemetaannya memiliki titik tetap dan merupakan pemetaan diri sendiri pada himpunan bagian tak kosong yang tertutup dan konveks, serta barisan koefisien pada skema iterasinya berada pada interval $(0, 1)$. Syarat cukup konvergensi kuat sama seperti dengan konvergensi- Δ , dengan syarat tambahan bahwa pemetaan tersebut pada himpunan kompak. Selain itu, didapatkan syarat perlu dari konvergensi- Δ dan kuat, yaitu titik tetapnya tunggal.
2. Berdasarkan hasil percobaan numerik, skema iterasi Sabri memiliki laju yang lebih cepat dibanding skema iterasi JK, Thakur, Abbas, dan Agarwal, dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$, yang ditunjukkan oleh banyaknya jumlah iterasi yang diperlukan untuk mencapai galat yang ditentukan.
3. Dalam masalah optimasi, skema iterasi Sabri menghasilkan barisan yang konvergen menuju solusi dari permasalahan minimalisasi

fungsi yang konveks dan *proper lower semi-continuous*. Selain itu, dalam rekonstruksi citra tomografi, skema ini berhasil merekonstruksi citra Shepp-Logan Phantom dengan penurunan nilai galat dan peningkatan kualitas citra pada tiap iterasinya.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh dalam tesis ini, terdapat beberapa saran yang dapat dipertimbangkan untuk penelitian selanjutnya.

1. Kajian mengenai pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif pada ruang $CAT_p(0)$ masih dapat diperluas ke kelas ruang metrik tak linier lainnya.
2. Kajian syarat konvergensi kuat dari skema iterasi Sabri dapat diteliti lebih lanjut dengan menghilangkan syarat kompak pada himpunan bagian W .
3. Perbandingan kelajuan konvergensi pada penelitian ini masih terbatas secara percobaan numerik, sehingga disarankan untuk mendapatkan perbandingan lajunya secara analitik.
4. Penerapan skema iterasi Sabri pada permasalahan rekonstruksi citra tomografi dapat diuji lebih lanjut dengan menggunakan data medis nyata yang mengandung derau tinggi atau sudut proyeksi yang terbatas.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, M. dan Nazir, T. (2014), 'A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems', *Mat. Vesnik* **66**(2), 223–234.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. dan Sahu, D. (2007), 'Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings', *J. Nonlinear Convex Anal.* **8**(1), 61–79.
- Ahmad, J., Ullah, K., Arshad, M. dan Ma, Z. (2021), 'A New Iterative Method for Suzuki Mappings in Banach Spaces', *Journal of Mathematics* **2021**, 1–7.
- Aoyama, K. dan Kohsaka, F. (2011), 'Fixed point theorem for α -nonexpansive mappings in Banach spaces', *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **74**(13), 4387–4391.
- Arif, M., Aphane, M., Ullah, K., Noorwali, M., Nawaz, B. dan Ullah, H. (2025), 'Approximating Fixed Point of (α, β, γ) -Nonexpansive Mappings Using JK Iterative Scheme', *International Journal of Analysis and Applications* **23**, 34.
- Ariza-Ruiz, D., Leuştean, L. dan López-Acedo, G. (2014), 'Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces', *Transactions of the American Mathematical Society* **366**(8), 4299–4322.
- Banach, S. (1922), 'Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales', *Fundamenta Mathematicae* **3**, 133–181.
- Boyd, S. dan Vandenberghe, L. (2004), *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Bridson, M. R. dan Haefliger, A. (1999), *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer Berlin Heidelberg.
- Browder, F. E. (1965), 'Nonexpansive Nonlinear Operators in A Banach Space', *Proceedings of the National Academy of Sciences* **54**(4), 1041–1044.

- Byrne, C. (2003), 'A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction', *Inverse Problems* **20**(1), 103–120.
- Calderon, K., Khamsi, M. A. dan Martinez-Moreno, J. (2021), 'Perturbed approximations of fixed points of nonexpansive mappings in $CAT_p(0)$ spaces', *Carpathian Journal of Mathematics* **37**(1), 65–79.
- Censor, Y. dan Elfving, T. (1994), 'A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space', *Numerical Algorithms* **8**(2), 221–239.
- Dehghan, H. dan Rooin, J. (2014), 'Metric projection and convergence theorems for nonexpansive mappings in Hadamard spaces'.
- Eskandani, G. Z. dan Raeisi, M. (2018), 'On the zero point problem of monotone operators in Hadamard spaces', *Numerical Algorithms* **80**(4), 1155–1179.
- Feng, M., Shi, L. dan Chen, R. (2019), 'A new three-step iterative algorithm for solving the split feasibility problem', *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics* **81**, 93–102.
- García-Falset, J., Llorens-Fuster, E. dan Suzuki, T. (2011), 'Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **375**(1), 185–195.
- Ishikawa, S. (1974), 'Fixed points by a new iteration method', *Proceedings of the American Mathematical Society* **44**(1), 147–150.
- Jost, J. (1995), 'Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of non positive curvature', *Commentarii Mathematici Helvetici* **70**(1), 659–673.
- Khamsi, M. A. dan Shukri, S. A. (2017), 'Generalized $CAT(0)$ spaces', *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* **24**(3).
- Kirk, W. dan Shahzad, N. (2014), *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Springer International Publishing.
- Krasnosel'skii, M. A. (1955), 'Two remarks on the method of successive approximations', *Uspekhi matematicheskikh nauk* **10**(1), 123–127.

- Kumam, P. dan Chaipunya, P. (2018), 'Equilibrium Problems and Proximal Algorithms in Hadamard Spaces'.
- Mann, W. R. (1953), 'Mean value methods in iteration', *Proceedings of the American Mathematical Society* **4**(3), 506–510.
- Noor, M. A. (2000), 'New Approximation Schemes for General Variational Inequalities', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **251**(1), 217–229.
- Pant, R. dan Pandey, R. (2019), 'Existence and convergence results for a class of nonexpansive type mappings in hyperbolic spaces', *Applied General Topology* **20**(1), 281.
- Ramage, A., Lopez Gutierrez, B., Fischer, K., Sekula, M., Santaella, G. M., Scarfe, W., Brasil, D. M. dan de Oliveira-Santos, C. (2023), 'Filtered back projection vs. iterative reconstruction for CBCT: effects on image noise and processing time', *Dentomaxillofacial Radiology* **52**(8).
- Sabri, R. I., Alhaidary, Z. S. dan Sadiq, F. A. (2025), 'New Iteration Approach For Approximating Fixed Points', *Nonlinear Functional Analysis and Applications* 237–250.
- Salisu, S., Minjibir, M. S., Kumam, P. dan Sriwongsa, S. (2022), 'Convergence theorems for fixed points in $CAT_p(0)$ spaces', *Journal of Applied Mathematics and Computing* **69**(1), 631–650.
- Suzuki, T. (2008), 'Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **340**(2), 1088–1095.
- Thakur, B. S., Thakur, D. dan Postolache, M. (2016), 'A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings', *Applied Mathematics and Computation* **275**, 147–155.
- Ullah, K., Ahmad, J., Hammad, H. A. dan George, R. (2023), 'Iterative schemes for numerical reckoning of fixed points of new nonexpansive mappings with an application', *AIMS Mathematics* **8**(5), 10711–10727.

LAMPIRAN A

Kode Progam Simulasi dalam Bahasa Pemrograman Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import random
5
6 #metrik
7 def metrik(x,y):
8     x1,x2 = x[0], x[1]
9     y1,y2 = y[0], y[1]
10
11     suku1 = np.abs(x1-y1)**3
12     suku2 = np.abs(x1**3-x2-y1**3+y2)**3
13     return (suku1+suku2)**(1/3)
14
15 #jalur geodesik
16 def geodesik(t,w,z):
17     w1,w2 = w[0],w[1]
18     z1,z2 = z[0],z[1]
19     sk1 = (1-t)*w1+t*z1
20     sk2 = (1-t)*(w1**3-w2)+t*(z1**3-z2)
21     if (t>=0 and t<=1):
22         return [sk1,sk1**3-sk2]
23     else:
24         raise ValueError("di luar domain")
25
26 #Pemetaan (alpha, beta, gamma)-nonekspansif
27 def pemetaan(w):
28     w1 = w[0]
29
30     if 1 <= w1 < 3:
31         return [
32             (w1+3)/4,
33             (w1+3)**3 / 64
```

```

34         ]
35
36     elif 3 <= w1 <= 5:
37         return [
38             (w1+2)/4,
39             (w1+2)**3 / 64
40         ]
41
42     else:
43         raise ValueError("di luar domain")
44
45 #skema iterasi Sabri
46 def iterSabri(x0, tol, max_iter):
47     data_x = [x0]
48     data_error = []
49     for n in range(max_iter):
50         x_n = data_x[-1].copy()
51         a_n = a(n)
52         b_n = b(n)
53         c_n = c(n)
54         q_n = pemetaan(geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n)))
55         y_n = pemetaan(pemetaan(q_n))
56         x_next = pemetaan(geodesik(a_n, pemetaan(q_n), pemetaan(
57             y_n)))
58         data_x.append(x_next)
59         error = metrik([1,1], x_next)
60         data_error.append(error)
61         if error < tol:
62             break
63     return data_x, data_error
64
65 #skema iterasi JK
66 def iterJK(x0, tol, max_iter):
67     data_x = [x0]
68     data_error = []
69     for n in range(max_iter):
70         x_n = data_x[-1].copy()
71         a_n = a(n)
72         b_n = b(n)

```

```

72     c_n = c(n)
73     q_n = (geodesik(c_n,x_n,pemetaan(x_n)))
74     y_n = (pemetaan(q_n))
75     x_next = pemetaan(geodesik(a_n,pemetaan(q_n),pemetaan(
        y_n)))
76     data_x.append(x_next)
77     error = metrik([1,1], x_next)
78     data_error.append(error)
79     if error < tol:
80         break
81     return data_x, data_error
82
83 #skema iterasi Thakur
84 def iterThakur(x0, tol, max_iter):
85     data_x = [x0]
86     data_error = []
87     for n in range(max_iter):
88         x_n = data_x[-1].copy()
89         a_n = a(n)
90         b_n = b(n)
91         c_n = c(n)
92         q_n = (geodesik(c_n,x_n,pemetaan(x_n)))
93         y_n = (pemetaan(geodesik(a_n, x_n, q_n)))
94         x_next = pemetaan(y_n)
95         data_x.append(x_next)
96         error = metrik([1,1], x_next)
97         data_error.append(error)
98         if error < tol:
99             break
100    return data_x, data_error
101
102 #skema iterasi Abbas
103 def iterAbbas(x0, tol, max_iter):
104     data_x = [x0]
105     data_error = []
106     for n in range(max_iter):
107         x_n = data_x[-1].copy()
108         a_n = a(n)
109         b_n = b(n)

```

```

110     c_n = c(n)
111     q_n = geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n))
112     y_n = geodesik(b_n, pemetaan(x_n), pemetaan(q_n))
113     x_next = geodesik(a_n, pemetaan(y_n), pemetaan(q_n))
114     data_x.append(x_next)
115     error = metrik([1,1], x_next)
116     data_error.append(error)
117     if error < tol:
118         break
119     return data_x, data_error
120
121 #skema iterasi Agarwal
122 def iterAgarwal(x0, tol, max_iter):
123     data_x = [x0]
124     data_error = []
125     for n in range(max_iter):
126         x_n = data_x[-1].copy()
127         a_n = a(n)
128         b_n = b(n)
129         c_n = c(n)
130         y_n = (geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n)))
131         x_next = geodesik(a_n, pemetaan(x_n), pemetaan(y_n))
132         data_x.append(x_next)
133         error = metrik([1,1], x_next)
134         data_error.append(error)
135         if error < tol:
136             break
137     return data_x, data_error
138
139 #konstan
140 def a(n): return 0.42
141 def b(n): return 0.83
142 def c(n): return 0.31
143
144 #turun
145 def a(n): return (n**2/(n**3+1))
146 def b(n): return (2/(n+3))
147 def c(n): return (4*n+2)/(7*n+4)
148

```

```

149 #naik
150 def a(n): return (1-(4*n+9)**(1/2)/(2*n+13))
151 def b(n): return 0.8
152 def c(n): return (1-(n**2/(n**7+3)**(1/2)))
153
154 #naikturun
155 def a(n): return 1-(n**3)/(n**5+1)
156 def b(n): return (1/(n+1))
157 def c(n): return (3*n+4)/(5*n**2+4)
158
159 #turunnaik
160 def c(n): return 1-np.sqrt(n**3+8)/(5*n**5+9)
161 def b(n): return (1-3/(n+5))
162 def a(n): return (n**5+1)/(5*n**7+4)
163
164
165 x0=[2,3]
166 tol = 1e-6
167 max_iter = 100
168
169 dataSabri, errorSabri = iterSabri(x0, tol, max_iter)
170 dataJK, errorJK = iterJK(x0, tol, max_iter)
171 dataThakur, errorThakur = iterThakur(x0, tol, max_iter)
172 dataAbbas, errorAbbas = iterAbbas(x0, tol, max_iter)
173 dataAgarwal, errorAgarwal = iterAgarwal(x0, tol, max_iter)
174 max_len = max(len(dataSabri), len(dataJK), len(dataThakur),
175               len(dataAbbas), len(dataAgarwal))
176 dataSabri += [np.nan] * (max_len - len(dataSabri))
177 dataJK += [np.nan] * (max_len - len(dataJK))
178 dataThakur += [np.nan] * (max_len - len(dataThakur))
179 dataAbbas += [np.nan] * (max_len - len(dataAbbas))
180 dataAgarwal += [np.nan] * (max_len - len(dataAgarwal))
181 errorSabri += [np.nan] * (max_len - len(errorSabri))
182 errorJK += [np.nan] * (max_len - len(errorJK))
183 errorThakur += [np.nan] * (max_len - len(errorThakur))
184 errorAbbas += [np.nan] * (max_len - len(errorAbbas))
185 errorAgarwal += [np.nan] * (max_len - len(errorAgarwal))
186
187 table = pd.DataFrame({

```

```

187     'Iterasi n': np.arange(max_len),
188     'Sabri': dataSabri,
189     'JK': dataJK,
190     'Thakur': dataThakur,
191     'Abbas': dataAbbas,
192     'Agarwal': dataAgarwal
193 })
194
195 def titikX(x, d=6):
196     if isinstance(x, (list, np.ndarray)):
197         return f"({x[0]:.{d}f}, {x[1]:.{d}f}, 0, 0, \\dots)"
198     return x
199
200 table_fmt = table.copy()
201
202 for col in ["Sabri", "JK", "Thakur", "Abbas", "Agarwal"]:
203     table_fmt[col] = table_fmt[col].apply(titikX)
204
205 def show_pair(table, scheme_name):
206     sub = table_fmt[["Iterasi n", "Sabri", scheme_name]]
207     print(f"Tabel Sabri-{scheme_name}")
208     print(sub.to_latex(index=False))
209     return sub
210
211 skema = ["JK", "Thakur", "Abbas", "Agarwal"]
212 for s in skema:
213     show_pair(table_fmt, s)
214
215 table_error = pd.DataFrame({
216     'Iterasi n': np.arange(max_len),
217     'Sabri': errorSabri,
218     'JK': errorJK,
219     'Thakur': errorThakur,
220     'Abbas': errorAbbas,
221     'Agarwal': errorAgarwal
222 })
223
224 print(table_error.to_latex(index=False))
225
226 import matplotlib.pyplot as plt
227 import seaborn as sns

```

```

226 plt.figure(figsize=(12, 10))
227
228 for col in ['Sabri', 'JK', 'Thakur', 'Abbas', 'Agarwal']:
229     plt.plot(table_error['Iterasi n'], table_error[col],
230             marker='o', linestyle='--', label=col)
231
232 plt.xlabel('Iterasi n', fontsize=18)
233 plt.ylabel('Galat $d(x_n, x^*)$', fontsize=18)
234 plt.xticks(fontsize=14)
235 plt.yticks(fontsize=14)
236 plt.legend(fontsize=14)
237 plt.grid(True, which='both', ls='--', alpha=0.8)
238 plt.show()
239
240 x0_list = [
241     [2,3], [3,4], [4,1], [1.5,4], [2.7,4.2], [5,1.8],
242     [3.1,3.5]
243 ]
244 #Perhitungan jumlah iterasi yang diperlukan
245 tol = 1e-16
246 max_iter = 100
247 data = []
248 for x0 in x0_list:
249     row = {"x0" : tuple(x0)}
250     row["Sabri"] = len(iterSabri(x0,tol,max_iter)[0])
251     row["JK"] = len(iterJK(x0,tol,max_iter)[0])
252     row["Thakur"] = len(iterThakur(x0,tol,max_iter)[0])
253     row["Abbas"] = len(iterAbbas(x0,tol,max_iter)[0])
254     row["Agarwal"] = len(iterAgarwal(x0,tol,max_iter)[0])
255     data.append(row)
256 tabel = pd.DataFrame(data)
257 tabel.set_index("x0", inplace=True)
258
259 #Penyesuaian titik
260 def titikdiX(x):
261     if isinstance(x, tuple) and len(x) == 2:
262         return f"({x[0]:.1f}, {x[1]:.1f}, 0, 0, \\dots)"

```

```

263     return str(x)
264 tabel_display = tabel.copy()
265 tabel_display.index = tabel_display.index.map(titikdiX)
266
267 print(tabel_display.to_string())
268 print(tabel_display.to_latex())

```

Lampiran A.1: Kode Python untuk Percobaan Numerik

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize
3
4
5 def d(x, y):
6     x1,x2 = x[0], x[1]
7     y1,y2 = y[0], y[1]
8
9     suku1 = np.abs(x1-y1)**3
10    suku2 = np.abs(x1**3-x2-y1**3+y2)**3
11    return (suku1+suku2)**(1/3)
12
13 def f(x):
14     x1, x2 = x
15     term1 = 20 * np.abs(x2 - x1**3)**3
16     term2 = np.abs(26 - x1)**3
17     return term1 + term2
18
19 def res(x):
20     lam = 20
21     def objective(y):
22         di = d(x,y)
23         return f(y)+1.0/(2.0*lam)*di**2
24     res = minimize(objective, x,method="Nelder-Mead", tol=1e
25                    -15)
26     return res.x
27
28 def geodesik(t,w,z):
29     w1,w2 = w[0],w[1]
30     z1,z2 = z[0],z[1]
31     sk1 = (1-t)*w1+t*z1

```

```

31 sk2 = (1-t)*(w1**3-w2)+t*(z1**3-z2)
32 if (t>=0 and t<=1):
33     return np.array([sk1,sk1**3-sk2])
34 else:
35     raise ValueError("di luar domain")
36
37 def iterSabri(x0, tol, max_iter):
38     data_x = [x0]
39     data_error = [np.nan]
40     for n in range(max_iter):
41         x_n = data_x[-1].copy()
42         a_n = 0.34
43         b_n = 0
44         c_n = 0.93
45         q_n = res(geodesik(c_n,x_n,res(x_n)))
46         y_n = res(res(q_n))
47         x_next = res(geodesik(a_n,res(q_n),res(y_n)))
48         data_x.append(x_next)
49         error = d(x_next,[26,26**3])
50         data_error.append(error)
51         if error < tol:
52             break
53     return data_x, data_error
54
55 def iterJK(x0, tol, max_iter):
56     data_x = [x0]
57     data_error = [np.nan]
58     for n in range(max_iter):
59         x_n = data_x[-1].copy()
60         a_n = 0.34
61         b_n = 0
62         c_n = 0.93
63         q_n = geodesik(c_n,x_n,res(x_n))
64         y_n = res(q_n)
65         x_next = res(geodesik(a_n,res(q_n),res(y_n)))
66         data_x.append(x_next)
67         error = d(x_next,[26,26**3])
68         data_error.append(error)
69         if error < tol:

```

```

70         break
71     return data_x, data_error
72
73 dataSabri, errorSabri = iterSabri([10,10],1e-4,500)
74 dataJK, errorJK = iterJK([10,10],1e-4,500)
75
76 max_len = max(len(dataSabri), len(dataJK))
77
78 dataSabri += [np.nan] * (max_len - len(dataSabri))
79 dataJK += [np.nan] * (max_len - len(dataJK))
80 errorSabri += [np.nan] * (max_len - len(errorSabri))
81 errorJK += [np.nan] * (max_len - len(errorJK))
82
83 import pandas as pd
84 table = pd.DataFrame({
85     'Iterasi n': np.arange(max_len),
86     'Sabri': dataSabri,
87     'JK': dataJK
88 })
89 def fmt_point(x, d=5):
90     if isinstance(x, (list, np.ndarray)):
91         return f"({x[0]:.{d}f}, {x[1]:.{d}f}, 0, 0, \\dots)"
92     return x
93
94
95 table_fmt = table.copy()
96
97 for col in ["Sabri", "JK"]:
98     table_fmt[col] = table_fmt[col].apply(fmt_point)
99
100 print(table_fmt.to_latex(index=False, escape=False))
101
102 table_error = pd.DataFrame({
103     'Iterasi n': np.arange(max_len),
104     'Galat Sabri': errorSabri,
105     'Galat JK': errorJK
106 })
107
108 print(table_error.to_latex(index=False, escape=False))

```

```

109
110 import matplotlib.pyplot as plt
111
112 plt.figure(figsize=(14, 10))
113
114 for col in ['Galat Sabri', 'Galat JK']:
115     plt.plot(table_error['Iterasi n'], table_error[col],
116             marker='o', linestyle='--', label=col)
117
118 plt.yscale('log')
119 plt.xlabel('Iterasi n', fontsize=18)
120 plt.ylabel('Galat $d(x_n, x^*)$', fontsize=18)
121 plt.xticks(fontsize=14)
122 plt.yticks(fontsize=14)
123 plt.legend(fontsize=14)
124 plt.grid(True, which='both', ls='--')
125 plt.show()

```

Lampiran A.2: Kode Python untuk Simulasi Minimalisasi Fungsi

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import os
5 from google.colab import files
6 from skimage import io, color, transform
7 from skimage.data import shepp_logan_phantom, grass, moon,
8     coins, text, brain
9 from skimage.transform import radon, iradon
10 from skimage.metrics import peak_signal_noise_ratio,
11     mean_squared_error
12
13 image_size = 512
14 theta = np.linspace(0., 180., 180, endpoint=False)
15 n_iterations = 60
16 alpha_n = 0.7
17 beta_n = 0.5
18 gamma_n = 0.4
19 checkpoints = [5, 10, 30, 60]
20

```

```

19 def load_and_prep_image(uploaded_filename, target_size=512):
20     print(f"-> Memproses gambar: {uploaded_filename}")
21     image = io.imread(uploaded_filename)
22
23     # Jika gambar berwarna (RGB/RGBA), ubah ke Grayscale
24     if image.ndim == 3:
25         if image.shape[2] == 4: # RGBA
26             image = color.rgb2rgb(image)
27             image = color.rgb2gray(image)
28
29     # Resize ke target_size (128x128)
30     image_resized = transform.resize(image, (target_size,
31         target_size), anti_aliasing=True)
32     return image_resized
33
34 def gambar():
35     print("=== UPLOAD GAMBAR ===")
36     uploaded = files.upload()
37
38     if not uploaded:
39         print("Tidak ada file yang diupload. Menggunakan
40             default Shepp-Logan Phantom.")
41         original_image = shepp_logan_phantom()
42         original_image = transform.resize(original_image, (
43             image_size, image_size), anti_aliasing=True)
44     else:
45         filename = next(iter(uploaded))
46         original_image = load_and_prep_image(filename,
47             target_size=image_size)
48     return original_image
49
50 original_image = gambar()
51
52 def A(x):
53     return radon(x, theta=theta, circle=False)
54
55 def A_adjoint(sinogram):
56     return iradon(sinogram, theta=theta, circle=False,
57         output_size=image_size, filter_name=None)

```

```

53
54 def P_C(x):
55     return np.clip(x, 0, 1)
56
57 def gammaoptm():
58     print("> Menghitung step size optimal...")
59     # Menggunakan random noise untuk estimasi operator
60     x_test = np.random.rand(image_size, image_size)
61     for _ in range(10):
62         Ax = A(x_test)
63         AtAx = A_adjoint(Ax)
64         norm_val = np.linalg.norm(AtAx)
65         x_test = AtAx / norm_val
66
67     Lx = A_adjoint(A(x_test))
68     L = np.linalg.norm(Lx) / np.linalg.norm(x_test)
69     gamma_step = 1.9 / L
70     #gamma_step = 0.001
71     print(f"    Gamma Step: {gamma_step:.5f}")
72     return gamma_step
73
74 Q = A(original_image)
75 gamma_step = gammaoptm()
76 def T(x):
77     Ax = A(x)
78     residual = Ax - Q
79     gradient = A_adjoint(residual)
80     return P_C(x - gamma_step * gradient)
81
82 def sabriIter():
83     x = np.zeros((image_size, image_size))
84
85     saved_images = {}
86     saved_metrics = {}
87     data_mse = []
88     data_psnr = []
89
90     print(f"> Memulai Rekonstruksi ({n_iterations} iterasi)
      ...")

```

```

91
92     for n in range(n_iterations):
93         Tx = T(x)
94         z = T((1 - gamma_n) * x + gamma_n * Tx)
95         Tz = T(z)
96         y = T(Tz)
97         Ty = T(y)
98         x_next = T((1 - alpha_n) * Tz + alpha_n * Ty)
99
100        x = x_next
101
102        current_psnr = peak_signal_noise_ratio(
103            original_image, x, data_range=1)
104        current_mse = mean_squared_error(original_image, x)
105        data_mse.append(current_mse)
106        data_psnr.append(current_psnr)
107
108        current_iter = n + 1
109        if current_iter in checkpoints:
110            saved_images[current_iter] = x.copy()
111            saved_metrics[current_iter] = (current_psnr,
112                current_mse)
113            print(f"    Iterasi {current_iter}:")
114            print(f"        PSNR = {current_psnr:.2f} dB")
115            print(f"        MSE  = {current_mse:.6f}")
116        return saved_images, saved_metrics, data_mse, data_psnr
117
118 saved_images, saved_metrics, data_mse, data_psnr = sabriIter
119     ()
120
121 table = pd.DataFrame({
122     'Iterasi n': np.arange(1, len(data_mse) + 1),
123     'mse': data_mse,
124     'psnr': data_psnr
125 })
126 print(table.to_latex(index=False))
127
128 def tampilgambar():
129     fig, axes = plt.subplots(3, 2, figsize=(10,15))

```

```

127 ax = axes.ravel()
128
129 # Tampilkan Gambar Asli
130 im0 = ax[0].imshow(original_image, cmap='gray', vmin=0,
131                    vmax=1)
132 ax[0].set_title('Gambar Asli')
133
134 # Tampilkan Sinogram
135 ax[1].imshow(Q, cmap='gray', aspect='auto')
136 ax[1].set_title('Sinogram')
137
138 # Tampilkan Hasil Iterasi
139 for i, iteration in enumerate(checkpoints):
140     if iteration in saved_images:
141         idx = i + 2
142         if idx < 6:
143             psnr_val, mse_val = saved_metrics[iteration]
144             im = ax[idx].imshow(saved_images[iteration],
145                                cmap='gray', vmin=0, vmax=1)
146             title_text = (f"Iterasi {iteration}\n"
147                           f"PSNR: {psnr_val:.2f} dB\n"
148                           f"MSE: {mse_val:.5f}")
149             ax[idx].set_title(title_text)
150             plt.colorbar(im, ax=ax[idx], fraction=0.046,
151                          pad=0.04)
152
153 plt.tight_layout()
154 plt.show()
155 tampilgambar()

```

Lampiran A.3: Kode Python untuk Rekonstruksi Gambar

BIODATA PENULIS



Lahir di Madiun, 15 Maret 2003, penulis memiliki nama lengkap Ahmad Hisbu Zakiyudin. Sebagian memanggil dengan Zaki, sebagian lagi dengan Hisbu, Bubu, Udin, atau Ahmad. Enam tahun penulis menempuh pendidikan dasar di MI Nurul Huda Sawahan, dua tahun menempuh pendidikan menengah pertama di MTsN Kota Madiun, dan tiga tahun menempuh pendidikan menengah atas di MAN 2 Kota Madiun. Kemudian pada saat pandemi mulai Covid-19 mulai menyebar, yaitu pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Penulis menyelesaikan program Sarjana pada Departemen Matematika ITS pada tahun 2020, dengan judul tugas akhir "Aplikasi Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik Kuasi untuk Masalah Eksistensi dan Ketunggalan Solusi dari Persamaan Cauchy Tidak Homogen". Hasil dari tugas akhir tersebut juga dipublikasikan dalam Jurnal Ilmiah terindeks Scopus dengan peringkat Q3, yaitu pada Jurnal Nonlinear Dynamics & Systems Theory yang terbit pada Edisi ke-5 Tahun 2025. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan pascasarjana pada program Magister by Riset di Departemen Matematika ITS. Selain itu, penulis juga sempat mengikuti dua konferensi ilmiah internasional sebagai *presenter*, yaitu pada The International Conference in Mathematical Analysis and Applications (ICONMAA) di tahun 2024 dan International Conference on Mathematics: Pure, Applied, and Computation (ICoMPAC) di tahun 2025.

Adapun kritik dan saran atau informasi lebih lanjut mengenai Tesis ini dapat ditujukan ke penulis melalui email penulis, yakni azakiyudin1790@gmail.com atau LinkedIn penulis, yaitu Ahmad Hisbu Zakiyudin atau bisa diakses melalui www.linkedin.com/in/ahmadhisbuzakiyudin.