Chapitre 6 :

Opérateurs Morphologiques

2022 - 2023

Traitement d’Images
M1 - MID423

M. SID AHMED BERRABAH

Chap.6 : Opérateurs Morphologiques

- **Contenu :**
  - **Image Binaire**
  - **Théorie des ensembles :Concepts de base**
  - **Érosion & Dilatation**
  - **Ouverture & Fermeture**
  - **Gradient morphologique**
  - **Squelettisation**
  - **Extension aux Images en niveau de gris**

Image Binaire

- Une image binaire I(x,y) est une image codée sur un bit,
- Une imagine binaire I(x,y) n'a que deux valeurs 0 (noir) et 1 (blanc) pour toute position (x,y).
- Les pixels 0 (noir) représentent le fond de l'image (background) et les pixels 1 (blanc) représentent l'objet (foreground)

Opérateurs Morphologiques

- La morphologie mathématique est basée sur la théorie des ensembles. Un ensemble est un objet de l’image.

- Chaque élément d’un ensemble est un vecteur 2D correspondant aux coordonnées (x,y) d’un pixel noir ou blanc.

- Les opérateurs morpho-mathématiques se sont initialement appliqués sur des images en noir et blanc (Matheron et Serra, 1965). Ils ont ensuite été étendus à des images en niveaux de gris par Dougherty en 1978. Pour les appliquer à des images couleurs, il suffit alors de les appliquer séparément à chaque composante couleur.

Opérateurs Morphologiques

- L'idée de base de la morphologie mathématique : comparer l'ensemble à analyser avec un ensemble de géométrie connue appelé élément structurant

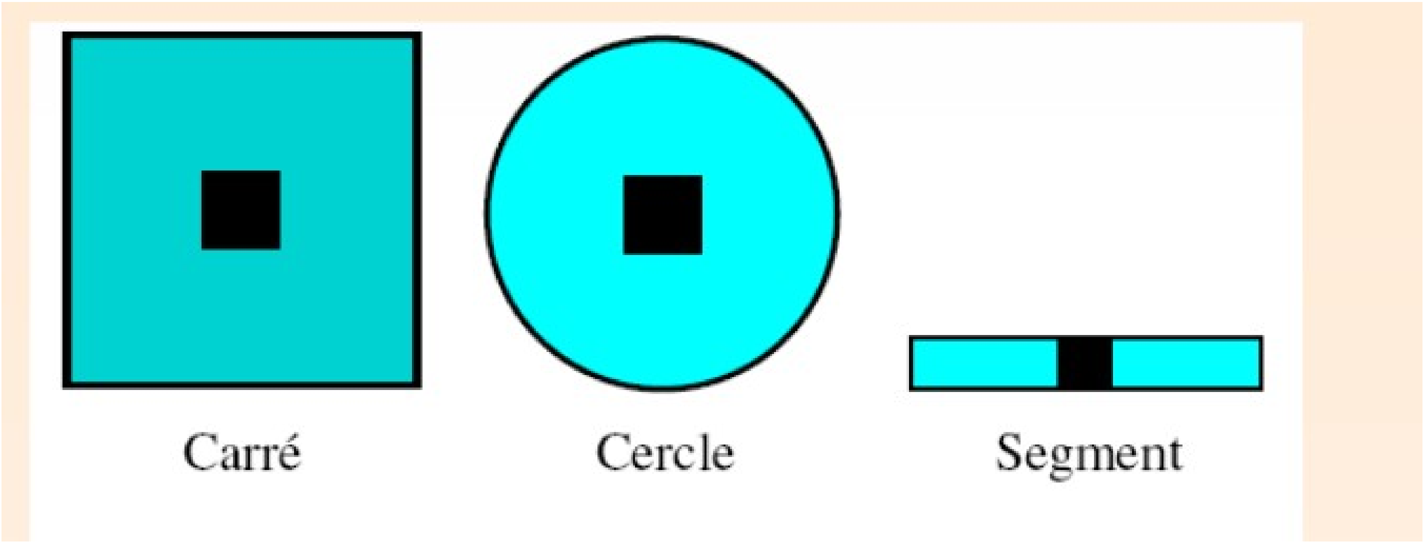
- Un élément structurant est un ensemble qui a les caractéristiques suivantes :

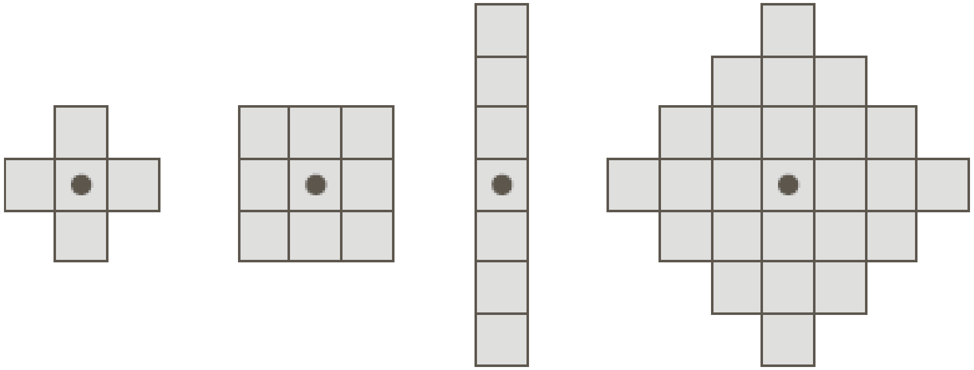
  - Il possède une forme de géométrie connue,

  - Cette forme a une taille,

  - Cet élément est repéré par son origine appartenant généralement à l'élément structurant.

Opérateurs Morphologiques





Théorie des ensembles : Concepts de base

- Soit A un ensemble et $a = (a1,a2)$ un élément :
  - Si a est un élément de A, alors on écrit $a \in A$
  - Sinon on écrit $a \notin A$
- L'ensemble vide est noté $\emptyset$
- Un ensemble est défini par le contenu spécifié entre { . }

Exemple :

$C = \{w \mid w = -d, d \in D\}$: C est l'ensemble des éléments w obtenus en multipliant les coordonnées de $d \in D$ par -1

Théorie des ensembles : Concepts de base

- Si chaque élément de B est inclus dans A, on dit que B est un sous-ensemble de A : $B \subseteq A$

- Le complément d'un ensemble est l'ensemble des éléments qui ne lui appartiennent pas $A^c = \{ w \mid w \notin A \}$

- La différence de deux ensembles est notée

$$A - B = \{ w \mid w \in A, w \notin B \} = A \cap B^c$$

- La réflexion (symétrie) d'un ensemble est définie par :

$$\hat{B} = \{ w \mid w = -b \,,\, pour\, b \in B \}$$

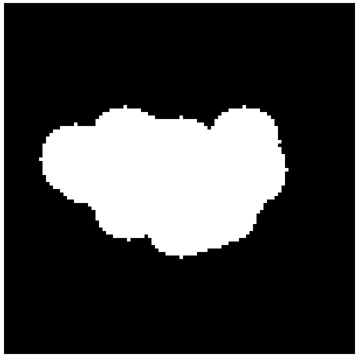
- La translation d'un ensemble par $z = (s_1, s_2)$ est définie par :

$$(A)_z = \{ w \mid w = a + z, \text{ pour } a \in A \}$$

Théorie des ensembles : Concepts de base

Union de A et B :

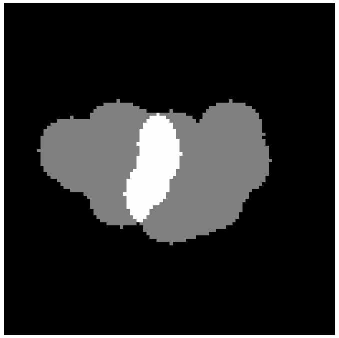
$$C = A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ or } c \in B\}$$



$A \cup B$

Intersection de A et B :

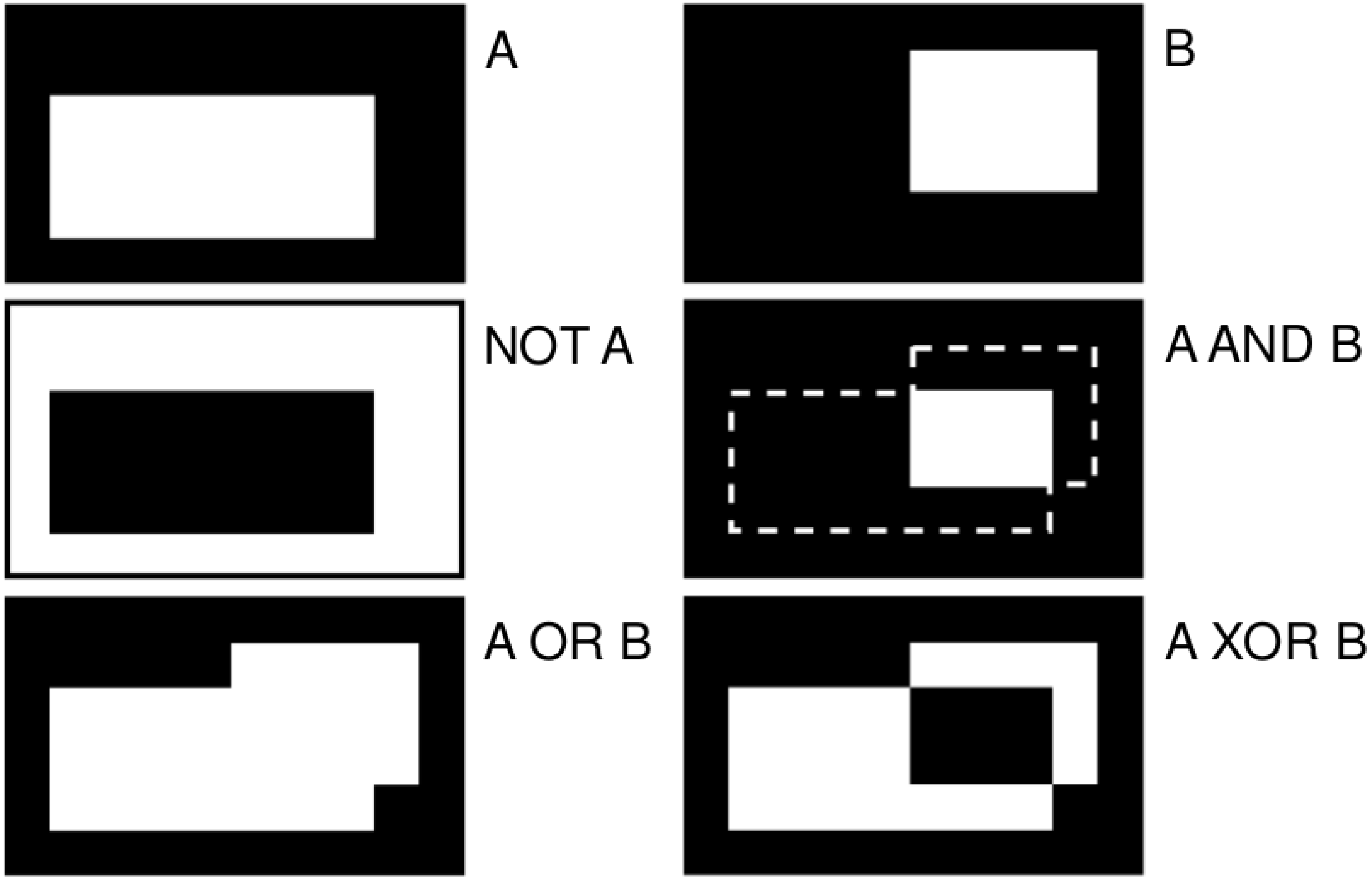
$$C = A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ and } c \in B\}$$



$A \cap B$

Disjoint / mutuellement exclusive : $A \cap B = \varnothing$

Théorie des ensembles: Opérations logiques



Dilatation

Soient A et B deux ensembles, on définit la dilatation de A par B (appelée aussi l'addition de Minkowski), notée A ⊕ B, par :

$$A \oplus B = \left\{ w \middle| \left(\hat{B} \right)_z \cap A \neq \emptyset \right\}$$

$$A \oplus B = \left\{ w \middle| \left(\hat{B} \right)_z \cap A \subseteq A \right\}$$

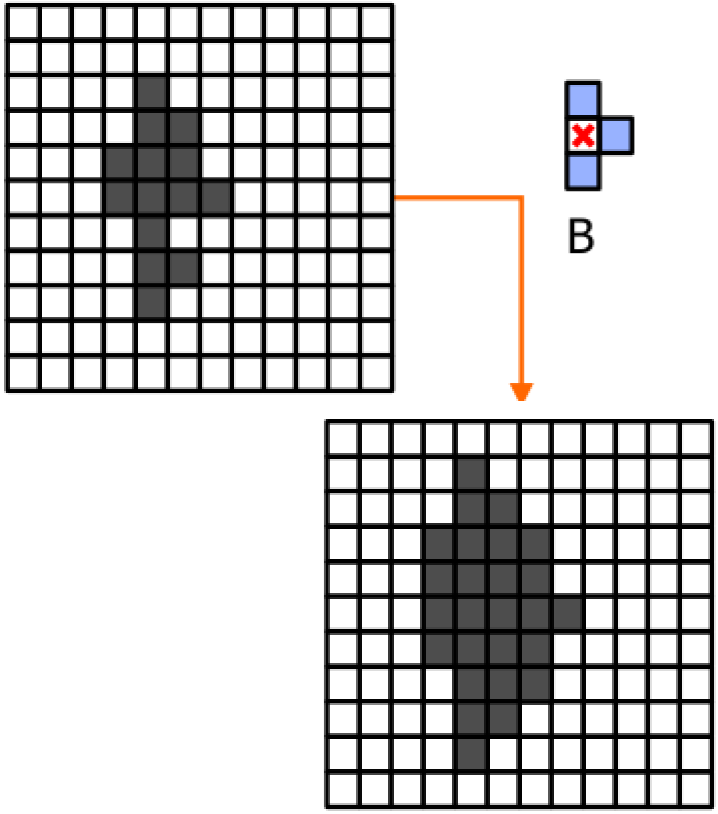
$$A \oplus B = \underset{z \in A}{U} \; B_z$$

- On translate de z la réflexion de B par rapport à l'origine
- La dilatation de A par B est l'ensemble des déplacements z de telle sorte que B̂ et A se recouvrent d'au moins un élément.

Dilatation

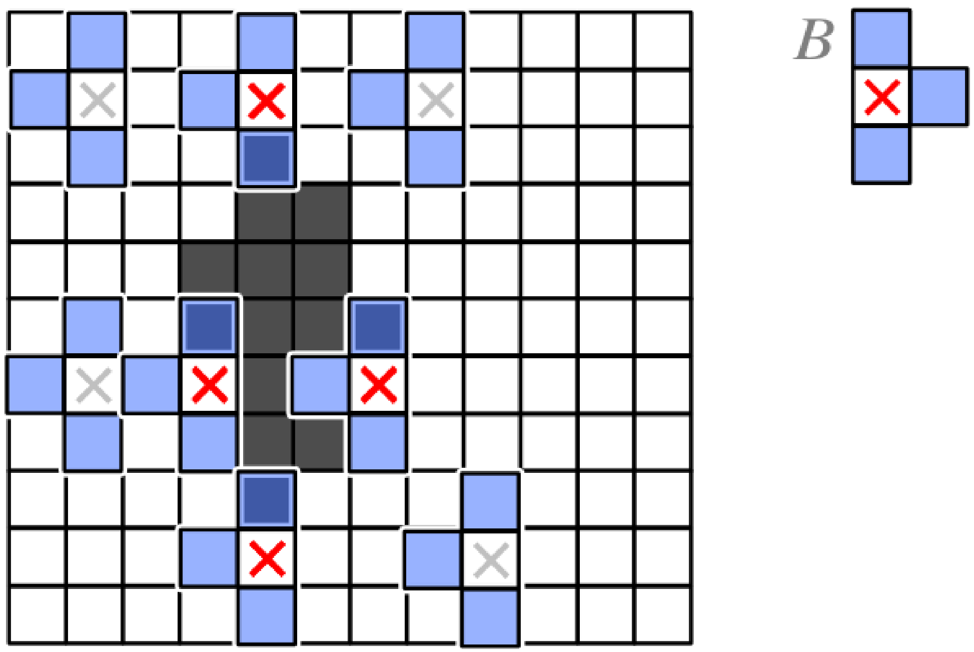
Autrement dit : Le résultat de la dilatation de l'ensemble A par l'ensemble B est l'ensemble des points tels que lorsque B est centré sur un de ces points il y a une intersection non vide entre A et B.

Lorsque l'intersection de l'élément structurant avec le foreground n'est pas vide, le centre de l'élément structurant est annexé au foreground

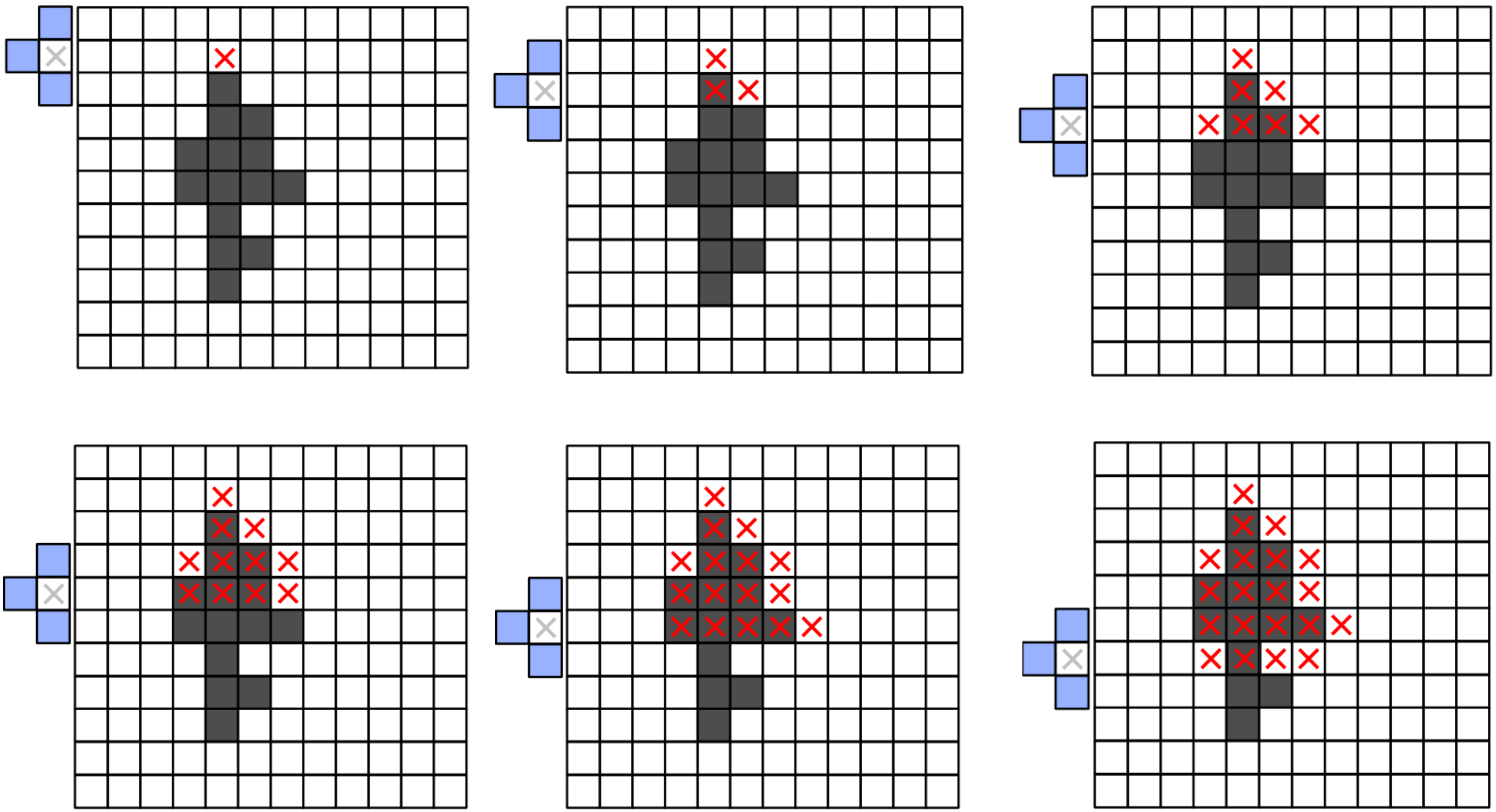


Dilatation

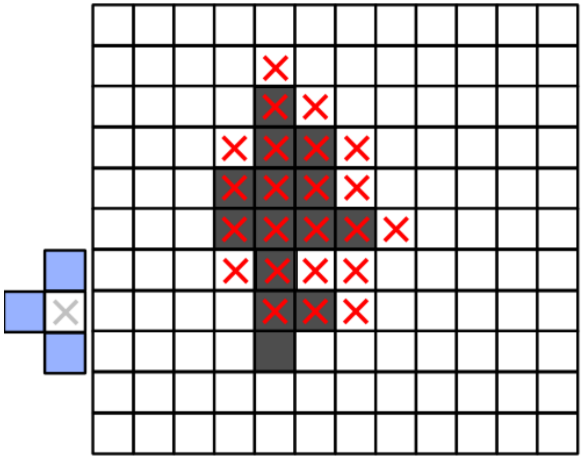
Exemple de dilatation

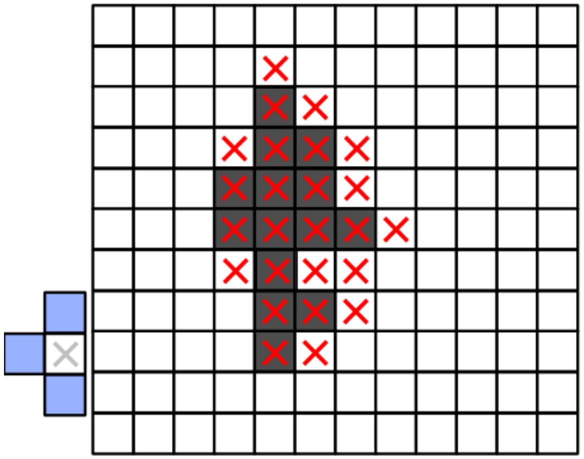


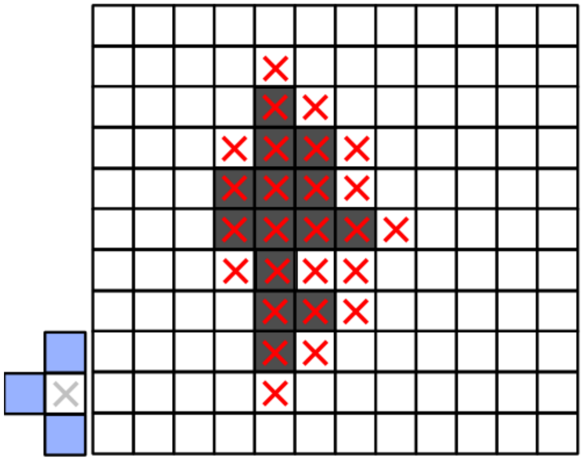
Dilatation

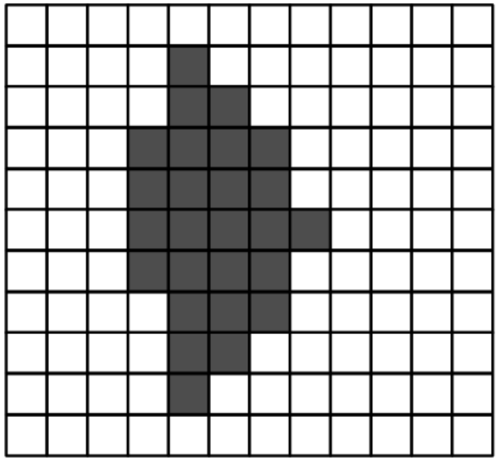


Dilatation



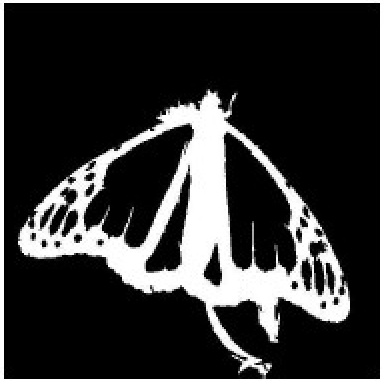






Dilatation

Exemples d’utilisation de la dilatation d’image :



Érosion

- Soient A et B deux ensembles, on définit l'érosion de A par B, notée $A \ominus B$, par :

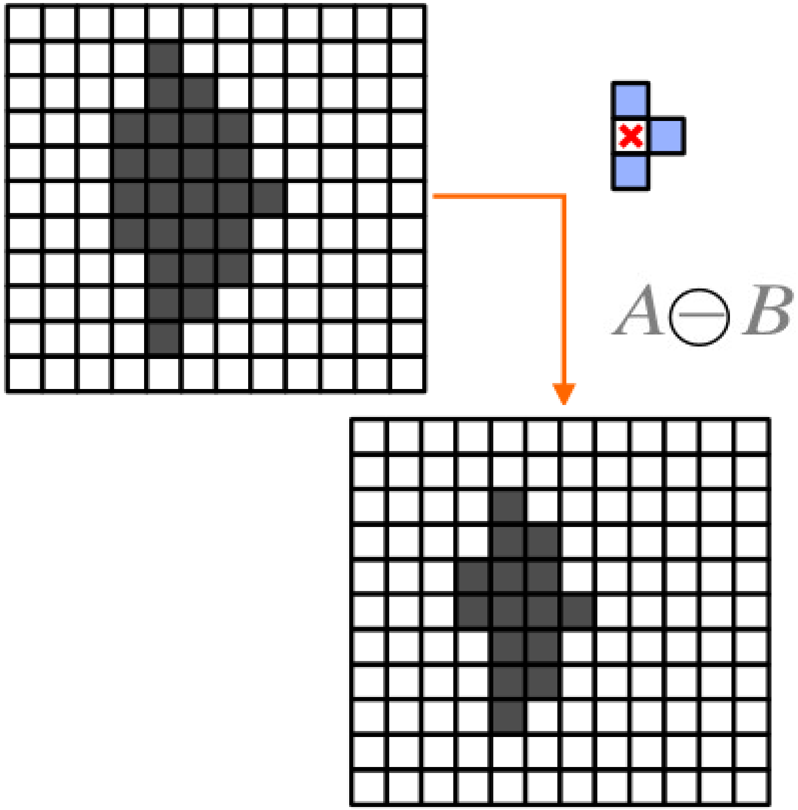
$$A \ominus B = \{ w \mid (B)_z \subseteq A \}$$

- L'érosion de A par B est l'ensemble des points z tels que B, translaté de z, est inclus dans A

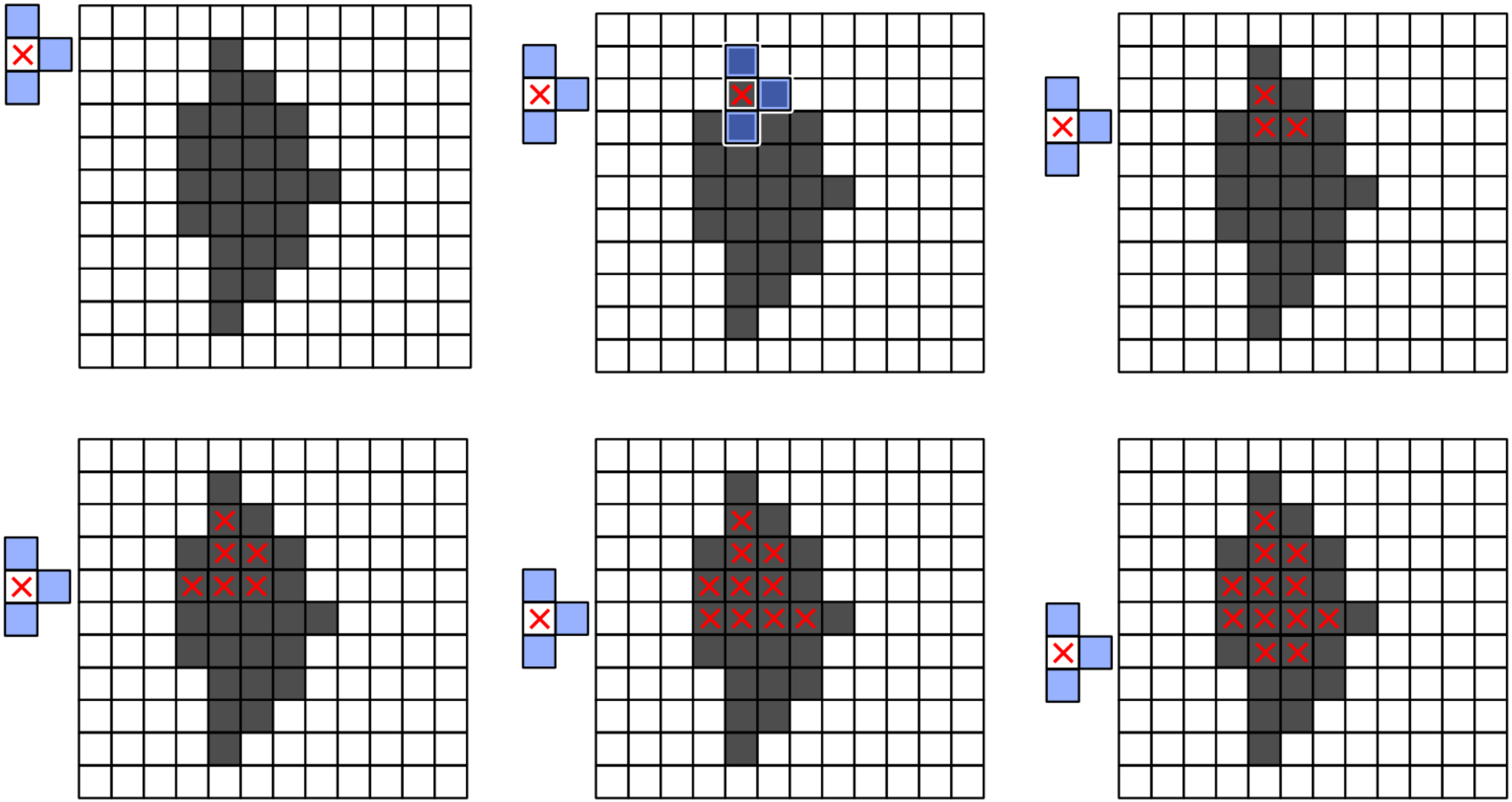
- Autrement dit L'érodé de A par B correspond à l'ensemble des points tels que si B est centré sur ces points, B est entièrement inclus dans A.

Érosion

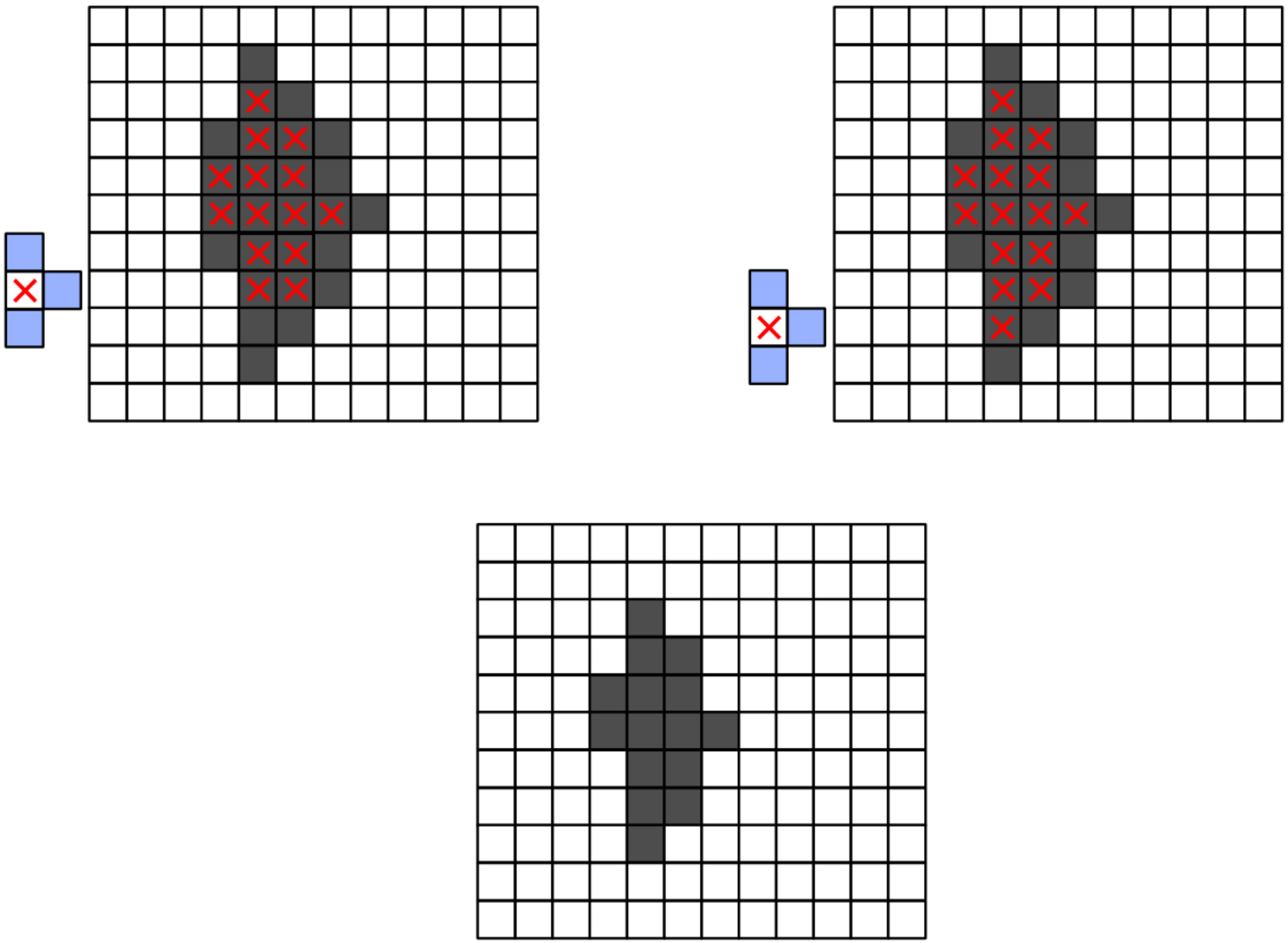
Exemple du calcul d'érosion :



Érosion



Érosion



Dualité Dilatation – Érosion

- l'érosion de A par B est duale de la dilatation par ^B :

$$A \ominus B = \left(A^C \oplus \hat{B}\right)^C$$

- De même la dilatation de A par B est dual de l'érosion par ^B :

$$A \oplus B = \left(A^C \ominus \hat{B}\right)^C$$

Ouverture

- L'ouverture (opening) consiste en une érosion suivie d'une dilatation en utilisant le même élément structurant :

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

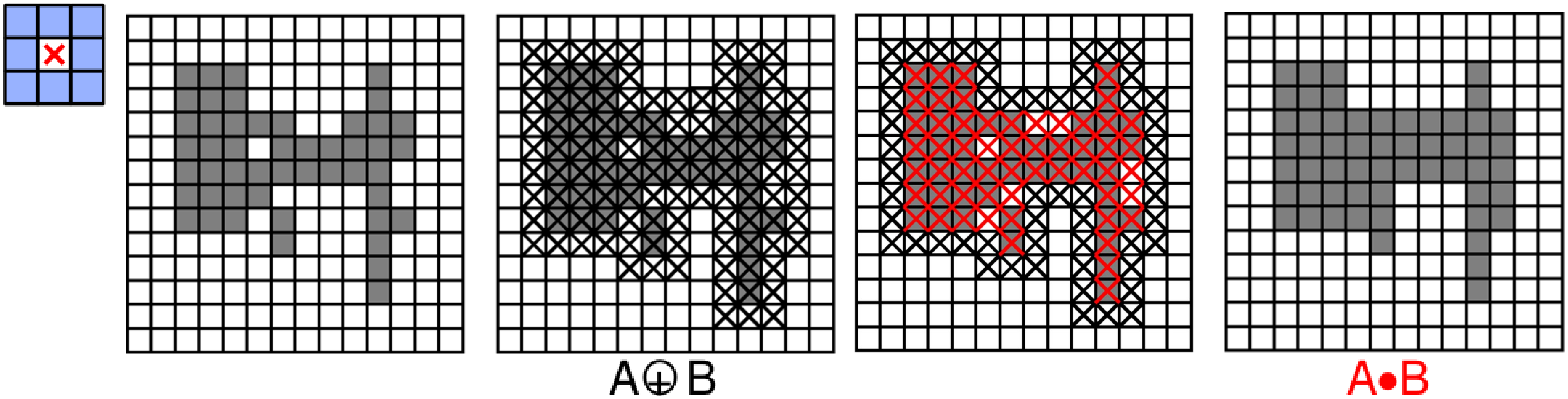
- Élimine les parties non relevante sans affecter les autres partie de l'image

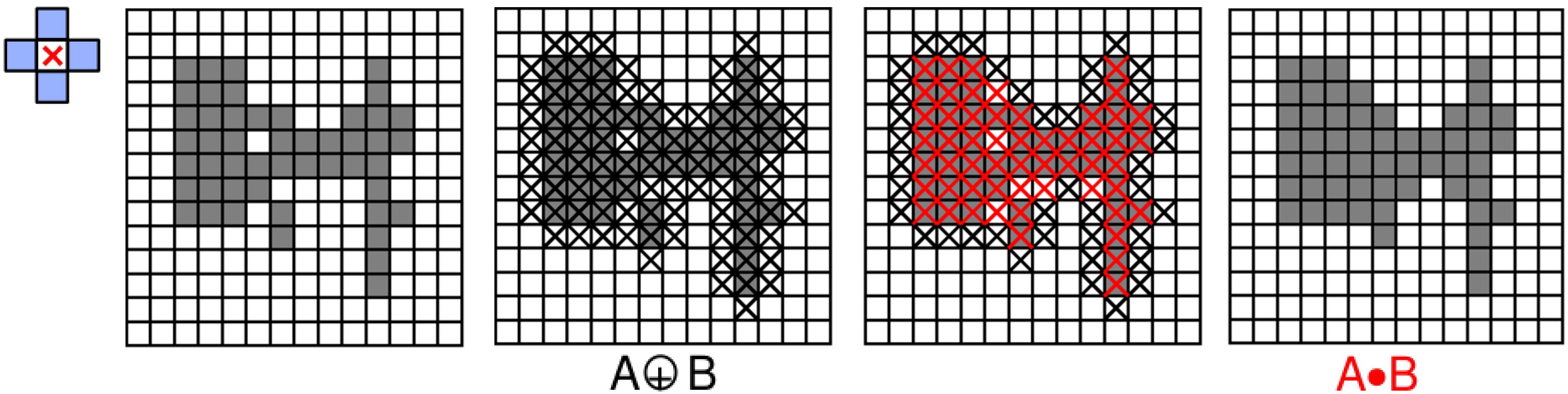
Fermeture

- La fermeture (closing) consiste en une dilatation suivie d'une érosion en utilisant le même élément structurant :

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

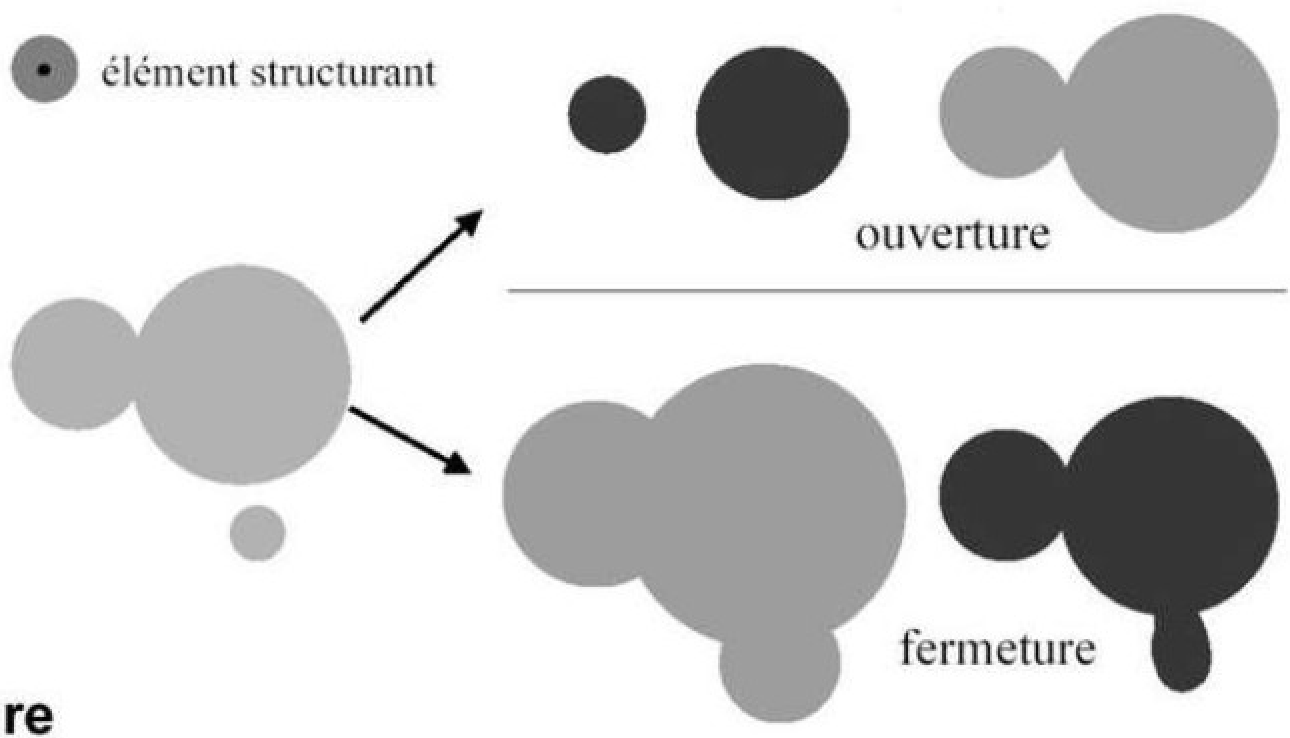
Fermeture





Ouverture et Fermeture

- **Ouverture**
  - Erosion puis dilatation



- **Fermeture**
  - Dilatation puis érosion

Propriétés de l’Ouverture et Fermeture

- L ‘application répétée de l’ouverture avec le même élément structurant n’a aucun effet (idempotente) :

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

- L ‘application répétée de la fermeture avec le même élément structurant n’a aucun effet (idempotente) :

$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

- Tout comme il y a dualité entre érosion et dilatation, on retrouve cette dualité entre ouverture et fermeture :

$$A \circ B = (A^c \bullet B)^c$$
$$A \bullet B = (A^c \circ B)^c$$

Gradient morphologique : Détection de contour

- On obtient un contour intérieur en prenant le complémentaire de A par rapport à son érodé :

$$A - (A \ominus B)$$

- On obtient le contour extérieur en prenant le complémentaire du dilaté par rapport à A :

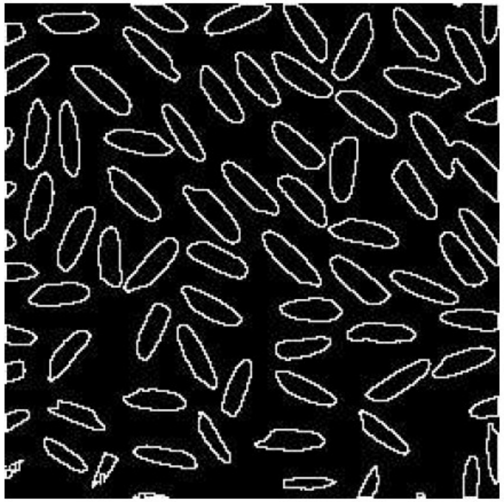
$$(A \oplus B) - A$$

- Le contour moyen, appelé également gradient morphologique est le complémentaire du dilaté par rapport à l'érodé de A :

$$(A \oplus B) - (A \ominus B)$$

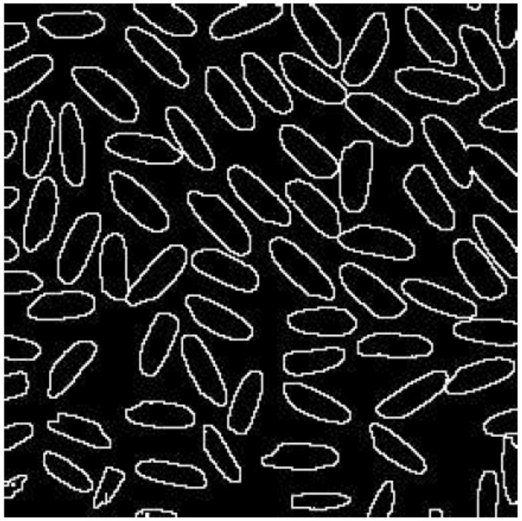
Gradient morphologique : Détection de contour

Image originale



contour intérieur

contour extérieur

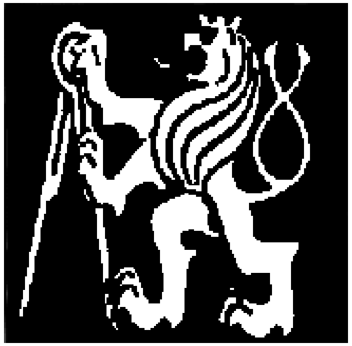


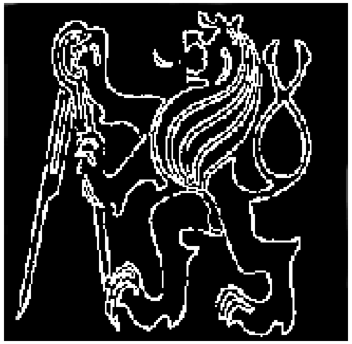
gradient morphologique

Gradient morphologique : Détection de contour

Image originale

Image érodée

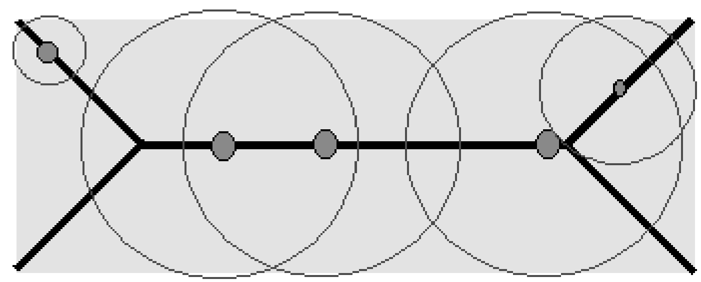




Contour intérieur

Amincissement & Squelettisation

- Squelettisation : Estimation de l’axe médian d’un objet qui est la trace des centres des disques maximaux entièrement contenus dans une région.



- Pour obtenir un squelette, une méthode couramment employée est un amincissement répété (jusqu’à convergence, c’est-à-dire lorsque que l’amincissement n’apporte plus de modification).
- Exemple d’utilisation la squelettisation est dans la reconnaissance de caractères, la détection de réseaux routiers, la planification de trajectoire, ...

Amincissement & Squelettisation

Transformation Hit or Miss (HTM)

$$A \otimes B = (A \Theta B) \cap (A^C) \Theta B'$$

où B’ est le complémentaire local de B.

Transformation Hit or Miss A⊗B est l’ensemble des points qui appartiennent à l’érodé de A par B ainsi qu’à l’érodé du complémentaire de A par le complémentaire local de B.

Amincissement & Squelettisation

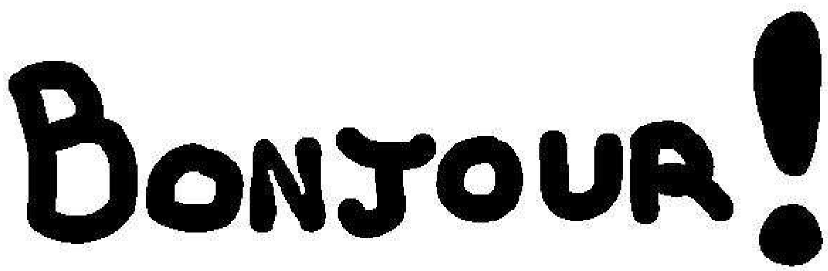
Amincissement (thinning) : correspond à une érosion qui conserve les structures des formes et connexions entre formes.

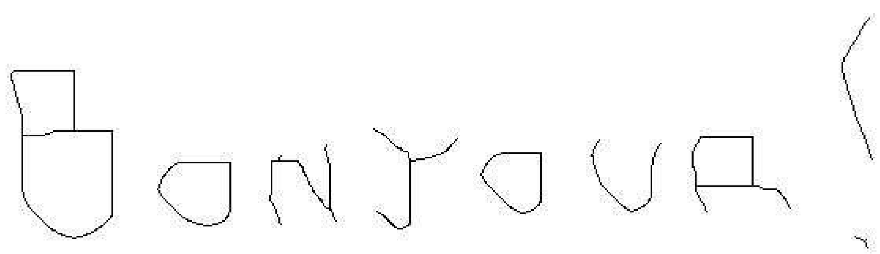
$$thin(A) = A - (A \otimes B)$$

- Des érosions successives de A par B conduisent à la disparition complète de A tandis que des amincissements successifs de A par B conduisent au squelette.

- Pour obtenir le squelette, il suffit d'appliquer des amincissements successifs et de s'arrêter lorsque l'amincissement n'apporte plus de modification.

Amincissement & Squelettisation





Amincissement & Squelettisation

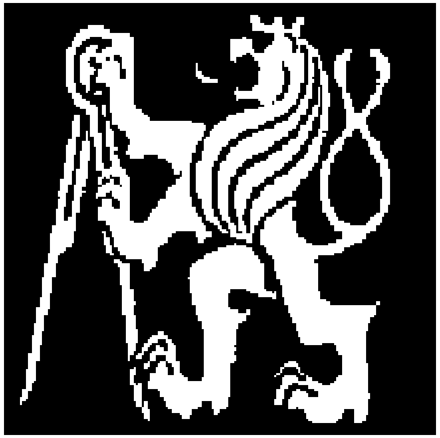
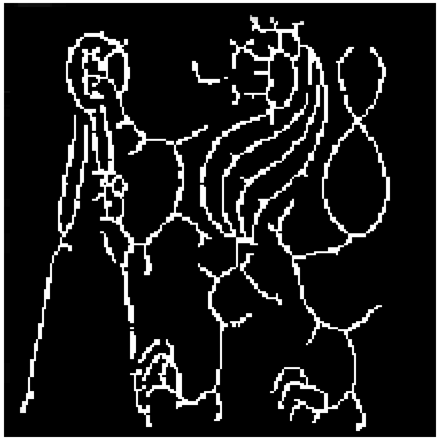


Image originale



Squelette = multiple amincissements

Extension aux Images en niveau de gris

Dilatation de l'image en niveau de gris :

Les pixels du fond sont toujours les pixels noirs ou les pixels de valeurs inférieures à un seuil bas. Les autres pixels appartiennent donc aux objets. La condition de modification d'un pixel est identique. Par contre, dans le cas ou plusieurs voisins appartiennent aux objets, il faut choisir quelle valeur va être utilisée pour colorier le pixel courant : on prend alors la valeur maximale.

$$D_B(x, y) = I(x,y) \oplus B = \mathrm{Sup}\,\{I(x, y), (x, y) \in (B)_z\}$$

Extension aux Images en niveau de gris

Erosion de l'image en niveau de gris :

Les pixels du fond sont les pixels de valeurs inférieures à un seuil. Les autres pixels appartiennent donc aux objets. La condition de modification d'un pixel est donc identique. Par contre, dans le cas ou plusieurs voisins appartiennent au fond, on va choisir la valeur minimale pour colorier le pixel courant.

$$E_B(x, y) = I(x,y) \ominus B = \mathrm{Inf}\,\{I(x, y), (x, y) \in (B)_z\}$$

Extension aux Images en niveau de gris

Ouverture et Fermeture de l’image en niveau de gris :

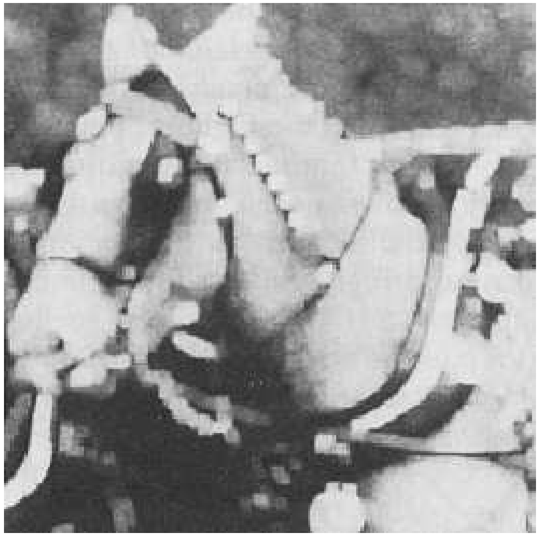
On définit ouverture et fermeture de l’image en niveau de gris par composition des dilatations et érosions.

- Ouverture : “érodes” les pics plus petits que l’élément structurant.

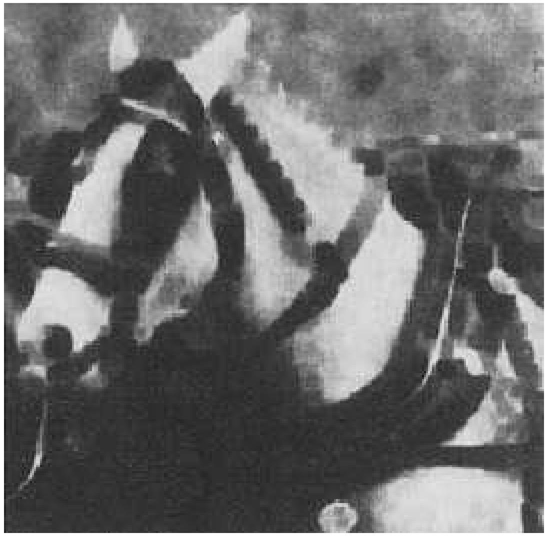
- Fermeture : remplit les creux plus petits que l’élément structurant

Extension aux Images en niveau de gris

Image Originale I(x,y)



I(x,y) ⊕ B

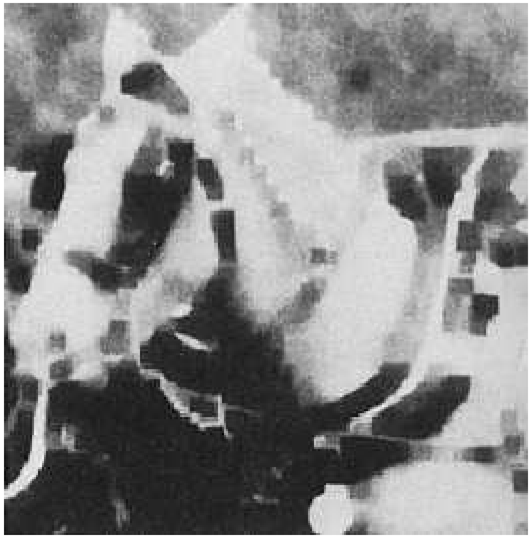


I(x,y) ⊖ B

Extension aux Images en niveau de gris

Image Originale I(x,y)

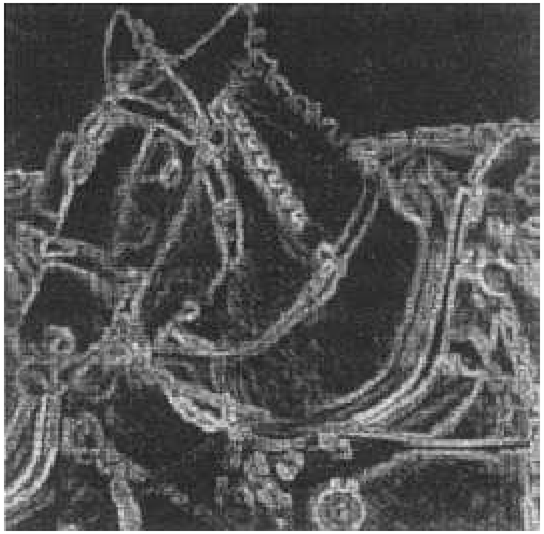
I(x,y) o B



I(x,y) • B

Extension aux Images en niveau de gris

Image Originale I(x,y)



$(I(x,y) \oplus B) - (I(x,y) \ominus B)$

Exemple d’utilisation d’op Morphologiques

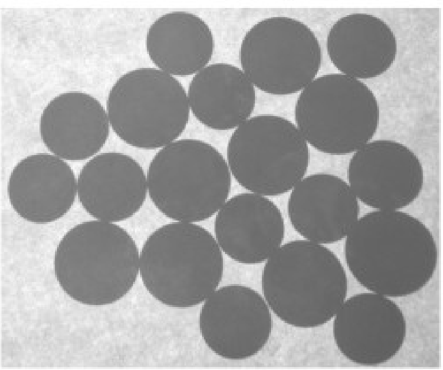
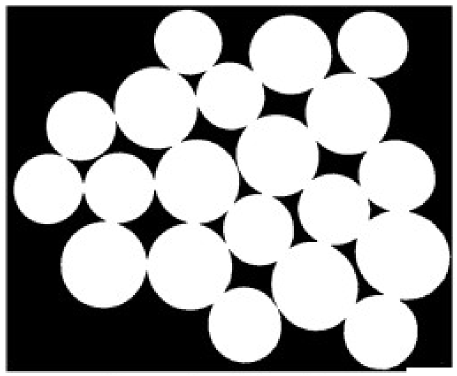
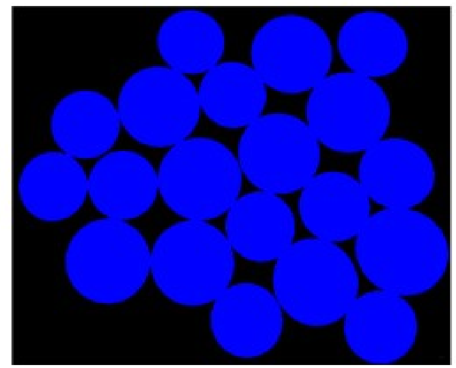


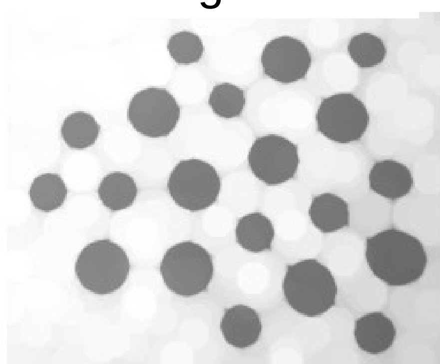
Image Originale



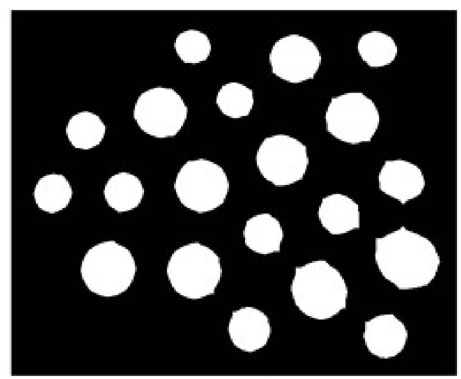
Seuillage



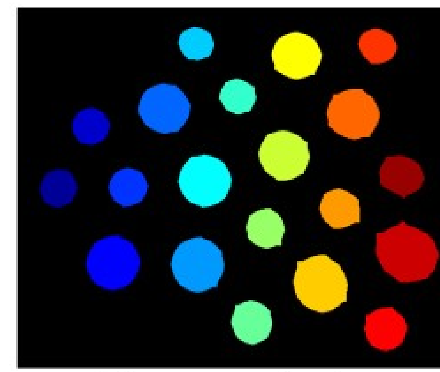
1 Composant Connecté



Erosion



Seuillage



20 composants connectés