



KONVERGENSI SKEMA ITERASI SABRI UNTUK KELAS PEMETAAN NONEKSPANSIF DIPERUMUM DI RUANG GEODESIK BESERTA APLIKASINYA

Seminar Hasil Tesis

Ahmad Hisbu Zakiyudin
(6002241016)

Dosen Pembimbing

Dr. Mont. Kistosil Fahim, S.Si., M.Si.



Outlines

1. Latar Belakang

2. Rumusan Masalah

3. Batasan Masalah

4. Tujuan

5. Manfaat

6. Metodologi

7. Hasil dan Pembahasan

8. Kesimpulan dan Saran

Bagaimana cara menjamin eksistensi solusinya?

Bagaimana cara mendapatkan solusinya?

$$u(t) = h(t) + \lambda \int_0^1 k(t, s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in I = [0, 1], \quad \lambda \geq 0.$$

$$j'(r) = \psi(r, j(r), j(r - \gamma)), \quad r \in [r_0, v],$$

$$\begin{cases} D^\gamma x(t) + f(t, x(t)) = 0 & (0 \leq t \leq 1, 1 < \gamma < 2) \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

with initial condition

$$j(r) = \zeta(r), \quad r \in [r_0 - \gamma, r_0].$$

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^q p(s) = F(s, p(s)), & s \in E / \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, \quad E = [0, T], \\ \Delta p(s_j) = I_j(p(s_j)), & j = 1, 2, \dots, m, \\ p(0) + \eta(p) = p_0, \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - M\mathbf{u}\|_2^2.$$

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - A\mathbf{u}\|_2^2 \quad \text{subject to } \|\mathbf{u}\|_1 \leq t,$$

$$\arg \min_{v \in U} \left[h(v) + \frac{1}{2\lambda} d^2(u, v) \right]$$

Cari titik $x^* \in C$ yang memenuhi $Ax^* \in Q$,

Teorema Titik Tetap

***Teorema
Titik Tetap***



***Pemetaan
Kontraksi Banach***

***Teorema
Titik Tetap***

diawali

***Pemetaan
kontraksi Banach***

mengalami
perkembangan

***Pemetaan
Nonekspansif***



Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Nonekspansif

(Browder, 1965)

Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T: W \rightarrow W$ disebut **pemetaan nonekspansif** jika untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

Pemetaan nonekspansif dijamin memiliki titik tetap jika W adalah himpunan bagian **tertutup** dan **terbatas** dari ruang Banach **konveks seragam**.

Perumuman Pemetaan Nonekspansif

(Ullah dkk., 2023)

Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan W adalah himpunan bagian tak kosong dari B . Pemetaan $T: W \rightarrow W$ disebut **pemetaan (α, β, γ) nonekspansif** jika untuk setiap $x, y \in W$ terdapat bilangan real positif α, β, γ dengan $\gamma \in [0, 1)$ dan $\alpha + \gamma \leq 1$ sedemikian hingga

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + \beta\|x - Tx\| + \gamma\|y - Tx\|.$$

Aproksimasi titik tetap

Skema Iterasi Picard

Diberikan $(B, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach dan $T: B \rightarrow B$ adalah suatu pemetaan, serta $x_1 \in B$. Untuk setiap n bilangan asli, skema iterasi Picard diberikan oleh

$$x_{n+1} = T(x_n).$$

Skema ini **konvergen ke titik tetap** dari T jika T adalah pemetaan **kontraktif**, tetapi tidak selalu konvergen untuk pemetaan nonekspansif.

Aproksimasi titik tetap

Skema Iterasi JK, 2021

Diberikan W adalah himpunan bagian tertutup dan terbatas dari suatu ruang Banach konveks seragam, $x_1 \in W$ dan $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ adalah barisan di $(0,1]$, serta $T:W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Untuk setiap n bilangan asli, berikut diberikan skema iterasi JK

$$\begin{cases} q_n = (1 - c_n)x_n + c_nTx_n, \\ y_n = Tq_n, \\ x_{n+1} = T((1 - a_n)Tq_n + a_nTy_n). \end{cases}$$

Aproksimasi titik tetap

Skema Iterasi Sabri, 2025

Diberikan W adalah himpunan bagian tertutup dan terbatas dari suatu ruang Banach konveks seragam, $x_1 \in W$ dan $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ adalah barisan di $(0,1]$, serta $T:W \rightarrow W$ adalah suatu pemetaan nonekspansif. Untuk setiap n bilangan asli, berikut diberikan skema iterasi **Sabri**

$$\begin{cases} q_n = T((1 - c_n)x_n + c_nTx_n), \\ y_n = T(Tq_n), \\ x_{n+1} = T((1 - a_n)Tq_n + a_nTy_n). \end{cases}$$

Aproksimasi titik tetap di ruang tak linear

- Untuk pemetaan *firmly* nonekspansif di ruang **W-hiperbolik**, ruang **Busemann**, ruang $CAT(0)$. (Ariza-Ruiz dkk. 2014)
- Untuk pemetaan nonekspansif di ruang **Hadamard** (Dehghan dan Roojin, 2014)
- Untuk pemetaan nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ (Calderón dkk., 2021)
- Untuk pemetaan nonekspansif yang memenuhi kondisi (C_μ) di ruang $CAT_p(0)$ (Salisu dkk., 2022)

Ruang Geodesik

(Bridson dan Haefliger, 1999)

Diberikan (X, d) adalah ruang metrik dan $x, y \in X$. Pemetaan $\gamma: [0, d(x, y)] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ disebut **jalur geodesik** yang menghubungkan x dan y jika memenuhi

1. $\gamma(0) = x$,
2. $\gamma(d(x, y)) = y$,
3. $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ untuk setiap $t, s \in [0, d(x, y)]$.

Ruang metrik (X, d) disebut sebagai **ruang metrik geodesik** jika setiap $x, y \in X$ dihubungkan oleh suatu jalur geodesik. Dalam hal ini suatu geodesik dinotasikan sebagai $[x, y]$

Segitiga Geodesik

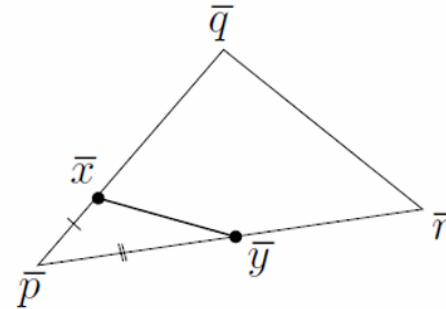
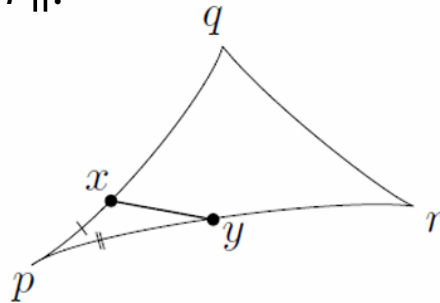
(Bridson dan Haefliger, 1999)

Diberikan (X, d) adalah ruang metrik geodesik. Suatu **segitiga geodesik** $\triangle(p, q, r)$ di ruang metrik geodesik berisi tiga titik $p, q, r \in X$ sebagai **titik sudut** dan jalur geodesik di antara dua titik tersebut yaitu $[p, q], [p, r], [q, r]$ disebut sebagai **sisi** dari segitiganya.

Segitiga Komparasi

(Bridson dan Haefliger, 1999)

Diberikan (X, d) adalah ruang metrik geodesik dan suatu segitiga geodesik $\triangle(p, q, r)$ di ruang metrik geodesik. Suatu **segitiga komparasi** $\bar{\triangle}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ adalah suatu segitiga di ruang **bernorma** $(B, \|\cdot\|)$ yang memenuhi $d(p, q) = \|\bar{p} - \bar{q}\|$, $d(p, r) = \|\bar{p} - \bar{r}\|$, dan $d(q, r) = \|\bar{q} - \bar{r}\|$.



Poulsen, S. (2024). A Gentle Introduction to CAT(0) Spaces. arXiv.

Ruang $CAT_p(0)$

(Khamsi dan Shukri, 2017)

Diberikan ruang metrik geodesik (X, d) dan ruang $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, untuk $p \geq 2$. Ruang (X, d) disebut sebagai **ruang $CAT_p(0)$** , untuk $p \geq 2$, jika untuk setiap **segitiga geodesik** $\triangle \in X$, terdapat **segitiga komparasi** $\bar{\triangle} \in \ell_p$ sehingga untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\triangle}$, berlaku

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_p.$$

Beberapa konsep di Ruang $CAT_p(0)$

(Salisu dkk., 2022)

Diberikan (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$, untuk $p \geq 2$, dan $\{x_n\}$ adalah barisan terbatas di X . **Pusat asimtotik** dari barisan $\{x_n\}$ di ruang $CAT_p(0)$ didefinisikan sebagai

$$A(\{x_n\}) := \left\{ x \in X \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \inf_{y \in X} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, x_n) \right\}.$$

Beberapa konsep di Ruang $CAT_p(0)$

(Salisu dkk., 2022)

Diberikan (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$, untuk $p \geq 2$, dan $\{x_n\}$ adalah barisan di terbatas X . Barisan $\{x_n\}$ disebut **konvergen- Δ** ke suatu titik $x \in X$ jika $\{x\}$ adalah pusat asimtotik dari setiap subbarisan $\{x_{n_k}\}$ dari $\{x_n\}$.

Beberapa konsep di Ruang $CAT_p(0)$

(Salisu dkk., 2022)

Diberikan (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$, untuk $p \geq 2$, dan $\{x_n\}$ adalah barisan di X . Barisan $\{x_n\}$ disebut **konvergen kuat** ke suatu titik $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Beberapa konsep di Ruang $CAT_p(0)$

(Salisu dkk., 2022)

Diberikan (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$, untuk $p > 2$. Pemetaan $T: X \rightarrow X$ disebut memiliki sifat **demiclosedness** jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subseteq X$ yang konvergen- Δ dan memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, maka berlaku $x = Tx$.

Rumusan Masalah

1. Bagaimana syarat perlu dan cukup untuk **konvergensi** dari skema iterasi **Sabri** di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -**nonekspansif**?
2. Bagaimana **laju konvergensi** dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dibanding dengan skema iterasi lainnya secara **numerik**?
3. Bagaimana **aplikasi** dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ pada masalah **optimasi**?

Batasan Masalah

1. Laju konvergensi yang dibandingkan adalah laju dari skema iterasi **Sabri, JK, Thakur, dan Agarwal** berdasarkan banyaknya iterasi yang diperlukan.
2. Masalah optimasi yang dibahas:
 - a. minimalisasi fungsi, yaitu mencari **titik** $x \in X$ sehingga $f(x) \leq f(y)$ untuk setiap $y \in X$ dengan X adalah himpunan tak kosong dan $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah fungsi yang konveks *proper lower semicontinuous*,
 - b. *split feasibility problem*, yang kemudian diterapkan dalam rekonstruksi citra tomografi.

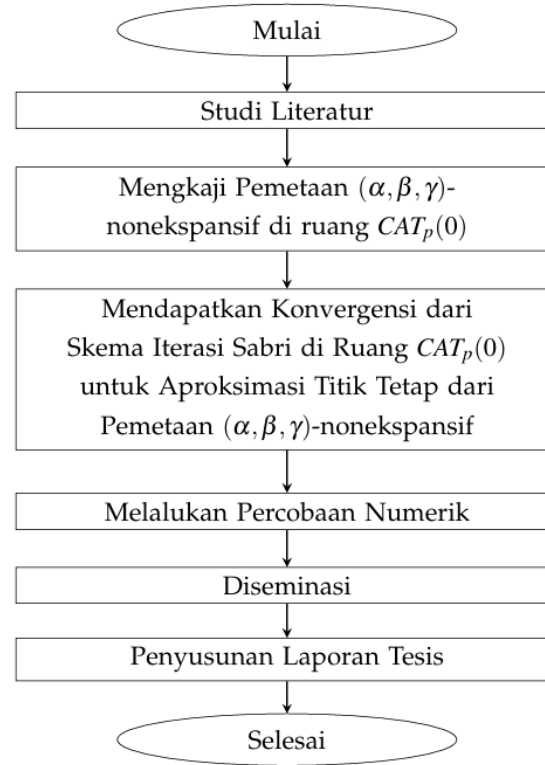
Tujuan

1. Mendapatkan syarat perlu dan cukup untuk **konvergensi** dari skema iterasi **Sabri** di ruang $CAT_p(0)$ dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -**nonekspansif**?
2. Mengetahui **laju konvergensi** dari skema iterasi Sabri untuk mendapatkan aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dibanding dengan skema iterasi lainnya secara **numerik**
3. Mendapatkan **aplikasi** dari skema iterasi Sabri untuk pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$ pada masalah **optimasi**?



Manfaat

1. Sebagai **kontribusi** pada pengembangan teori titik tetap, khususnya pada **analisis konvergensi** skema iterasi untuk kelas pemetaan yang lebih umum dan ruang yang lebih umum, yaitu pemetaan (α, β, γ) - nonekspansif di ruang $CAT_p(0)$.
2. Sebagai bahan **kajian** dan **perbandingan** mengenai tingkat **kecepatan konvergensi** antara skema iterasi Sabri dengan skema iterasi lainnya secara **numerik**.
3. Sebagai **alternatif** penyelesaian masalah **optimasi**.



Gambar 3.1: Blok Diagram Penelitian.

1. Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Definisi Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif di Ruang $CAT_p(0)$

Diberikan (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$ dan W himpunan bagian tak kosong dari X , pemetaan $f: W \rightarrow W$ disebut sebagai **pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif** jika terdapat bilangan real $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $\alpha + \gamma \leq 1, \gamma \in [0, 1)$ sehingga untuk setiap $x, y \in W$ berlaku

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(x, Ty).$$

1. Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Contoh Ruang dan Pemetaan

Contoh 1. Diberikan $X = \{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3 < \infty \}$ dan untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3, \dots), y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell_3$ didefinisikan metrik

$$d(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^3 + |x_1^3 - x_2 - y_1^3 + y_2|^3 + \sum_{i=3}^{\infty} |x_i - y_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Jalur **geodesik** yang menghubungkan $w = (w_1, w_2, \dots)$ dan $z = (z_1, z_2, \dots)$, yaitu $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ dengan $\gamma(t) := (1 - t)w \oplus tz$ sebagai

$$\gamma(t) = (\alpha_1(t), \alpha_1(t)^3 - (1 - t)(w_1^3 - w_2) - t(z_1^3 - z_2), \alpha_3(t), \alpha_4(t), \dots),$$

dengan $\alpha_i(t) = (1 - t)w_i + tz_i$ untuk $i = 1, 3, 4, 5, \dots$.

Ruang (X, d) merupakan **ruang $CAT_p(0)$** , tetapi **bukan ruang Banach** dan **bukan ruang $CAT(0)$** .

1. Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif

Contoh Ruang dan Pemetaan

Contoh 2. Diberikan ruang $CAT_p(0)$ sebagaimana contoh sebelumnya, dan $W = \{(w_1, w_2, 0, 0, \dots) \mid w_1 \in [1, 5], w_2 \in [1, 125]\} \subset X$. Pemetaan $T: W \rightarrow W$ yang didefinisikan sebagai

$$T((w_1, w_2, 0, 0, \dots)) = \begin{cases} \left(\frac{w_1 + 3}{4}, \frac{(w_1 + 3)^3}{64}, 0, 0, \dots \right), & \text{jika } w_1 \in [1, 3] \\ \left(\frac{w_1 + 2}{4}, \frac{(w_1 + 2)^3}{64}, 0, 0, \dots \right), & \text{jika } w_1 \in [3, 5] \end{cases},$$

adalah **pemetaan $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ -nonekspansif**, tetapi **bukan pemetaan nonekspansif**.

2. Konvergensi Skema

Skema Iterasi Sabri di Ruang $CAT_p(0)$

Diberikan W adalah himpunan bagian tak kosong yang konveks dari suatu ruang $CAT_p(0)$. Untuk suatu pemetaan $T: W \rightarrow W$, $x_0 \in W$, dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ didefinisikan **skema iterasi Sabri** pada ruang $CAT_p(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} q_n = T((1 - c_n)x_n \oplus c_nTx_n), \\ y_n = T(Tq_n), \\ x_{n+1} = T((1 - a_n)Tq_n \oplus a_nTy_n), \end{cases}$$

dengan $\{a_n\} \subseteq [0,1]$ dan $\{c_n\} \subseteq [0,1]$.

2. Konvergensi Skema

Eksistensi Titik Tetap

Diberikan $T:W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui skema iterasi Sabri sehingga $\{x_n\}$ **terbatas** dan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, maka $Fix(T) \neq \emptyset$.

2. Konvergensi Skema

Konvergensi- Δ dan kuat

Diberikan (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang **lengkap** dan W adalah himpunan bagian **tak kosong** dari X yang **tertutup** dan **konveks**. Jika $T: W \rightarrow W$ adalah **pemetaan** (α, β, γ) -**nonekspansif** dengan $Fix(T) \neq \emptyset$ dan $\{x_n\}$ adalah barisan yang dikonstruksi melalui **skema iterasi Sabri** dengan $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a, b] \subset (0, 1)$, maka $\{x_n\}$ **konvergen- Δ** ke suatu titik tetap dari T . Jika W **kompak**, maka konvergen kuat.

3. Percobaan Numerik

Parameter yang digunakan

Bahasa pemrograman : Python dengan Google Colab

Pemetaan : Contoh 2, dengan titik tetap $(1, 1, 0, 0, \dots)$

Skema iterasi : Sabri, JK, Thakur, Agarwal, Abbas

Nilai awal : $x_0 = (2, 3, 0, 0, \dots)$

Parameter iterasi : $a_n = 0.42, b_n = 0.83, c_n = 0.31$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Galat : $d(x_n, x^*) < 10^{-6}$

3. Percobaan Numerik

Hasil

Tabel 4.1: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan JK

Iterasi	Nilai x_0	
	Sabri	JK
n		
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.032859, 1.101850, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.001080, 1.003243, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.000035, 1.000106, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000001, 1.000003, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000000, 0, 0, ...)

3. Percobaan Numerik

Hasil

Tabel 4.2: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Thakur

Iterasi	Nilai x_0	
	Sabri	Thakur
n		
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.056397, 1.178912, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.003181, 1.009572, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.000179, 1.000538, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000010, 1.000030, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000001, 1.000002, 0, 0, ...)

3. Percobaan Numerik

Hasil

Tabel 4.3: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Abbas

Iterasi	Nilai x_0	
	Sabri	Thakur
n		
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.109842, 1.367048, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.012065, 1.036634, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.001325, 1.003981, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000146, 1.000437, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000016, 1.000048, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000002, 1.000005, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)

3. Percobaan Numerik

Hasil

Tabel 4.3: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Abbas

Iterasi	Nilai x_0	
	Sabri	Thakur
n		
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.109842, 1.367048, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.012065, 1.036634, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.001325, 1.003981, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000146, 1.000437, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000016, 1.000048, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000002, 1.000005, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)

3. Percobaan Numerik

Hasil

Tabel 4.4: Hasil numerik skema iterasi Sabri dan Agarwal

Iterasi	Nilai x_0	
	Sabri	Agarwal
n		
0	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)	(2.000000, 3.000000, 0, 0, ...)
1	(1.007270, 1.021970, 0, 0, ...)	(1.225588, 1.840912, 0, 0, ...)
2	(1.000053, 1.000159, 0, 0, ...)	(1.050890, 1.160570, 0, 0, ...)
3	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)	(1.011480, 1.034837, 0, 0, ...)
4	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.002590, 1.007789, 0, 0, ...)
5	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000584, 1.001754, 0, 0, ...)
6	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000132, 1.000395, 0, 0, ...)
7	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000030, 1.000089, 0, 0, ...)
8	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000007, 1.000020, 0, 0, ...)
9	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000002, 1.000005, 0, 0, ...)
10	(1, 1, 0, 0, ...)	(1.000000, 1.000001, 0, 0, ...)

3. Percobaan Numerik

Galat

Tabel 4.5: Galat $d(x_n, x^*)$

n	Sabri	JK	Thakur	Abbas	Agarwal
1	7.2×10^{-3}	3.2×10^{-2}	5.6×10^{-2}	1.0×10^{-1}	2.2×10^{-1}
2	5.2×10^{-5}	1.0×10^{-3}	3.1×10^{-3}	1.2×10^{-2}	5.0×10^{-2}
3	3.8×10^{-7}	3.5×10^{-5}	1.7×10^{-4}	1.3×10^{-3}	1.1×10^{-2}
4	2.7×10^{-9}	1.1×10^{-6}	1.0×10^{-5}	1.4×10^{-4}	2.5×10^{-3}
5	2.0×10^{-11}	3.8×10^{-8}	5.7×10^{-7}	1.5×10^{-5}	5.8×10^{-4}
6	1.4×10^{-13}	1.2×10^{-9}	3.2×10^{-8}	1.7×10^{-6}	1.3×10^{-4}
7	1.1×10^{-15}	4.1×10^{-11}	1.8×10^{-9}	1.9×10^{-7}	2.9×10^{-5}
8	0	1.3×10^{-12}	1.0×10^{-10}	2.1×10^{-8}	6.7×10^{-6}
9	0	4.4×10^{-14}	5.7×10^{-12}	2.3×10^{-9}	1.5×10^{-6}
10	0	1.3×10^{-15}	3.2×10^{-13}	2.5×10^{-10}	3.4×10^{-7}

3. Percobaan Numerik

Hasil

Untuk hasil lainnya, dengan **7 nilai awal** dan **5 parameter iterasi** yang berbeda, serta galat $d(x_n, x^*) < 10^{-16}$, skema iterasi **Sabri** unggul dalam laju konvergensi, yang hanya memerlukan **7 iterasi**, dibanding JK (9 iterasi), Thakur (12 iterasi), Abbas (15 iterasi), Agarwal (18 iterasi).

4. Aplikasi dalam Optimasi

Minimalisasi Fungsi

Diberikan (X, d) adalah **ruang** $CAT_p(0)$ dan $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adalah fungsi yang **konveks** dan **proper lower semi-continuous**. Barisan $\{x_n\}$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{cases} q_n = J_\lambda^f \left((1 - c_n)x_n \oplus c_n J_\lambda^f(x_n) \right), \\ y_n = J_\lambda^f \left(J_\lambda^f(q_n) \right), \\ x_{n+1} = J_\lambda^f \left((1 - a_n)J_\lambda^f(q_n) \oplus a_n J_\lambda^f(y_n) \right), \end{cases}$$

dengan $J_\lambda^f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in X} [f(y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x, y)]$, $\lambda > 0$, $\{a_n\}, \{c_n\} \subseteq (0, 1)$, **konvergen** $-\Delta$ ke nilai **minimum** dari f , yaitu $x \in X$. Jika X **kompak**, maka konvergen **kuat**.

4. Aplikasi dalam Optimasi

Minimalisasi Fungsi (Simulasi)

Diberikan (X, d) adalah **ruang** $CAT_p(0)$ sebagaimana **Contoh 1** dan $W = \{(x_1, x_2, 0, 0, \dots) \mid x_1, x_2 \in X\}$. Suatu fungsi $f: W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 20|x_2 - x_1^3|^3 + |26 - x_1|^3, \quad \text{untuk } x = (x_1, x_2, 0, 0, \dots) \in W$$

merupakan fungsi **tak konveks** pada definisi **klasiknya**, tetapi **konveks** secara **geodesik** dengan geodesik sebagaimana pada Contoh 1. Lebih lanjut f juga fungsi **proper lower semi-continuous**

4. Aplikasi dalam Optimasi

Minimalisasi Fungsi (Simulasi)

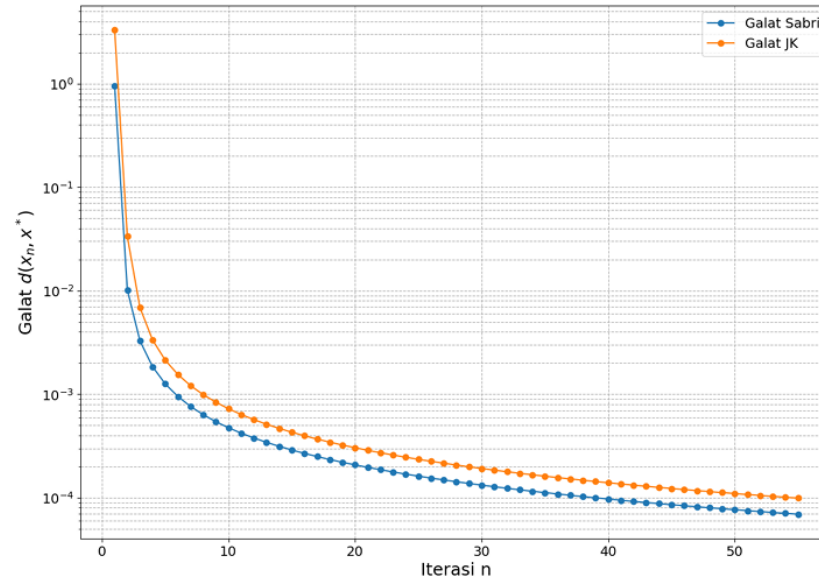
Dilakukan simulasi dengan perangkat lunak Google Colab dan parameter nilai awal $x = (10, 10, 0, 0, \dots)$ dan parameter iterasi $\lambda = 20, a_n = 0.34, c_n = 0.93$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berikut data 7 iterasi pertama dengan skema Sabri dan JK.

n	Sabri	JK
0	(10.00000, 10.00000, 0, 0, ...)	(10.00000, 10.00000, 0, 0, ...)
1	(25.04431, 15708.11708, 0, 0, ...)	(22.68123, 11668.32829, 0, 0, ...)
2	(25.98980, 17555.31676, 0, 0, ...)	(25.96654, 17508.22787, 0, 0, ...)
3	(25.99672, 17569.35288, 0, 0, ...)	(25.99313, 17562.07883, 0, 0, ...)
4	(25.99816, 17572.26781, 0, 0, ...)	(25.99666, 17569.23601, 0, 0, ...)
5	(25.99874, 17573.44601, 0, 0, ...)	(25.99787, 17571.67427, 0, 0, ...)
6	(25.99905, 17574.07075, 0, 0, ...)	(25.99845, 17572.85677, 0, 0, ...)
7	(25.99924, 17574.45456, 0, 0, ...)	(25.99879, 17573.54447, 0, 0, ...)

4. Aplikasi dalam Optimasi

Minimalisasi Fungsi (Simulasi)

Grafik galat (dalam log) vs iterasi untuk 55 iterasi pertama



4. Aplikasi dalam Optimasi

Rekonstruksi Citra

Split Feasibility Problem (SFP)

Cari titik $x^* \in C$ yang memenuhi $Ax^* \in Q$,

Dengan C dan Q berturut-turut adalah himpunan bagian tertutup dan konveks dari ruang Hilbert H_1 dan H_2 serta $A: H_1 \rightarrow H_2$ adalah transformasi linier terbatas.

Titik $x^* \in C$ adalah solusi dari permasalahan SFP jika dan hanya jika x^* memenuhi persamaan titik tetap

$$x = P_C(I - \gamma A^*(I - P_Q)A)x,$$

dengan P_C dan P_Q Adalah proyeksi titik terdekat pada C dan Q , $\gamma > 0$ dan A^* adalah transformasi adjoin dari A .

4. Aplikasi dalam Optimasi

Rekonstruksi Citra

Simulasi rekonstruksi citra dengan menggunakan citra Shepp-Logan Phantom $x^* \in \mathbb{R}^n$ dengan data sinogram $Q = Ax^*$. Pemetaan yang digunakan Adalah

$$T(x) = P_C(x - \gamma A^*(Ax - Q)),$$

dengan A^* adalah aproksimasi dari transformasi adjoint A dan P_C adalah operator proyeksi ke himpunan batas C .

4. Aplikasi dalam Optimasi

Rekonstruksi Citra

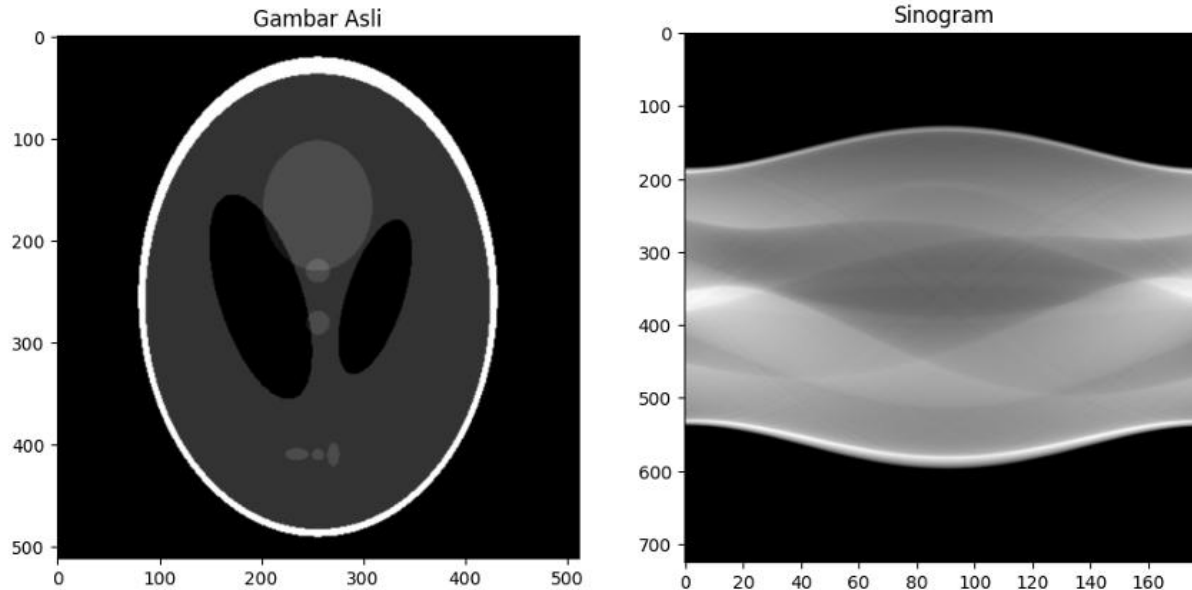
Tabel 4.13: Parameter simulasi rekonstruksi citra

Parameter	Nilai/Deskripsi
Ukuran gambar	512×512
Sudut proyeksi	180 terdistribusi merata pada $[0^\circ, 180^\circ)$
Transformasi maju A	Transformasi Radon
Transformasi adjoint A^*	Proyeksi mundur tanpa filter
Himpunan batas C	$[0, 1]^n$
Nilai awal x_0	$x_0 = \mathbf{0}$
Jumlah iterasi	60
Parameter γ	Konstan: 0.00245
Parameter a_n, c_n	Konstan: $a_n = 0.42, c_n = 0.31$
Implementasi	Google Colab dengan scikit-image, matplotlib

4. Aplikasi dalam Optimasi

Rekonstruksi Citra

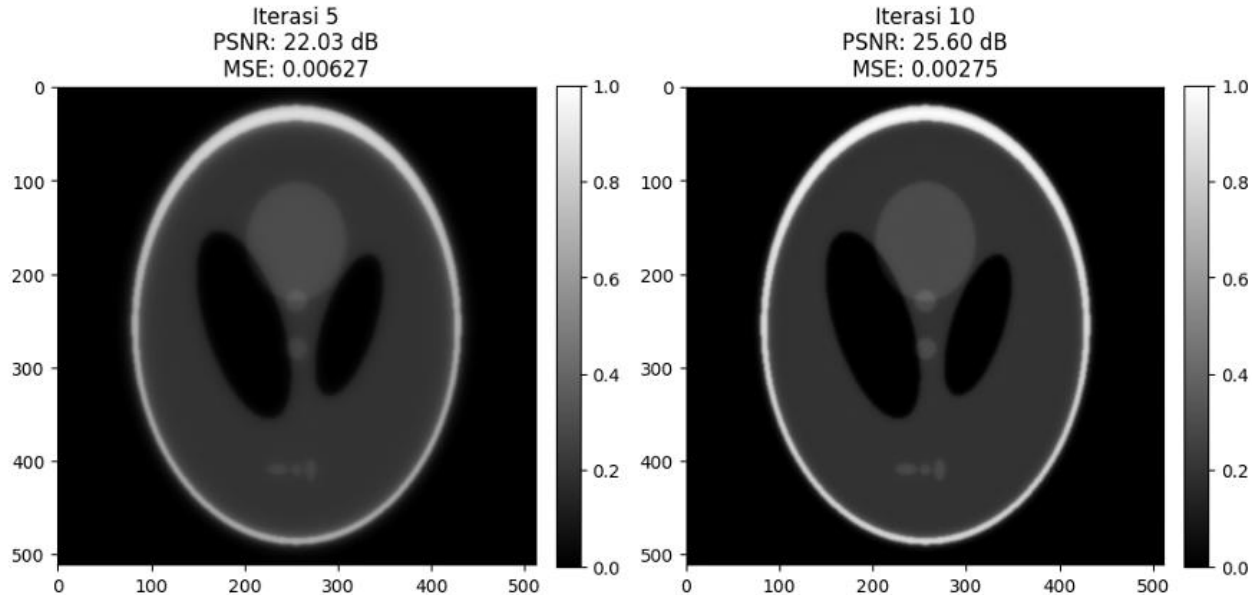
Data awal rekonstruksi



4. Aplikasi dalam Optimasi

Rekonstruksi Citra

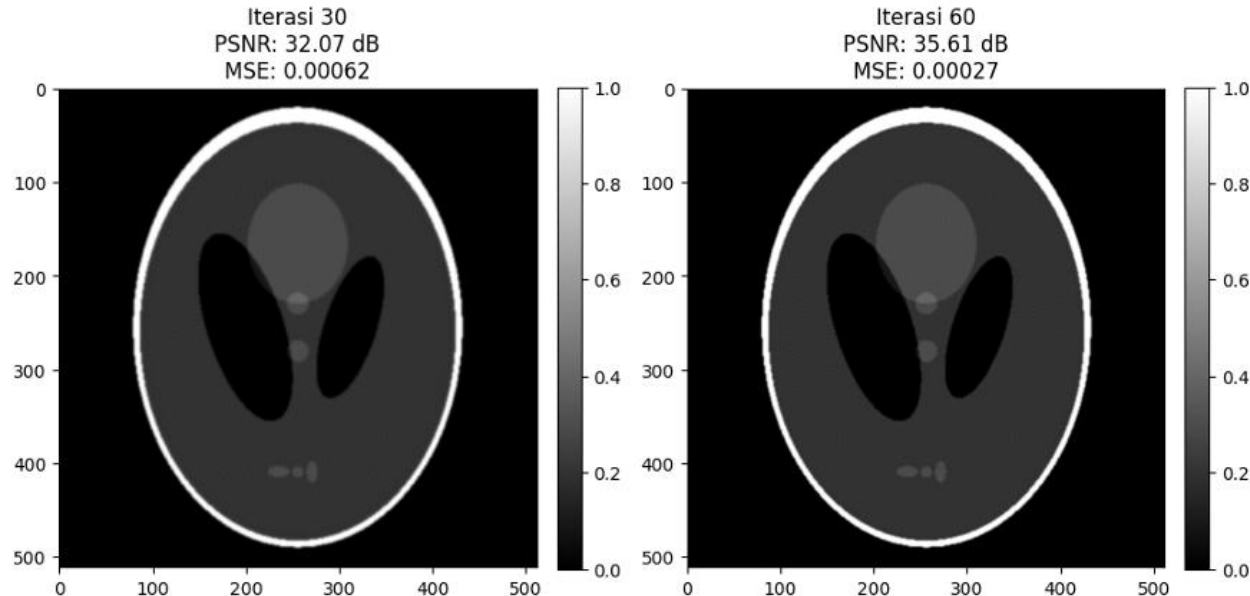
Hasil rekonstruksi



4. Aplikasi dalam Optimasi

Rekonstruksi Citra

Hasil rekonstruksi



Kesimpulan

1. Syarat cukup konvergensi- Δ

- Ruang (X, d) adalah ruang $CAT_p(0)$ yang **lengkap**.
- Himpunan bagian W merupakan himpunan bagian **tak kosong** yang **tertutup** dan **konveks** dari ruang $CAT_p(0)$
- Pemetaan $T: W \rightarrow W$ adalah pemetaan (α, β, γ) -**nonekspansif** dengan $Fix(T) \neq \emptyset$.
- Parameter barisan $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ pada **interval** $(0, 1)$

Untuk konvergensi kuat, syarat cukup tambahan adalah W **kompak**.



Kesimpulan

1. Berdasarkan percobaan numerik, skema iterasi Sabri memiliki laju yang **lebih cepat** dibanding skema iterasi JK, Thakur, Abbas, dan Agarwal, dalam aproksimasi titik tetap dari pemetaan (α, β, γ) - nonekspansif.
2. Didapatkan aplikasi dalam **minimalisasi fungsi** dan **rekonstruksi citra**.

Saran

1. Pemetaan (α, β, γ) -nonekspansif dapat **diperluas** ke ruang metrik tak linier lainnya.
2. Kajian syarat konvergensi **kuat tanpa kekompakan** himpunan.
3. Perbandingan kelajuan secara **analitik**.
4. Rekonstruksi citra dengan menggunakan **data medis nyata**.



Daftar Pustaka Utama

Khamsi, M .A. dan Shukri, S. A.(2017), 'Generalized $CAT(0)$ spaces', Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin 24(3).

Sabri, R. I., Alhaidary, Z. S. dan Sadiq, F. A. (2025), 'NEW ITERATION APPROACH FOR APPROXIMATING FIXED POINTS', Nonlinear Functional Analysis and Applications 237–250.

Salisu, S., Minjibir, M. S., Kumam, P. dan Sriwongsa, S. (2022), 'Convergence theorems for fixed points in $CAT_p(0)$ spaces', Journal of Applied Mathematics and Computing 69(1), 631–650.

Ullah, K., Ahmad, J., Hammad, H. A. dan George, R. (2023), 'Iterative schemes for numerical reckoning of fixed points of new nonexpansive mappings with an application', AIMS Mathematics 8(5), 10711–10727.



TERIMA KASIH!

