



TESIS - SM255401

**KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK
KELAS PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM
DI RUANG GEODESIK BESERTA APLIKASINYA**

AHMAD HISBU ZAKIYUDIN
NRP 6002241016

DOSEN PEMBIMBING:
Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

**Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2026**



TESIS - SM255401

KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK BESERTA APLIKASINYA

AHMAD HISBU ZAKIYUDIN

NRP 6002241016

DOSEN PEMBIMBING:

Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

**Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2026**



THESIS - SM255401

CONVERGENCE OF SABRI'S ITERATIVE SCHEME FOR THE GENERALIZED CLASS OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN GEODESIC SPACES AND ITS APPLICATIONS

AHMAD HISBU ZAKIYUDIN

NRP 6002241016

SUPERVISOR:

Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

**Department of Mathematics
Faculty of Science and Data analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya
2026**

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Telah disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

Magister Matematika (M.Mat)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

Ahmad Hisbu Zakiyudin

NRP: 6002241016

Tanggal Ujian: 20 Januari 2026

Periode Wisuda: September 2026

Disetujui oleh:

Pembimbing:

1. Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si. (.....)
NIP. 19910522 201504 1 001

Pengaji:

1. Dr. Mahmud Yunus, M.Si (.....)
NIP. 19620407 198703 1 005
2. Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si (.....)
NIP. 19691004 199402 2 001
3. Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT (.....)
NIP. 19700831 199403 1 003

Kepala Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ahmad Hisbu Zakiyudin

NRP : 6002241016

Program Studi : S2 Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa isi sebagian maupun keseluruhan tesis saya yang berjudul:

**"KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS
PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK
BESERTA APLIKASINYA"**

adalah benar-benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diizinkan dan bahan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya mandiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari diketahui terjadi penyimpangan dari pernyataan yang saya buat, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Surabaya, 20 Januari 2026
Mahasiswa,

Ahmad Hisbu Zakiyudin
NRP. 6002241016

**KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS
PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK
BESERTA APLIKASINYA**

Nama Mahasiswa : Ahmad Hisbu Zakiyudin

NRP : 6002241016

Pembimbing : Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

Abstrak

Teori titik tetap, yang diawali oleh Teorema Titik Tetap Banach untuk pemetaan kontraktif, telah berkembang secara signifikan dengan mencakup kelas pemetaan yang lebih luas seperti pemetaan nonekspansif dan perumumannya. Berbagai skema iterasi, seperti Mann, Ishikawa, dan Agarwal, Thakur, JK dan yang lainnya, telah dikembangkan untuk aproksimasi titik tetap dari kelas-kelas pemetaan tersebut di berbagai ruang, baik itu di ruang linear seperti ruang Banach maupun di ruang tak linear seperti ruang geodesik. Perkembangan terkini, Sabri dkk. mengusulkan skema iterasi baru dengan tingkat konvergensi yang lebih cepat dibanding skema iterasi lainnya pada ruang Banach konveks seragam. Pada penelitian ini, didapatkan syarat cukup untuk konvergensi- Δ dan kuat dari skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang metrik geodesik $CAT_p(0)$. Berdasarkan simulasi numerik, skema iterasi ini mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dibandingkan skema iterasi JK, Thakur, Agarwal, dan Abbas. Selain itu, didapatkan pula aplikasi dari skema ini untuk permasalahan optimasi, tepatnya untuk minimalisasi fungsi dan rekonstruksi citra tomografi.

Kata-kunci: aproksimasi titik tetap, pemetaan nonekspansif, ruang geodesik, skema iterasi, masalah optimasi

CONVERGENCE OF SABRI'S ITERATIVE SCHEME FOR THE GENERALIZED CLASS OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN GEODESIC SPACES AND ITS APPLICATIONS

Name : Ahmad Hisbu Zakiyudin

NRP : 6002241016

Supervisor : Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si.

Abstract

The Fixed Point theory, originating from Banach's Fixed Point Theorem for contractive mappings, has developed significantly to encompass a wider classes of mappings, such as nonexpansive mappings and their generalizations. Various iterative schemes, such as Mann, Ishikawa, and Agarwal, Thakur, JK, and others, have been developed for fixed point approximations of these classes of mappings in various spaces, both in linear spaces such as Banach spaces and in nonlinear spaces such as geodesic spaces. Recently, Sabri et al. proposed a new iterative scheme with faster convergence rates than previous iterative schemes in uniformly convex Banach spaces. In this study, we will analyze the convergence of Sabri's iterative scheme in geodesic spaces for approximating fixed points of (α, β, γ) -nonexpansive mappings. In this study, we obtain the Δ and strong convergence results of Sabri's iteration scheme for the fixed point approximation of the (α, β, γ) -non-expansive mapping in the geodesic metric space $CAT_p(0)$. Based on numerical experiments, this iteration scheme has a faster convergence rate than the JK, Thakur, Agarwal, and Abbas iteration schemes. In addition, we obtain applications of this scheme for optimization problems, specifically for minimization problems and tomography image reconstruction.

Keywords: fixed point approximation, nonexpansive mapping, geodesic space, iterative scheme, optimization problems

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas berkah, rahmat, dan Ridho-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul:

**"KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS
PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK
BESERTA APLIKASINYA"**

sebagai salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Magister Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah memberikan beasiswa Fresh Graduate pada penulis.
2. Bapak Nursalim, Ibu Kusnul, dan adik Nadhira, serta keluarga besar Imam Zuhdi yang telah memberikan dukungan, nasehat, dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
3. Bapak Dr.mont. Kistosil Fahim, S. Si., M. Si. selaku dosen pembimbing sekaligus dosen wali yang telah memberikan arahan dan bimbingan dengan penuh kesabaran kepada penulis.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si, Ibu Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si, dan Bapak Imam Mukhlash S.Si, M.T selaku dosen penguji yang telah memberikan arahan dalam tesis ini.
5. Seluruh keluarga besar Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember atas dukungan dan bantuannya.

Akhir kata, semoga Tesis ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 27 Januari 2026

Ahmad Hisbu Zakiyudin

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	vii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	xi
KATA PENGANTAR	xiii
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR NOTASI	xxi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Ruang Metrik Geodesik.....	7
2.3 Ruang $CAT_p(0)$	9
2.4 Pemetaan Nonekspansif	20
2.5 Aproksimasi Titik Tetap dari Pemetaan Nonekspansif	28
BAB 3 METODE PENELITIAN	31
3.1 Tahapan Penelitian	31
3.2 Diagram Alir Penelitian.....	33

BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1	Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di Ruang $CAT_p(0)$	35
4.2	Konvergensi Skema Iterasi Sabri untuk Pemetaan (α, β, γ) - nonekspansif	42
4.3	Simulasi Numerik	49
4.4	Aplikasi pada Masalah Optimasi	58
4.4.1	Masalah Minimalisasi.....	58
4.4.2	Rekonstruksi Citra	67
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	77
5.1	Kesimpulan.....	77
5.2	Saran	78
DAFTAR PUSTAKA		79
LAMPIRAN		83
UCAPAN TERIMA KASIH		115
BIODATA PENULIS		117

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Hubungan antara ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, Banach, ruang $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik ...	14
Gambar 3.1	Blok Diagram Penelitian.	33
Gambar 4.1	Diagram Alir Skema Iterasi Sabri pada Ruang $CAT_p(0)$	43
Gambar 4.2	Galat $d(x_{n+1}, x_n)$ (dalam log) vs iterasi.....	53
Gambar 4.3	Galat $d(x_n, x_{n+1})$ (skala log) vs iterasi.....	67
Gambar 4.4	Diagram Data Sinogram ke Ruang Euclid dalam Rekonstruksi Citra	69
Gambar 4.5	Hubungan ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik	70
Gambar 4.6	Diagram alir skema iterasi Sabri untuk rekonstruksi citra tomografi	71
Gambar 4.7	Data awal sinogram dan citra asli	72
Gambar 4.8	Hasil rekonstruksi citra pada iterasi ke-5, 10, 30, 60, dan 120	73
Gambar 4.9	Hasil rekonstruksi citra pada iterasi ke-360 dan 480 ...	74
Gambar 4.10	Metrik PSNR dan MSE dari rekonstruksi citra	74

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan JK	51
Tabel 4.2	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Thakur.....	51
Tabel 4.3	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Abbas.....	51
Tabel 4.4	Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Agarwal	52
Tabel 4.5	Galat $d(x_n, x_{n+1})$	52
Tabel 4.6	Iterasi dengan parameter $a_n = 0.92, b_n = 0.83, c_n = 0.81$..	54
Tabel 4.7	Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}, b_n = \frac{2}{n+3}, c_n = \frac{4n+2}{7n+4}$..	54
Tabel 4.8	Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{\sqrt{4n+9}}{2n+13}, b_n = 0.8, c_n = 1 - \frac{n^2}{\sqrt{n^7+3}}$	54
Tabel 4.9	Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{n^3}{n^5+1}, b_n = \frac{1}{n+1}, c_n = \frac{3n+4}{5n^2+4}$	55
Tabel 4.10	Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^5+1}{5n^7+9}, b_n = 1 - \frac{3}{n+5}, c_n = 1 - \frac{\sqrt{n^3+8}}{5n^5+9}$	55
Tabel 4.11	Hasil simulasi sebanyak 72 iterasi untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK	62
Tabel 4.12	Galat simulasi $d(x_n, x_{n+1})$ untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK	64
Tabel 4.13	Parameter simulasi rekonstruksi citra	71

DAFTAR NOTASI

\mathbb{R}	: Himpunan semua bilangan real
\mathbb{R}^+	: Himpunan semua bilangan real positif
\mathbb{N}	: Himpunan semua bilangan asli
\mathbb{R}^n	: Himpunan semua vektor kolom dengan n komponen real
$\mathbf{0}$: Vektor yang semua anggotanya bernilai 0
$d(x, y)$: Metrik antara titik x dan y
$(d(x, y))^p$: Perkalian dari $d(x, y)$ dengan $d(x, y)$ sebanyak p kali
$:$: Didefinisikan
\neq	: Tidak sama dengan
\geq	: Lebih besar atau sama dengan
\leq	: Lebih kecil atau sama dengan
$>$: Lebih besar
$<$: Lebih kecil
$\not<$: Tidak kurang dari
\subset	: Himpunan bagian sejati
\subseteq	: Himpunan bagian tak sejati
\cup	: Operasi gabungan pada himpunan
\cap	: Operasi irisan pada himpunan
\emptyset	: Himpunan kosong
∞	: Tak hingga
$\ x\ $: Norm dari x
$\ x\ _p$: Norm p dari x
$\%$: Persentase
$ x $: Harga mutlak dari x
∂	: Turunan parsial
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$: Limit barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
\sup	: Supremum (batas atas terkecil)
\limsup	: Limit superior
Tx	: Hasil pemetaan dari x oleh T
$Fix(T)$: Titik tetap dari pemetaan T
\triangle	: Segitiga

\bar{x}	: Titik komparasi
$\overline{\triangle}$: Segitiga komparasi
$sgn(x)$: Fungsi tanda dari x
\oplus	: Operasi konveks antara dua titik pada ruang geodesik (Oplus)
$J_\lambda^f(x)$: Operator resolvent λ dari f
P_C	: Proyeksi titik terdekat pada himpunan C
A^*	: Transformasi adjoin dari transformasi A
$argmin_{y \in X} f(y)$: Nilai $y \in X$ sehingga $f(y)$ minimum

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penulisan Tesis.

1.1 Latar Belakang

Teorema Titik Tetap Banach merupakan temuan awal yang mengilhami berkembangnya teori mengenai titik tetap dan berbagai macam aplikasinya di bidang matematika maupun sains terapan. Teorema ini menyatakan bahwa jika $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan kontraktif pada suatu himpunan bagian tertutup W dari ruang Banach B , yaitu terdapat konstanta $c \in [0, 1)$ sehingga

$$\|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\| \quad (1.1)$$

untuk setiap $x, y \in W$, maka pemetaan T mempunyai tepat satu titik tetap (Banach, 1922). Jika konstanta c boleh bernilai 1, pemetaan tersebut dinamakan pemetaan nonekspansif. Pemetaan ini merupakan perluasan dari pemetaan kontraktif yang memainkan peranan penting dalam teori titik tetap, terutama dalam memastikan eksistensi serta konvergensi solusi dari berbagai permasalahan. Namun, berbeda dengan pemetaan kontraktif, pemetaan nonekspansif tidak selalu mempunyai titik tetap yang tunggal. Selain itu, terdapat syarat cukup untuk keberadaan titik tetap pada kelas pemetaan ini, yaitu jika W merupakan himpunan bagian tertutup dan terbatas dari ruang Banach konveks seragam (Browder, 1965).

Dengan menggunakan teori titik tetap, eksistensi solusi dari suatu model matematika dapat dijamin dengan mendefinisikan pemetaan yang bersesuaian. Walaupun demikian, solusi tersebut tidak selalu dalam bentuk eksak, atau mungkin sulit untuk diperoleh secara analitik, sehingga diperlukan solusi numerik. Untuk mendapatkan solusi numeriknya, diperlukan suatu algoritma iterasi yang konvergen ke solusi dari model tersebut.

Pada pemetaan kontraktif Banach, skema iterasi Picard merupakan

skema iterasi paling sederhana yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi numerik dari suatu model matematika. Namun, skema ini tidak selalu konvergen untuk pemetaan nonekspansif (Krasnosel'skii, 1955). Pada tahun 1953, Mann memperkenalkan skema iterasinya yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif, tetapi skemanya juga tidak selalu konvergen pada pemetaan pseudo-kontraktif (Mann, 1953). Mengatasi hal tersebut, Ishikawa mengembangkan skema iterasi dua tahap untuk mendapatkan nilai aproksimasi titik tetap dari pemetaan pseudo-kontraktif (Ishikawa, 1974). Berbagai variasi dan pengembangan skema iterasi untuk pemetaan nonekspansif ini juga terus bermunculan, sebagaimana oleh (Noor, 2000; Agarwal, O'Regan dan Sahu, 2007; Abbas dan Nazir, 2014; Thakur, Thakur dan Postolache, 2016; Ahmad, Ullah, Arshad dan Ma, 2021). Tidak hanya itu, berbagai jenis pemetaan nonekspansif juga dikembangkan oleh berbagai peneliti, antara lain: pemetaan Suzuki nonekspansif (Suzuki, 2008), pemetaan α -nonekspansif (Aoyama dan Kohsaka, 2011), pemetaan yang memenuhi kondisi (C_μ) (García-Falset, Llorens-Fuster dan Suzuki, 2011), pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif (Pant dan Pandey, 2019), serta pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif (Ullah, Ahmad, Hammad dan George, 2023).

Konvergensi dari skema iterasi terhadap titik tetap dari berbagai macam jenis pemetaan juga diteliti di berbagai macam jenis ruang, baik itu ruang linear seperti ruang Hilbert dan ruang Banach, maupun di ruang geodesik. (lihat (Ariza-Ruiz, Leuştean dan López-Acedo, 2014; Bridson dan Haefliger, 1999; Dehghan dan Rooin, 2014; Kirk dan Shahzad, 2014; Kumam dan Chaipunya, 2018), dan referensi di dalamnya). Pada dasarnya, ruang geodesik adalah ruang yang mempunyai suatu geodesik, atau lintasan terpendek di antara dua titik. Ruang ini memungkinkan struktur nonlinier sehingga model matematika nonlinier dapat dimodelkan dengan lebih akurat. Salah satu contoh dari ruang ini adalah ruang $CAT(0)$ yang lengkap atau dapat disebut juga ruang Hadamard. Pada tahun 2017, Khamsi dkk. mengembangkan ruang yang lebih umum dari $CAT(0)$ yaitu ruang $CAT_p(0)$ dan membuktikan bahwa pemetaan nonekspansif pada himpunan bagian tak kosong yang tertutup, terbatas, dan konveks, dari ruang $CAT_p(0)$ selalu mempunyai titik tetap (Khamsi dan Shukri, 2017). Kemudian Salisu dkk. mendapatkan konvergensi dari skema iterasi JK untuk pemetaan nonekspansif yang

memenuhi kondisi (C_μ) di ruang $CAT_p(0)$. Mereka juga mendapatkan aplikasinya untuk masalah optimasi. Kemudian mereka memberikan hasil eksperimen numeriknya (Salisu, Minjibir, Kumam dan Sriwongsa, 2022).

Perkembangan terkini, Sabri dkk. memperkenalkan skema iterasi baru untuk aproksimasi titik tetap pada pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif di ruang Banach konveks seragam. Melalui eksperimen numerik, mereka mendapatkan tingkat konvergensi yang lebih cepat dibanding beberapa skema iterasi lainnya (Sabri, Alhaidary dan Sadiq, 2025). Pada penelitian ini, akan diselidiki syarat-syarat konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$, khususnya untuk pemetaan nonekspansif tipe (α, β, γ) yang diberikan oleh Ullah dkk. Kemudian akan dilakukan eksperimen numerik dengan skema iterasi tersebut serta didapatkan aplikasinya pada masalah optimasi.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, fokus penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana syarat perlu untuk konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif?
2. Bagaimana syarat cukup untuk konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif?
3. Bagaimana laju konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk mendapatkan aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dibanding dengan skema iterasi lainnya secara numerik?
4. Bagaimana aplikasi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ pada masalah optimasi?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Laju konvergensi yang dibandingkan adalah laju dari skema iterasi Sabri, JK, Thakur, dan Agarwal berdasarkan banyaknya iterasi yang diperlukan.

2. Terdapat dua masalah optimasi yang dibahas, yaitu
 - (a) permasalahan minimalisasi fungsi, lebih tepatnya mencari titik $x \in X$ sehingga $f(x) \leq f(y)$ untuk setiap $y \in X$, dengan X adalah suatu himpunan tak kosong dan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang memenuhi kondisi konveks *proper lower semicontinuous*.
 - (b) permasalahan *split feasibility problem* yang kemudian diterapkan dalam rekonstruksi citra tomografi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan syarat perlu untuk konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.
2. Mendapatkan syarat cukup untuk konvergensi dari skema iterasi Sabri di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.
3. Mengetahui laju konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk mendapatkan aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dibanding dengan skema iterasi lainnya secara numerik.
4. Mendapatkan aplikasi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ pada masalah optimasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Sebagai kontribusi pada pengembangan teori titik tetap, khususnya pada analisis konvergensi skema iterasi untuk kelas pemetaan yang lebih umum dan ruang yang lebih umum, yaitu pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.
2. Sebagai bahan kajian dan perbandingan mengenai laju konvergensi antara skema iterasi Sabri dengan skema iterasi lainnya.
3. Sebagai alternatif penyelesaian masalah optimasi, khususnya untuk minimalisasi fungsi dan rekonstruksi citra.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bagian ini dipaparkan penelitian terdahulu yang berkaitan dengan penelitian ini. Demikian juga diberikan beberapa definisi, lemma, teorema serta beberapa contoh terkait sebagai dasar teori yang menjadi referensi dalam penelitian.

2.1 Penelitian Terdahulu

Bermula dari teorema titik tetap Banach dengan skema iterasi Picard, penelitian mengenai titik tetap dan aproksimasinya terus berkembang hingga saat ini. Dari yang awalnya pemetaan kontraksi, kemudian dikembangkan menjadi pemetaan nonekspansif dan berbagai perumumannya. Tidak seperti pemetaan kontraktif yang titik tetapnya terjamin ada dan tunggal jika di ruang Banach lengkap, pemetaan nonekspansif mensyaratkan beberapa kondisi lain, yaitu titik tetapnya ada jika pemetaannya adalah pemetaan diri sendiri dari himpunan bagian tertutup dan terbatas dari ruang Banach konveks seragam. Walaupun sudah dijamin ada, titik tetapnya juga tidak selalu tunggal (Browder, 1965).

Untuk mendapatkan titik tetap dari pemetaan nonekspansif yang sulit diperoleh secara langsung, diperlukan berbagai macam skema iterasi yang konvergen ke titik tetapnya. Skema iterasi pertama yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif diperoleh oleh Mann pada tahun 1953 (Mann, 1953). Kemudian Ishikawa mengembangkannya menjadi skema iterasi dua tahap karena skema iterasi Mann gagal konvergen pada pemetaan pseudo-kontraktif (Ishikawa, 1974). Dari hasil yang diperoleh Mann dan Ishikawa, Noor kemudian mengembangkan skema iterasi untuk aproksimasi titik tetap menjadi skema iterasi tiga tahap (Noor, 2000). Selanjutnya, pada tahun 2007 Agarwal mengenalkan skema iterasinya dengan memodifikasi skema iterasi yang dikenalkan oleh Mann (Agarwal dkk., 2007). Pada tahun berikutnya, Suzuki memperkenalkan pemetaan nonekspansif yang baru dengan melemahkan kondisi pemetaannya. Pemetaan baru tersebut ia namakan sebagai pemetaan yang memenuhi kondisi (C) (Suzuki, 2008). García-Falset dkk. kemudian juga

mengembangkan pemetaan tersebut dengan memperumum kondisinya (García-Falset dkk., 2011).

Penelitian lain terkait skema iterasi untuk pemetaan nonekspansif diperoleh Abbas dan Nazir. Mereka mengenalkan skema iterasi baru yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif biasa dan mendapatkan aplikasinya untuk masalah minimalisasi dengan batasan dan masalah *feasibility* (Abbas dan Nazir, 2014). Berikutnya, Thakur juga mengenalkan skema iterasi baru yang konvergen lebih cepat daripada skema iterasi sebelum-sebelumnya untuk pemetaan nonekspansif Suzuki di ruang Banach (Thakur dkk., 2016).

Pemetaan nonekspansif beserta aproksimasi titik tetapnya tidak hanya dipelajari dalam ruang Banach, tetapi juga dalam ruang metrik lain, khususnya ruang metrik geodesik. Ruang ini merupakan ruang yang mempunyai struktur geodesik, yaitu lintasan terpendek di antara dua titik. Ruang ini mempunyai keunggulan dalam hal struktur nonlinier, sehingga dapat memodelkan suatu permasalahan nonlinier secara lebih akurat. Salah satu contoh dari ruang ini adalah ruang $CAT(0)$. Kemudian ruang tersebut diperumum oleh Khamsi dkk. menjadi ruang $CAT_p(0)$ (Khamsi dan Shukri, 2017). Salah satu hasil aproksimasi titik tetap di ruang tersebut didapatkan oleh Calderon dkk. dengan mengenalkan skema iterasi Agarwal pertubasi di ruang $CAT_p(0)$. Mereka menggunakan tiga pemetaan nonekspansif biasa dan mendapatkan hasil konvergensi- Δ dengan skema iterasi tersebut (Calderon, Khamsi dan Martinez-Moreno, 2021).

Dalam ruang Banach, Pant dan Pandey mengusulkan perumuman baru dari pemetaan nonekspansif yang dikenal sebagai pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Skema iterasi yang mereka gunakan adalah skema iterasi Thakur dan ruang yang digunakan adalah ruang hiperbolik (Pant dan Pandey, 2019). Kemudian, Ahmad dkk. mengenalkan skema iterasi baru yang dinamakan skema iterasi JK yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C) (Ahmad dkk., 2021). Hasil menarik juga diperoleh Ullah dkk. dengan mengenalkan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif yang juga perumuman dari pemetaan nonekspansif (Ullah dkk., 2023). Arif dkk. mendapatkan hasil konvergensi dari skema iterasi JK untuk pemetaan jenis tersebut (Arif, Aphane, Ullah, Noorwali, Nawaz dan Ullah, 2025).

Selain mengalami berbagai pengembangan dalam bentuk perumuman

kelas pemetaan, pemetaan nonekspansif beserta skema iterasi yang menyertainya juga mempunyai beragam aplikasi di berbagai bidang. Perumuman tersebut mencakup perluasan dari pemetaan nonekspansif klasik ke berbagai kelas pemetaan yang lebih umum dengan kondisi kontraktivitas yang lebih lemah. Beberapa aplikasi yang diperoleh antara lain pada persamaan diferensial, persamaan integral, masalah optimasi, rekonstruksi citra, dan bidang terkait lainnya (Byrne, 2003; Ramage, Lopez Gutierrez, Fischer, Sekula, Santaella, Scarfe, Brasil dan de Oliveira-Santos, 2023; Salisu dkk., 2022).

Hasil terbaru di ruang Banach diperoleh Sabri dkk. dengan mengenalkan skema iterasinya yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Skema iterasi yang mereka peroleh secara numerik juga lebih cepat konvergen dibanding skema iterasi sebelumnya (Sabri dkk., 2025). Hasil terbaru juga, Salisu dkk. meneliti terkait pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C_λ) di ruang $CAT_p(0)$. Mereka mendapatkan bahwa pemetaan tersebut mempunyai sifat *demiclosedness*. Kemudian, skema iterasi yang mereka gunakan adalah skema iterasi JK. Dengan skema iterasi tersebut, mereka mendapatkan beberapa teorema terkait dengan konvergen- Δ maupun konvergen kuat untuk pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C_λ) . Lebih lanjut lagi, mereka juga mendapatkan beberapa aplikasi dari hasil yang mereka peroleh sekaligus memberikan hasil numeriknya (Salisu dkk., 2022).

2.2 Ruang Metrik Geodesik

Pada bagian ini dikenalkan konsep terkait ruang metrik geodesik. Secara intuisi, ruang metrik geodesik adalah ruang metrik dengan sifat terdapat jalur terpendek di antara dua titik dari ruang metrik tersebut. Jalur terpendek di sini tidak selalu garis lurus seperti yang ada di \mathbb{R}^2 , tetapi jalurnya bisa melengkung atau berkelok asalkan lintasannya mempunyai panjang minimum terhadap metriknya. Berikut diberikan definisi ruang metrik geodesik secara formal.

Definisi 2.2.1. (Bridson dan Haefliger, 1999) *Diberikan (X,d) adalah ruang metrik dan $x,y \in X$. Pemetaan kontinu $G : [0,1] \rightarrow X$ disebut geodesik yang menghubungkan x dan y jika memenuhi*

$$(a) \quad G(0) = x,$$

$$(b) \quad G(1) = y$$

(c) $d(G(t), G(s)) = |t - s|d(x, y)$ untuk setiap $t, s \in [0, 1]$.

Ruang metrik (X, d) disebut sebagai ruang metrik geodesik jika setiap elemen $x, y \in X$ dihubungkan oleh suatu geodesik.

Untuk selanjutnya, ruang metrik geodesik dinotasikan sebagai (X, d, G) . Pada ruang metrik geodesik, himpunan titik-titik pada geodesik yang menghubungkan x dan y dituliskan sebagai $[x \sim y]$. Kemudian, berikut diberikan contoh ruang metrik geodesik dan bukan ruang metrik geodesik.

Contoh 2.2.1. (Bridson dan Haefliger, 1999) Setiap ruang bernorma $(V, \|\cdot\|)$ dengan metrik $d(v, w) = \|v - w\|$ untuk setiap $v, w \in V$ adalah ruang metrik geodesik dengan geodesik yang menghubungkan v dan w didefinisikan sebagai

$$G(t) = (1 - t)v + tw, \quad \text{untuk setiap } t \in [0, 1].$$

Penjelasan dari Contoh 2.2.1 adalah sebagai berikut.

Diperhatikan bahwa $G(0) = v$, $G(1) = w$, dan

$$\begin{aligned} d(G(t), G(s)) &= \|(1 - t)v + tw - (1 - s)v - sw\| \\ &= \|(t - s)(w - v)\| \\ &= |t - s|\|w - v\| \\ &= |t - s|d(v, w), \end{aligned}$$

untuk setiap $t, s \in [0, 1]$. Dengan demikian, G adalah geodesik yang menghubungkan v dan w , sehingga setiap ruang bernorma adalah ruang metrik geodesik.

Contoh 2.2.2. Diberikan $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ dengan metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \neq y \\ 0 & \text{jika } x = y. \end{cases}$$

Ruang metrik (X, d) bukan ruang metrik geodesik karena untuk $x = 0$ dan $y = 1$, serta $t = \frac{1}{2}$, tidak ada $G(t) \in X$ sehingga

$$d(0, G(t)) = d(G(t), 1) = \frac{1}{2}d(0, 1) = \frac{1}{2}.$$

Konsep segitiga geodesik merupakan konsep dasar yang digunakan

dalam mendefinisikan ruang $CAT(0)$ dan ruang $CAT_p(0)$. Berikut ini diberikan definisi segitiga geodesik.

Definisi 2.2.2. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan (X, d, G) ruang metrik geodesik. Suatu segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di ruang metrik geodesik berisi tiga titik $p, q, r \in X$ sebagai titik sudut dan geodesik di antara dua titik tersebut, yaitu $[p \sim q], [p \sim r], [q \sim r]$, disebut sebagai sisi dari segitiganya.

Untuk selanjutnya, titik yang terletak pada suatu segitiga geodesik $\triangle(x_1, x_2, x_3)$ dituliskan sebagai $z \in \triangle(x_1, x_2, x_3)$ jika $z \in [x_i \sim x_j]$ untuk suatu $i, j \in \{1, 2, 3\}$ dengan $i \neq j$. Titik $z \in [x_i \sim x_j]$ direpresentasikan oleh $z = (1-t)x_i \oplus tx_j$ dengan $t = \frac{d(x_i, z)}{d(x_i, x_j)}$ dan \oplus adalah operasi geodesik. Contoh dari segitiga geodesik di ruang metrik geodesik diberikan sebagai berikut.

Contoh 2.2.3. Sebagaimana pada Contoh 2.2.1, setiap ruang bernorma $(V, \|\cdot\|)$ adalah ruang metrik geodesik. Misalkan dipilih $V = \mathbb{R}^2$ dan $p = (0, 0), q = (1, 0), r = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, maka segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di ruang tersebut mempunyai titik sudut p, q, r dan sisi-sisi segitiga geodesik yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}[p \sim q] &= \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\} = \{(t, 0) \mid t \in [0, 1]\}, \\[p \sim r] &= \{(1-t)p + tr \mid t \in [0, 1]\} = \{(0, t) \mid t \in [0, 1]\}, \\[q \sim r] &= \{(1-t)q + tr \mid t \in [0, 1]\} = \{(1-t, t) \mid t \in [0, 1]\}.\end{aligned}$$

Titik $z = (0.5, 0)$ terletak pada sisi $[p \sim q]$ dari segitiga geodesik tersebut dan dapat dituliskan sebagai $z = (1-t)p \oplus tq$ dengan $t = 0.5$ dan operasi geodesik \oplus sama dengan operasi penjumlahan vektor.

Untuk selanjutnya, pada suatu segitiga geodesik $\triangle(x_1, x_2, x_3)$, setiap titik $z \in [x_i \sim x_j]$ dengan $i, j \in \{1, 2, 3\}$ dan $i \neq j$, dinotasikan sebagai $z = (1-t)x_i \oplus tx_j$ dengan $t = \frac{d(x_i, z)}{d(x_i, x_j)}$.

2.3 Ruang $CAT_p(0)$

Sebelum membahas mengenai ruang $CAT_p(0)$, terlebih dahulu dikenalkan ruang $CAT(0)$, sebab ruang $CAT_p(0)$ adalah perumuman dari ruang $CAT(0)$. Ruang $CAT(0)$ sejatinya adalah ruang geodesik, tetapi dengan syarat tambahan bahwa setiap segitiga geodesik di ruang tersebut memenuhi ketaksamaan $CAT(0)$. Untuk itu, berikut diberikan konsep dari segitiga komparasi.

Definisi 2.3.1. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ pada ruang metrik geodesik (X, d, G) . Suatu segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ adalah suatu segitiga di ruang bernorma $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ yang memenuhi $d(p, q) = \|\bar{p} - \bar{q}\|, d(p, r) = \|\bar{p} - \bar{r}\|$, dan $d(q, r) = \|\bar{q} - \bar{r}\|$.

Contoh 2.3.1. (Eskandani dan Raeisi, 2018) Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ dengan metrik \tilde{d} yang didefinisikan untuk setiap $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sebagai

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_1^2 - x_2 + y_2 - y_1^2)^2}.$$

Ruang metrik tersebut adalah ruang metrik geodesik dengan geodesik yang menghubungkan x dan y didefinisikan sebagai

$$G(t) = \left((1-t)x_1 + ty_1, ((1-t)x_1 + ty_1)^2 - (1-t)(x_1^2 - x_2) - t(y_1^2 - y_2) \right),$$

untuk setiap $t \in [0, 1]$. Untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ dengan $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2)$, dan $r = (r_1, r_2) \in (\mathbb{R}^2, \tilde{d})$, segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ di ruang Euclid $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ dapat dibentuk dengan memilih titik $\bar{p} = (p_1, p_1^2 - p_2), \bar{q} = (q_1, q_1^2 - q_2), \bar{r} = (r_1, r_1^2 - r_2) \in \mathbb{R}^2$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \tilde{d}(p, q) &= \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_1^2 - p_2 + q_2 - q_1^2)^2} = \|\bar{p} - \bar{q}\|_2, \\ \tilde{d}(p, r) &= \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_1^2 - p_2 + r_2 - r_1^2)^2} = \|\bar{p} - \bar{r}\|_2, \\ \tilde{d}(q, r) &= \sqrt{(q_1 - r_1)^2 + (q_1^2 - q_2 + r_2 - r_1^2)^2} = \|\bar{q} - \bar{r}\|_2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, berikut ini diberikan definisi ruang $CAT(0)$.

Definisi 2.3.2. (Bridson dan Haefliger, 1999) Diberikan ruang metrik geodesik (X, d, G) dan ruang Euclid $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Ruang (X, d, G) disebut sebagai ruang $CAT(0)$ jika untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r) \in X$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$, terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in \mathbb{R}^2$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}$ berlaku $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$.

Contoh 2.3.2. Sebagaimana Contoh 2.3.1, ruang metrik geodesik $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ adalah ruang $CAT(0)$ karena untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$, terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ di ruang Euclid $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ berlaku $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$.

Contoh 2.3.3. (Bridson dan Haefliger, 1999) Setiap ruang Hilbert adalah ruang $CAT(0)$.

Khamsi mengembangkan ruang yang lebih umum, yaitu ruang $CAT_p(0)$, dengan $p \geq 2$, dengan mengganti segitiga komparasi pada ruang $CAT(0)$ dari yang awalnya segitiga di \mathbb{R}^2 menjadi segitiga di ℓ_p . Berikut ini definisi dari ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 2.3.3. (Khamsi dan Shukri, 2017) Diberikan ruang metrik geodesik (X, d, G) dan ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ untuk $p \geq 2$. Ruang (X, d, G) disebut sebagai ruang $CAT_p(0)$, untuk $p \geq 2$, jika untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p, q, r) \in X$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$, terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in \ell_p$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}$ berlaku $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_p$.

Contoh 2.3.4. (Khamsi dan Shukri, 2017) Ruang $CAT(0)$ adalah ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 2$.

Contoh 2.3.5. (Khamsi dan Shukri, 2017) Setiap ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p \geq 2$ adalah ruang $CAT_p(0)$.

Penjelasan dari Contoh 2.3.5 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa setiap ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p \geq 2$ adalah ruang metrik geodesik. Misalkan $\triangle(p, q, r)$ adalah segitiga geodesik di $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p, q, r \in \ell_p$ dan $x, y \in \triangle(p, q, r)$. Dapat dipilih segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in (\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$, dan $\bar{r} = r$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}$ berlaku $\bar{x} = x$ dan $\bar{y} = y$. Dengan demikian, diperoleh

$$d(x, y) = \|x - y\|_p = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p,$$

yang menunjukkan bahwa ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dengan $p \geq 2$ adalah ruang $CAT_p(0)$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan sebuah lema yang menyatakan bahwa ruang $CAT_p(0)$ dengan $p > 2$ bukan merupakan ruang $CAT(0)$.

Lema 2.3.1. (Khamsi dan Shukri, 2017) Untuk $p > 2$ ruang $CAT_p(0)$ bukan merupakan ruang $CAT(0)$.

Berikut ini diberikan sebuah contoh ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 3$ yang bukan merupakan ruang Banach dan bukan pula ruang $CAT(0)$.

Contoh 2.3.6. Diberikan $X = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3 < \infty\}$ dan untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in X$ didefinisikan metrik

$$d(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.1)$$

Didefinisikan pula geodesik yang menghubungkan $w = (w_1, w_2, w_3, \dots)$ dan $z = (z_1, z_2, z_3, \dots)$, yaitu $G : [0, 1] \rightarrow X$ dengan $G(t) := (1-t)w \oplus tz$ sebagai

$$G(t) = (\alpha_1(t), \alpha_1(t)^3 - (1-t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2), \alpha_3(t), \alpha_4(t), \dots), \quad (2.2)$$

dengan $\alpha_i(t) = (1-t)w_i + tz_i$ untuk $i = 1, 3, 4, 5, \dots$.

Ruang (X, d, G) merupakan ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap, tetapi bukan ruang Banach dan bukan ruang $CAT(0)$.

Penjelasan dari Contoh 2.3.6 dapat diuraikan sebagai berikut.

Untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$, didefinisikan pemetaan $M : X \rightarrow X$ sebagai $M(x) = (x_1, x_1^3 - x_2, x_3, \dots)$. Pemetaan ini merupakan pemetaan bijektif yang memetakan setiap titik $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ ke titik lain $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots) \in X$ dengan $\bar{x}_i = x_i$ untuk setiap $i = 1, 3, 4, 5, \dots$ dan $\bar{x}_2 = x_1^3 - x_2$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in X$, berlaku

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\bar{x}_i - \bar{y}_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \|\bar{x} - \bar{y}\|_3. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa (X, d, G) merupakan ruang metrik yang lengkap, selanjutnya diamati bahwa

$$G(0) = (w_1, w_2, w_3, \dots) = w \quad \text{dan} \quad G(1) = (z_1, z_2, z_3, \dots) = z.$$

Diamati pula untuk $i = 1, 3, 4, 5, \dots$

$$\beta_i(t, s) = \alpha_i(t) - \alpha_i(s) = (1-t)w_i + tz_i - ((1-s)w_i + sz_i) = (s-t)(w_i - z_i)$$

serta

$$\begin{aligned}\beta_2(t,s) &= \alpha_1(t)^3 - (\alpha_1(t)^3 - (1-t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2)) \\ &\quad - \alpha_1(s)^3 + (\alpha_1(s)^3 - (1-s)(w_1^3 - w_2) - s(z_1^3 - z_2)) \\ &= (s-t)(w_1^3 - w_2 - z_1^3 + z_2).\end{aligned}$$

Didapatkan bahwa

$$d(G(t), G(s)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i(t,s)|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = |s-t|d(w,z).$$

Hal ini berarti $G(t)$ merupakan geodesik pada X . Kemudian, untuk setiap segitiga geodesik $\triangle(p,q,r) \in X$ dengan $p = (p_1, p_2, p_3, \dots), q = (q_1, q_2, q_3, \dots), r = (r_1, r_2, r_3, \dots) \in X$, diperoleh bahwa terdapat segitiga komparasi $\overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \in X$ dengan $\bar{p} = (p_1, p_1^3 - p_2, p_3, \dots), \bar{q} = (q_1, q_1^3 - q_2, q_3, \dots), \bar{r} = (r_1, r_1^3 - r_2, r_3, \dots)$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned}d(p,q) &= \left(|p_1 - q_1|^3 + |p_1^3 - p_2 - q_1^3 + q_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |p_i - q_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{p} - \bar{q}\|_3, \\ d(p,r) &= \left(|p_1 - r_1|^3 + |p_1^3 - p_2 - r_1^3 + r_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |p_i - r_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{p} - \bar{r}\|_3, \\ d(q,r) &= \left(|q_1 - r_1|^3 + |q_1^3 - q_2 - r_1^3 + r_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |q_i - r_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{q} - \bar{r}\|_3.\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk setiap titik $x, y \in \triangle(p,q,r)$ dengan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$, diperoleh bahwa terdapat titik $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ dengan $\bar{x} = (x_1, x_1^3 - x_2, x_3, \dots), \bar{y} = (y_1, y_1^3 - y_2, y_3, \dots)$ sehingga berlaku

$$d(x,y) = \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|\bar{x} - \bar{y}\|_3.$$

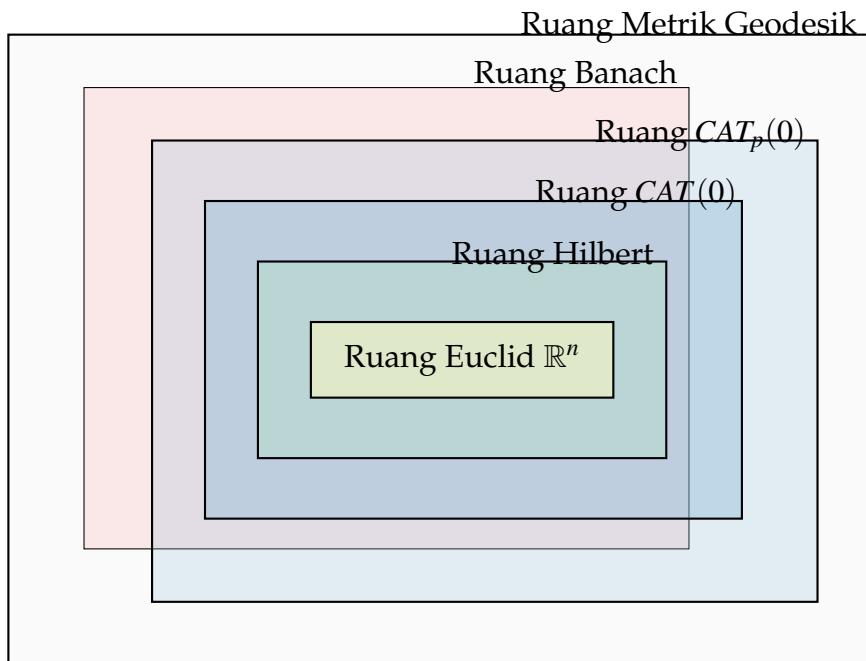
Jadi (X, d, G) merupakan ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 3$. Ruang tersebut lengkap karena ruang metrik (X, d, G) juga lengkap. Selanjutnya,

diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 d(\alpha x, 0) &= \left(|\alpha x_1|^3 + |(\alpha x_1)^3 - \alpha x_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |\alpha x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= |\alpha| \left(|x_1|^3 + |\alpha^2 x_1^3 - x_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &\neq \alpha d(x, 0),
 \end{aligned}$$

sehingga tidak bisa didapatkan norma dari metrik tersebut, yang berarti bukan ruang Banach. Berdasarkan Lema 2.3.1, ruang ini juga bukan merupakan ruang $CAT(0)$ karena $p \neq 2$.

Diagram Venn pada Gambar 2.3 mengilustrasikan hubungan antara ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, Banach, ruang $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik.



Gambar 2.1: Hubungan antara ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, Banach, ruang $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik

Berikut ini diberikan beberapa konsep yang berlaku pada ruang $CAT_p(0)$ dengan $p \geq 2$.

Definisi 2.3.4. (Khamsi dan Shukri, 2017) *Diberikan (X, d, G) adalah ruang*

$CAT_p(0)$. Suatu himpunan bagian $\mathcal{M} \subseteq X$ disebut konveks jika $[x \sim y] \subseteq \mathcal{M}$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{M}$.

Dua contoh berikut ini mengilustrasikan konsep himpunan konveks dan bukan konveks pada ruang $CAT_p(0)$.

Contoh 2.3.7. Dipilih ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan himpunan bagian $\mathcal{M} = \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $x = (0, x_2), y = (0, y_2) \in \mathcal{M}$, geodesik yang menghubungkan x dan y adalah $[x \sim y] = \{G(t) \mid t \in [0, 1], G(0) = x, G(1) = y\}$ dengan

$$\begin{aligned} G(t) &= \left((1-t)0 + t0, ((1-t)0 + t0)^2 - (1-t)(0^2 - x_2) - t(0^2 - y_2) \right) \\ &= (0, (1-t)x_2 + ty_2). \end{aligned}$$

Karena $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, maka $(1-t)x_2 + ty_2 \in \mathbb{R}$, sehingga $[x \sim y] = \{(0, (1-t)x_2 + ty_2) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \mathcal{M}$. Dengan demikian, himpunan bagian \mathcal{M} adalah himpunan konveks di ruang $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$.

Contoh 2.3.8. Dipilih ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan himpunan bagian $\mathcal{M} = \{(b, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Himpunan bagian tersebut tidak konveks karena terdapat $x = (1, 0), y = (-1, 0) \in \mathcal{M}$ sehingga

$$\begin{aligned} G(t) &= \left((1-t)1 + t(-1), ((1-t)1 + t(-1))^2 - (1-t)(1^2 - 0) - t((-1)^2 - 0) \right) \\ &= (1-2t, (1-2t)^2 - 1). \end{aligned}$$

Untuk $t = \frac{1}{2}$, diperoleh $G\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \notin \mathcal{M}$, sehingga himpunan bagian \mathcal{M} tidak konveks di ruang $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$.

Definisi berikut ini menyatakan konsep barisan terbatas di ruang $CAT_p(0)$ yang secara langsung diadaptasi dari konsep barisan terbatas di ruang metrik pada umumnya.

Definisi 2.3.5. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ di X disebut terbatas jika terdapat $B > 0$ dan $M \in X$ sehingga $d(x_n, M) < B$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Pada ruang ini, konvergensi lemah yang umum digunakan pada ruang Banach digantikan dengan konsep konvergensi- Δ . Berikut ini diberikan definisi pusat asimtotik dan konvergensi- Δ di ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 2.3.6. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan terbatas di X . Pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di suatu $CAT_p(0)$ didefinisikan sebagai

$$A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) := \{x \in X \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \inf_{y \in X} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, x_n)\} \quad (2.3)$$

Contoh 2.3.9. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = (0, (-1)^n) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut adalah barisan terbatas karena untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\tilde{d}(x_n, x_m) = \sqrt{(0-0)^2 + (0^2 - (-1)^n + (-1)^m - 0^2)^2} = |(-1)^n - (-1)^m| \leq 2.$$

Selanjutnya, ditentukan pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Diketahui bahwa untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, berlaku

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(x, x_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_1^2 - x_2 + (-1)^n - 0^2)^2} \\ &= \max \left\{ \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2 + 1)^2}, \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2 - 1)^2} \right\}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\inf_{y \in X} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(y, x_n) = \inf_{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \max \left\{ \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}, \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 - 1)^2} \right\}.$$

Nilai $f(y_1, y_2) = \max \left\{ \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}, \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 - 1)^2} \right\}$ dari fungsi terjadi pada titik $(0, 0)$, sehingga

$$A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}((x_1, x_2), x_n) = 1\} = \{(0, 0)\}.$$

Dengan demikian, pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah $\{(0, 0)\}$.

Lema berikut ini menyatakan keunikan pusat asimtotik dari suatu barisan terbatas di ruang $CAT_p(0)$.

Lema 2.3.2. (Salisu dkk., 2022) Pusat asimtotik dari suatu barisan terbatas di ruang $CAT_p(0)$ mempunyai tepat satu elemen.

Definisi 2.3.7. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan terbatas di X . Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut sebagai konvergen- Δ

ke suatu titik $x \in X$ (dinotasikan $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$) jika $\{x\}$ adalah pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Contoh 2.3.10. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut adalah barisan terbatas karena untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\tilde{d}(x_n, x_m) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(0^2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - 0^2\right)^2} = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq 1.$$

Selanjutnya, ditentukan pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Diketahui bahwa untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^2, \tilde{d})$, berlaku

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(x, x_{n_k}) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1 - 0)^2 + \left(x_1^2 - x_2 + \frac{1}{n_k} - 0^2\right)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2)^2}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\inf_{y \in X} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(y, x_{n_k}) = \inf_{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2)^2}.$$

Nilai minimum dari fungsi $f(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2)^2}$ adalah 0 yang terjadi pada titik $(0, 0)$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} A(\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}((x_1, x_2), x_{n_k}) = 0\} \\ &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Karena pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ adalah $\{(0, 0)\}$, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen- Δ ke titik $(0, 0)$, yaitu $\Delta - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0, 0)$.

Contoh 2.3.11. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = (0, (-1)^n) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sebagaimana pada Contoh 2.3.9, barisan tersebut adalah barisan terbatas dan pusat asimtotik dari barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah $\{(0, 0)\}$. Kemudian, diperhatikan bahwa terdapat subbarisan $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_{n_k} = (0, 1)$ untuk setiap

$k \in \mathbb{N}$. Diketahui bahwa untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, berlaku

$$\begin{aligned}\limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(x, x_{n_k}) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_1^2 - x_2 + 1 - 0^2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + (x_1^2 - x_2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\inf_{y \in X} \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}(y, x_{n_k}) = \inf_{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}.$$

Nilai minimum dari fungsi $f(y_1, y_2) = \sqrt{y_1^2 + (y_1^2 - y_2 + 1)^2}$ adalah 0 yang terjadi pada titik $(0, 1)$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}A(\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} \tilde{d}((x_1, x_2), x_{n_k}) = 0\} \\ &= \{(0, 1)\}.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat ditentukan pusat asimtotik dari subbarisan lain, yaitu $\{x_{m_k}\}$ dengan $x_{m_k} = (0, -1)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Pusat asimtotik dari subbarisan tersebut adalah $A(\{x_{m_k}\}) = \{(0, -1)\}$. Jadi terdapat dua subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang mempunyai pusat asimtotik berbeda, sehingga barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak konvergen- Δ .

Untuk konvergensi kuat di ruang $CAT_p(0)$, konsepnya sama dengan konvergensi kuat di ruang metrik pada umumnya, yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.3.8. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan di X . Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut konvergen kuat ke suatu titik $x \in X$ (dinotasikan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Contoh 2.3.12. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu ruang $CAT(0)$ $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $x_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan tersebut konvergen kuat ke titik $x = (0, 0)$ karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\tilde{d}(x_n, x) = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(0^2 - \frac{1}{n} - 0^2\right)^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Teorema berikut ini menyatakan hubungan antara konvergensi kuat, konvergensi Δ , dan barisan terbatas.

Teorema 2.3.1. (Salisu dkk., 2022) Diberikan ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G) . Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan di X yang konvergen kuat, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen- Δ dan terbatas.

Definisi berikut ini menyatakan konsep kelengkapak ruang dan himpunan kompak di ruang $CAT_p(0)$ yang secara langsung diadaptasi dari konsep di ruang metrik pada umumnya.

Definisi 2.3.9. Ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen kuat ke titik $x \in X$.

Definisi 2.3.10. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu himpunan bagian $\mathcal{M} \subseteq X$ disebut kompak jika setiap barisan di \mathcal{M} mempunyai subbarisan yang konvergen kuat ke suatu titik di \mathcal{M} .

Berikut ini diberikan definisi mengenai sifat demiclosedness pada pemetaan di ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 2.3.11. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Pemetaan $T : X \rightarrow X$ disebut mempunyai sifat **demiclosedness** jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ yang konvergen- Δ ke $x \in X$ dan memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, maka berlaku $x = Tx$.

Contoh 2.3.13. Diberikan ruang $CAT_p(0)$, yaitu $(\mathbb{R}^2, \tilde{d})$ pada Contoh 2.3.1 dan pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $T((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right)$ untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Diketahui bahwa titik tetap dari T adalah $(0, 0)$. Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^2$ adalah barisan yang konvergen- Δ ke titik $(0, 0)$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. Dari sini didapatkan $A(x_n) = (0, 0)$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(T((0, 0)), x_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(0 - x_{n1})^2 + (0^2 - 0 + x_{n2} - 0^2)^2} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}((0, 0), x_n). \end{aligned}$$

Hal ini berarti, $T((0, 0)) \in A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ sehingga $T((0, 0)) = (0, 0)$. Dengan demikian, pemetaan T mempunyai sifat demiclosedness.

Dalam tesis ini dinotasikan $(d(x,y))^p$ sebagai perkalian dari $d(x,y)$ dengan $d(x,y)$ sebanyak p kali yaitu

$$(d(x,y))^p = \underbrace{d(x,y) \cdot d(x,y) \cdots d(x,y)}_{p \text{ kali}}.$$

Selanjutnya, berikut ini diberikan ketaksamaan penting yang berlaku pada ruang $CAT_p(0)$.

Lema 2.3.3. (*Calderon dkk., 2021*) *Diberikan (X,d,G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Jika $x,y,z \in X$ dan $t \in [0, 1]$, maka*

1. $d((1-t)x \oplus tz, y) \leq (1-t)d(x,y) + td(z,y).$
2. $(d((1-t)x \oplus tz, y))^p \leq (1-t)(d(x,y))^p + t(d(z,y))^p - \frac{t(1-t)}{2^{p-1}}(d(x,z))^p.$

Selain itu, berikut ini diberikan teorema yang menyatakan kondisi konvergensi- Δ dari suatu barisan di ruang $CAT_p(0)$.

Teorema 2.3.2. (*Salisu dkk., 2022*) *Diberikan (X,d,G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, tertutup, dan konveks. Diberikan pula $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan yang mempunyai titik tetap dan memenuhi sifat demiclosedness 2.3.11. Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan di W yang memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ dan barisan $\{d(x_n, x^*)\}$ konvergen di \mathbb{R} untuk setiap x^* titik tetap dari T , maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen- Δ ke titik tetap dari T .*

2.4 Pemetaan Nonekspansif

Pemetaan nonekspansif merupakan salah satu jenis pemetaan yang mempunyai banyak aplikasi di berbagai bidang. Pemetaan ini merupakan perluasan dari kontraktif yang dikenalkan oleh Banach. Berikut ini diberikan definisi dan contoh dari pemetaan nonekspansif.

Definisi 2.4.1. (*Browder, 1965*) *Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan nonekspansif jika untuk setiap $x, y \in W$ berlaku*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \quad (2.4)$$

Contoh 2.4.1. *Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, \infty)$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai $Tx = |x|$ untuk setiap $x \in W$ adalah pemetaan nonekspansif karena untuk setiap $x, y \in W$ diperoleh*

$$|Tx - Ty| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Pemetaan nonekspansif ini juga mengalami perluasan, salah satu perluasannya adalah pemetaan nonekspansif kuasi. Berikut adalah definisi dan contoh dari pemetaan nonekspansif kuasi.

Definisi 2.4.2. Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan nonekspansif kuasi jika untuk setiap titik tetap dari T yaitu y dan $x \in W$ berlaku

$$\|Tx - y\| \leq \|x - y\|. \quad (2.5)$$

Contoh 2.4.2. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 3]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{jika } x \in [0, 1], \\ 1, & \text{jika } x \in (1, 3], \end{cases}$$

merupakan pemetaan nonekspansif kuasi, karena titik tetap dari T adalah $y = 0$ dan untuk setiap $x \in [0, 1]$ diperoleh

$$|Tx - y| = \left| \frac{x}{3} - 0 \right| = \frac{x}{3} \leq x = |x - 0| = |x - y|,$$

serta untuk setiap $x \in (1, 3]$ diperoleh

$$|Tx - y| = |1 - 0| = 1 \leq x = |x - 0| = |x - y|.$$

Pemetaan ini bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 2 = |0 - 2| = |x - y|.$$

Pada tahun 2008, Suzuki juga mengenalkan bentuk lain pemetaan nonekspansif, yaitu pemetaan Suzuki nonekspansif atau pemetaan yang memenuhi kondisi (C) yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.4.3. (Suzuki, 2008) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan yang memenuhi kondisi (C) jika untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\frac{1}{2} \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \implies \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|. \quad (2.6)$$

Pemetaan ini merupakan kondisi lemah dari pemetaan nonekspansif karena ketaksamaan nonekspansif wajib terpenuhi hanya untuk dua titik yang memenuhi kondisi $\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$.

Contoh 2.4.3. (Suzuki, 2008) Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 3]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 3, \\ 1, & \text{jika } x = 3, \end{cases}$$

merupakan pemetaan yang memenuhi kondisi (C), tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.3 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 3$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 0| = 0 \leq |x - y|,$$

dan untuk $x = y = 3$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |1 - 1| = 0 = |x - y|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 3$ dan $y = 3$ dibagi dua kasus, yaitu

- untuk $x \in [0, 2]$, diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 \leq |x - 3|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi dan

- untuk $x \in (2, 3)$, diperoleh

$$\frac{1}{2}|x - Tx| = \frac{1}{2}|x - 0| = \frac{x}{2} > 1 > |x - 3| = |x - y|,$$

dan

$$\frac{1}{2}|y - Ty| = \frac{1}{2}|3 - 1| = 1 > |x - 3| = |x - y|,$$

sehingga premis pada kondisi (C) tidak terpenuhi.

Hal ini menunjukkan bahwa pemetaan tersebut memenuhi kondisi (C). Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 2.5$ dan $y = 3$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 0.5 = |2.5 - 3| = |x - y|.$$

Kemudian, García-Falset dkk. memperumum pemetaan Suzuki nonekspansif dengan mengganti konstanta $\frac{1}{2}$ menjadi konstanta $\mu \in (0, 1)$. Pemetaan tersebut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.4. (García-Falset dkk., 2011) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan yang memenuhi kondisi (C_μ) jika terdapat $\mu \in (0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\mu \|x - Tx\| \leq \|x - y\| \implies \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (2.7)$$

Contoh 2.4.4. (García-Falset dkk., 2011) Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 1]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{jika } x \neq 1, \\ \frac{7}{11}, & \text{jika } x = 1, \end{cases}$$

merupakan pemetaan yang memenuhi kondisi (C_μ) dengan $\mu = \frac{3}{4}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.4 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 1$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{|x - y|}{2} \leq |x - y|,$$

dan untuk $x = y = 1$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{7}{11} - \frac{7}{11} \right| = 0 = |x - y|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 1$ dan $y = 1$ dibagi dua kasus, yaitu

- untuk $x \in [0, \frac{8}{11}]$, diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{x}{2} - \frac{7}{11} \right| = \left| \frac{11x - 14}{22} \right| \leq |x - 1| = |x - y|,$$

sehingga ketaksamaan nonekspansif terpenuhi dan

- untuk $x \in (\frac{8}{11}, 1)$, diperoleh

$$\mu|x - Tx| = \frac{3}{4} \left| x - \frac{x}{2} \right| = \frac{3x}{8} > \frac{3}{11} > |x - 1| = |x - y|,$$

sehingga premis pada kondisi (C_μ) tidak terpenuhi.

Hal ini menunjukkan bahwa pemetaan tersebut memenuhi kondisi (C_μ) dengan $\mu = \frac{3}{4}$. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 1$ dan $y = \frac{9}{11}$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{7}{11} - \frac{9}{22} \right| = \frac{5}{22} > \frac{2}{11} = \left| 1 - \frac{9}{11} \right| = |x - y|.$$

Pemetaan tersebut juga bukan merupakan pemetaan yang memenuhi kondisi (C) karena untuk $x = \frac{81}{110}$ dan $y = 1$ diperoleh

$$\frac{1}{2}|x - Tx| = \frac{1}{2} \left| \frac{81}{110} - \frac{81}{220} \right| = \frac{81}{440} < \frac{29}{110} = |x - 1| = |x - y|,$$

tetapi

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{81}{220} - \frac{7}{11} \right| = \frac{59}{220} > \frac{29}{110} = |x - y|.$$

Di sisi lain, Aoyama dan Kohsaka juga mengembangkan pemetaan nonekspansif menjadi pemetaan α -nonekspansif. Berikut adalah definisi dan contoh dari pemetaan α -nonekspansif.

Definisi 2.4.5. (Aoyama dan Kohsaka, 2011) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan α -nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \alpha \|x - Ty\|^2 + \alpha \|y - Tx\|^2 + (1 - 2\alpha) \|x - y\|^2. \quad (2.8)$$

Contoh 2.4.5. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 2]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 2, \\ 1, & \text{jika } x = 2, \end{cases}$$

merupakan pemetaan α -nonekspansif dengan $\alpha = \frac{1}{2}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.5 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty|^2 = |0 - 0|^2 = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Ty|^2 + \frac{1}{2}|y - Tx|^2 + 0 \cdot |x - y|^2,$$

dan untuk $x = y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty|^2 = |1 - 1|^2 = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Ty|^2 + \frac{1}{2}|y - Tx|^2 + 0 \cdot |x - y|^2,$$

sehingga Ketaksamaan (2.8) terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 2$ dan $y = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty|^2 &= |0 - 1|^2 = 1 \leq 2 + \frac{1}{2}|x - 1|^2 \\ &= \frac{1}{2}|x - 1|^2 + \frac{1}{2}|2 - 0|^2 + 0 \cdot |x - 2|^2 \\ &= \frac{1}{2}|x - Ty|^2 + \frac{1}{2}|y - Tx|^2 + 0 \cdot |x - y|^2, \end{aligned}$$

sehingga Ketaksamaan (2.8) terpenuhi. Jadi, pemetaan tersebut merupakan pemetaan α -nonekspansif. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 2 = |0 - 2| = |x - y|.$$

Pant dan Pandey di tahun 2019 mengenalkan pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.6. (Pant dan Pandey, 2019) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap

$x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - Tx\| + \alpha \|y - Ty\| + (1 - 2\alpha) \|x - y\|. \quad (2.9)$$

Contoh 2.4.6. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 4]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 4, \\ 1, & \text{jika } x = 4, \end{cases}$$

merupakan pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif dengan $\alpha = \frac{1}{2}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.6 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 4$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 0| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|y - Ty| + 0 \cdot |x - y|,$$

dan untuk $x = y = 4$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |1 - 1| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|y - Ty| + 0 \cdot |x - y|,$$

sehingga Ketaksamaan (2.9) terpenuhi. Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, untuk $x \neq 4$ dan $y = 4$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |0 - 1| = 1 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}|x - 0| \\ &= \frac{1}{2}|x - 0| + \frac{1}{2}|4 - 1| + 0 \cdot |x - 4| \\ &= \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|y - Ty| + 0 \cdot |x - y|, \end{aligned}$$

sehingga Ketaksamaan (2.9) terpenuhi. Jadi, pemetaan tersebut merupakan pemetaan tipe Reich-Suzuki nonekspansif. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 4$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 4 = |0 - 4| = |x - y|.$$

Hasil terbaru, tahun 2023 Ullah dkk. mengenalkan pemetaan (α, β, γ) -

nonekspansif.

Definisi 2.4.7. (Ullah dkk., 2023) Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $W \subseteq B$ dengan $W \neq \emptyset$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ disebut pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $\gamma \in [0, 1)$ dan $\alpha + \gamma \leq 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + \beta\|x - Tx\| + \gamma\|x - Ty\|. \quad (2.10)$$

Berikut ini diberikan contoh dari pemetaan tersebut.

Contoh 2.4.7. Diberikan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ adalah ruang Banach dan $W = [0, 2]$. Pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \neq 2, \\ 1, & \text{jika } x = 2, \end{cases}$$

merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, tetapi bukan pemetaan nonekspansif.

Penjelasan dari Contoh 2.4.7 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in W$ dengan $x, y \neq 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 0| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|,$$

dan untuk $x = y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |1 - 1| = 0 \leq \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|,$$

sehingga Ketaksamaan (2.10) terpenuhi. Selanjutnya, untuk $x \neq 2$ dan $y = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |Tx - Ty| &= |0 - 1| = 1 \leq \left| \frac{y}{2} \right| \\ &\leq \left| \frac{x-y}{2} \right| + \left| \frac{x}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2}|x - y| + \frac{1}{2}|x - Tx| + \frac{1}{2}|x - Ty|, \end{aligned}$$

serta untuk $x = 2$ dan $y \neq 2$ diperoleh

$$\begin{aligned}|Tx - Ty| &= |1 - 0| = 1 \leq \frac{3}{2} = \left|x - \frac{1}{2}\right| \\&\leq \left|\frac{x-1}{2}\right| + \left|\frac{x}{2}\right| \\&= \frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{2}|x-Tx| + \frac{1}{2}|x-Ty|,\end{aligned}$$

sehingga Ketaksamaan (2.10) terpenuhi. Jadi, pemetaan tersebut merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Akan tetapi, pemetaan tersebut bukan merupakan pemetaan nonekspansif karena untuk $x = 0$ dan $y = 2$ diperoleh

$$|Tx - Ty| = |0 - 1| = 1 > 2 = |0 - 2| = |x - y|.$$

2.5 Aproksimasi Titik Tetap dari Pemetaan Nonekspansif

Salah satu cara untuk mendapatkan titik tetap dari suatu pemetaan f adalah dengan mendapatkan nilai x_0 yang memenuhi persamaan titik tetap yaitu, $x_0 = f(x_0)$. Akan tetapi, menyelesaikan persamaan tersebut tidak selalu mudah, khususnya untuk persamaan tak linier. Oleh karena itu, nilai pendekatan atau aproksimasi dari titik tetap diperlukan.

Untuk melakukan aproksimasi, tentunya diperlukan algoritma atau dalam hal ini adalah skema iterasi yang konvergen ke titik tetap dari pemetaan tersebut. Untuk pemetaan yang bersifat kontraktif, skema iterasi Picard adalah skema iterasi paling sederhana yang dapat digunakan. Diberikan X adalah himpunan tak kosong dan $T : X \rightarrow X$ adalah suatu pemetaan, serta $x_1 \in X$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang didefinisikan sebagai $x_{n+1} = T(x_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan yang dihasilkan oleh skema iterasi Picard. Namun, skema ini tidak selalu konvergen untuk pemetaan yang bersifat nonekspansif. Sebagai ilustrasi, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.5.1. Diberikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 1 - x$. Pemetaan ini adalah pemetaan nonekspansif dengan titik tetap adalah $x = \frac{1}{2}$, tetapi untuk setiap $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ iterasi Picard menghasilkan barisan $\{x, 1-x, x, 1-x, x, \dots\}$ yang divergen.

Pada tahun 1953, Mann memperkenalkan skema iterasinya yang konvergen untuk pemetaan nonekspansif yang diberikan sebagai berikut (Mann, 1953).

Definisi 2.5.1. Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Mann didefinisikan sebagai

$$x_{k+1} = (1 - a_k)x_k + a_kTx_k, \quad (2.11)$$

dengan $\{a_k\} \subseteq (0, 1]$.

Berbagai perkembangan skema iterasi juga terus bermunculan hingga saat ini dengan salah satu tujuannya adalah mencari skema iterasi yang tercepat untuk aproksimasi titik tetap dari suatu pemetaan. Untuk selanjutnya, berikut ini diberikan skema iterasi yang konvergen ke titik tetap dari pemetaan nonekspansif diperumum di ruang Banach.

Definisi 2.5.2. (Agarwal dkk., 2007) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Agarwal didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} y_k &= (1 - b_k)x_k + b_kTx_k, \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)Tx_k + a_kTy_k, \end{cases} \quad (2.12)$$

dengan $\{a_k\}, \{b_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.3. (Abbas dan Nazir, 2014) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Abbas didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= (1 - c_k)x_k + c_kTx_k, \\ y_k &= (1 - b_k)Tx_k + b_kTq_k, \\ x_{k+1} &= (1 - a_k)Ty_k + a_kTq_k, \end{cases} \quad (2.13)$$

dengan $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.4. (Thakur dkk., 2016) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C). Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan

oleh skema iterasi Thakur didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= (1 - c_k)x_k + c_kTx_k, \\ y_k &= T((1 - b_k)x_k + b_kq_k), \\ x_{k+1} &= Ty_k, \end{cases} \quad (2.14)$$

dengan $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.5. (Ahmad dkk., 2021) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi JK didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= (1 - c_k)x_k + c_kTx_k, \\ y_k &= Tq_k, \\ x_{k+1} &= T((1 - a_k)Tq_k + a_kTy_k), \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan $\{a_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

Definisi 2.5.6. (Sabri dkk., 2025) Misalkan W adalah himpunan yang tertutup dan konveks dari suatu ruang Banach, $x_0 \in W$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif tipe Reich-Suzuki. Barisan $\{x_k\}$ yang dihasilkan oleh skema iterasi Sabri didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_k &= T((1 - c_k)x_k + c_kTx_k), \\ y_k &= T(Tq_k), \\ x_{k+1} &= T((1 - a_k)Tq_k + a_kTy_k), \end{cases} \quad (2.16)$$

dengan $\{a_k\}, \{c_k\} \subseteq (0, 1)$.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan beberapa tahapan penelitian yang akan dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

3.1 Tahapan Penelitian

(a) Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan tinjauan pustaka dengan fokus utama meliputi konsep mengenai titik tetap, ruang $CAT_p(0)$, pemetaan nonekspansif dan perumumannya, serta terkait skema iterasi. Akan dilakukan kajian terkait syarat-syarat untuk konvergensi dari suatu skema iterasi untuk mendapatkan nilai aproksimasi titik tetap dari pemetaan nonekspansif dan perumumannya. Kemudian dikaji pula konsep-konsep yang ada pada ruang $CAT_p(0)$, seperti dari definisi, sifat-sifat, dan hasil penting lainnya yang berkaitan dengan aproksimasi titik tetap dari pemetaan nonekspansif di ruang tersebut.

(b) Mengkaji Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.

Pada tahap ini pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif yang awalnya didefinisikan untuk ruang Banach akan dikaji di ruang $CAT_p(0)$. Beberapa lema dan teorema yang berlaku untuk pemetaan tersebut akan diperluas dalam konteks ruang $CAT_p(0)$.

(c) Mendapatkan Konvergensi dari Skema Iterasi Sabri di Ruang $CAT_p(0)$ untuk Aproksimasi Titik Tetap dari Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Tahapan ini bertujuan untuk membuktikan bahwa barisan yang diperoleh dari skema iterasi Sabri konvergen titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$. Beberapa syarat untuk barisan tersebut konvergen, baik itu konvergen- Δ maupun konvergen kuat akan diselidiki pada tahap ini.

(d) Melakukan Simulasi Numerik.

Untuk memvalidasi hasil teoritis pada tahap sebelumnya, dilakukan eksperimen numerik. Dalam tahap ini, dilakukan simulasi dengan

mendefinisikan suatu pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$, kemudian titik tetap dari pemetaan tersebut akan didekati dengan menggunakan skema iterasi Sabri. Dalam simulasi ini, juga akan digunakan beberapa variasi parameter. Selanjutnya, jumlah iterasi dari skema iterasi Sabri akan dibandingkan dengan beberapa skema iterasi lainnya yang telah ada sebelumnya. Hasil yang diperoleh akan disajikan dalam bentuk tabel.

- (e) Mendapatkan Aplikasi dari Skema Iterasi Sabri untuk Masalah Optimasi.

Banyak masalah dalam bidang optimisasi, seperti *convex feasibility problem* atau masalah minimalisasi, dapat diformulasikan ulang sebagai masalah pencarian titik tetap. Dalam tahap ini akan diidentifikasi masalah yang relevan dan menyelesaiakannya dengan skema iterasi Sabri.

- (f) Diseminasi.

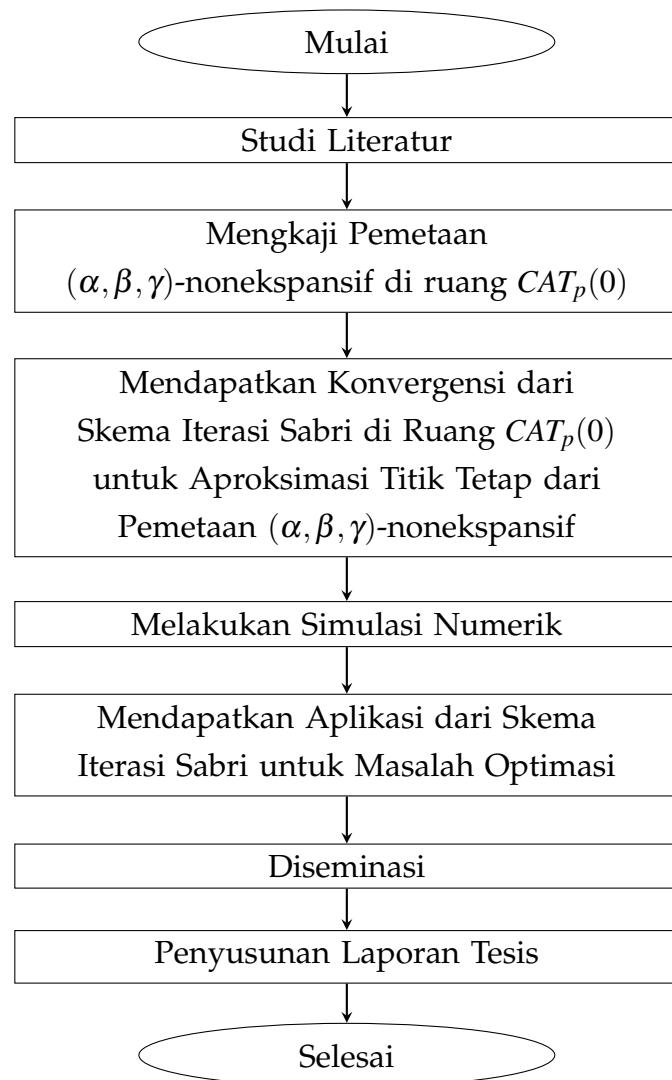
Pada tahap diseminasi, dilakukan penulisan artikel ilmiah dan akan dipublikasikan pada seminar internasional atau jurnal internasional bereputasi.

- (g) Penyusunan Laporan Tesis.

Pada tahap ini, dilakukan penulisan laporan tesis yang meliputi seluruh hasil penelitian, baik itu hasil teoritis maupun hasil numerik. Penjelasan dari hasil tersebut ditulis secara rinci, terstruktur, dan lengkap. Selain itu, kesimpulan dari penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya akan dituliskan dalam laporan tesis.

3.2 Diagram Alir Penelitian

Diagram alir untuk penelitian ini disajikan dalam Gambar 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.1: Blok Diagram Penelitian.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini disajikan perluasan dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif pada ruang $CAT_p(0)$ yang meliputi definisi dan sifat-sifat pemetaannya. Kemudian, disajikan pula konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan tersebut. Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik terkait konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Selain itu, didapatkan pula aplikasi dari skema iterasi Sabri untuk masalah optimasi, khususnya untuk masalah minimalisasi fungsi dan rekonstruksi citra.

4.1 Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di Ruang $CAT_p(0)$

Pada bagian ini, disajikan definisi, contoh, dan sifat-sifat dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$. Sifat yang didapatkan dari pemetaan ini disajikan dalam Lema 4.1.1, yang menunjukkan bahwa pemetaan ini memenuhi kondisi nonekspansif kuasi. Kemudian, pada Lema 4.1.2 didapatkan ketaksamaan penting yang melibatkan pemetaan tersebut. Selain itu, didapatkan pula bahwa pemetaan ini memenuhi sifat *demiclosedness* yang ditunjukkan oleh Lema 4.1.3. Tiga Lema tersebut berperan penting untuk pembuktian konvergensi skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Pada bagian ini diberikan pula Teorema 4.1.1 yang menyatakan syarat dari ketunggalan titik tetap dari pemetaan tersebut jika eksistensinya ada.

Berikut ini disajikan definisi dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 4.1.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, pemetaan $f : W \rightarrow W$ disebut sebagai pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif jika terdapat bilangan real $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $\alpha + \gamma \leq 1, \gamma \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Ty). \quad (4.1)$$

Selanjutnya, diberikan contoh dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di

ruang $CAT_p(0)$. Namun, sebelum itu diberikan dulu contoh ruang yang digunakan sebagai berikut.

Contoh berikut ini merupakan contoh dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan ruang $CAT_p(0)$ yang diberikan pada Contoh 2.3.6.

Contoh 4.1.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ sebagaimana dalam Contoh 2.3.6.

Diberikan pula $W = \{(w_1, w_2, 0, 0, \dots) \mid w_1 \in [1, 5], w_2 \in [1, 125]\} \subset X$. dan pemetaan $T : W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$T((w_1, w_2, 0, 0, \dots)) = \begin{cases} \left(\frac{w_1+3}{4}, \frac{(w_1+3)^3}{64}, 0, 0, \dots\right), & \text{jika } w_1 \in [1, 3) \\ \left(\frac{w_1+2}{4}, \frac{(w_1+2)^3}{64}, 0, 0, \dots\right), & \text{jika } w_1 \in [3, 5]. \end{cases}$$

Pemetaan T adalah pemetaan $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0)$ -nonekspansif, tetapi bukan pemetaan nonekspansif. Pemetaan T mempunyai titik tetap yang tunggal, yaitu $(1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Penjelasan dari Contoh 4.1.1 diuraikan berikut ini.

Diambil sebarang $u, v \in W$ dengan $u = (u_1, u_2, 0, 0, \dots)$, $v = (v_1, v_2, 0, 0, \dots)$.

Dimisalkan $D(u, v) = \alpha d(u, v) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(v, Tv)$.

Kasus 1. Untuk $u_1, v_1 \in [1, 3)$, diperoleh

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(u_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 0 \times \left(\left| u_1 - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left| \frac{u_1+3}{4} - \frac{v_1+3}{4} \right| \\ &= \left(\left| \frac{u_1+3}{4} - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+3)^3}{64} - \left(\frac{v_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$= d(Tu, Tv).$$

Kasus 2. Untuk $u_1, v_1 \in [3, 5]$, diperoleh

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(u_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 0 \times \left(\left| u_1 - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left| \frac{u_1+2}{4} - \frac{v_1+2}{4} \right| \\ &= \left(\left| \frac{u_1+2}{4} - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 + \left| \left(\frac{u_1+2}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+2)^3}{64} - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= d(Tu, Tv). \end{aligned}$$

Kasus 3. Untuk $u_1 \in [3, 5]$ dan $v_1 \in [1, 3)$, diperoleh

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(u_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 0 \times \left(\left| u_1 - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+2}{4} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Karena $u_1 \in [3, 5]$, maka $\frac{1}{12}|3u_1 - 2| \geq \frac{7}{12} > \frac{1}{4}$, sehingga

$$\begin{aligned} D(u, v) &\geq \frac{1}{4}|u_1 - v_1| + \frac{1}{4} \\ &\geq \left| \frac{u_1}{4} - \frac{v_1}{4} - \frac{1}{4} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left| \frac{u_1+2}{4} - \frac{v_1+3}{4} \right|^3 \right. \\
&\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1+2}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+2)^3}{64} - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= d(Tu, Tv).
\end{aligned}$$

Kasus 4. Untuk $u_1 \in [1, 3]$ dan $v_1 \in [3, 5]$, diperoleh

$$\begin{aligned}
D(u, v) &= \frac{1}{4} \left(|u_1 - v_1|^3 + |u_1^3 - u_2 - v_1^3 + v_2|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+3}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 + \frac{(u_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad + 0 \times \left(\left| u_1 - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 + \left| u_1^3 - u_2 - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+2)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq \frac{1}{4} (|u_1 - v_1|^3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\left| u_1 - \frac{u_1+3}{4} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4} \left(\left| u_1 - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4} |u_1 - v_1| + \frac{1}{4} |u_1 - 1|.
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
d(Tu, Tv) &= \left(\left| \frac{u_1+3}{4} - \frac{v_1+2}{4} \right|^3 \right. \\
&\quad \left. + \left| \left(\frac{u_1+3}{4} \right)^3 - \frac{(u_1+3)^3}{64} - \left(\frac{v_1+2}{4} \right)^3 + \frac{(v_1+3)^3}{64} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4} |u_1 - v_1 + 1|,
\end{aligned}$$

sehingga untuk membuktikan bahwa $D(u, v) \geq d(Tu, Tv)$, akan dibuktikan bahwa

$$f(u_1, v_1) := |u_1 - v_1| + |u_1 - 1| - |u_1 - v_1 + 1| \geq 0,$$

untuk setiap $u_1 \in [1, 3]$ dan $v_1 \in [3, 5]$. Diamati bahwa $1 \leq u_1 < 3 \leq v_1$, sehingga

$$f(u_1, v_1) = v_1 - u_1 + u_1 - 1 - |u_1 - v_1 + 1|$$

$$= v_1 - 1 - |u_1 - v_1 + 1|.$$

Jika $u_1 - v_1 + 1 < 0$, didapatkan

$$f(u_1, v_1) = v_1 - 1 - (-(u_1 - v_1 + 1)) = u_1 \geq 1.$$

Selanjutnya, jika $u_1 - v_1 + 1 \geq 0$, diperoleh $u_1 \geq v_1 - 1 \geq 2$

$$f(u_1, v_1) = v_1 - 1 - u_1 + v_1 - 1 = 2v_1 - u_1 - 2,$$

sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = -1 \neq 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial v_1} = 2 \neq 0.$$

Hal ini berarti nilai minimumnya terdapat pada titik-titik batas. Karena $u_1 \in [1, 3]$ dan $u_1 \geq 2$ serta $v_1 \in [3, 5]$, diperoleh $-3 < -u_1 \leq -2$ sehingga

$$f(u_1, v_1) = 2v_1 - u_1 - 2 > 2v_1 - 5 \geq 1.$$

Dari uraian tersebut didapatkan bahwa $f(u_1, v_1) \geq 0$ untuk setiap $u_1 \in [1, 3]$ dan $v_1 \in [3, 5]$ sehingga berlaku pula $\alpha d(u, v) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tv) \geq d(Tu, Tv)$.

Karena semua tinjauan kasus di atas menghasilkan $\alpha d(u, v) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tv) \geq d(Tu, Tv)$ untuk setiap $u_1, v_1 \in [1, 5]$, maka T adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{3}$, dan $\gamma = 0$. Akan tetapi, T bukan pemetaan nonekspansif karena untuk $u = \left(\frac{29}{10}, \frac{29^3}{1000}, 0, 0, \dots\right)$ dan $v = (3, 27, 0, 0, \dots)$, didapatkan

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= \left(\left| \frac{\frac{29}{10}+3}{4} - \frac{3+2}{4} \right|^3 \right. \\ &\quad \left. + \left| \left(\frac{\frac{29}{10}+3}{4} \right)^3 - \frac{(\frac{29}{10}+3)^3}{64} - \frac{(3+2)^3}{64} + \left(\frac{3+2}{4} \right)^3 \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{9}{40} \\ &> \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left| 3 - \frac{29}{10} \right|^3 + \left| \left(\frac{29}{10} \right)^3 - \frac{29^3}{1000} - 3^3 + 27 \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= d(u, v).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan titik tetap dari T , dicari $w = (w_1, w_2, 0, 0, \dots) \in W$ sehingga $T(w) = w$. Dari definisi T , terdapat dua kemungkinan, yaitu

$$\begin{aligned}
(i) \quad &w_1 = \frac{w_1 + 3}{4}, \quad w_2 = \frac{(w_1 + 3)^3}{64}, \quad \text{atau} \\
(ii) \quad &w_1 = \frac{w_1 + 2}{4}, \quad w_2 = \frac{(w_1 + 2)^3}{64}.
\end{aligned}$$

Dari (i) diperoleh $w_1 = w_2 = 1 \in [1, 3]$, sedangkan dari (ii) diperoleh $w_1 = \frac{2}{3} \notin [3, 5]$. Karena $\alpha + \gamma < 1$, didapatkan bahwa T mempunyai titik tetap yang tunggal, yaitu $(1, 1, 0, 0, \dots)$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan tiga lema penting untuk pembuktian konvergensi skema iterasi Sabri.

Lema 4.1.1. *Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Jika u adalah titik tetap dari T , maka untuk setiap $x \in W$ berlaku $d(Tx, Tu) \leq d(x, u)$.*

Bukti 4.1.1. *Diperhatikan bahwa u titik tetap dari T sehingga berlaku $u = Tu$, diperoleh*

$$\begin{aligned}
d(u, Tx) &= d(Tu, Tx) \leq \alpha d(u, x) + \beta d(u, Tu) + \gamma d(u, Tx) \\
&= \alpha d(u, x) + \beta d(u, u) + \gamma d(u, Tx) \\
&= \alpha d(x, u) + \gamma d(u, Tx).
\end{aligned}$$

Dari sini didapatkan $(1 - \gamma)d(u, Tx) \leq \alpha d(x, u)$. Kemudian, karena $\alpha + \gamma \leq 1$, didapat $\alpha \leq 1 - \gamma$ sehingga

$$\frac{\alpha}{1 - \gamma} \leq 1.$$

Akibatnya

$$d(Tx, Tu) = d(Tu, Tx) = d(u, Tx) \leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} d(x, u) \leq d(x, u). \quad (4.2)$$

Lema 4.1.2. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, serta $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Untuk setiap $x, y \in W$, ketaksamaan berikut ini berlaku:

$$d(x, Ty) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x, y) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x, Tx). \quad (4.3)$$

Bukti 4.1.2. Diamati bahwa untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\begin{aligned} d(x, Ty) &\leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) \\ &\leq d(x, Tx) + \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Ty) \\ &= (1 + \beta)d(x, Tx) + \alpha d(x, y) + \gamma d(x, Ty). \end{aligned}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)d(x, Ty) &\leq (1 + \beta)d(x, Tx) + \alpha d(x, y) \\ \iff d(x, Ty) &\leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x, y) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x, Tx). \end{aligned}$$

Lema 4.1.3. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif, maka T mempunyai sifat *demiclosedness*.

Bukti 4.1.3. Diambil sebarang barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq W$ yang terbatas dan konvergen- Δ ke $u_0 \in W$, serta memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. Berdasarkan definisi 2.3.7, diperoleh bahwa $u_0 \in A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$. Kemudian, menggunakan ketaksamaan (4.3), didapatkan

$$d(x_n, Tu_0) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x_n, u_0) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x_n, Tx_n).$$

Selanjutnya, didapatkan bahwa

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tu_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x_n, u_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, u_0).$$

Hal ini berarti $Tu_0 \in A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$. Kemudian, berdasarkan Lema 2.3.2, dipunyai bahwa $A(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$ tepat mempunyai satu elemen, yang berarti $u_0 = Tu_0$. Jadi T mempunyai sifat *demiclosedness*.

Teorema berikut ini menyatakan ketunggalan titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Teorema 4.1.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha + \gamma \neq 1$ dan T mempunyai titik tetap, maka titik tetap dari T tunggal.

Bukti 4.1.4. Misalkan u dan v adalah titik tetap dari T , maka berdasarkan Ketaksamaan (4.2) diperoleh

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma} d(u, v)$$

Karena $\alpha, \gamma \in [0, 1]$, $\gamma \neq 1$, dan $\alpha + \gamma \neq 1$, didapatkan bahwa $0 \leq \frac{\alpha}{1-\gamma} < 1$ sehingga $d(u, v) = 0$. Dengan demikian $u = v$, yang berarti bahwa titik tetap dari T tunggal.

4.2 Konvergensi Skema Iterasi Sabri untuk Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Pada bagian ini disajikan skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$ dan hasil terkait konvergensi dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang tersebut. Terdapat dua lema penting yang digunakan untuk membuktikan konvergensi skema tersebut, yaitu pada Lema 4.2.1 yang menunjukkan bahwa barisan $d(x_n, x^*)$ konvergen ke 0, dengan x^* adalah titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif, serta Lema 4.2.2 yang menunjukkan bahwa barisan $d(x_n, Tx_n)$ konvergen ke 0. Kemudian, disajikan syarat eksistensi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif pada Teorema 4.2.1. Hasil konvergensi dari skema ini diberikan pada Teorema 4.2.2 yang memberikan syarat cukup untuk konvergensi- Δ , sedangkan syarat cukup untuk konvergensi kuat diberikan oleh Teorema 4.2.3. Lebih lanjut, diberikan laju konvergensi dari skema iterasi Sabri pada Teorema 4.2.4

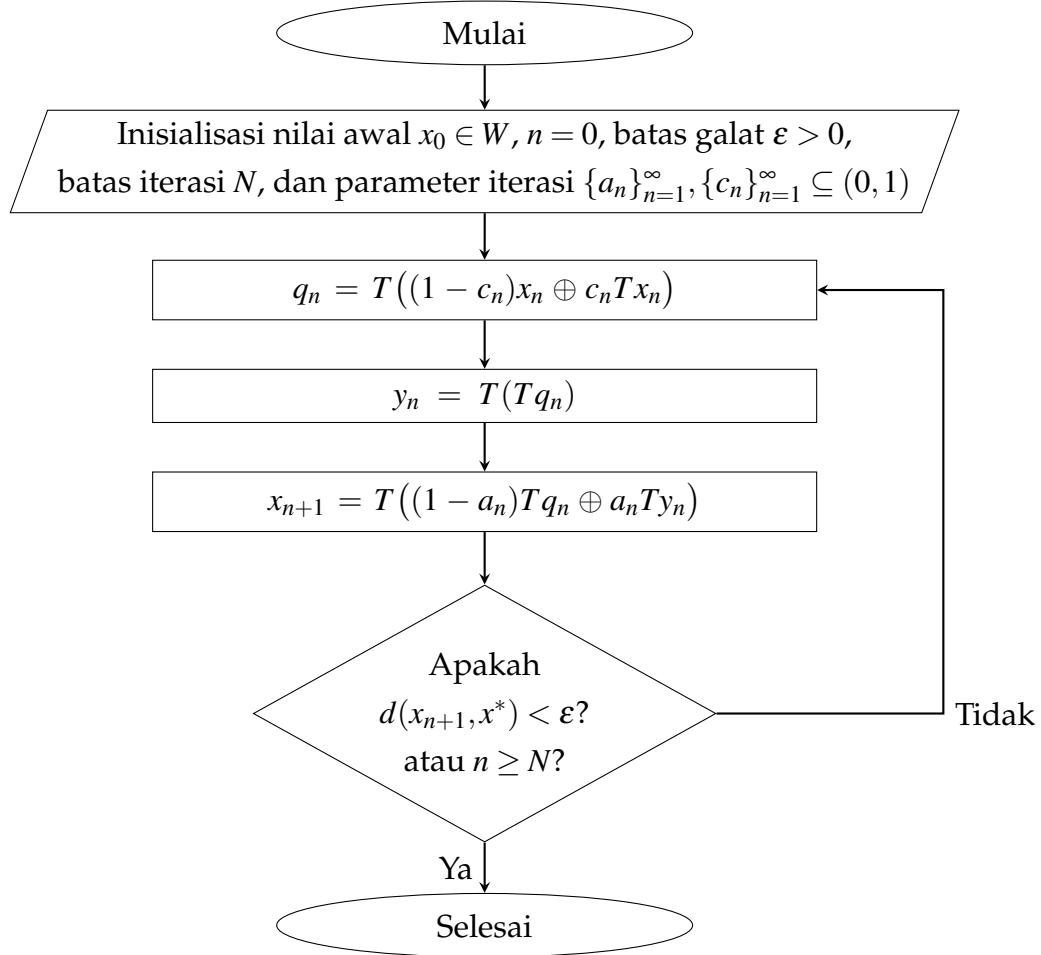
Berikut ini diberikan skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 4.2.1 (Skema Iterasi Sabri). Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$ dan konveks. Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= T((1 - c_n)x_n \oplus c_n Tx_n), \\ y_n &= T(q_n), \\ x_{n+1} &= T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_n Ty_n). \end{cases} \quad (4.4)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, 1]$.

Berikut ini adalah diagram alir dari skema iterasi Sabri pada ruang $CAT_p(0)$.



Gambar 4.1: Diagram Alir Skema Iterasi Sabri pada Ruang $CAT_p(0)$

Untuk selanjutnya, dinotasikan W sebagai himpunan bagian tak kosong yang konveks dari ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G), serta $Fix(T)$ adalah himpunan semua titik tetap dari pemetaan T .

Lema 4.2.1. *Diberikan $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $Fix(T) \neq \emptyset$. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4), maka $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$ ada untuk setiap $x^* \in Fix(T)$ dan bernilai 0 jika $\alpha + \gamma \neq 1$.*

Bukti 4.2.1. Berdasarkan Lema 2.3.3 dan Lema 4.1.1, diperoleh bahwa untuk setiap $x^* \in Fix(T)$ berlaku

$$d(q_n, x^*) = d(T((1 - c_n)x_n \oplus c_n Tx_n), Tx^*)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\alpha}{1-\gamma} d((1-c_n)x_n \oplus c_n Tx_n, x^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\gamma} [(1-c_n)d(x_n, x^*) + c_n d(Tx_n, x^*)] \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\gamma} \left[(1-c_n)d(x_n, x^*) + \frac{\alpha c_n}{1-\gamma} d(x_n, x^*) \right] \\
&= \frac{\alpha(1-\gamma)(1-c_n) + \alpha^2 c_n}{(1-\gamma)^2} d(x_n, x^*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(y_n, x^*) &= d(T(Tq_n), x^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\gamma} d(Tq_n, x^*) \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^2 d(q_n, x^*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x^*) &= d(T((1-a_n)Tq_n \oplus a_n Ty_n), Tx^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\gamma} d((1-a_n)Tq_n \oplus a_n Ty_n, x^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{1-\gamma} [(1-a_n)d(Tq_n, x^*) + a_n d(Ty_n, x^*)] \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^2 [(1-a_n)d(q_n, x^*) + a_n d(y_n, x^*)] \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^2 \left[(1-a_n)d(q_n, x^*) + a_n \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^2 d(q_n, x^*) \right] \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\gamma} \right)^2 \left[\frac{(1-a_n)(1-\gamma)^2 + a_n \alpha^2}{(1-\gamma)^2} d(q_n, x^*) \right] \\
&\leq \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)^4} ((1-a_n)(1-\gamma)^2 + a_n \alpha^2) \times \frac{\alpha(1-\gamma)(1-c_n) + \alpha^2 c_n}{(1-\gamma)^2} d(x_n, x^*) \\
&= \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^6} ((1-a_n)(1-\gamma)^2 + a_n \alpha^2) ((1-c_n)(1-\gamma) + c_n \alpha) d(x_n, x^*).
\end{aligned}$$

Karena $\alpha \leq 1 - \gamma$, didapat

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^6} (1-\gamma)^2 (1-\gamma) d(x_n, x^*) = \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3} d(x_n, x^*), \quad (4.5)$$

sehingga

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq d(x_n, x^*),$$

yang berarti bahwa $\{d(x_n, x^*)\}$ merupakan barisan turun dan terbatas di bawah.

Akibatnya $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$ ada. Selanjutnya, untuk $\alpha + \gamma \neq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x^*) &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}\right)^3 d(x_n, x^*) \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}\right)^6 d(x_{n-1}, x^*) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}\right)^{3(n+1)} d(x_0, x^*), \end{aligned}$$

sehingga

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{1-\gamma}\right)^{3n} d(x_0, x^*) = 0.$$

Dengan demikian $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$.

Lema 4.2.2. Diberikan $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Jika $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, 1)$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Bukti 4.2.2. Diambil sebarang $x^* \in \text{Fix}(T)$, berdasarkan Lema 2.3.3 dan 4.1.1, didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} (d(q_n, x^*))^p &= (d(T((1-c_n)x_n \oplus c_n Tx_n), x^*))^p \\ &\leq (d((1-c_n)x_n \oplus c_n Tx_n, x^*))^p \\ &\leq (1-c_n)(d(x_n, x^*))^p + c_n(d(Tx_n, x^*))^p - \frac{c_n(1-c_n)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p. \end{aligned}$$

Karena $a \leq c_k \leq b$, diperoleh $-c_n(1-c_n) \leq a(1-b)$ sehingga

$$\begin{aligned} (d(q_n, x^*))^p &\leq (1-c_n)(d(x_n, x^*))^p + c_n(d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p \\ &= (d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, didapatkan pula

$$\begin{aligned} (d(y_n, x^*))^p &= (d(T(Tq_n), x^*))^p \\ &\leq (d(q_n, x^*))^p \\ &\leq (d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p, \end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned}
(d(x_{n+1}, x^*))^p &= (d(T((1-a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n), x^*))^p \\
&\leq (d((1-a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n, x^*))^p \\
&\leq (1-a_n)(d(Tq_n, x^*))^p + a_n(d(Ty_n, x^*))^p - \frac{c_n(1-c_n)}{2^{p-1}}(d(Tq_n, Ty_n))^p \\
&\leq (1-a_n)(d(q_n, x^*))^p + a_n(d(y_n, x^*))^p \\
&\leq (1-a_n) \left[(d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p \right] \\
&\quad + a_n \left[(d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p \right] \\
&= (d(x_n, x^*))^p - \frac{a(1-b)}{2^{p-1}}(d(x_n, Tx_n))^p.
\end{aligned}$$

Akibatnya

$$(d(x_n, Tx_n))^p \leq \frac{2^{p-1}}{a(1-b)}[(d(x_n, x^*))^p - (d(x_{n+1}, x^*))^p].$$

Selanjutnya, berdasarkan Lema 4.2.1, diperoleh bahwa $\{d(x_n, x^*)\}$ konvergen. Hal ini berarti $u_n = (d(x_n, x^*))^p$ juga konvergen dan diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$. Akibatnya, didapatkan

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, Tx_n))^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{p-1}}{a(1-b)}[(d(x_n, x^*))^p - (d(x_{n+1}, x^*))^p] = 0.$$

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$.

Teorema berikut ini menyajikan syarat eksistensi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Teorema 4.2.1. Diberikan $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Jika $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) sehingga $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ terbatas dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, maka $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Bukti 4.2.3. Diambil sebarang $x^* \in A(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$, maka dengan ketaksamaan 4.3, diperoleh bahwa

$$d(x_n, Tx^*) \leq \frac{\alpha}{1-\gamma}d(x_n, x^*) + \frac{1+\beta}{1-\gamma}d(x_n, Tx_n).$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, diperoleh

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx^*) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*).$$

Dari sini didapatkan $Tx^* \in A(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$, sehingga berdasarkan Lema 2.3.2, diperoleh bahwa $A(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$ tepat mempunyai satu elemen, yang berarti $x^* = Tx^*$. Dengan demikian $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$.

Selanjutnya, dua teorema berikut ini menyajikan hasil konvergensi dari skema Sabri, yakni konvergensi- Δ dan konvergensi kuat, untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Teorema 4.2.2. *Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, tertutup, dan konveks. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ dan $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergen- Δ ke suatu titik tetap dari T .*

Bukti 4.2.4. *Diamati bahwa T merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Dari Lema 4.2.1, didapatkan bahwa $\{d(x_n, x^*)\}$ konvergen untuk setiap $x^* \in \text{Fix}(T)$. Kemudian, karena $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, maka berdasarkan Lema 4.2.2, didapatkan*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0. \quad (4.6)$$

Selanjutnya, dari Lema 4.1.3, didapat bahwa T mempunyai sifat demiclosedness. Hal ini berarti semua kondisi pada Teorema 2.3.2 terpenuhi, sehingga $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergen- Δ .

Untuk mendapatkan hasil konvergensi kuat, diperlukan syarat tambahan, yaitu himpunan W haruslah merupakan himpunan kompak.

Teorema 4.2.3. *Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, tertutup, konveks, dan kompak. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ dan $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergen kuat ke suatu titik tetap dari T .*

Bukti 4.2.5. *Diperhatikan bahwa W adalah himpunan kompak, ini berarti ada subbarisan $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ dari $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ yang konvergen kuat ke $x \in W$ atau*

$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x) = 0$. Akibatnya $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ juga konvergen- Δ ke $x \in W$. Dengan menggunakan fakta bahwa W himpunan kompak dan $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, maka berdasarkan Lema 4.2.2, diperoleh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0.$$

Kemudian dengan menggunakan sifat demiclosedness dari T , didapat bahwa $x \in \text{Fix}(T)$. Selanjutnya dari Lema 4.2.1 didapatkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x)$ ada. Karena limit dari subbarisannya 0, diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, x) = 0.$$

Dengan demikian, barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen kuat ke titik tetap dari T .

Selanjutnya, diberikan laju konvergensi dari barisan yang dikonstruksi dari skema iterasi Sabri. Berikut ini, terlebih dahulu diberikan definisi dari laju konvergensi dari suatu barisan.

Definisi 4.2.2. (Berinde, Khan dan Păcurar, 2015) Diberikan ruang $CAT_p(0)$ (X, d, G) . $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$. Jika terdapat $r \in [1, 2]$ yang memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n+1}, x^*)}{[d(x_n, x^*)]^r} = \lambda < +\infty,$$

maka r disebut sebagai laju konvergensi dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan λ sebagai galat asimtotik. Jika $r = 1$, laju konvergensinya linear, jika $r = 2$, laju konvergensinya kuadratik, dan jika $1 < r < 2$, laju konvergensinya superlinear.

Teorema 4.2.4. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, tertutup, konveks, dan kompak. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha + \gamma < 1$, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, serta $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri (4.4) dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai laju konvergensi linear dengan galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3}$.

Bukti 4.2.6. Berdasarkan ketaksamaan (4.5), didapatkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3} d(x_n, x^*),$$

sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n+1}, x^*)}{d(x_n, x^*)} \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3} < +\infty.$$

Hal ini berarti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mempunyai laju konvergensi linear dengan galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3}$.

4.3 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik untuk menguji laju konvergensi dari skema iterasi Sabri dibanding dengan skema iterasi lainnya. Untuk simulasi ini, terlebih dahulu dikenalkan skema iterasi JK yang dikembangkan pada ruang $CAT_p(0)$ oleh Salisu sebagai berikut.

Definisi 4.3.1 (Skema Iterasi JK). (Salisu dkk., 2022) Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi JK pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= (1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, \\ y_n &= Tq_n, \\ x_{n+1} &= T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n), \end{cases} \quad (4.7)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, 1]$.

Selain itu, berikut ini dikenalkan pula skema iterasi Thakur, Abbas, dan Agarwal pada ruang $CAT_p(0)$.

Definisi 4.3.2 (Skema Iterasi Thakur). Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Thakur pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n &= (1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, \\ y_n &= T((1 - a_n)x_n \oplus a_nq_n), \\ x_{n+1} &= Ty_n, \end{cases} \quad (4.8)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, 1]$.

Definisi 4.3.3 (Skema Iterasi Abbas). Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Abbas pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai

berikut:

$$\begin{cases} q_n &= (1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n, \\ y_n &= (1 - b_n)Tx_n \oplus b_nTq_n, \\ x_{n+1} &= (1 - a_n)Ty_n \oplus a_nTq_n, \end{cases} \quad (4.9)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$, dan $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$.

Definisi 4.3.4 (Skema Iterasi Agarwal). Untuk suatu pemetaan $T : W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan skema iterasi Agarwal pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} y_n &= (1 - c_n)x_n \oplus a_nTx_n, \\ x_{n+1} &= (1 - a_n)Tx_n \oplus a_nTy_n, \end{cases} \quad (4.10)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$ dan $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, 1]$.

Simulasi numerik dilakukan dengan perangkat lunak Google Colab yang menggunakan bahasa pemrograman Python. Digunakan beberapa variasi parameter, baik dari nilai awal x_0 maupun parameter di skema iterasinya, yaitu barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pemetaan dan ruang yang digunakan dalam simulasi ini diambil dari Contoh 4.1.1 yang mempunyai titik tetap $x^* = (1, 1, 0, 0, \dots)$.

Untuk hasil numerik tiap iterasi, digunakan batas galat $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-6}$, sedangkan untuk jumlah iterasi yang diperlukan untuk konvergen dari masing-masing skema iterasi, digunakan batas galat $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-16}$. Dalam simulasi ini, laju konvergensi skema iterasi Sabri (4.4) dibandingkan dengan Skema iterasi JK (4.7), Thakur (4.8), Abbas 4.9, dan Agarwal (4.10). Kode dari simulasi ini dapat dilihat pada Lampiran A.1.

Pada Tabel 4.1, Tabel 4.2, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4 disajikan hasil numerik dari tiap iterasi dengan nilai awal $(2, 3, 0, 0, \dots)$ dan parameter $a_n = 0.92, b_n = 0.83, c_n = 0.81$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ hingga batas galat $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-6}$.

Tabel 4.1: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan JK

Iterasi	Nilai x_n hingga $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-6}$	
	n	Sabri
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.000843, 1.002532, 0, 0, ...)	(1.007605, 1.022988, 0, 0, ...)
2	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)	(1.000058, 1.000174, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)

Tabel 4.2: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Thakur

Iterasi	Nilai x_n hingga $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-6}$	
	n	Sabri
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.000843, 1.002532, 0, 0, ...)	(1.027569, 1.085007, 0, 0, ...)
2	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)	(1.000760, 1.002282, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)	(1.000021, 1.000063, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)

Tabel 4.3: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Abbas

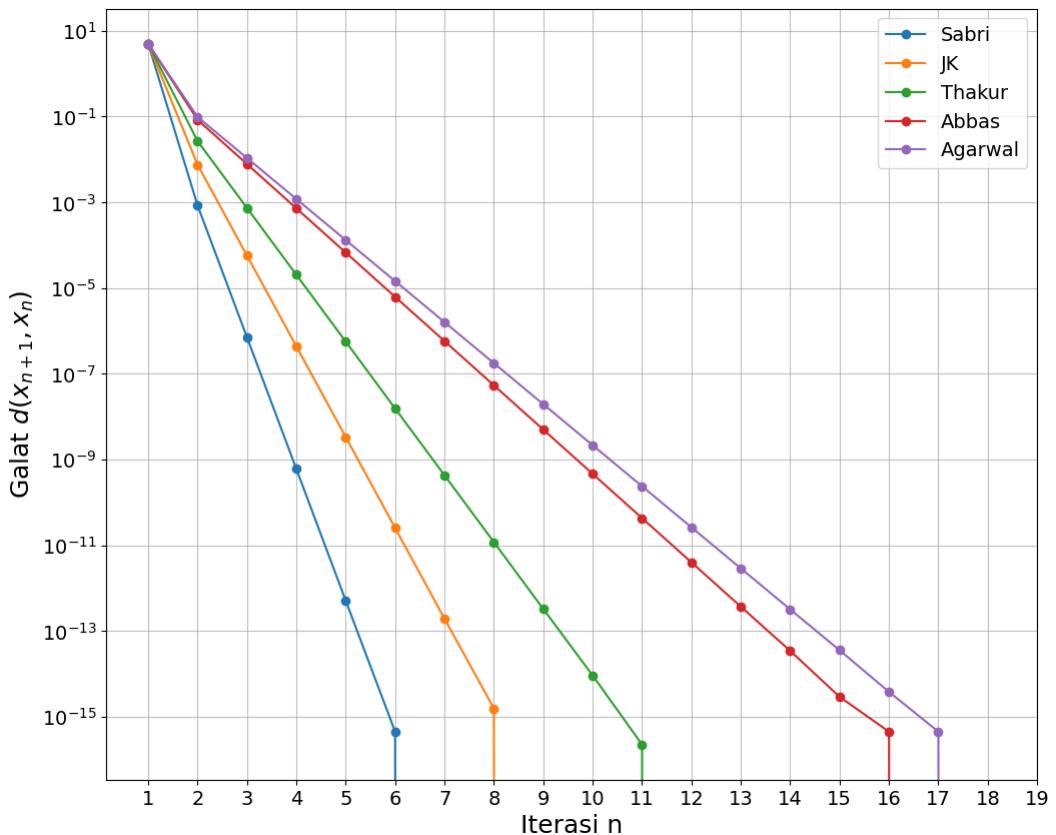
Iterasi	Nilai x_n hingga $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-6}$	
	n	Sabri
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.000843, 1.002532, 0, 0, ...)	(1.092754, 1.304869, 0, 0, ...)
2	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)	(1.008603, 1.026033, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)	(1.000798, 1.002396, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000074, 1.000222, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000007, 1.000021, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)

Tabel 4.4: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Agarwal

Iterasi	Nilai x_n hingga $d(x_{n+1}, x_n) < 10^{-6}$	
	Sabri	Agarwal
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.000843, 1.002532, 0, 0, ...)	(1.110275, 1.368648, 0, 0, ...)
2	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)	(1.012161, 1.036927, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)	(1.001341, 1.004028, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000148, 1.000444, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000016, 1.000049, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000002, 1.000005, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)
8	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)

Tabel 4.5: Galat $d(x_n, x_{n+1})$

n	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
1	5.0×10^0				
2	8.4×10^{-4}	7.5×10^{-3}	2.6×10^{-2}	8.4×10^{-2}	9.8×10^{-2}
3	7.1×10^{-7}	5.7×10^{-5}	7.3×10^{-4}	7.8×10^{-3}	1.0×10^{-2}
4	5.9×10^{-10}	4.3×10^{-7}	2.0×10^{-5}	7.2×10^{-4}	1.1×10^{-3}
5	5.0×10^{-13}	3.3×10^{-9}	5.6×10^{-7}	6.7×10^{-5}	1.3×10^{-4}
6	4.4×10^{-16}	2.5×10^{-11}	1.5×10^{-8}	6.2×10^{-6}	1.4×10^{-5}
7	0	1.9×10^{-13}	4.2×10^{-10}	5.7×10^{-7}	1.5×10^{-6}
8	0	1.5×10^{-15}	1.1×10^{-11}	5.3×10^{-8}	1.7×10^{-7}
9	0	0	3.2×10^{-13}	4.9×10^{-9}	1.9×10^{-8}
10	0	0	9.1×10^{-15}	4.6×10^{-10}	2.1×10^{-9}
11	0	0	2.2×10^{-16}	4.2×10^{-11}	2.3×10^{-10}
12	0	0	0	3.9×10^{-12}	2.6×10^{-11}
13	0	0	0	3.6×10^{-13}	2.8×10^{-12}
14	0	0	0	3.4×10^{-14}	3.1×10^{-13}
15	0	0	0	2.8×10^{-15}	3.5×10^{-14}
16	0	0	0	4.4×10^{-16}	3.7×10^{-15}
17	0	0	0	0	4.4×10^{-16}



Gambar 4.2: Galat $d(x_{n+1}, x_n)$ (dalam log) vs iterasi

Dengan galat kurang dari 10^{-6} , skema iterasi Sabri hanya membutuhkan 3 iterasi dibanding dengan JK (4 iterasi), Thakur (5 iterasi), Abbas (7 iterasi), dan Agarwal (8 iterasi). Pada Tabel 4.5, diberikan pula nilai galat $d(x_n, x_{n+1})$ dari tiap iterasi. Gambar 4.2 juga memberikan gambaran mengenai penurunan galatnya.

Selanjutnya, pada Tabel 4.6, Tabel 4.7, Tabel 4.8, Tabel 4.9, dan Tabel 4.10, disajikan jumlah iterasi yang diperlukan sampai batas galat $d(x_{n+1}, x^*) < 10^{-16}$ dari masing-masing skema iterasi dengan nilai awal dan parameter yang berbeda. Nilai awal dipilih secara acak dengan batasan nilainya berada pada domain pemetaan yang digunakan. Pada tabel-tabel tersebut parameter barisan $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dan $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ berturut-turut dipilih dengan kondisi konstan-konstan, turun-turun, naik-naik, naik-turun, dan turun-naik.

Tabel 4.6: Iterasi dengan parameter $a_n = 0.92, b_n = 0.83, c_n = 0.81$

Nilai Awal	Jumlah Iterasi					
	x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	8	10	13	18	19	
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	8	10	13	18	19	
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	8	10	13	18	19	
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	8	10	12	18	19	
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	8	10	13	18	19	
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	8	10	13	19	20	
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	8	10	13	18	19	

Tabel 4.7: Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}, b_n = \frac{2}{n+3}, c_n = \frac{4n+2}{7n+4}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi					
	x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	10	13	15	16	28	
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	10	13	15	16	28	
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	10	13	16	17	28	
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	10	13	15	16	27	
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	10	13	15	17	28	
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	10	13	16	17	29	
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	10	13	15	16	28	

Tabel 4.8: Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{\sqrt{4n+9}}{2n+13}, b_n = 0.8, c_n = 1 - \frac{n^2}{\sqrt{n^7+3}}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi					
	x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	8	10	13	16	19	
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	8	10	13	16	19	
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	8	11	13	16	19	
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	8	10	13	16	19	
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	8	11	13	16	19	
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	8	11	13	17	20	
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	8	10	13	16	19	

Tabel 4.9: Iterasi dengan parameter $a_n = 1 - \frac{n^3}{n^5+1}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$, $c_n = \frac{3n+4}{5n^2+4}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi					
	x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	8	11	15	25	27	
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	8	11	15	25	27	
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	8	11	15	26	27	
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	8	11	14	25	26	
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	8	11	15	26	27	
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	8	11	15	26	27	
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	8	11	15	26	27	

Tabel 4.10: Iterasi dengan parameter $a_n = \frac{n^5+1}{5n^7+9}$, $b_n = 1 - \frac{3}{n+5}$, $c_n = 1 - \frac{\sqrt{n^3+8}}{5n^5+9}$.

Nilai Awal	Jumlah Iterasi					
	x_0	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
(2.0, 3.0, 0, 0, ...)	9	11	16	13	29	
(3.0, 4.0, 0, 0, ...)	9	12	16	13	29	
(4.0, 1.0, 0, 0, ...)	9	12	16	14	29	
(1.5, 4.0, 0, 0, ...)	9	11	15	13	28	
(2.7, 4.2, 0, 0, ...)	9	12	16	13	29	
(5.0, 1.8, 0, 0, ...)	9	12	16	14	29	
(3.1, 3.5, 0, 0, ...)	9	12	16	13	29	

Hasil tersebut menunjukkan bahwa skema iterasi Sabri mempunyai laju konvergensi yang lebih baik daripada yang lainnya secara numerik. Dengan parameter tertentu, skema tersebut hanya membutuhkan 8 iterasi untuk konvergen ke titik tetapnya dengan galat kurang dari 10^{-16} . Secara analitik, skema iterasi Sabri lebih cepat karena nilai galat asimtotiknya, yaitu $\lambda \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3}$, sedangkan untuk JK dan Thakur adalah $\lambda \leq \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)^2}$ yang ditunjukkan dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.3.1. *Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, tertutup, konveks, dan kompak. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha + \gamma < 1$, $Fix(T) \neq \emptyset$, serta $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi JK (4.7) dengan*

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai laju konvergensi linear dengan galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)^2}$.

Bukti 4.3.1. Berdasarkan Lema 2.3.3 dan Lema 4.1.1, diperoleh bahwa untuk setiap $x^* \in Fix(T)$ berlaku

$$d(q_n, x^*) = d((1 - c_n)x_n \oplus c_n Tx_n, Tx^*)$$

$$\leq (1 - c_n)d(x_n, x^*) + c_n d(Tx_n, x^*)$$

$$\leq (1 - c_n)d(x_n, x^*) + \frac{\alpha c_n}{1 - \gamma} d(x_n, x^*)$$

$$= \frac{(1 - \gamma)(1 - c_n) + \alpha c_n}{(1 - \gamma)} d(x_n, x^*),$$

$$d(y_n, x^*) = d(Tq_n, x^*)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} d(q_n, x^*),$$

$$d(x_{n+1}, x^*) = d(T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_n Ty_n), Tx^*)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} d((1 - a_n)Tq_n \oplus a_n Ty_n, x^*)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} [(1 - a_n)d(Tq_n, x^*) + a_n d(Ty_n, x^*)]$$

$$\leq \left(\frac{\alpha}{1 - \gamma}\right)^2 [(1 - a_n)d(q_n, x^*) + a_n d(y_n, x^*)]$$

$$\leq \left(\frac{\alpha}{1 - \gamma}\right)^2 \left[(1 - a_n)d(q_n, x^*) + a_n \frac{\alpha}{1 - \gamma} d(q_n, x^*) \right]$$

$$= \left(\frac{\alpha}{1 - \gamma}\right)^2 \left[\frac{(1 - a_n)(1 - \gamma) + a_n \alpha}{(1 - \gamma)} d(q_n, x^*) \right]$$

$$\leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^3} ((1 - a_n)(1 - \gamma) + a_n \alpha) \times \frac{(1 - \gamma)(1 - c_n) + \alpha c_n}{(1 - \gamma)} d(x_n, x^*)$$

$$= \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^4} ((1 - a_n)(1 - \gamma) + a_n \alpha)((1 - c_n)(1 - \gamma) + c_n \alpha) d(x_n, x^*).$$

Karena $\alpha < 1 - \gamma$, didapat

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^4} (1 - \gamma)(1 - \gamma) d(x_n, x^*) = \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} d(x_n, x^*), \quad (4.11)$$

sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n+1}, x^*)}{d(x_n, x^*)} \leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} < +\infty$$

Hal ini berarti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai laju konvergensi linear dengan galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)^2}$.

Teorema 4.3.2. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang lengkap dan $W \subseteq X$ dengan $W \neq \emptyset$, tertutup, konveks, dan kompak. Jika $T : W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dengan $\alpha + \gamma < 1$, $Fix(T) \neq \emptyset$, serta $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Thakur (4.8) dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai laju konvergensi linear dengan galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)^2}$.

Bukti 4.3.2. Berdasarkan Lema 2.3.3 dan Lema 4.1.1, diperoleh bahwa untuk setiap $x^* \in Fix(T)$ berlaku

$$\begin{aligned}
d(q_n, x^*) &= d((1 - c_n)x_n \oplus c_n Tx_n, Tx^*) \\
&\leq (1 - c_n)d(x_n, x^*) + c_n d(Tx_n, x^*) \\
&\leq (1 - c_n)d(x_n, x^*) + \frac{\alpha c_n}{1 - \gamma} d(x_n, x^*) \\
&= \frac{(1 - \gamma)(1 - c_n) + \alpha c_n}{(1 - \gamma)} d(x_n, x^*), \\
d(y_n, x^*) &= d(T((1 - a_n)x_n \oplus a_n q_n), x^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} d((1 - a_n)x_n \oplus a_n q_n, x^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{1 - \gamma} [(1 - a_n)d(x_n, x^*) + a_n d(q_n, x^*)], \\
d(x_{n+1}, x^*) &= d(Ty_n, Tx^*) \\
&\leq \frac{\alpha}{(1 - \gamma)} d(y_n, x^*) \\
&\leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} [(1 - a_n)d(x_n, x^*) + a_n d(q_n, x^*)] \\
&\leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} \left[(1 - a_n)d(x_n, x^*) + a_n \frac{(1 - \gamma)(1 - c_n) + \alpha c_n}{(1 - \gamma)} d(x_n, x^*) \right]
\end{aligned}$$

Karena $\alpha < 1 - \gamma$, didapat

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} d(x_n, x^*), \quad (4.12)$$

sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_{n+1}, x^*)}{d(x_n, x^*)} \leq \frac{\alpha^2}{(1 - \gamma)^2} < +\infty$$

Hal ini berarti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai laju konvergensi linear dengan galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^2}{(1-\gamma)^2}$.

4.4 Aplikasi pada Masalah Optimasi

Dalam bagian ini disajikan bahwa skema iterasi Sabri dapat digunakan pada masalah optimasi, khususnya untuk masalah minimalisasi dan rekonstruksi citra.

4.4.1 Masalah Minimalisasi

Diberikan suatu himpunan tak kosong X dan $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ adalah suatu pemetaan. Masalah pencarian titik yang meminimumkan fungsi f dapat diformulasikan sebagai mencari nilai

$$x \in X \quad \text{sehingga} \quad f(x) \leq f(y), \quad \text{untuk setiap } y \in X. \quad (4.13)$$

Permasalahan ini merupakan permasalahan penting dalam bidang optimasi dan analisis tak linier. Selanjutnya, diperkenalkan operator resolvent dari suatu fungsi.

Definisi 4.4.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah suatu fungsi. Untuk $\lambda > 0$, operator resolvent λ dari f didefinisikan sebagai

$$J_{\lambda}^f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda} (d(x, y))^2 \right]. \quad (4.14)$$

Contoh 4.4.1. Diberikan $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ adalah ruang Banach yang juga merupakan $CAT_p(0)$. Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$ untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Untuk $\lambda > 0$ dan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, operator resolvent J_{λ}^f dari f adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} J_{\lambda}^f(x) &= \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^2} \left[|y_1| + |y_2| + \frac{1}{2\lambda} (\|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_2)^2 \right] \\ &= \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^2} \left[|y_1| + |y_2| + \frac{1}{2\lambda} ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) \right]. \end{aligned}$$

Untuk fungsi yang memenuhi kondisi konveks dan *proper lower semi-continuous*, himpunan solusi dari masalah (4.13) sama dengan himpunan titik tetap dari operator resolvent J_{λ}^f (lihat proposisi 6.5 pada (Ariza-Ruiz dkk., 2014)). Berikut ini diberikan definisi dari fungsi yang memenuhi kondisi tersebut dengan contoh yang diberikan pada Contoh 4.4.2.

Definisi 4.4.2. (Khamsi dan Shukri, 2017) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ disebut konveks secara geodesik jika untuk setiap $t \in (0, 1)$ dan $x, y \in X$, berlaku

$$f(tx \oplus (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Definisi 4.4.3. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ disebut proper jika himpunan $D(f) := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$.

Definisi 4.4.4. (Salisu dkk., 2022) Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$. Suatu fungsi $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ disebut lower semi-continuous pada suatu titik $x \in D(f)$ jika $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang konvergen di $D(f)$ dengan limit $x \in X$. Jika f lower semi-continuous pada setiap titik di $D(f)$, maka f disebut lower semi-continuous pada X .

Berdasarkan hal tersebut, didapatkan Teorema berikut.

Teorema 4.4.1. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah fungsi yang memenuhi kondisi konveks dan proper lower semi-continuous. Untuk $x \in X$, barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_n &= J_{\lambda}^f((1 - c_n)x_n \oplus c_n J_{\lambda}^f(x_n)) \\ y_n &= J_{\lambda}^f(J_{\lambda}^f(q_n)) \\ x_{n+1} &= J_{\lambda}^f((1 - a_n)J_{\lambda}^f(q_n) \oplus a_n J_{\lambda}^f(y_n)), \end{cases} \quad (4.15)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [a, b] \subset (0, 1)$ konvergen- Δ ke solusi dari permasalahan (4.13). Jika X kompak, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen kuat.

Bukti 4.4.1. Dengan menggunakan Lema 4 di (Jost, 1995), diketahui bahwa J_{λ}^f merupakan pemetaan nonekspansif, sehingga merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif juga. Akibatnya, dengan Teorema 4.2.2 diperoleh bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen- Δ ke titik tetap dari J_{λ}^f . Jika X kompak, Teorema 4.2.3, menjamin bahwa konvergensiya kuat. Karena titik tetap dari J_{λ}^f sama dengan solusi dari permasalahan (4.13), artinya Teorema 4.4.1 terbukti.

Sebagai gambaran, dilakukan simulasi untuk contoh berikut ini.

Contoh 4.4.2. Diberikan (X, d, G) adalah ruang $CAT_p(0)$ sebagaimana Contoh 2.3.6 dan $W = \{(x_1, x_2, 0, 0, \dots) \mid x_1, x_2 \in X\}$. Suatu fungsi $f : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 20|x_2 - x_1^3|^3 + |26 - x_1|^3, \quad \text{untuk } x = (x_1, x_2, 0, 0, \dots) \in W, \quad (4.16)$$

merupakan fungsi tak konveks pada definisi klasiknya, tetapi konveks secara geodesik dengan geodesik sebagaimana pada Contoh 2.3.6. Lebih lanjut, f merupakan fungsi yang proper lower semicontinuous dan mencapai nilai minimum saat $x_1 = 26$ dan $x_2 = 26^3$.

Penjelasan dari Contoh 4.4.2 diberikan sebagai berikut.

1. Pertama, ditunjukkan bahwa f tak konveks dalam definisi klasiknya, yaitu f memenuhi ketaksamaan

$$f((1-t)w + tz) \leq (1-t)f(w) + tf(z),$$

untuk setiap $t \in (0, 1)$ dan $w, z \in W$. Untuk menunjukkan bahwa f tidak konveks dalam definisi klasik, digunakan matriks Hessian, yaitu

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}.$$

Ingat kembali bahwa suatu fungsi $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ adalah konveks jika dan hanya jika matriks Hessian H adalah matriks semidefinit positif untuk setiap $x \in W$ (lihat (Boyd dan Vandenberghe, 2004)). Dapat dihitung bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= -180(x_2 x_1^2 - x_1^5)|x_2 - x_1^3| - 3(26 - x_1)|26 - x_1|. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= -180 \left((2x_1 x_2 - 5x_1^4)|x_2 - x_1^3| - \frac{3x_1^4(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|} \right) + \frac{6(26 - x_1)^2}{|26 - x_1|}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{-360x_1^2(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|}. \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 60(x_2 - x_1^3)|x_2 - x_1|^3. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{-360x_1^2(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 60 \left(|x_2 - x_1^3| + \frac{(x_2 - x_1^3)^2}{|x_2 - x_1^3|} \right).$$

Jika diambil $x_1 = 1$ dan $x_2 = 5$, diperoleh

$$H = \begin{bmatrix} -1290 & -1440 \\ -1440 & 480 \end{bmatrix}.$$

Diperhatikan bahwa H mempunyai persamaan karakteristik $p(\lambda) = \lambda^2 + 810\lambda - 2692800$ dengan akar-akar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-810 \pm \sqrt{810^2 - 4(2692800)}}{2},$$

yang jelas mempunyai akar negatif. Jadi ada $x \in W$ sehingga matriks Hessian H mempunyai nilai eigen negatif, yang berarti H bukan matriks semidefinit positif. Akibatnya f bukanlah fungsi konveks dalam definisi klasik.

2. Kedua, ditunjukkan bahwa f memenuhi Definisi 4.4.2, yaitu fungsi konveks secara geodesik. Sebelum itu, diperhatikan bahwa fungsi $p(x) = |x|^3$ adalah fungsi konveks, karena $p''(x) = \frac{6x^2}{|x|} \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dengan fakta tersebut, didapatkan bahwa untuk setiap $t \in (0, 1)$ dan $w, z \in X$ berlaku

$$\begin{aligned} f((1-t)w \oplus tz) &= f((1-t)w_1 + tz_1, ((1-t)w_1 + tz_1)^3 \\ &\quad - (1-t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2)) \\ &= 20 \left| (1-t)(w_2 - w_1^3) + t(z_2 - z_1^3) \right|^3 \\ &\quad + |26 - ((1-t)w_1 + tz_1)|^3 \\ &\leq 20 \left((1-t)|w_2 - w_1^3|^3 + t|z_2 - z_1^3|^3 \right) \\ &\quad + |(1-t)(26 - w_1) + t(26 - z_1)|^3 \\ &\leq (1-t) \left(20|w_2 - w_1^3|^3 + |26 - w_1|^3 \right) \\ &\quad + t \left(20|z_2 - z_1^3|^3 + |26 - z_1|^3 \right) \\ &= (1-t)f(w) + tf(z). \end{aligned}$$

Jadi f adalah fungsi konveks secara geodesik.

Selanjutnya, diperhatikan bahwa $(0, 0, 0, \dots) \in D(f)$ sehingga $D(f) = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$, yang berarti f adalah fungsi *proper*.

Diperhatikan pula bahwa f adalah fungsi kontinu, yang berarti juga memenuhi kondisi *lower semicontinuous*. Dalam hal ini kondisi pada Teorema 4.2.3 terpenuhi. Diperhatikan bahwa nilai minimum dari fungsi f pada Contoh 4.4.2 adalah 0, yang dicapai saat $x_2 - x_1^3 = 0$ dan $26 - x_1 = 0$, atau pada titik $x^* = (26, 17576, 0, 0, \dots)$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 4.4.1, barisan yang dihasilkan dari skema iterasi Sabri dan JK konvergen ke titik x^* .

Untuk ilustrasi, dilakukan simulasi numerik untuk Contoh 4.4.2 dengan perangkat lunak Google Colab yang menggunakan bahasa pemrograman python. Kode dari program ini dapat dilihat pada Lampiran A.2. Pada simulasi ini digunakan parameter $\lambda = 20$, $a_n = 0.74$, dan $c_n = 0.93$, serta nilai awal $x_0 = (10, 15, 0, 0, \dots)$. Simulasi dilakukan sebanyak 72 iterasi yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.11 dan Tabel 4.12. Galat dari simulasi ini juga digambarkan sebagai grafik dengan koordinat-y berskala log yang disajikan pada Gambar 4.3.

Tabel 4.11: Hasil simulasi sebanyak 72 iterasi untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK

n	Sabri	JK
0	(10.00000, 15.00000, 0, 0, ...)	(10.00000, 15.00000, 0, 0, ...)
1	(25.77581, 17125.21877, 0, 0, ...)	(23.07560, 12287.24784, 0, 0, ...)
2	(25.99383, 17563.49526, 0, 0, ...)	(25.97620, 17527.77515, 0, 0, ...)
3	(25.99765, 17571.24240, 0, 0, ...)	(25.99458, 17565.01472, 0, 0, ...)
4	(25.99860, 17573.17051, 0, 0, ...)	(25.99726, 17570.44169, 0, 0, ...)
5	(25.99902, 17574.00765, 0, 0, ...)	(25.99821, 17572.37307, 0, 0, ...)
6	(25.99925, 17574.46912, 0, 0, ...)	(25.99868, 17573.33297, 0, 0, ...)
7	(25.99939, 17574.75968, 0, 0, ...)	(25.99896, 17573.90002, 0, 0, ...)
8	(25.99949, 17574.95880, 0, 0, ...)	(25.99915, 17574.27215, 0, 0, ...)
9	(25.99956, 17575.10350, 0, 0, ...)	(25.99928, 17574.53424, 0, 0, ...)
10	(25.99961, 17575.21329, 0, 0, ...)	(25.99937, 17574.72839, 0, 0, ...)
11	(25.99965, 17575.29936, 0, 0, ...)	(25.99945, 17574.87778, 0, 0, ...)
12	(25.99969, 17575.36861, 0, 0, ...)	(25.99951, 17574.99618, 0, 0, ...)
13	(25.99972, 17575.42551, 0, 0, ...)	(25.99955, 17575.09225, 0, 0, ...)
14	(25.99974, 17575.47307, 0, 0, ...)	(25.99959, 17575.17173, 0, 0, ...)
15	(25.99976, 17575.51342, 0, 0, ...)	(25.99962, 17575.23855, 0, 0, ...)
16	(25.99978, 17575.54807, 0, 0, ...)	(25.99965, 17575.29549, 0, 0, ...)

Tabel 4.11 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
17	(25.99979, 17575.57814, 0, 0, ...)	(25.99968, 17575.34458, 0, 0, ...)
18	(25.99980, 17575.60448, 0, 0, ...)	(25.99970, 17575.38733, 0, 0, ...)
19	(25.99982, 17575.62774, 0, 0, ...)	(25.99972, 17575.42489, 0, 0, ...)
20	(25.99983, 17575.64844, 0, 0, ...)	(25.99973, 17575.45814, 0, 0, ...)
21	(25.99984, 17575.66696, 0, 0, ...)	(25.99975, 17575.48779, 0, 0, ...)
22	(25.99984, 17575.68364, 0, 0, ...)	(25.99976, 17575.51438, 0, 0, ...)
23	(25.99985, 17575.69874, 0, 0, ...)	(25.99977, 17575.53837, 0, 0, ...)
24	(25.99986, 17575.71246, 0, 0, ...)	(25.99978, 17575.56011, 0, 0, ...)
25	(25.99986, 17575.72500, 0, 0, ...)	(25.99979, 17575.57990, 0, 0, ...)
26	(25.99987, 17575.73649, 0, 0, ...)	(25.99980, 17575.59801, 0, 0, ...)
27	(25.99988, 17575.74707, 0, 0, ...)	(25.99981, 17575.61462, 0, 0, ...)
28	(25.99988, 17575.75683, 0, 0, ...)	(25.99982, 17575.62992, 0, 0, ...)
29	(25.99988, 17575.76587, 0, 0, ...)	(25.99982, 17575.64407, 0, 0, ...)
30	(25.99989, 17575.77426, 0, 0, ...)	(25.99983, 17575.65717, 0, 0, ...)
31	(25.99989, 17575.78208, 0, 0, ...)	(25.99984, 17575.66935, 0, 0, ...)
32	(25.99990, 17575.78937, 0, 0, ...)	(25.99984, 17575.68070, 0, 0, ...)
33	(25.99990, 17575.79620, 0, 0, ...)	(25.99985, 17575.69130, 0, 0, ...)
34	(25.99990, 17575.80259, 0, 0, ...)	(25.99985, 17575.70122, 0, 0, ...)
35	(25.99991, 17575.80860, 0, 0, ...)	(25.99986, 17575.71052, 0, 0, ...)
36	(25.99991, 17575.81425, 0, 0, ...)	(25.99986, 17575.71927, 0, 0, ...)
37	(25.99991, 17575.81958, 0, 0, ...)	(25.99987, 17575.72750, 0, 0, ...)
38	(25.99991, 17575.82462, 0, 0, ...)	(25.99987, 17575.73527, 0, 0, ...)
39	(25.99992, 17575.82938, 0, 0, ...)	(25.99987, 17575.74261, 0, 0, ...)
40	(25.99992, 17575.83389, 0, 0, ...)	(25.99988, 17575.74955, 0, 0, ...)
41	(25.99992, 17575.83817, 0, 0, ...)	(25.99988, 17575.75613, 0, 0, ...)
42	(25.99992, 17575.84223, 0, 0, ...)	(25.99988, 17575.76237, 0, 0, ...)
43	(25.99992, 17575.84610, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.76831, 0, 0, ...)
44	(25.99993, 17575.84978, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.77395, 0, 0, ...)
45	(25.99993, 17575.85329, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.77933, 0, 0, ...)
46	(25.99993, 17575.85664, 0, 0, ...)	(25.99989, 17575.78446, 0, 0, ...)
47	(25.99993, 17575.85984, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.78936, 0, 0, ...)
48	(25.99993, 17575.86290, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.79404, 0, 0, ...)
49	(25.99993, 17575.86583, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.79852, 0, 0, ...)
50	(25.99994, 17575.86864, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.80280, 0, 0, ...)

Tabel 4.11 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
51	(25.99994, 17575.87133, 0, 0, ...)	(25.99990, 17575.80691, 0, 0, ...)
52	(25.99994, 17575.87392, 0, 0, ...)	(25.99991, 17575.81085, 0, 0, ...)
53	(25.99994, 17575.87640, 0, 0, ...)	(25.99991, 17575.81464, 0, 0, ...)
54	(25.99994, 17575.87879, 0, 0, ...)	(25.99991, 17575.81827, 0, 0, ...)
55	(25.99994, 17575.88109, 0, 0, ...)	(25.99991, 17575.82177, 0, 0, ...)
56	(25.99994, 17575.88330, 0, 0, ...)	(25.99991, 17575.82514, 0, 0, ...)
57	(25.99994, 17575.88543, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.82838, 0, 0, ...)
58	(25.99994, 17575.88749, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.83150, 0, 0, ...)
59	(25.99995, 17575.88947, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.83451, 0, 0, ...)
60	(25.99995, 17575.89138, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.83742, 0, 0, ...)
61	(25.99995, 17575.89323, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.84022, 0, 0, ...)
62	(25.99995, 17575.89502, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.84294, 0, 0, ...)
63	(25.99995, 17575.89675, 0, 0, ...)	(25.99992, 17575.84556, 0, 0, ...)
64	(25.99995, 17575.89842, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.84809, 0, 0, ...)
65	(25.99995, 17575.90004, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.85055, 0, 0, ...)
66	(25.99995, 17575.90161, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.85292, 0, 0, ...)
67	(25.99995, 17575.90313, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.85522, 0, 0, ...)
68	(25.99995, 17575.90461, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.85745, 0, 0, ...)
69	(25.99995, 17575.90604, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.85962, 0, 0, ...)
70	(25.99995, 17575.90742, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.86172, 0, 0, ...)
71	(25.99996, 17575.90877, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.86375, 0, 0, ...)
72	(25.99996, 17575.91008, 0, 0, ...)	(25.99993, 17575.86573, 0, 0, ...)

Tabel 4.12: Galat simulasi $d(x_n, x_{n+1})$ untuk Contoh 4.4.2 dengan skema iterasi Sabri dan JK

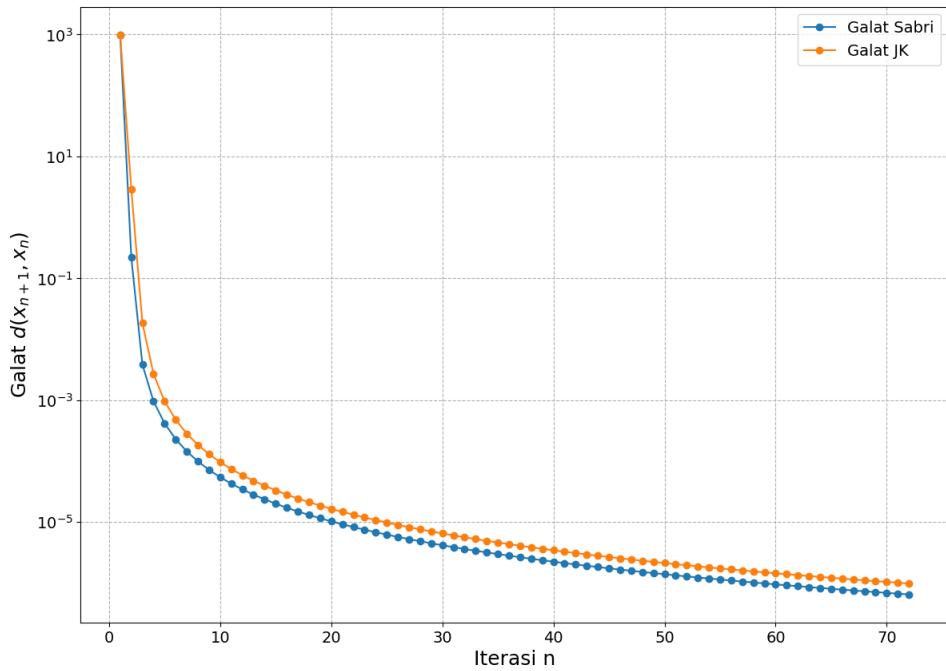
n	Galat Sabri	Galat JK
1	9.8×10^2	9.8×10^2
2	2.1×10^{-1}	2.9×10^0
3	3.8×10^{-3}	1.8×10^{-2}
4	9.5×10^{-4}	2.6×10^{-3}
5	4.1×10^{-4}	9.5×10^{-4}
6	2.2×10^{-4}	4.7×10^{-4}
7	1.4×10^{-4}	2.7×10^{-4}

Tabel 4.12 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
8	9.8×10^{-5}	1.8×10^{-4}
9	7.1×10^{-5}	1.2×10^{-4}
10	5.4×10^{-5}	9.5×10^{-5}
11	4.2×10^{-5}	7.3×10^{-5}
12	3.4×10^{-5}	5.8×10^{-5}
13	2.8×10^{-5}	4.7×10^{-5}
14	2.3×10^{-5}	3.9×10^{-5}
15	1.9×10^{-5}	3.2×10^{-5}
16	1.7×10^{-5}	2.8×10^{-5}
17	1.4×10^{-5}	2.4×10^{-5}
18	1.2×10^{-5}	2.1×10^{-5}
19	1.1×10^{-5}	1.8×10^{-5}
20	1.0×10^{-5}	1.6×10^{-5}
21	9.1×10^{-6}	1.4×10^{-5}
22	8.2×10^{-6}	1.3×10^{-5}
23	7.4×10^{-6}	1.1×10^{-5}
24	6.7×10^{-6}	1.0×10^{-5}
25	6.1×10^{-6}	9.7×10^{-6}
26	5.6×10^{-6}	8.9×10^{-6}
27	5.2×10^{-6}	8.1×10^{-6}
28	4.8×10^{-6}	7.5×10^{-6}
29	4.4×10^{-6}	6.9×10^{-6}
30	4.1×10^{-6}	6.4×10^{-6}
31	3.8×10^{-6}	6.0×10^{-6}
32	3.5×10^{-6}	5.5×10^{-6}
33	3.3×10^{-6}	5.2×10^{-6}
34	3.1×10^{-6}	4.8×10^{-6}
35	2.9×10^{-6}	4.5×10^{-6}
36	2.7×10^{-6}	4.3×10^{-6}
37	2.6×10^{-6}	4.0×10^{-6}
38	2.4×10^{-6}	3.8×10^{-6}
39	2.3×10^{-6}	3.6×10^{-6}
40	2.2×10^{-6}	3.4×10^{-6}
41	2.1×10^{-6}	3.2×10^{-6}

Tabel 4.12 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

n	Sabri	JK
42	2.0×10^{-6}	3.0×10^{-6}
43	1.9×10^{-6}	2.9×10^{-6}
44	1.8×10^{-6}	2.7×10^{-6}
45	1.7×10^{-6}	2.6×10^{-6}
46	1.6×10^{-6}	2.5×10^{-6}
47	1.5×10^{-6}	2.4×10^{-6}
48	1.5×10^{-6}	2.3×10^{-6}
49	1.4×10^{-6}	2.2×10^{-6}
50	1.3×10^{-6}	2.1×10^{-6}
51	1.3×10^{-6}	2.0×10^{-6}
52	1.2×10^{-6}	1.9×10^{-6}
53	1.2×10^{-6}	1.8×10^{-6}
54	1.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}
55	1.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}
56	1.0×10^{-6}	1.6×10^{-6}
57	1.0×10^{-6}	1.5×10^{-6}
58	1.0×10^{-6}	1.5×10^{-6}
59	9.7×10^{-7}	1.4×10^{-6}
60	9.4×10^{-7}	1.4×10^{-6}
61	9.1×10^{-7}	1.3×10^{-6}
62	8.8×10^{-7}	1.3×10^{-6}
63	8.5×10^{-7}	1.2×10^{-6}
64	8.2×10^{-7}	1.2×10^{-6}
65	7.9×10^{-7}	1.2×10^{-6}
66	7.7×10^{-7}	1.1×10^{-6}
67	7.4×10^{-7}	1.1×10^{-6}
68	7.2×10^{-7}	1.0×10^{-6}
69	7.0×10^{-7}	1.0×10^{-6}
70	6.8×10^{-7}	1.0×10^{-6}
71	6.6×10^{-7}	1.0×10^{-6}
72	6.4×10^{-7}	9.7×10^{-7}



Gambar 4.3: Galat $d(x_n, x_{n+1})$ (skala log) vs iterasi

4.4.2 Rekonstruksi Citra

Dalam rekonstruksi citra, skema iterasi dapat dipandang sebagai alat untuk menyelesaikan permasalahan *split feasibility*. Permasalahan *split feasibility* ini dikenalkan oleh Censor dan Elfving pada tahun 1994, yang diformulasikan sebagai

$$\text{Cari titik } x^* \in C \text{ yang memenuhi } Ax^* \in Q, \quad (4.17)$$

dengan C dan Q berturut-turut adalah himpunan bagian tertutup dan konveks dari ruang Hilbert H_1 dan H_2 , serta $A : H_1 \rightarrow H_2$ adalah transformasi linier terbatas (Censor dan Elfving, 1994). Permasalahan (4.17) disebut konsisten jika setidaknya mempunyai satu solusi. Suatu titik $x^* \in C$ merupakan solusi dari permasalahan tersebut jika dan hanya jika x^* memenuhi persamaan titik tetap

$$x = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x, \quad (4.18)$$

dengan P_C dan P_Q adalah proyeksi titik terdekat pada C dan Q , secara berturut-turut, $\gamma > 0$, dan A^* adalah transformasi adjoint dari A (Feng, Shi dan Chen, 2019). Dalam hal ini parameter γ dipilih sehingga $0 < \gamma < \frac{2}{k}$

dengan k adalah radius spektral dari A^*A , yaitu nilai maksimum dari mutlak nilai eigen dari A^*A . Kemudian, berdasarkan Contoh 2.3.3, diketahui bahwa ruang Hilbert merupakan ruang $CAT(0)$ yang juga merupakan ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 2$. Selanjutnya, berdasarkan hasil dari Byrne (Byrne, 2003), pemetaan $T : C \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagai $T(x) = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x$ adalah pemetaan nonekspansif. Oleh karena itu, pemetaan ini juga merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.

Dari permasalahan tersebut, skema iterasi Sabri dapat digunakan sebagaimana Teorema berikut.

Teorema 4.4.2. *Diberikan ruang Hilbert H yang kompak dan C adalah himpunan bagian yang tertutup dan konveks dari H . Jika permasalahan (4.17) konsisten dengan solusi yang tunggal dan $\gamma \in (0, \frac{2}{k})$ dengan k adalah radius spektral dari A^*A , maka pemetaan $T : C \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagai*

$$T(x) = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x$$

merupakan pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif, serta barisan $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_n &= T((1 - c_n)x_n \oplus c_n T(x_n)) \\ y_n &= T(T(q_n)) \\ x_{n+1} &= T((1 - a_n)T(q_n) \oplus a_n T(y_n)) \end{cases}, \quad (4.19)$$

dengan $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{c_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [a, b] \subset (0, 1)$ konvergen kuat ke solusi tunggal $x^ \in C$ dari permasalahan (4.17) untuk setiap nilai awal $x_0 \in C$.*

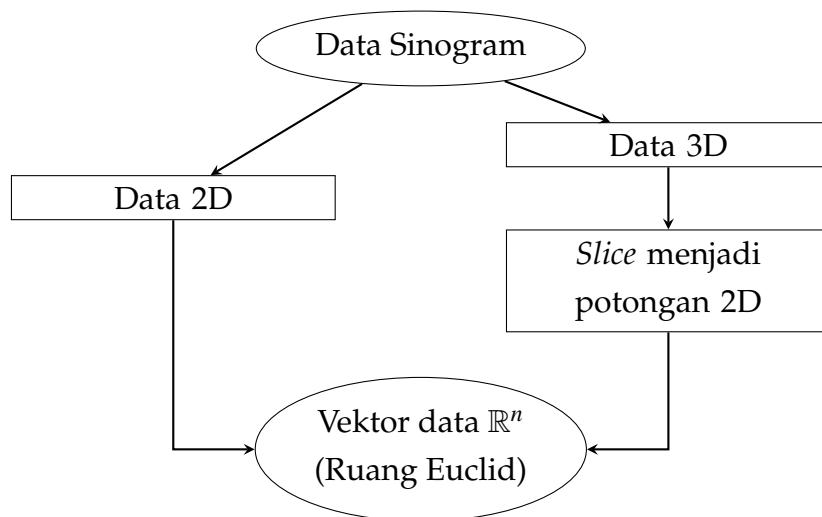
Bukti 4.4.2. Berdasarkan hasil dari Byrne (lihat (Byrne, 2003)), diperoleh bahwa pemetaan T yang memenuhi kondisi tersebut adalah pemetaan nonekspansif sehingga juga merupakan (α, β, γ) -nonekspansif. Kemudian, berdasarkan Contoh 2.3.5, didapatkan bahwa H adalah ruang $CAT(0)$ yang juga merupakan ruang $CAT_p(0)$ dengan $p = 2$. Akibatnya, dengan Teorema 4.2.3, diperoleh bahwa $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergen kuat ke titik tetap dari T , yang berarti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergen kuat ke solusi tunggal dari $x^* \in C$.

Hasil ini dapat diterapkan pada permasalahan rekonstruksi citra tomografi. Permasalahan tersebut mempunyai peranan penting dalam dunia medis, khususnya dalam rekonstruksi citra dari CT-Scan, yang

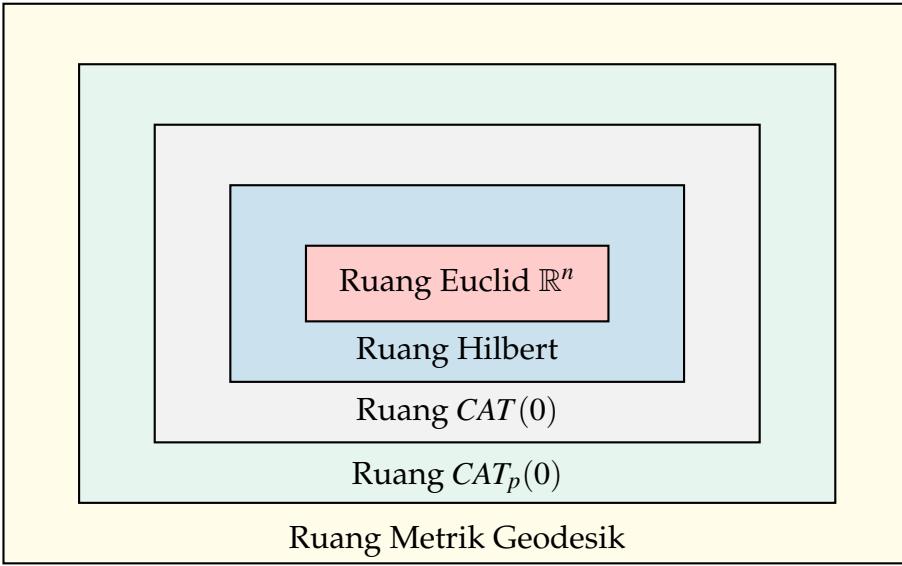
datanya berupa proyeksi yang dikenal sebagai sinogram. Pada umumnya, rekonstruksi citra organ tubuh dari data sinogram dilakukan menggunakan proyeksi mundur berfilter (*filtered back projection*). Dari segi waktu komputasi, metode ini relatif cepat dalam menghasilkan citra. Namun, metode tersebut mempunyai keterbatasan dalam kualitas citra yang dihasilkan, akibat tingginya tingkat derau. Untuk mereduksi derau pada citra hasil rekonstruksi, metode ini memerlukan dosis radiasi yang lebih tinggi pada pasien, yang berpotensi menimbulkan dampak negatif pada kesehatan pasien. Sebagai alternatif, rekonstruksi citra dapat dilakukan menggunakan proyeksi mundur tanpa filter yang dikombinasikan dengan algoritma skema iterasi. Pendekatan ini terbukti mampu mereduksi derau secara signifikan, yaitu sekitar 40% sampai 70% dibandingkan dengan metode proyeksi mundur berfilter (Ramage dkk., 2023).

Pada bagian ini, dilakukan simulasi rekonstruksi citra tomografi berbasis skema iterasi Sabri. Transformasi maju A yang digunakan adalah transformasi Radon, sedangkan himpunan batas C dan Q adalah himpunan bagian yang konveks dari suatu ruang Euclid \mathbb{R}^n , yang masing-masing merepresentasikan solusi *feasible* untuk citra dan domain proyeksi.

Berikut ini diberikan gambaran bagaimana skema iterasi Sabri dapat diterapkan dalam rekonstruksi citra tomografi di ruang $CAT_p(0)$.



Gambar 4.4: Diagram Data Sinogram ke Ruang Euclid dalam Rekonstruksi Citra



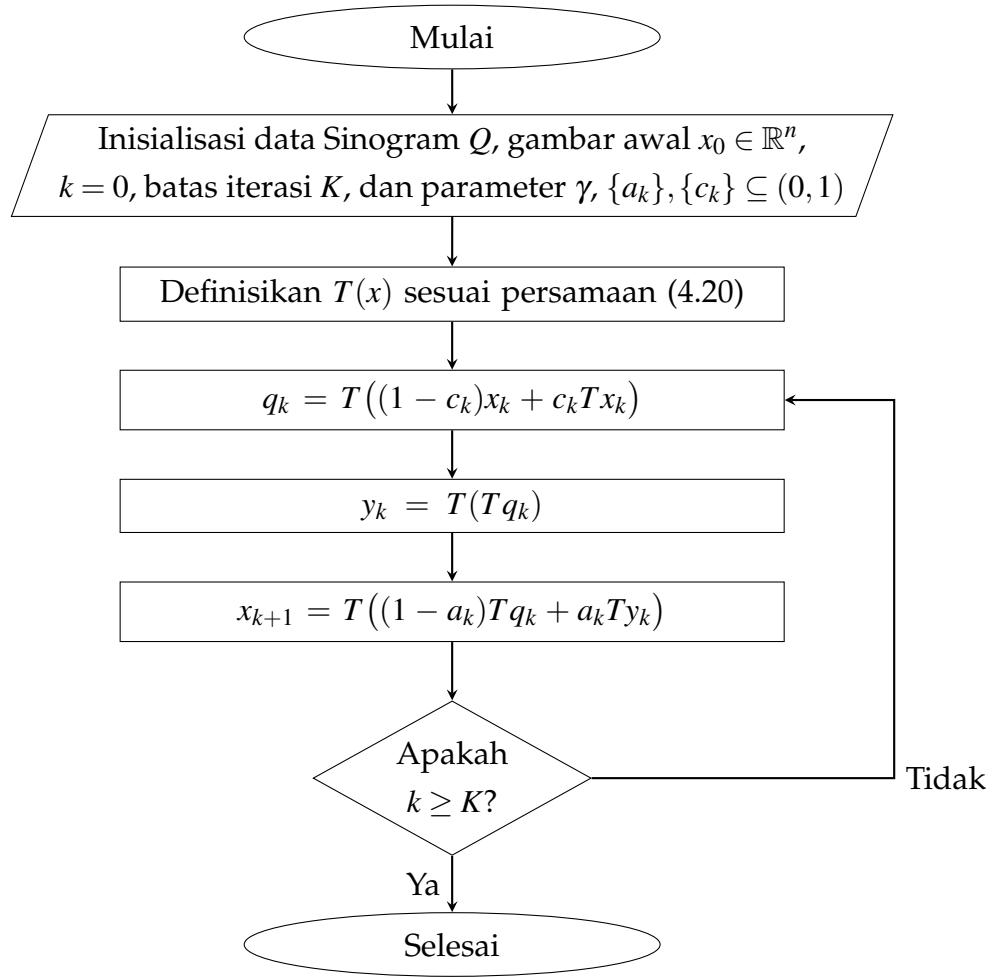
Gambar 4.5: Hubungan ruang Euclid, Hilbert, $CAT(0)$, $CAT_p(0)$, dan ruang metrik geodesik

Pada simulasi ini, digunakan bahasa pemrograman Python dengan bantuan pustaka Scikit-image. Data citra yang digunakan adalah Shepp-Logan Phantom $x^* \in \mathbb{R}^n$ dengan resolusi 512×512 . Shepp-Logan Phantom dipilih karena merupakan model sintetik yang dirancang untuk menyerupai potongan gambar bagian dalam kepala manusia, sehingga sering digunakan dalam penelitian tomografi untuk menguji kemampuan algoritma rekonstruksi dalam membedakan struktur dengan tingkat kontras yang berbeda. Selanjutnya, data sinogram dibentuk sebagai $Q = Ax^*$ dengan menerapkan transformasi Radon pada sudut-sudut proyeksi yang terdistribusi merata pada interval $[0, 180^\circ]$. Tujuan simulasi ini adalah merekonstruksi citra x^* berdasarkan data sinogram tersebut menggunakan skema iterasi Sabri. Untuk itu, digunakan pemetaan

$$T(x) = P_C(x - \gamma A^*(Ax - Q)), \quad (4.20)$$

dengan A^* merupakan aproksimasi dari transformasi adjoint A yang diperoleh menggunakan proyeksi mundur tanpa filter, serta P_C menyatakan operator proyeksi ke himpunan batas $C = [0, 1]^n$.

Pada Gambar 4.6 diberikan diagram alir dari skema iterasi Sabri yang digunakan dalam simulasi rekonstruksi citra tomografi dengan parameter-parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 4.13.



Gambar 4.6: Diagram alir skema iterasi Sabri untuk rekonstruksi citra tomografi

Tabel 4.13: Parameter simulasi rekonstruksi citra

Parameter	Nilai/Deskripsi
Ukuran gambar	512×512
Sudut proyeksi	180 terdistribusi merata pada $[0^\circ, 180^\circ]$
Transformasi maju A	Transformasi Radon
Transformasi adjoint A^*	Proyeksi mundur tanpa filter
Himpunan batas C	$[0, 1]^n$
Nilai awal x_0	$x_0 = \mathbf{0}$
Jumlah iterasi	480
Parameter γ	Konstan: 0.002447
Parameter a_n, c_n	Konstan: $a_n = 0.42, c_n = 0.31$
Implementasi	Google Colab dengan scikit-image, matplotlib

Untuk mengukur kualitas citra hasil rekonstruksi, digunakan metrik Mean Squared Error (MSE) dan Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR). MSE digunakan untuk mengukur galat antara citra asli I dan citra hasil rekonstruksi K , yang didefinisikan sebagai

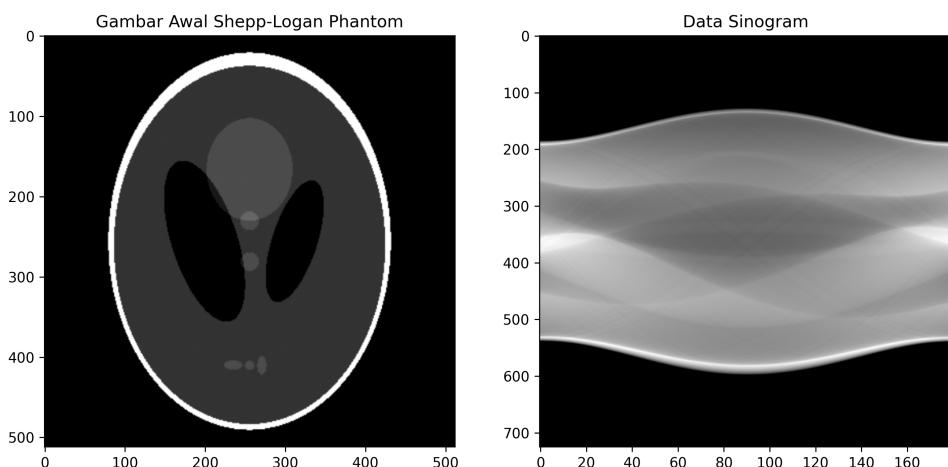
$$\text{MSE}(I, K) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (I_{ij} - K_{ij})^2,$$

dengan M dan N masing-masing menyatakan jumlah baris dan kolom citra. Selanjutnya, PSNR digunakan untuk mengukur kualitas citra hasil rekonstruksi dan didefinisikan sebagai

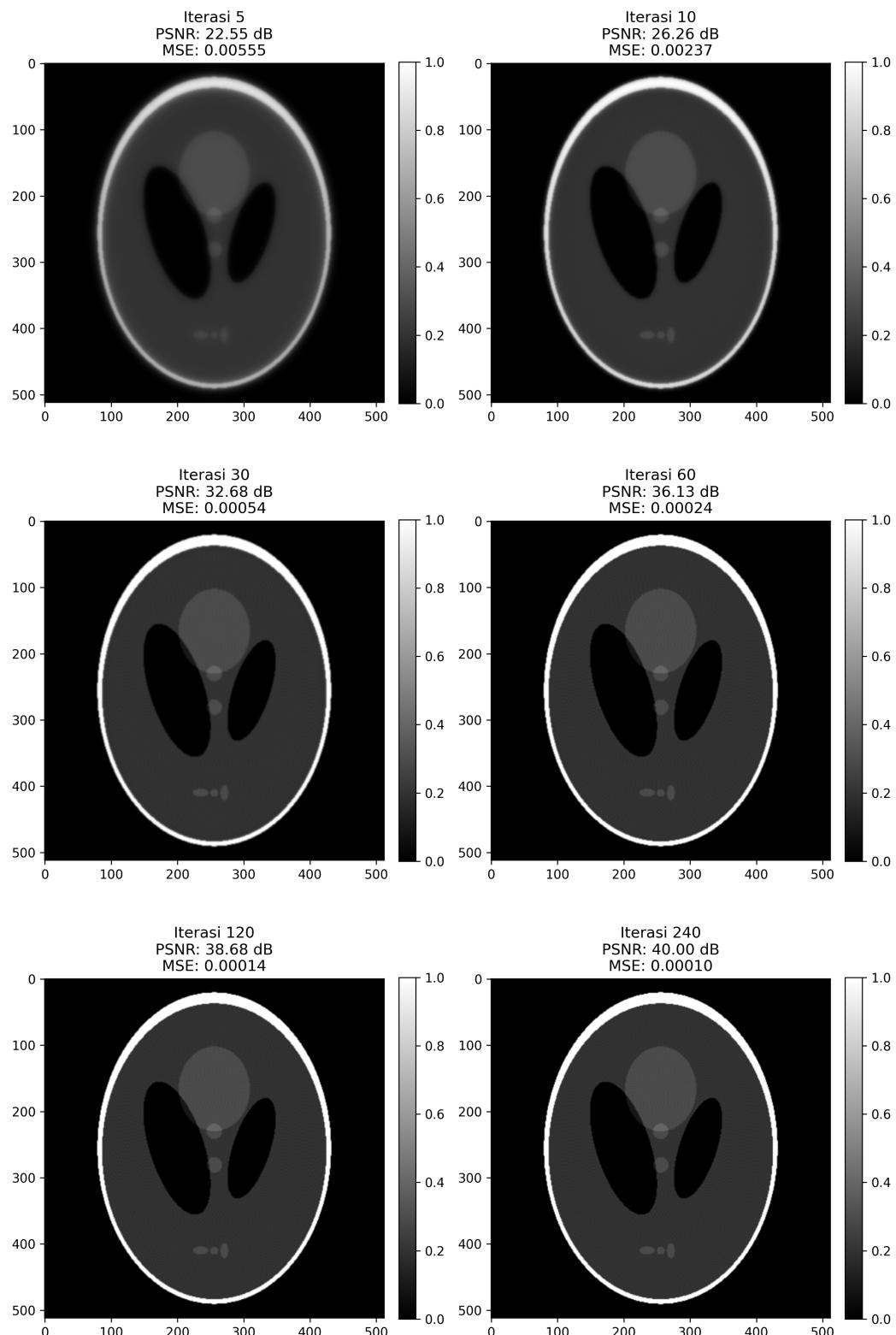
$$\text{PSNR}(I, K) = 10 \log_{10} \left(\frac{(\text{MAX}_I)^2}{\text{MSE}(I, K)} \right),$$

dengan MAX_I menyatakan nilai intensitas maksimum dari citra.

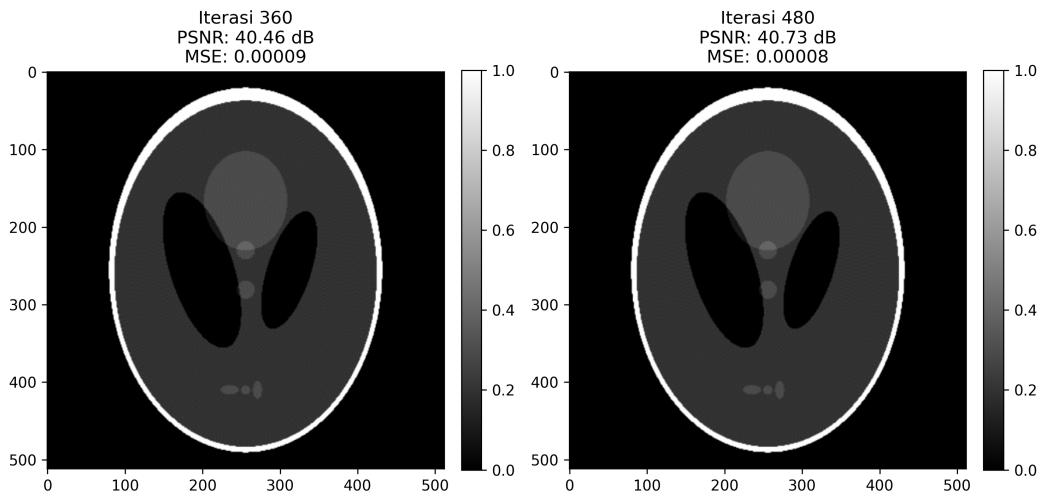
Data awal dari simulasi tersebut disajikan pada Gambar 4.7. Kemudian hasil simulasi dari rekonstruksi citra tersebut pada iterasi ke-5, 10, 30, 60, 120, 240, 360, dan 480 diberikan oleh Gambar 4.8 dan Gambar 4.9. Pada iterasi ke-5, terlihat bahwa derau dari citra tersebut masih cukup tinggi, yang juga tercermin pada nilai PSNR yang rendah, yaitu 22.55 dB. Nilai PSNR dari citra tersebut juga meningkat pada tiap iterasinya, hingga pada iterasi ke-120 sampai 480 peningkatannya sudah tidak begitu signifikan. Waktu yang diperlukan dalam simulasi rekonstruksi citra ini adalah 11024.39 detik.



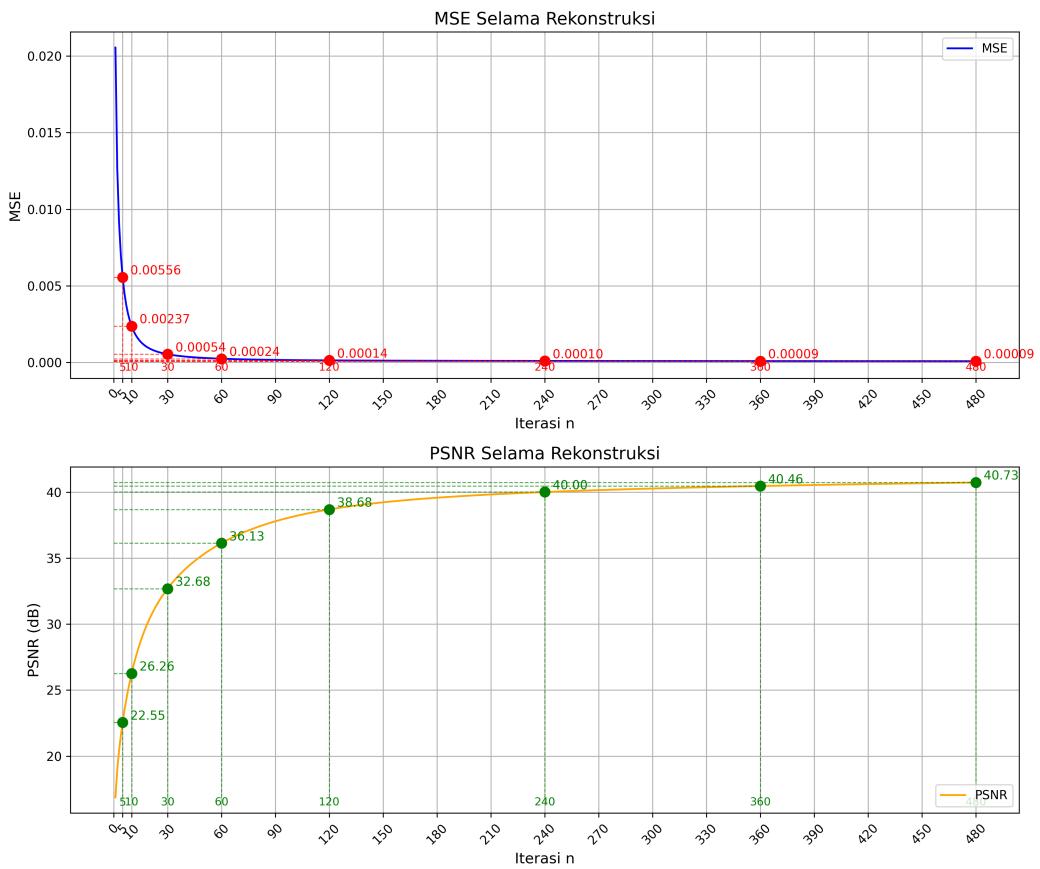
Gambar 4.7: Data awal sinogram dan citra asli



Gambar 4.8: Hasil rekonstruksi citra pada iterasi ke-5, 10, 30, 60, dan 120



Gambar 4.9: Hasil rekonstruksi citra pada iterasi ke-360 dan 480



Gambar 4.10: Metrik PSNR dan MSE dari rekonstruksi citra

Pada Gambar 4.10 dan Lampiran B, disajikan grafik dan tabel nilai dari metrik PSNR dan MSE dari citra hasil rekonstruksi pada tiap iterasinya. Terlihat bahwa nilai galat, yaitu (*mean squared error*) dari citra tersebut sudah relatif kecil pada iterasi ke-30, yaitu 54×10^{-5} , dibandingkan dengan galat pada iterasi pertama, yaitu 2×10^{-2} . Nilai tersebut terus berkurang secara perlahan hingga 8×10^{-5} pada iterasi ke-480. Terlihat pula bahwa nilai metrik PSNR dan MSE tersebut berturut-turut naik dan turun pada tiap iterasinya, sesuai dengan peningkatan kualitas citra pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.9, yang menunjukkan bahwa skema iterasi Sabri dapat digunakan dalam rekonstruksi citra tomografi.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian dari bab-bab sebelumnya, berikut diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tesis ini dan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab 4, didapatkan kesimpulan dari tesis ini sebagai berikut.

1. Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif yang awalnya didefinisikan pada ruang Banach dapat diperluas pada ruang $CAT_p(0)$. Dalam ruang ini, pemetaan tersebut juga memenuhi sifat nonekspansif kuasi dan *demiclosedness*. Jika titik tetap pemetaan tersebut ada dengan nilai $\alpha + \gamma < 1$, maka titik tetapnya tunggal. Untuk mendapatkan nilai aproksimasi titik tetap dari pemetaan ini, dapat digunakan skema iterasi Sabri yang terbukti mempunyai konvergensi- Δ dan kuat. Syarat perlu dari konvergensi- Δ dan konvergensi kuat adalah barisan yang dikonstruksi dari skema iterasi Sabri konvergen ke titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif.
2. Dengan skema iterasi Sabri, didapatkan syarat cukup dari konvergensi- Δ untuk aproksimasi titik tetap pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ adalah ruangnya lengkap, pemetaannya mempunyai titik tetap dan merupakan pemetaan diri sendiri pada himpunan bagian tak kosong yang tertutup dan konveks, serta barisan koefisien pada skema iterasinya berada pada interval $(0, 1)$. Syarat cukup dari konvergensi kuat serupa dengan konvergensi- Δ , dengan syarat tambahan bahwa pemetaan tersebut pada himpunan kompak.
3. Skema iterasi Sabri untuk aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif mempunyai laju konvergensi linear dengan nilai galat asimtotik $\lambda \leq \frac{\alpha^3}{(1-\gamma)^3}$. Sedangkan, berdasarkan hasil

simulasi numerik, skema iterasi Sabri mempunyai laju yang lebih cepat dibanding skema iterasi JK, Thakur, Abbas, dan Agarwal, dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$, yang ditunjukkan oleh banyaknya jumlah iterasi yang diperlukan untuk mencapai galat yang ditentukan.

4. Dalam masalah optimasi, skema iterasi Sabri menghasilkan barisan yang konvergen menuju solusi dari permasalahan minimalisasi fungsi yang konveks dan *proper lower semi-continuous*. Selain itu, dalam rekonstruksi citra tomografi, skema ini berhasil merekonstruksi citra Shepp-Logan Phantom dengan penurunan nilai galat dan peningkatan kualitas citra pada tiap iterasinya, dengan nilai MSE dan PSNR berturut-turut 8×10^{-5} dan 40.73 dB pada iterasi ke-480.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh dalam tesis ini, terdapat beberapa saran yang dapat dipertimbangkan untuk penelitian selanjutnya.

1. Kajian mengenai pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif pada ruang $CAT_p(0)$ masih dapat diperluas ke kelas ruang metrik tak linier lainnya.
2. Kajian syarat konvergensi kuat dari skema iterasi Sabri dapat diteliti lebih lanjut dengan menghilangkan syarat kompak pada himpunan bagian W .
3. Perbandingan kelajuan konvergensi pada penelitian ini masih terbatas secara simulasi numerik, sehingga disarankan untuk mendapatkan perbandingan lajunya secara analitik.
4. Penerapan skema iterasi Sabri pada permasalahan rekonstruksi citra tomografi dapat diuji lebih lanjut dengan menggunakan data medis nyata yang mengandung derau tinggi atau sudut proyeksi yang terbatas.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, M. dan Nazir, T. (2014), 'A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems', *Mat. Vesnik* **66**(2), 223–234.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. dan Sahu, D. (2007), 'Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings', *J. Nonlinear Convex Anal.* **8**(1), 61–79.
- Ahmad, J., Ullah, K., Arshad, M. dan Ma, Z. (2021), 'A New Iterative Method for Suzuki Mappings in Banach Spaces', *Journal of Mathematics* **2021**, 1–7.
- Aoyama, K. dan Kohsaka, F. (2011), 'Fixed point theorem for α -nonexpansive mappings in Banach spaces', *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **74**(13), 4387–4391.
- Arif, M., Aphane, M., Ullah, K., Noorwali, M., Nawaz, B. dan Ullah, H. (2025), 'Approximating Fixed Point of (α, β, γ) -Nonexpansive Mappings Using JK Iterative Scheme', *International Journal of Analysis and Applications* **23**, 34.
- Ariza-Ruiz, D., Leuştean, L. dan López-Acedo, G. (2014), 'Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces', *Transactions of the American Mathematical Society* **366**(8), 4299–4322.
- Banach, S. (1922), 'Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales', *Fundamenta Mathematicae* **3**, 133–181.
- Berinde, V., Khan, A. R. dan Păcurar, M. (2015), 'Analytic and empirical study of the rate of convergence of some iterative methods', *Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory* **44**(1), 25–37.
- Boyd, S. dan Vandenberghe, L. (2004), *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, England.

- Bridson, M. R. dan Haefliger, A. (1999), *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer Berlin Heidelberg.
- Browder, F. E. (1965), 'Nonexpansive Nonlinear Operators in A Banach Space', *Proceedings of the National Academy of Sciences* **54**(4), 1041–1044.
- Byrne, C. (2003), 'A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction', *Inverse Problems* **20**(1), 103–120.
- Calderon, K., Khamsi, M. A. dan Martinez-Moreno, J. (2021), 'Perturbed approximations of fixed points of nonexpansive mappings in $CAT_p(0)$ spaces', *Carpathian Journal of Mathematics* **37**(1), 65–79.
- Censor, Y. dan Elfving, T. (1994), 'A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space', *Numerical Algorithms* **8**(2), 221–239.
- Dehghan, H. dan Rooin, J. (2014), 'Metric projection and convergence theorems for nonexpansive mappings in Hadamard spaces'.
- Eskandani, G. Z. dan Raeisi, M. (2018), 'On the zero point problem of monotone operators in Hadamard spaces', *Numerical Algorithms* **80**(4), 1155–1179.
- Feng, M., Shi, L. dan Chen, R. (2019), 'A new three-step iterative algorithm for solving the split feasibility problem', *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics* **81**, 93–102.
- García-Falset, J., Llorens-Fuster, E. dan Suzuki, T. (2011), 'Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **375**(1), 185–195.
- Ishikawa, S. (1974), 'Fixed points by a new iteration method', *Proceedings of the American Mathematical Society* **44**(1), 147–150.
- Jost, J. (1995), 'Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of non positive curvature', *Commentarii Mathematici Helvetici* **70**(1), 659–673.
- Khamsi, M. A. dan Shukri, S. A. (2017), 'Generalized CAT(0) spaces', *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* **24**(3).

- Kirk, W. dan Shahzad, N. (2014), *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Springer International Publishing.
- Krasnosel'skii, M. A. (1955), 'Two remarks on the method of successive approximations', *Uspekhi matematicheskikh nauk* **10**(1), 123–127.
- Kumam, P. dan Chaipunya, P. (2018), 'Equilibrium Problems and Proximal Algorithms in Hadamard Spaces'.
- Mann, W. R. (1953), 'Mean value methods in iteration', *Proceedings of the American Mathematical Society* **4**(3), 506–510.
- Noor, M. A. (2000), 'New Approximation Schemes for General Variational Inequalities', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **251**(1), 217–229.
- Pant, R. dan Pandey, R. (2019), 'Existence and convergence results for a class of nonexpansive type mappings in hyperbolic spaces', *Applied General Topology* **20**(1), 281.
- Ramage, A., Lopez Gutierrez, B., Fischer, K., Sekula, M., Santaella, G. M., Scarfe, W., Brasil, D. M. dan de Oliveira-Santos, C. (2023), 'Filtered back projection vs. iterative reconstruction for CBCT: effects on image noise and processing time', *Dentomaxillofacial Radiology* **52**(8).
- Sabri, R. I., Alhaidary, Z. S. dan Sadiq, F. A. (2025), 'New Iteration Approach For Approximating Fixed Points', *Nonlinear Functional Analysis and Applications* 237–250.
- Salisu, S., Minjibir, M. S., Kumam, P. dan Sriwongsa, S. (2022), 'Convergence theorems for fixed points in $CAT_p(0)$ spaces', *Journal of Applied Mathematics and Computing* **69**(1), 631–650.
- Suzuki, T. (2008), 'Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings', *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **340**(2), 1088–1095.
- Thakur, B. S., Thakur, D. dan Postolache, M. (2016), 'A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mappings', *Applied Mathematics and Computation* **275**, 147–155.

Ullah, K., Ahmad, J., Hammad, H. A. dan George, R. (2023), 'Iterative schemes for numerical reckoning of fixed points of new nonexpansive mappings with an application', *AIMS Mathematics* **8**(5), 10711–10727.

LAMPIRAN A

Kode Progam Simulasi dalam Bahasa Pemrograman Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import random
5
6 #metrik
7 def metrik(x,y):
8     x1,x2 = x[0], x[1]
9     y1,y2 = y[0], y[1]
10
11    suku1 = np.abs(x1-y1)**3
12    suku2 = np.abs(x1**3-x2-y1**3+y2)**3
13    return (suku1+suku2)**(1/3)
14
15 #jalur geodesik
16 def geodesik(t,w,z):
17     w1,w2 = w[0],w[1]
18     z1,z2 = z[0],z[1]
19     sk1 = (1-t)*w1+t*z1
20     sk2 = (1-t)*(w1**3-w2)+t*(z1**3-z2)
21     if (t>=0 and t<=1):
22         return [sk1,sk1**3-sk2]
23     else:
24         raise ValueError("di luar domain")
25
26 #Pemetaan (alpha, beta, gamma)-nonekspansif
27 def pemetaan(w):
28     w1 = w[0]
29
30     if 1 <= w1 < 3:
31         return [
32             (w1+3)/4,
```

```

33         (w1+3) **3 / 64
34     ]
35
36 elif 3 <= w1 <= 5:
37     return [
38         (w1+2)/4,
39         (w1+2)**3 / 64
40     ]
41
42 else:
43     raise ValueError("di luar domain")
44
45 #skema iterasi Sabri
46 def iterSabri(x0, tol, max_iter):
47     data_x = [x0]
48     data_error = []
49     for n in range(max_iter):
50         x_n = data_x[-1].copy()
51         a_n = a(n)
52         b_n = b(n)
53         c_n = c(n)
54         q_n = pemetaan(geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n)))
55         y_n = pemetaan(pemetaan(q_n))
56         x_next = pemetaan(geodesik(a_n, pemetaan(q_n), pemetaan(
57             y_n)))
58         data_x.append(x_next)
59         error = metrik(x_n, x_next)
60         data_error.append(error)
61         if error < tol:
62             break
63     return data_x, data_error
64
65 #skema iterasi JK
66 def iterJK(x0, tol, max_iter):
67     data_x = [x0]
68     data_error = []
69     for n in range(max_iter):
70         x_n = data_x[-1].copy()
71         a_n = a(n)

```

```

71     b_n = b(n)
72     c_n = c(n)
73     q_n = (geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n)))
74     y_n = (pemetaan(q_n))
75     x_next = pemetaan(geodesik(a_n, pemetaan(q_n), pemetaan(
76         y_n)))
77     data_x.append(x_next)
78     error = metrik(x_n, x_next)
79     data_error.append(error)
80     if error < tol:
81         break
82
83 #skema iterasi Thakur
84 def iterThakur(x0, tol, max_iter):
85     data_x = [x0]
86     data_error = []
87     for n in range(max_iter):
88         x_n = data_x[-1].copy()
89         a_n = a(n)
90         b_n = b(n)
91         c_n = c(n)
92         q_n = (geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n)))
93         y_n = (pemetaan(geodesik(a_n, x_n, q_n)))
94         x_next = pemetaan(y_n)
95         data_x.append(x_next)
96         error = metrik(x_n, x_next)
97         data_error.append(error)
98         if error < tol:
99             break
100    return data_x, data_error
101
102 #skema iterasi Abbas
103 def iterAbbas(x0, tol, max_iter):
104     data_x = [x0]
105     data_error = []
106     for n in range(max_iter):
107         x_n = data_x[-1].copy()
108         a_n = a(n)

```

```

109     b_n = b(n)
110     c_n = c(n)
111     q_n = geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n))
112     y_n = geodesik(b_n, pemetaan(x_n), pemetaan(q_n))
113     x_next = geodesik(a_n, pemetaan(y_n), pemetaan(q_n))
114     data_x.append(x_next)
115     error = metrik(x_n, x_next)
116     data_error.append(error)
117     if error < tol:
118         break
119     return data_x, data_error
120
121 #skema iterasi Agarwal
122 def iterAgarwal(x0, tol, max_iter):
123     data_x = [x0]
124     data_error = []
125     for n in range(max_iter):
126         x_n = data_x[-1].copy()
127         a_n = a(n)
128         b_n = b(n)
129         c_n = c(n)
130         y_n = (geodesik(c_n, x_n, pemetaan(x_n)))
131         x_next = geodesik(a_n, pemetaan(x_n), pemetaan(y_n))
132         data_x.append(x_next)
133         error = metrik(x_n, x_next)
134         data_error.append(error)
135         if error < tol:
136             break
137     return data_x, data_error
138
139 #konstan
140 def a(n): return 0.92
141 def b(n): return 0.83
142 def c(n): return 0.81
143
144 #turun
145 def a(n): return (n**2/(n**3+1))
146 def b(n): return (2/(n+3))
147 def c(n): return (4*n+2)/(7*n+4)

```

```

148
149 #naik
150 def a(n): return (1-(4*n+9)**(1/2)/(2*n+13))
151 def b(n): return 0.8
152 def c(n): return (1-(n**2/(n**7+3)**(1/2)))
153
154 #naikturun
155 def a(n): return 1-(n**3)/(n**5+1)
156 def b(n): return (1/(n+1))
157 def c(n): return (3*n+4)/(5*n**2+4)
158
159 #turunnaik
160 def c(n): return 1-np.sqrt(n**3+8)/(5*n**5+9)
161 def b(n): return (1-3/(n+5))
162 def a(n): return (n**5+1)/(5*n**7+4)
163
164
165 x0=[2,3]
166 tol = 1e-6
167 max_iter = 100
168
169 dataSabri, errorSabri = iterSabri(x0, tol, max_iter)
170 dataJK, errorJK = iterJK(x0, tol, max_iter)
171 dataThakur, errorThakur = iterThakur(x0, tol, max_iter)
172 dataAbbas, errorAbbas = iterAbbas(x0, tol, max_iter)
173 dataAgarwal, errorAgarwal = iterAgarwal(x0, tol, max_iter)
174 max_len = max(len(dataSabri), len(dataJK), len(dataThakur),
175                 len(dataAbbas), len(dataAgarwal))
176 dataSabri += [np.nan] * (max_len - len(dataSabri))
177 dataJK += [np.nan] * (max_len - len(dataJK))
178 dataThakur += [np.nan] * (max_len - len(dataThakur))
179 dataAbbas += [np.nan] * (max_len - len(dataAbbas))
180 dataAgarwal += [np.nan] * (max_len - len(dataAgarwal))
181 errorSabri += [np.nan] * (max_len - len(errorSabri))
182 errorJK += [np.nan] * (max_len - len(errorJK))
183 errorThakur += [np.nan] * (max_len - len(errorThakur))
184 errorAbbas += [np.nan] * (max_len - len(errorAbbas))
185 errorAgarwal += [np.nan] * (max_len - len(errorAgarwal))

```

```

186 table = pd.DataFrame({
187     'Iterasi n': np.arange(max_len),
188     'Sabri': dataSabri,
189     'JK': dataJK,
190     'Thakur': dataThakur,
191     'Abbas': dataAbbas,
192     'Agarwal': dataAgarwal
193 } )
194
195 def titikX(x, d=6):
196     if isinstance(x, (list, np.ndarray)):
197         return f"({x[0]}.{d}f}, {x[1]}.{d}f}, 0, 0, \dots)"
198     return x
199
200 table_fmt = table.copy()
201
202 for col in ["Sabri", "JK", "Thakur", "Abbas", "Agarwal"]:
203     table_fmt[col] = table_fmt[col].apply(titikX)
204
205 def show_pair(table, scheme_name):
206     sub = table_fmt[["Iterasi n", "Sabri", scheme_name]]
207     print(f"Tabel Sabri-{scheme_name}")
208     print(sub.to_latex(index=False))
209     return sub
210
211 skema = ["JK", "Thakur", "Abbas", "Agarwal"]
212 for s in skema:
213     show_pair(table_fmt, s)
214
215 table_error = pd.DataFrame({
216     'Iterasi n': np.arange(max_len),
217     'Sabri': errorSabri,
218     'JK': errorJK,
219     'Thakur': errorThakur,
220     'Abbas': errorAbbas,
221     'Agarwal': errorAgarwal
222 } )
223
224 print(table_error.to_latex(index=False))
225 import matplotlib.pyplot as plt
226 import seaborn as sns

```

```

225
226 plt.figure(figsize=(12, 10))
227
228 for col in ['Sabri', 'JK', 'Thakur', 'Abbas', 'Agarwal']:
229     plt.plot(table_error['Iterasi n'], table_error[col],
230             marker='o', linestyle='-', label=col)
231
232 plt.xlabel('Iterasi n', fontsize=18)
233 plt.ylabel('Galat  $d(x_n, x_{n+1})$ ', fontsize=18)
234 plt.xticks(fontsize=14)
235 plt.yticks(fontsize=14)
236 plt.legend(fontsize=14)
237 plt.grid(True, which='both', ls='-', alpha=0.8)
238 plt.show()
239
240 x0_list = [
241     [2,3], [3,4], [4,1], [1.5,4], [2.7,4.2], [5,1.8],
242     [3.1,3.5]
243 ]
244
245 #Perhitungan jumlah iterasi yang diperlukan
246 tol = 1e-16
247 max_iter = 100
248 data = []
249 for x0 in x0_list:
250     row = {"x0" : tuple(x0)}
251     row["Sabri"] = len(iterSabri(x0,tol,max_iter)[0])
252     row["JK"] = len(iterJK(x0,tol,max_iter)[0])
253     row["Thakur"] = len(iterThakur(x0,tol,max_iter)[0])
254     row["Abbas"] = len(iterAbbas(x0,tol,max_iter)[0])
255     row["Agarwal"] = len(iterAgarwal(x0,tol,max_iter)[0])
256     data.append(row)
257 tabel = pd.DataFrame(data)
258 tabel.set_index("x0", inplace=True)
259
260 #Penyesuaian titik
261 def titikdiX(x):
262     if isinstance(x, tuple) and len(x) == 2:

```

```

262         return f"({x[0]:.1f}, {x[1]:.1f}, 0, 0, \dots)"
263     return str(x)
264 tabel_display = tabel.copy()
265 tabel_display.index = tabel_display.index.map(titikdiX)
266
267 print(tabel_display.to_string())
268 print(tabel_display.to_latex())

```

Lampiran A.1: Kode Python untuk Simulasi Numerik

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize
3
4
5 def d(x, y):
6     x1, x2 = x[0], x[1]
7     y1, y2 = y[0], y[1]
8
9     suku1 = np.abs(x1-y1)**3
10    suku2 = np.abs(x1**3-x2-y1**3+y2)**3
11    return (suku1+suku2)**(1/3)
12
13 def f(x):
14     x1, x2 = x
15     term1 = 20 * np.abs(x2 - x1**3)**3
16     term2 = np.abs(26 - x1)**3
17     return term1 + term2
18
19 def res(x):
20     lam = 20
21     def objective(y):
22         di = d(x,y)
23         return f(y)+1.0/(2.0*lam)*di**2
24     res = minimize(objective, x,method="Nelder-Mead", tol=1e
25                   -15)
26     return res.x
27
28 def geodesik(t,w,z):
29     w1,w2 = w[0],w[1]
30     z1,z2 = z[0],z[1]

```

```

30     sk1 = (1-t)*w1+t*z1
31     sk2 = (1-t)*(w1**3-w2)+t*(z1**3-z2)
32     if (t>=0 and t<=1):
33         return np.array([sk1,sk1**3-sk2])
34     else:
35         raise ValueError("di luar domain")
36
37 def iterSabri(x0, tol, max_iter):
38     data_x = [x0]
39     data_error = [np.nan]
40     for n in range(max_iter):
41         x_n = data_x[-1].copy()
42         a_n = 0.34
43         b_n = 0
44         c_n = 0.93
45         q_n = res(geodesik(c_n,x_n,res(x_n)))
46         y_n = res(res(q_n))
47         x_next = res(geodesik(a_n,res(q_n),res(y_n)))
48         data_x.append(x_next)
49         error = d(x_next,x_n)
50         data_error.append(error)
51         if error < tol:
52             break
53     return data_x, data_error
54
55 def iterJK(x0, tol, max_iter):
56     data_x = [x0]
57     data_error = [np.nan]
58     for n in range(max_iter):
59         x_n = data_x[-1].copy()
60         a_n = 0.34
61         b_n = 0
62         c_n = 0.93
63         q_n = geodesik(c_n,x_n,res(x_n))
64         y_n = res(q_n)
65         x_next = res(geodesik(a_n,res(q_n),res(y_n)))
66         data_x.append(x_next)
67         error = d(x_next,x_n)
68         data_error.append(error)

```

```

69     if error < tol:
70         break
71     return data_x, data_error
72
73 dataSabri, errorSabri = iterSabri([10,10],1e-4,500)
74 dataJK, errorJK = iterJK([10,10],1e-4,500)
75
76 max_len = max(len(dataSabri), len(dataJK))
77
78 dataSabri += [np.nan] * (max_len - len(dataSabri))
79 dataJK += [np.nan] * (max_len - len(dataJK))
80 errorSabri += [np.nan] * (max_len - len(errorSabri))
81 errorJK += [np.nan] * (max_len - len(errorJK))
82
83 import pandas as pd
84 table = pd.DataFrame({
85     'Iterasi n': np.arange(max_len),
86     'Sabri': dataSabri,
87     'JK': dataJK
88 })
89 def fmt_point(x, d=5):
90     if isinstance(x, (list, np.ndarray)):
91         return f"({x[0]:.{d}f}, {x[1]:.{d}f}, 0, 0, \dots)"
92     return x
93
94
95 table_fmt = table.copy()
96
97 for col in ["Sabri", "JK"]:
98     table_fmt[col] = table_fmt[col].apply(fmt_point)
99
100 print(table_fmt.to_latex(index=False, escape=False))
101
102 table_error = pd.DataFrame({
103     'Iterasi n': np.arange(max_len),
104     'Galat Sabri': errorSabri,
105     'Galat JK': errorJK
106 })
107

```

```

108 print(table_error.to_latex(index=False, escape=False))
109
110 import matplotlib.pyplot as plt
111
112 plt.figure(figsize=(14, 10))
113
114 for col in ['Galat Sabri', 'Galat JK']:
115     plt.plot(table_error['Iterasi n'], table_error[col],
116               marker='o', linestyle='-', label=col)
117
118 plt.yscale('log')
119 plt.xlabel('Iterasi n', fontsize=18)
120 plt.ylabel('Galat $d(x_n, x_{n+1})$', fontsize=18)
121 plt.xticks(fontsize=14)
122 plt.yticks(fontsize=14)
123 plt.legend(fontsize=14)
124 plt.grid(True, which='both', ls='--')
125 plt.show()

```

Lampiran A.2: Kode Python untuk Simulasi Minimalisasi Fungsi

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import pandas as pd
4 import os
5 from google.colab import files
6 from skimage import io, color, transform
7 from skimage.data import shepp_logan_phantom, grass, moon,
8     coins, text, brain
9 from skimage.transform import radon, iradon
10 from skimage.metrics import peak_signal_noise_ratio,
11     mean_squared_error
12
13 image_size = 512
14 theta = np.linspace(0., 180., 180, endpoint=False)
15 n_iterations = 60
16 alpha_n = 0.7
17 beta_n = 0.5
18 gamma_n = 0.4
19 checkpoints = [5, 10, 30, 60]

```

```

18
19 def load_and_prep_image(uploaded_filename, target_size=512):
20     print(f"--> Memproses gambar: {uploaded_filename}")
21     image = io.imread(uploaded_filename)
22
23     # Jika gambar berwarna (RGB/RGBA), ubah ke Grayscale
24     if image.ndim == 3:
25         if image.shape[2] == 4: # RGBA
26             image = color.rgb2gray(image)
27             image = color.rgb2gray(image)
28
29     # Resize ke target_size (128x128)
30     image_resized = transform.resize(image, (target_size,
31                                         target_size), anti_aliasing=True)
32
33     return image_resized
34
35
36
37 def gambar():
38     print("== UPLOAD GAMBAR ==")
39     uploaded = files.upload()
40
41     if not uploaded:
42         print("Tidak ada file yang diupload. Menggunakan
43               default Shepp-Logan Phantom.")
44         original_image = shepp_logan_phantom()
45         original_image = transform.resize(original_image, (
46             image_size, image_size), anti_aliasing=True)
47     else:
48         filename = next(iter(uploaded))
49         original_image = load_and_prep_image(filename,
50                                             target_size=image_size)
51
52     return original_image
53
54
55
56 original_image = gambar()
57
58
59 def A(x):
60     return radon(x, theta=theta, circle=False)
61
62
63 def A_adjoint(sinogram):
64     return iradon(sinogram, theta=theta, circle=False,

```

```

        output_size=image_size, filter_name=None)

53
54 def P_C(x):
55     return np.clip(x, 0, 1)
56
57 def gammaoptm():
58     print("-> Menghitung step size optimal...")
59     # Menggunakan random noise untuk estimasi operator
60     x_test = np.random.rand(image_size, image_size)
61     for _ in range(10):
62         Ax = A(x_test)
63         AtAx = A_adjoint(Ax)
64         norm_val = np.linalg.norm(AtAx)
65         x_test = AtAx / norm_val
66
67         Lx = A_adjoint(A(x_test))
68         L = np.linalg.norm(Lx) / np.linalg.norm(x_test)
69         gamma_step = 1.9 / L
70         #gamma_step = 0.001
71         print(f"    Gamma Step: {gamma_step:.5f}")
72     return gamma_step
73
74 Q = A(original_image)
75 gamma_step = gammaoptm()
76 def T(x):
77     Ax = A(x)
78     residual = Ax - Q
79     gradient = A_adjoint(residual)
80     return P_C(x - gamma_step * gradient)
81
82 def sabriIter():
83     x = np.zeros((image_size, image_size))

84
85     saved_images = {}
86     saved_metrics = {}
87     data_mse = []
88     data_psnr = []

89
90     print("-> Memulai Rekonstruksi ({n_iterations} iterasi)
```

```

    ...")

91
92     for n in range(n_iterations):
93         Tx = T(x)
94         z = T((1 - gamma_n) * x + gamma_n * Tx)
95         Tz = T(z)
96         y = T(Tz)
97         Ty = T(y)
98         x_next = T((1 - alpha_n) * Tz + alpha_n * Ty)
99
100        x = x_next
101
102        current_psnr = peak_signal_noise_ratio(
103            original_image, x, data_range=1)
104        current_mse = mean_squared_error(original_image, x)
105        data_mse.append(current_mse)
106        data_psnr.append(current_psnr)
107
108        current_iter = n + 1
109        if current_iter in checkpoints:
110            saved_images[current_iter] = x.copy()
111            saved_metrics[current_iter] = (current_psnr,
112                                         current_mse)
113            print(f"    Iterasi {current_iter}:")
114            print(f"        PSNR = {current_psnr:.2f} dB")
115            print(f"        MSE   = {current_mse:.6f}")
116        return saved_images, saved_metrics, data_mse, data_psnr
117
118 saved_images, saved_metrics, data_mse, data_psnr = sabriIter()
119
120 table = pd.DataFrame({
121     'Iterasi n': np.arange(1, len(data_mse) + 1),
122     'mse': data_mse,
123     'psnr': data_psnr
124 })
125 print(table.to_latex(index=False))
126
127 def tampilgambar():

```

```

126 fig, axes = plt.subplots(3, 2, figsize=(10,15))
127 ax = axes.ravel()
128
129 # Tampilkan Gambar Asli
130 im0 = ax[0].imshow(original_image, cmap='gray', vmin=0,
131                     vmax=1)
132 ax[0].set_title('Gambar Asli')
133
134 # Tampilkan Sinogram
135 ax[1].imshow(Q, cmap='gray', aspect='auto')
136 ax[1].set_title('Sinogram')
137
138 # Tampilkan Hasil Iterasi
139 for i, iteration in enumerate(checkpoints):
140     if iteration in saved_images:
141         idx = i + 2
142         if idx < 6:
143             psnr_val, mse_val = saved_metrics[iteration]
144             im = ax[idx].imshow(saved_images[iteration],
145                                 cmap='gray', vmin=0, vmax=1)
146             title_text = (f"Iterasi {iteration}\n"
147                           f"PSNR: {psnr_val:.2f} dB\n"
148                           f"MSE: {mse_val:.5f}")
149             ax[idx].set_title(title_text)
150             plt.colorbar(im, ax=ax[idx], fraction=0.046,
151                         pad=0.04)
152
153 plt.tight_layout()
154 plt.show()
155
156 tampilgambar()

```

Lampiran A.3: Kode Python untuk Rekonstruksi Gambar

LAMPIRAN B

Data MSE dan PSNR dari Rekonstruksi Citra

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
1	0.020543	16.873256
2	0.012665	18.973962
3	0.009144	20.388844
4	0.007003	21.547021
5	0.005555	22.553198
6	0.004521	23.447207
7	0.003757	24.251257
8	0.003176	24.980621
9	0.002725	25.646383
10	0.002368	26.257024
11	0.002080	26.819342
12	0.001845	27.338959
13	0.001652	27.820674
14	0.001490	28.268505
15	0.001353	28.685854
16	0.001237	29.075668
17	0.001137	29.440519
18	0.001051	29.782664
19	0.000976	30.104105
20	0.000911	30.406625
21	0.000853	30.691849
22	0.000801	30.961254
23	0.000756	31.216167
24	0.000715	31.457778
25	0.000678	31.687186
26	0.000645	31.905426
27	0.000615	32.113456
28	0.000587	32.312125
29	0.000562	32.502223

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
30	0.000539	32.684438
31	0.000518	32.859369
32	0.000498	33.027547
33	0.000480	33.189442
34	0.000463	33.345487
35	0.000447	33.496087
36	0.000432	33.641613
37	0.000419	33.782387
38	0.000406	33.918695
39	0.000393	34.050788
40	0.000382	34.178888
41	0.000371	34.303203
42	0.000361	34.423922
43	0.000351	34.541223
44	0.000342	34.655271
45	0.000334	34.766220
46	0.000326	34.874213
47	0.000318	34.979372
48	0.000310	35.081809
49	0.000303	35.181635
50	0.000297	35.278948
51	0.000290	35.373839
52	0.000284	35.466395
53	0.000278	35.556697
54	0.000273	35.644818
55	0.000267	35.730825
56	0.000262	35.814783
57	0.000257	35.896750
58	0.000253	35.976784
59	0.000248	36.054942
60	0.000244	36.131280
61	0.000240	36.205855
62	0.000236	36.278718
63	0.000232	36.349917

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
64	0.000228	36.419499
65	0.000225	36.487511
66	0.000221	36.553995
67	0.000218	36.618991
68	0.000215	36.682537
69	0.000212	36.744680
70	0.000209	36.805454
71	0.000206	36.864897
72	0.000203	36.923043
73	0.000200	36.979926
74	0.000198	37.035589
75	0.000195	37.090063
76	0.000193	37.143385
77	0.000191	37.195576
78	0.000189	37.246666
79	0.000186	37.296681
80	0.000184	37.345643
81	0.000182	37.393584
82	0.000180	37.440528
83	0.000178	37.486502
84	0.000177	37.531531
85	0.000175	37.575634
86	0.000173	37.618835
87	0.000171	37.661157
88	0.000170	37.702623
89	0.000168	37.743261
90	0.000167	37.783084
91	0.000165	37.822111
92	0.000164	37.860363
93	0.000162	37.897858
94	0.000161	37.934619
95	0.000160	37.970657
96	0.000158	38.005993
97	0.000157	38.040643

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
98	0.000156	38.074626
99	0.000155	38.107957
100	0.000153	38.140655
101	0.000152	38.172740
102	0.000151	38.204231
103	0.000150	38.235136
104	0.000149	38.265467
105	0.000148	38.295240
106	0.000147	38.324464
107	0.000146	38.353154
108	0.000145	38.381328
109	0.000144	38.408997
110	0.000143	38.436173
111	0.000142	38.462868
112	0.000142	38.489089
113	0.000141	38.514855
114	0.000140	38.540169
115	0.000139	38.565041
116	0.000138	38.589480
117	0.000138	38.613496
118	0.000137	38.637101
119	0.000136	38.660303
120	0.000135	38.683111
121	0.000135	38.705535
122	0.000134	38.727583
123	0.000133	38.749263
124	0.000133	38.770582
125	0.000132	38.791548
126	0.000131	38.812170
127	0.000131	38.832458
128	0.000130	38.852419
129	0.000130	38.872059
130	0.000129	38.891383
131	0.000129	38.910396

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
132	0.000128	38.929107
133	0.000127	38.947522
134	0.000127	38.965647
135	0.000126	38.983489
136	0.000126	39.001055
137	0.000125	39.018349
138	0.000125	39.035378
139	0.000124	39.052147
140	0.000124	39.068661
141	0.000123	39.084928
142	0.000123	39.100952
143	0.000123	39.116738
144	0.000122	39.132293
145	0.000122	39.147617
146	0.000121	39.162718
147	0.000121	39.177600
148	0.000120	39.192266
149	0.000120	39.206725
150	0.000120	39.220980
151	0.000119	39.235034
152	0.000119	39.248889
153	0.000119	39.262551
154	0.000118	39.276024
155	0.000118	39.289312
156	0.000117	39.302419
157	0.000117	39.315350
158	0.000117	39.328107
159	0.000116	39.340691
160	0.000116	39.353108
161	0.000116	39.365361
162	0.000115	39.377454
163	0.000115	39.389390
164	0.000115	39.401172
165	0.000114	39.412801

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
166	0.000114	39.424280
167	0.000114	39.435614
168	0.000114	39.446804
169	0.000113	39.457855
170	0.000113	39.468768
171	0.000113	39.479546
172	0.000112	39.490190
173	0.000112	39.500703
174	0.000112	39.511089
175	0.000112	39.521348
176	0.000111	39.531485
177	0.000111	39.541500
178	0.000111	39.551398
179	0.000111	39.561181
180	0.000110	39.570849
181	0.000110	39.580405
182	0.000110	39.589850
183	0.000110	39.599190
184	0.000109	39.608423
185	0.000109	39.617552
186	0.000109	39.626577
187	0.000109	39.635502
188	0.000109	39.644327
189	0.000108	39.653055
190	0.000108	39.661690
191	0.000108	39.670233
192	0.000108	39.678683
193	0.000107	39.687043
194	0.000107	39.695314
195	0.000107	39.703497
196	0.000107	39.711595
197	0.000107	39.719609
198	0.000106	39.727540
199	0.000106	39.735392

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
200	0.000106	39.743164
201	0.000106	39.750857
202	0.000106	39.758472
203	0.000106	39.766012
204	0.000105	39.773476
205	0.000105	39.780866
206	0.000105	39.788184
207	0.000105	39.795432
208	0.000105	39.802609
209	0.000104	39.809718
210	0.000104	39.816758
211	0.000104	39.823732
212	0.000104	39.830640
213	0.000104	39.837483
214	0.000104	39.844265
215	0.000103	39.850986
216	0.000103	39.857645
217	0.000103	39.864243
218	0.000103	39.870783
219	0.000103	39.877265
220	0.000103	39.883688
221	0.000103	39.890055
222	0.000102	39.896365
223	0.000102	39.902620
224	0.000102	39.908821
225	0.000102	39.914968
226	0.000102	39.921063
227	0.000102	39.927107
228	0.000102	39.933099
229	0.000101	39.939040
230	0.000101	39.944932
231	0.000101	39.950775
232	0.000101	39.956569
233	0.000101	39.962317

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
234	0.000101	39.968019
235	0.000101	39.973674
236	0.000100	39.979283
237	0.000100	39.984848
238	0.000100	39.990368
239	0.000100	39.995845
240	0.000100	40.001278
241	0.000100	40.006670
242	0.000100	40.012020
243	0.000100	40.017330
244	0.000099	40.022599
245	0.000099	40.027828
246	0.000099	40.033017
247	0.000099	40.038168
248	0.000099	40.043280
249	0.000099	40.048353
250	0.000099	40.053389
251	0.000099	40.058388
252	0.000099	40.063350
253	0.000098	40.068277
254	0.000098	40.073169
255	0.000098	40.078026
256	0.000098	40.082849
257	0.000098	40.087638
258	0.000098	40.092394
259	0.000098	40.097117
260	0.000098	40.101808
261	0.000098	40.106465
262	0.000097	40.111091
263	0.000097	40.115686
264	0.000097	40.120249
265	0.000097	40.124783
266	0.000097	40.129287
267	0.000097	40.133761

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
268	0.000097	40.138205
269	0.000097	40.142620
270	0.000097	40.147007
271	0.000097	40.151364
272	0.000096	40.155694
273	0.000096	40.159996
274	0.000096	40.164270
275	0.000096	40.168517
276	0.000096	40.172738
277	0.000096	40.176931
278	0.000096	40.181099
279	0.000096	40.185241
280	0.000096	40.189357
281	0.000096	40.193447
282	0.000096	40.197513
283	0.000095	40.201554
284	0.000095	40.205571
285	0.000095	40.209563
286	0.000095	40.213533
287	0.000095	40.217479
288	0.000095	40.221402
289	0.000095	40.225302
290	0.000095	40.229179
291	0.000095	40.233033
292	0.000095	40.236866
293	0.000095	40.240676
294	0.000095	40.244465
295	0.000094	40.248232
296	0.000094	40.251978
297	0.000094	40.255703
298	0.000094	40.259408
299	0.000094	40.263091
300	0.000094	40.266755
301	0.000094	40.270399

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
302	0.000094	40.274023
303	0.000094	40.277628
304	0.000094	40.281214
305	0.000094	40.284781
306	0.000094	40.288329
307	0.000094	40.291858
308	0.000093	40.295369
309	0.000093	40.298862
310	0.000093	40.302336
311	0.000093	40.305792
312	0.000093	40.309231
313	0.000093	40.312652
314	0.000093	40.316056
315	0.000093	40.319442
316	0.000093	40.322811
317	0.000093	40.326163
318	0.000093	40.329498
319	0.000093	40.332817
320	0.000093	40.336121
321	0.000092	40.339408
322	0.000092	40.342679
323	0.000092	40.345934
324	0.000092	40.349174
325	0.000092	40.352397
326	0.000092	40.355605
327	0.000092	40.358798
328	0.000092	40.361975
329	0.000092	40.365138
330	0.000092	40.368286
331	0.000092	40.371419
332	0.000092	40.374537
333	0.000092	40.377641
334	0.000092	40.380730
335	0.000092	40.383806

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
336	0.000091	40.386867
337	0.000091	40.389916
338	0.000091	40.392950
339	0.000091	40.395971
340	0.000091	40.398979
341	0.000091	40.401973
342	0.000091	40.404955
343	0.000091	40.407923
344	0.000091	40.410878
345	0.000091	40.413819
346	0.000091	40.416748
347	0.000091	40.419665
348	0.000091	40.422568
349	0.000091	40.425459
350	0.000091	40.428338
351	0.000091	40.431205
352	0.000090	40.434061
353	0.000090	40.436905
354	0.000090	40.439737
355	0.000090	40.442557
356	0.000090	40.445365
357	0.000090	40.448162
358	0.000090	40.450947
359	0.000090	40.453720
360	0.000090	40.456482
361	0.000090	40.459232
362	0.000090	40.461972
363	0.000090	40.464700
364	0.000090	40.467417
365	0.000090	40.470123
366	0.000090	40.472818
367	0.000090	40.475502
368	0.000090	40.478175
369	0.000090	40.480838

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
370	0.000089	40.483490
371	0.000089	40.486132
372	0.000089	40.488764
373	0.000089	40.491385
374	0.000089	40.493996
375	0.000089	40.496597
376	0.000089	40.499187
377	0.000089	40.501768
378	0.000089	40.504339
379	0.000089	40.506900
380	0.000089	40.509451
381	0.000089	40.511992
382	0.000089	40.514525
383	0.000089	40.517047
384	0.000089	40.519561
385	0.000089	40.522065
386	0.000089	40.524559
387	0.000089	40.527045
388	0.000089	40.529521
389	0.000088	40.531988
390	0.000088	40.534446
391	0.000088	40.536895
392	0.000088	40.539336
393	0.000088	40.541767
394	0.000088	40.544190
395	0.000088	40.546603
396	0.000088	40.549009
397	0.000088	40.551405
398	0.000088	40.553793
399	0.000088	40.556173
400	0.000088	40.558544
401	0.000088	40.560908
402	0.000088	40.563263
403	0.000088	40.565611

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
404	0.000088	40.567950
405	0.000088	40.570282
406	0.000088	40.572605
407	0.000088	40.574920
408	0.000088	40.577228
409	0.000088	40.579527
410	0.000087	40.581819
411	0.000087	40.584104
412	0.000087	40.586380
413	0.000087	40.588649
414	0.000087	40.590910
415	0.000087	40.593164
416	0.000087	40.595410
417	0.000087	40.597649
418	0.000087	40.599880
419	0.000087	40.602104
420	0.000087	40.604320
421	0.000087	40.606529
422	0.000087	40.608732
423	0.000087	40.610926
424	0.000087	40.613114
425	0.000087	40.615295
426	0.000087	40.617469
427	0.000087	40.619635
428	0.000087	40.621795
429	0.000087	40.623948
430	0.000087	40.626094
431	0.000087	40.628233
432	0.000086	40.630365
433	0.000086	40.632491
434	0.000086	40.634610
435	0.000086	40.636722
436	0.000086	40.638828
437	0.000086	40.640927

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
438	0.000086	40.643019
439	0.000086	40.645106
440	0.000086	40.647185
441	0.000086	40.649259
442	0.000086	40.651326
443	0.000086	40.653387
444	0.000086	40.655441
445	0.000086	40.657489
446	0.000086	40.659531
447	0.000086	40.661567
448	0.000086	40.663597
449	0.000086	40.665620
450	0.000086	40.667638
451	0.000086	40.669650
452	0.000086	40.671657
453	0.000086	40.673658
454	0.000086	40.675653
455	0.000086	40.677642
456	0.000086	40.679625
457	0.000085	40.681603
458	0.000085	40.683575
459	0.000085	40.685541
460	0.000085	40.687502
461	0.000085	40.689457
462	0.000085	40.691406
463	0.000085	40.693350
464	0.000085	40.695288
465	0.000085	40.697221
466	0.000085	40.699149
467	0.000085	40.701071
468	0.000085	40.702988
469	0.000085	40.704899
470	0.000085	40.706805
471	0.000085	40.708705

Tabel 2.1 – Lanjutan dari halaman sebelumnya

Iterasi ke-<i>n</i>	MSE	PSNR
472	0.000085	40.710601
473	0.000085	40.712491
474	0.000085	40.714375
475	0.000085	40.716255
476	0.000085	40.718129
477	0.000085	40.719999
478	0.000085	40.721863
479	0.000085	40.723722
480	0.000085	40.725577

UCAPAN TERIMA KASIH

Penyelesaian penulisan tugas akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat Penulis yang telah mendukung, menemani, dan memotivasi penulis selama berkuliah di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Oleh sebab itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bintang Marvellianti yang senantiasa menemani keseharian penulis selama menjalani perkuliahan magister.
2. Penghuni Laboratorium Aljabar Analisis, khususnya:
 - (a) Mas Ilham, Mas Alvian, terima kasih ilmu dan diskusinya,
 - (b) Vincent, Huda, Jundi, Fajar sebagai teman main EAFC, serta penghuni yang lainnya, yaitu Teo, Junika, Dias, Isa, Rasyidah, Isma, Feli yang telah membantu dalam keberlangsungan kegiatan di Laboratorium.
3. Junika yang membantu penulis sebagai koordinator Asisten Dosen Kalkulus.
4. Dzaky selaku rekan seerbimbingan penulis.
5. Krisna dan Kyung yang mengajak dan mengajari penulis terkait dengan gym.
6. Teman-teman bermain voli dan badminton, yaitu Mas Felza, Mas Ridho, Mas Zaki, Mas Ajrian, Davit, Atma, dan yang lainnya yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Akhir kata, semoga tesis ini bermanfaat bagi semua pihak yang bersangkutan.

Surabaya, 27 Januari 2026

Ahmad Hisbu Zakiyudin

BIODATA PENULIS



Lahir di Madiun, 15 Maret 2003, penulis memiliki nama lengkap Ahmad Hisbu Zakiyudin. Sebagian memanggil dengan Zaki, sebagian lagi dengan Hisbu, Bubu, Udin, atau Ahmad. Enam tahun penulis menempuh pendidikan dasar di MI Nurul Huda Sawahan, dua tahun menempuh pendidikan menengah pertama di MTsN Kota Madiun, dan tiga tahun menempuh pendidikan menengah atas di MAN 2 Kota Madiun. Kemudian pada saat pandemi mulai Covid-19 mulai menyebar, yaitu pada tahun 2020, penulis melanjutkan pendidikan tinggi di Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data (FSAD), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Penulis menyelesaikan program Sarjana pada Departemen Matematika ITS pada tahun 2020, dengan judul tugas akhir "Aplikasi Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik Kuasi untuk Masalah Eksistensi dan Ketunggalan Solusi dari Persamaan Cauchy Tidak Homogen". Hasil dari tugas akhir tersebut juga dipublikasikan dalam Jurnal Ilmiah terindeks Scopus dengan peringkat Q3, yaitu pada Jurnal Nonlinear Dynamics & Systems Theory yang terbit pada Edisi ke-5 Tahun 2025. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan pascasarjana pada program Magister by Riset di Departemen Matematika ITS. Selain itu, penulis juga sempat mengikuti dua konferensi ilmiah internasional sebagai *presenter*, yaitu pada The International Conference in Mathematical Analysis and Applications (ICONMAA) di tahun 2024 dan International Conference on Mathematics: Pure, Applied, and Computation (ICoMPAC) di tahun 2025.

Adapun kritik dan saran atau informasi lebih lanjut mengenai Tesis ini dapat ditujukan ke penulis melalui email penulis, yakni azakiyudin1790@gmail.com atau LinkedIn penulis, yaitu Ahmad Hisbu Zakiyudin atau bisa diakses melalui www.linkedin.com/in/ahmadhisbzakiyudin/.