



# Éléments de Théorie des Graphes

ENSG - DEI



Ce cours s'inspire de différents documents pédagogiques sur la théorie des graphes, notamment [7, 8, 9].

Template LaTeX tiré de © 2013 John Smith

# Table des matières

I	Généralités sur les graphes	
<b>I</b>	<b>Premières définitions .....</b>	<b>11</b>
1.1	Définition intuitive d'un graphe	11
1.2	Graphe orienté	12
1.3	Graphe non orienté	12
1.4	Ordre d'un graphe	12
1.5	Relations entre les éléments d'un graphe	13
1.5.1	Relations entre les sommets d'un graphe .....	13
1.5.2	Relations entre les sommets et les arcs d'un graphe .....	13
1.5.3	Relations entre les arcs d'un graphe .....	14
1.6	Multiplicité et degré	14
1.6.1	Multiplicité d'une paire de sommets .....	14
1.6.2	Degré d'un sommet .....	14
1.7	Sous-graphes	15
1.7.1	Graphe partiel .....	15
1.7.2	Sous-graphe .....	16
1.7.3	Sous-graphe partiel .....	16
1.8	Graphes particuliers	16
1.8.1	Graphe régulier .....	16
1.8.2	Graphe symétrique .....	16
1.8.3	Multigraphe .....	17
1.8.4	p-graphe .....	17
1.8.5	Graphe simple .....	17
1.8.6	Graphe et sous-graphe complet .....	18

1.8.7	Graphe biparti . . . . .	19
<b>1.9</b>	<b>Morphisme et isomorphisme de graphe</b>	<b>19</b>
1.9.1	Graphes homomorphes . . . . .	19
1.9.2	Graphes isomorphes . . . . .	20
<b>1.10</b>	<b>Hypergraphe</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>Modes de représentation d'un graphe . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>2.1</b>	<b>Matrice d'adjacence</b>	<b>22</b>
<b>2.2</b>	<b>Matrice d'incidence</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Matrice SIF</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>Étude de la connexité . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Chaîne, cycles et cocycles</b>	<b>25</b>
3.1.1	Chaîne . . . . .	25
3.1.2	Cycle . . . . .	25
3.1.3	Cocycle . . . . .	26
<b>3.2</b>	<b>Chemin et circuit</b>	<b>27</b>
3.2.1	Chemin . . . . .	27
3.2.2	Circuit . . . . .	27
<b>3.3</b>	<b>Graphe et sous-graphes connexes</b>	<b>28</b>
<b>3.4</b>	<b>Points et ensembles d'articulation, isthmes</b>	<b>28</b>
3.4.1	Points et ensembles d'articulation . . . . .	28
3.4.2	Isthme . . . . .	29
<b>3.5</b>	<b>Graphe et sous-graphes fortement connexes</b>	<b>29</b>

## II

## Cycles, graphes planaires et arbres

<b>4</b>	<b>Vocabulaire autour des cycles . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.1</b>	<b>Décomposition des cycles en cycles élémentaires</b>	<b>32</b>
4.1.1	Notation vectorielle . . . . .	32
4.1.2	Décomposition des cycles en cycles élémentaires . . . . .	32
4.1.3	Base de cycles et nombre cyclomatique . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Planarité . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>5.1</b>	<b>Graphe planaire</b>	<b>35</b>
<b>5.2</b>	<b>Vocabulaire autour des faces</b>	<b>35</b>
<b>5.3</b>	<b>Formule d'Euler</b>	<b>37</b>
<b>5.4</b>	<b>Subdivision et théorème de Kuratowski</b>	<b>37</b>
5.4.1	Homéomorphisme de graphe . . . . .	37
5.4.2	Théorème de Kuratowski . . . . .	38
<b>5.5</b>	<b>Graphe dual</b>	<b>39</b>
<b>5.6</b>	<b>Application : triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï</b>	<b>39</b>
5.6.1	Triangulation de Delaunay . . . . .	39
5.6.2	Diagramme de Voronoï . . . . .	40

<b>6</b>	<b>Vocabulaire sur les arbres</b>	<b>45</b>
----------	-----------------------------------	-----------

### III

## Problèmes de cheminement

<b>7</b>	<b>Problème eulérien</b>	<b>51</b>
7.1	Chaîne eulérienne et cycle eulérien	51
7.2	Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un cycle eulérien	52
7.3	Algorithme pour tracer cycle eulérien	53
<b>8</b>	<b>Problème hamiltonien</b>	<b>54</b>
8.1	Chaîne hamiltonienne et cycle hamiltonien	54
8.2	Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien	55
8.3	Condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien	56
8.4	Condition suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien	56
<b>9</b>	<b>Recherche des composantes connexes</b>	<b>57</b>
<b>10</b>	<b>Recherche de plus courts chemins</b>	<b>59</b>

### IV

## Notion de flots

<b>11</b>	<b>Définitions</b>	<b>69</b>
11.1	Flot et coupe	69
11.2	Flot maximum, coupe minimum	70
11.3	Chaîne améliorante	71
<b>12</b>	<b>Algorithme de Ford-Fulkerson</b>	<b>72</b>

### V

## Coloration de graphe

<b>13</b>	<b>Coloration des sommets</b>	<b>77</b>
13.1	Ensembles stables et nombre de stabilité	77
13.2	Encadrement du nombre chromatique	77
13.2.1	Minoration de $\chi(G)$	77
13.2.2	Majoration de $\chi(G)$	78
13.3	Théorème des 4 couleurs	79
13.4	Exemples d'applications	79
13.5	Algorithme de coloration de graphe	80
<b>14</b>	<b>Coloration des arrêtes</b>	<b>81</b>
<b>15</b>	<b>Graphes parfaits</b>	<b>82</b>

<b>16</b>	<b>Graphes triangulé, graphes d'intervalle</b>	<b>84</b>
16.1	Graphe triangulé	84
16.2	Graphe d'intervalle	84
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

## Un bref historique de la théorie des graphes

Une formalisation mathématique particulièrement adaptée, et en fait la plus utilisée en pratique, afin d'étudier les réseaux spatiaux est la théorie des graphes, comme le soulignent [Beauquier1992, Mathis2003] : "les graphes constituent certainement l'outil théorique le plus utilisé pour la modélisation et la recherche des propriétés d'ensembles structurés. Ils interviennent chaque fois que l'on veut représenter et étudier un ensemble de liaisons (orientées ou non) entre les éléments d'un ensemble fini d'objets". Les composants du réseau sont alors appelés *nœuds* et les relations *arcs*, localisés dans l'espace par des coordonnées sous forme respectivement d'un point, ou d'un objet à géométrie linéaire.

Il est communément admis que la théorie des graphes est née en 1736, lorsque Euler résolut le célèbre problème des ponts de Königsberg [Euler1736] : est-il possible de faire le tour de la ville de Königsberg en passant une et une seule fois par chacun de ses sept ponts ? Il modélisa ce problème sous forme de dessin, en représentant les îles et les rives de la rivière par des points, et les ponts par des lignes reliant les points, et proposa un traitement mathématique pour démontrer qu'il n'y a pas de solution (c.f figure 1). Un problème similaire, appelé *le problème du cavalier*, consistant à déplacer

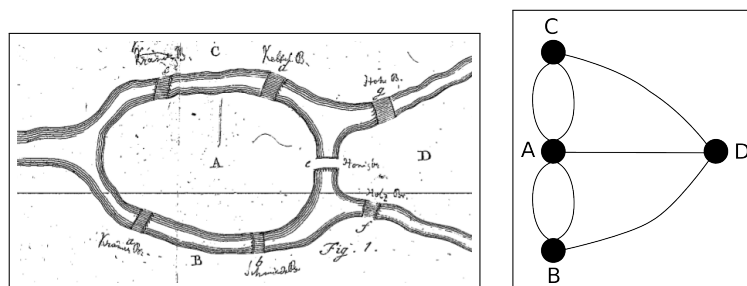


FIGURE 1 – Le problème des ponts de Königsberg résolu par [Euler1736]

un cavalier sur chaque case d'un échiquier exactement une fois, fut étudié par [11] en 1771. Durant le siècle qui suivit, de nombreuses études axées sur la théorie des graphes furent menées. Cayley (1821-1895) s'intéressa aux arbres, un type de graphes particulier, et J.J Sylvester introduisit

en premier le terme de *graphe* en 1878 [10]. Le fameux problème de la coloration de graphes dont le but est de déterminer le nombre minimal de couleurs à utiliser afin de colorier chaque sommet d'un graphe de sorte qu'aucun sommet n'ait la même couleur qu'un de ses sommets voisins, et plus particulièrement le problème des *quatre couleurs*, fût probablement présenté en premier par Möbius (1790-1868) en 1940. Les premières références à ce problème apparaissent dans des correspondances entre Auguste de Morgan (1806-1871) et ses collègues mathématiciens. Il ne fut résolu qu'en 1976 par Appel et Haken [1].

En 1936, König publie le premier livre consacré exclusivement à la théorie des graphes [5]. L'après seconde guerre mondiale marque le début d'une période particulièrement riche pour le développement de la théorie des graphes. Le mathématicien Français Claude Berge (1926-2002) opère un fabuleux travail de synthèse en publiant en 1958 un ouvrage d'introduction à la théorie des graphes, unifiant sous une théorie plus abstraite de très nombreux travaux issus de la littérature [2]. Il introduit également la notion de graphe parfait [3] et d'hypergraphe [4].

Depuis, cette théorie a pris sa place en tant que discipline mathématique à part entière, en subissant de très nombreux développements et a connu un grand regain d'intérêt suite à l'émergence des réseaux sociaux dont l'analyse structurelle et relationnelle des connexions et de la topologie est révélatrice de structures, de communautés, voire même de ruptures [6, 12].



# Généralités sur les graphes

<b>1</b>	<b>Premières définitions .....</b>	<b>11</b>
1.1	Définition intuitive d'un graphe	
1.2	Graphe orienté	
1.3	Graphe non orienté	
1.4	Ordre d'un graphe	
1.5	Relations entre les éléments d'un graphe	
1.6	Multiplicité et degré	
1.7	Sous-graphes	
1.8	Graphes particuliers	
1.9	Morphisme et isomorphisme de graphe	
1.10	Hypergraphe	
<b>2</b>	<b>Modes de représentation d'un graphe .....</b>	<b>22</b>
2.1	Matrice d'adjacence	
2.2	Matrice d'incidence	
2.3	Matrice SIF	
<b>3</b>	<b>Étude de la connexité .....</b>	<b>25</b>
3.1	Chaîne, cycles et cocycles	
3.2	Chemin et circuit	
3.3	Graphe et sous-graphes connexes	
3.4	Points et ensembles d'articulation, isthmes	
3.5	Graphe et sous-graphes fortement connexes	



# 1. Premières définitions

## 1.1 Définition intuitive d'un graphe

**Définition 1.1.1 — Graphe.** Un graphe est un dessin constitué de points, appelés *sommets* du graphe, et de traits ou de flèches, appelés arcs ou arrêtes du graphe, reliant des paires de sommets.

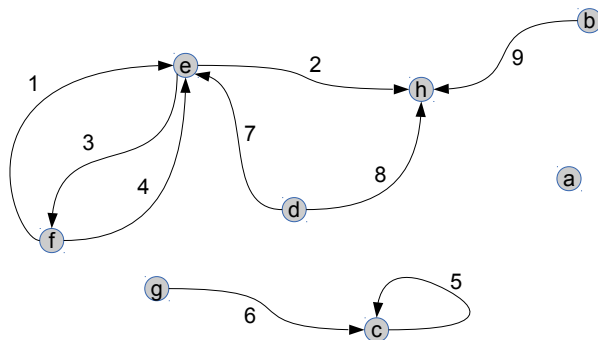


FIGURE 1.1 – Un exemple de graphe.

**R** La forme des arcs (la géométrie dans le cas où le graphe représente un réseau spatialisé) et la position des sommets n'a ici pas d'importance : seules importent les relations d'adjacence, *i.e* la façon dont les sommets sont reliés entre eux. Deux graphes dont le dessin diffère fortement peuvent donc posséder la *même topologie*, et donc les mêmes relations de voisinages entre sommets : on parle alors d'*isomorphisme* de graphes (voir plus loin).

## 1.2 Graphe orienté

**Définition 1.2.1 — Graphe orienté.** Un graphe orienté  $G$  est un couple  $G = (V, E)$  constitué :

- d'un ensemble  $V$  dont les éléments sont appelés **sommets** ou nœuds,
- d'une partie  $E \subset V \times V$  dont les éléments sont appelés **arcs** ou arêtes.

**Notation 1.1.** Une arête  $a = (x, y)$  de  $G$  pourra également être notée  $a = xy$ .

**R** La définition des arêtes implique la notion de *relation* entre sommets : une arête donnée relie bien deux sommets entre eux.  
Si aucune contrainte n'est imposée sur les propriétés de la partie  $E$  des arêtes du graphe, l'ordre des sommets les décrivant est important : si  $a = (x, y)$  est une arête du graphe, rien n'impose que  $(y, x)$  en soit également une. L'ordre des couples formant les arêtes est donc primordial : le graphe est **orienté**.  
L'orientation des arêtes est représentée graphiquement par des flèches.

## 1.3 Graphe non orienté

**Définition 1.3.1 — Graphe non orienté.** Un graphe non orienté  $G$  est un couple  $G = (V, E)$  constitué :

- d'un ensemble  $V$  dont les éléments sont appelés **sommets**,
- d'une partie  $E \subset V \times V$  *symétrique* ( $(x, y) \in E \implies (y, x) \in E$ ) dont les éléments sont appelés **arcs**.

**R** Dans un graphe non orienté, l'ordre des couples formant les arcs n'a plus d'importance : on pourra indifféremment noter  $(x, y)$  ou  $(y, x)$  pour décrire un arc joignant les sommets  $x$  et  $y$ . Les arcs d'un graphe non orienté sont représentés graphiquement par des traits sans flèches.

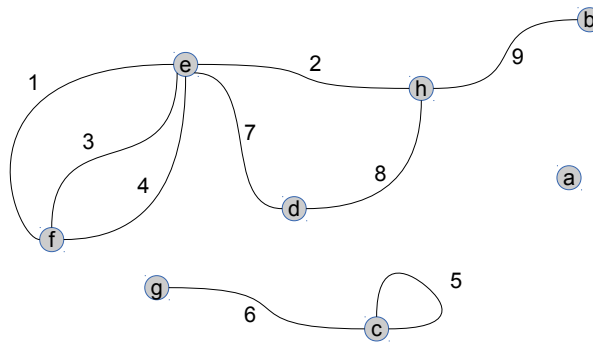


FIGURE 1.2 – Un exemple de graphe non orienté.

## 1.4 Ordre d'un graphe

On suppose l'ensemble  $V$  fini.

**Définition 1.4.1 — Ordre d'un graphe.** L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.

**R** L'ordre d'un graphe correspond donc au cardinal de l'ensemble de ses sommets  $|V|$ .

■ **Exemple 1.1** Le graphe de la figure 1.1 est d'ordre 8. ■

## 1.5 Relations entre les éléments d'un graphe

### 1.5.1 Relations entre les sommets d'un graphe

**Définition 1.5.1 — Successeur, prédécesseur et voisin.** Si il existe un arc de la forme  $a = (x, y)$  alors :

- $y$  est un **successeur** de  $x$ ,
- $x$  est un **prédécesseur** de  $y$ ,
- $x$  et  $y$  sont **voisins** ou **adjacents**.

Un sommet n'ayant qu'un seul voisin est appelé **sommet pendant**.

■ **Exemple 1.2** Sur le graphe de la figure 1.1, les sommets  $b$  et  $h$  sont voisins.  $b$  est un prédécesseur de  $h$  et  $h$  un successeur de  $b$  puisqu'il existe une arête  $(b, h)$  les reliant. ■

**Notation 1.2.** L'ensemble des sommets prédécesseurs du sommet  $x$  est noté  $\Gamma^-(x)$ .

**Notation 1.3.** L'ensemble des sommets successeurs du sommet  $x$  est noté  $\Gamma^+(x)$ .

**Notation 1.4.** Enfin, l'ensemble des sommets voisins du sommet  $x$  est noté  $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

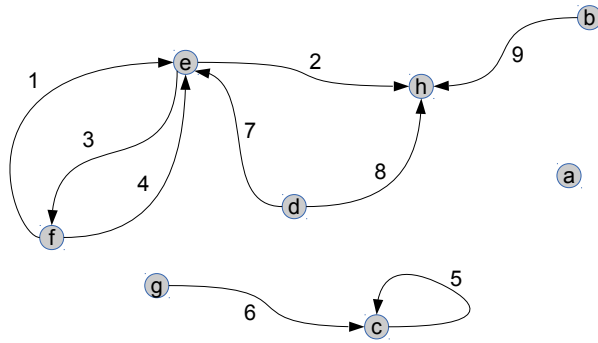


FIGURE 1.3 –  $\Gamma(e) = \Gamma^+(e) \cup \Gamma^-(e) = \{f, h\} \cup \{f, d\} = \{f, d, h\}$ .

### 1.5.2 Relations entre les sommets et les arcs d'un graphe

**Définition 1.5.2 — Extrémités, arc incident.** Si il existe un arc de la forme  $a = (x, y)$  alors :

- $x$  et  $y$  sont les **extrémités** de  $a$ ,
- dans le cas d'un graphe orienté,  $x$  est l'extrémité **initiale** (ou *origine*) de  $a$ , et  $y$  l'extrémité **finale** (ou *destination*) de  $a$ ,
- dans le cas d'un graphe orienté, on dit que l'arête  $a$  est **incidente** au sommet  $x$  vers l'extérieur et incidente au sommet  $y$  vers l'intérieur.

Un arc *pendant* est un arc incident à un sommet pendant.

**R** Dans un graphe orienté, lorsqu'il existe un arc  $a = (x, y)$ , on dit aussi que  $a$  est un arc *sortant* pour  $x$ , et un arc *entrant* pour  $y$ .

■ **Exemple 1.3** Sur le graphe de la figure 3.5, l'arc 3 est incident aux sommets  $e$  et  $f$ .  $e$  est l'extrémité initiale de 3 et  $f$  son extrémité finale. ■

**Notation 1.5.** L'ensemble des arcs incidents à un sommet  $x$  vers l'intérieur (arcs entrants) est noté  $w^-(x)$ .

**Notation 1.6.** L'ensemble des arcs incidents à un sommet  $x$  vers l'extérieur (arcs sortants) est noté  $w^+(x)$ .

**Notation 1.7.** Enfin, l'ensemble des arcs incidents à  $x$  est noté  $w(x) = w^+(x) \cup w^-(x)$ .

**Définition 1.5.3 — Boucle.** Une **boucle** est un arc de la forme  $a = (x, x)$  : l'extrémité initiale de l'arc est confondue avec son extrémité finale.



FIGURE 1.4 – L'arc  $5 = (c, c)$  est une *boucle*,  $g$  est l'extrémité *initiale* de 6 et  $c$  son extrémité *finale*.

### 1.5.3 Relations entre les arcs d'un graphe

**Définition 1.5.4 — Arcs adjacents.** Deux arcs sont dits **adjacents** si ils ont au moins une extrémité commune.



FIGURE 1.5 – L'arc 5 et l'arc 6 sont adjacents car  $c$  est un sommet commun.

## 1.6 Multiplicité et degré

### 1.6.1 Multiplicité d'une paire de sommets

**Définition 1.6.1 — Multiplicité d'une paire de sommets.** La **multiplicité** d'une paire de sommets  $(x, y)$  est définie comme le nombre d'arcs du graphe ayant  $x$  comme extrémité initiale et  $y$  comme extrémité finale.

**Notation 1.8.** La multiplicité d'une paire de sommets  $(x, y)$  est notée  $m_G^+(x, y)$ .



Par convention, on pose  $m_G^-(x, y) = m_G^+(y, x)$  et  $m_G(x, y) = m_G^+(x, y) + m_G^-(y, x)$ .

Si  $x \neq y$ ,  $m_G(x, y)$  est égal au nombre d'arcs joignant  $x$  et  $y$ , quelque soit son orientation.

Si  $x = y$ ,  $m_G(x, y)$  est égal à deux fois le nombre de boucles en  $x$ .

Dans un graphe non orienté,  $m_G^+(x, y) = m_G^-(x, y)$  et  $m_G(x, y) = 2 * m_G^+(x, y)$ .

■ **Exemple 1.4** Sur le graphe de la figure 3.5, la paire de sommets  $(f, e)$  est de multiplicité 3. ■

### 1.6.2 Degré d'un sommet

**Définition 1.6.2 — Degré d'un sommet.** Le **demi-degré sortant** (ou demi-degré extérieur)  $d_G^+(x)$  d'un sommet  $x$  est défini comme le nombre d'arcs incidents en  $x$  vers l'extérieur, *i.e* le nombre d'arcs ayant  $x$  comme extrémité initiale.

De même, **demi-degré entrant** (ou demi-degré intérieur)  $d_G^-(x)$  d'un sommet  $x$  est défini comme le nombre d'arcs incidents en  $x$  vers l'intérieur, *i.e* le nombre d'arcs ayant  $x$  comme extrémité finale.

Le **degré** d'un sommet  $x$  est alors la somme des degrés sortant et entrant :  $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$ . Il s'agit donc du nombre total d'arcs connectés à  $x$ , qu'ils soient incidents en  $x$  vers l'intérieur ou vers l'extérieur.

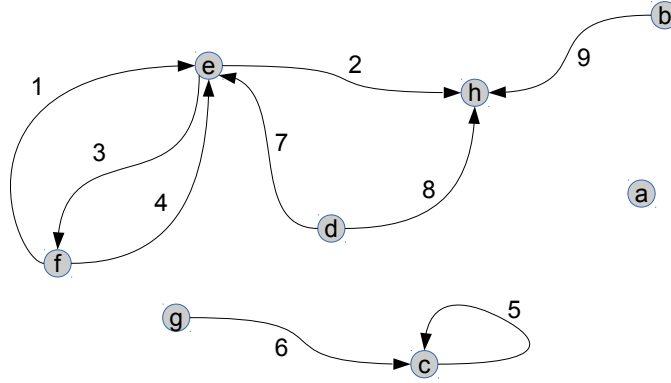


FIGURE 1.6 –  $d_G(e) = d_G^+(e) + d_G^-(e) = 2 + 3 = 5$ .

**R** Une boucle augmente de deux unités le degré d'un sommet.

On remarque que  $d_G^+(x) = \sum_{y \in V} m_G^+(x, y)$  et  $d_G^-(x) = \sum_{y \in V} m_G^-(x, y)$ . Ainsi,  $d_G^+(x) \geq |\Gamma^+(x)|$  et  $d_G^-(x) \geq |\Gamma^-(x)|$  et  $\sum_{x \in V} d^+(x) = \sum_{x \in V} d^-(x)$ .

## 1.7 Sous-graphes

La notion de *sous-graphe* permet de ne retenir que certains éléments d'un graphe, selon que l'on souhaite éliminer des sommets et/ou des arcs.

### 1.7.1 Graphe partiel

**Définition 1.7.1 — Graphe partiel.** Soit  $A \in E$  un sous-ensemble d'arcs d'un graphe  $G$ . On appelle **graphe partiel induit par  $A$**  (ou graphe partiel *engendré*) le graphe  $G' = (V, A)$  ayant comme sommets **tous** les sommets de  $G$  et comme arcs les arcs contenus dans  $A$ .

**R** Un graphe partiel est donc dérivé d'un graphe en ne retenant que quelques arrêtes. Les sommets de  $G$  dont les arcs incidents ne sont pas retenus (ne sont pas dans  $A$ ) sont également des sommets (isolés) du graphe partiel  $G'$ .

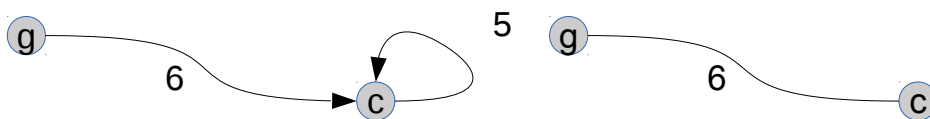


FIGURE 1.7 – Un graphe et un graphe partiel du premier.

### 1.7.2 Sous-graphe

**Définition 1.7.2 — Sous-graphe.** Soit  $X \subseteq V$  un sous-ensemble de sommets d'un graphe  $G$ . On appelle **sous-graphe induit par  $X$**  (ou sous-graphe *engendré*) le graphe  $G' = (X, E')$  dont les sommets sont les sommets de  $X$  et les arcs l'ensemble  $E'$  formé des arcs de  $G$  dont les deux extrémités sont dans  $X$ .

**R** Un sous-graphe est donc dérivé d'un graphe en ne retenant que quelques sommets et les arcs joignant ces sommets.

### 1.7.3 Sous-graphe partiel

**Définition 1.7.3 — Sous-graphe partiel.** Un **sous-graphe partiel** d'un graphe  $G$  est un sous-graphe d'un graphe partiel de  $G$ , ou un graphe partiel d'un sous-graphe de  $G$ .

**R** Un sous-graphe partiel est donc dérivé d'un graphe en ne retenant que quelques sommets et arêtes. On peut par exemple ne retenir que quelques sommets en considérant un sous-graphe de  $G$ , puis supprimer quelques arcs de ce sous-graphe.

## 1.8 Graphes particuliers

### 1.8.1 Graphe régulier

**Définition 1.8.1 — Graphe régulier.** Un **graphe régulier** est un graphe pour lequel les sommets ont tous le même degré.

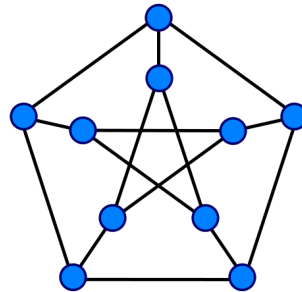


FIGURE 1.8 – Exemple de graphe régulier.

**Définition 1.8.2 — Graphe  $k$ -régulier.** Soit  $k \geq 1$ . Un graphe orienté est  **$k$ -régulier** si  $\forall x \in V, d_G^+(x) = k$ .

Un graphe non orienté est  **$k$ -régulier** si  $\forall x \in V, d_G(x) = k$

### 1.8.2 Graphe symétrique

**Définition 1.8.3 — Graphe symétrique.** Un **graphe symétrique** est un graphe tel que pour toute paire de sommets  $(x, y)$ , il existe autant d'arcs de  $x$  vers  $y$  que d'arcs de  $y$  vers  $x$  :

$$\forall (x, y) \in V \times V, m_G^+(x, y) = m_G^-(x, y)$$



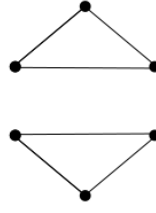


FIGURE 1.9 – Exemple de graphe 2-régulier.

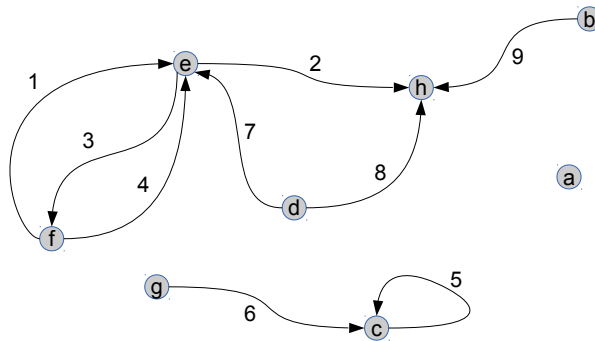
### 1.8.3 Multigraphe

**Définition 1.8.4 — Multigraphe.** Un **multigraphe** est un graphe pour lequel il peut y avoir des *arcs parallèles*, i.e des arcs ayant le même sommet initial et le même sommet final :  $\forall (x, y) \in V \times V, m_G^+(x, y) \geq 0$ .

### 1.8.4 p-graphe

**Définition 1.8.5 — p-graphe.** Soit  $p \geq 1$ . Un **p-graphe** est un graphe tel que pour toute paire de sommets  $(x, y)$ , il existe au plus  $p$  arcs de  $x$  vers  $y$  :  $\forall (x, y) \in V \times V, m_G^+(x, y) \leq p$ .

■ **Exemple 1.5** Le graphe de la figure 1.10 est un 2-graphe. ■

FIGURE 1.10 – Un 2-graphe ( $m_G^+(f, e) = 2$ ).

**R** Si  $G$  est un 2-graphe, c'est également un 3-graphe.

### 1.8.5 Graphe simple

**Définition 1.8.6 — Graphe simple.** Un **graphe simple** est un graphe :

- sans boucles :  $\forall x \in V, m_G(x, x) = 0$
- sans arcs parallèles :  $\forall (x, y) \in V \times V, m_G^+(x, y) \leq 1$

**R** Un graphe simple est un 1-graphe sans boucle.

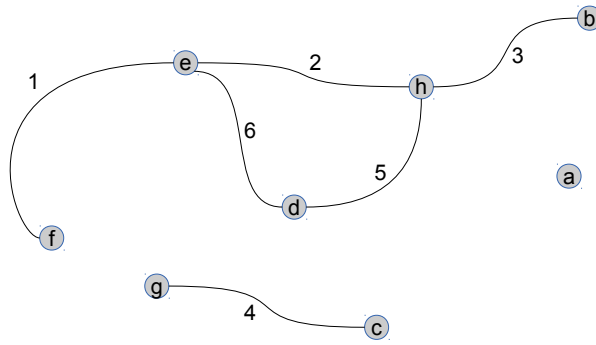


FIGURE 1.11 – Un graphe simple.

### 1.8.6 Graphe et sous-graphe complet

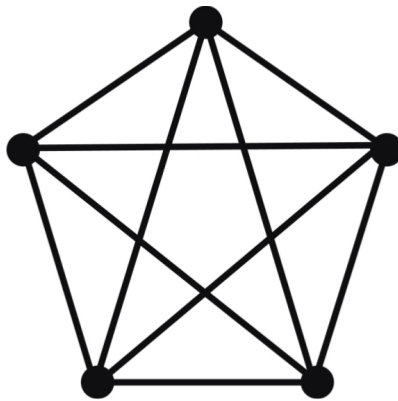
**Définition 1.8.7 — Graphe complet.** Un **graphe orienté complet** est un graphe tel que pour toute paire de sommets  $(x, y)$ , il existe au moins un arc de  $x$  vers  $y$  ET de  $y$  vers  $x$  :  $\forall (x, y) \in V \times V, x \neq y, m_G^+(x, y) \geq 1$  et  $m_G^-(x, y) \geq 1$ .

Un graphe **non orienté complet** est un graphe  $G$  dont tous les sommets sont adjacents : pour toute paire de sommets  $(x, y)$  avec  $x \neq y$ , il existe un arc entre  $x$  et  $y$ .

**R** Pour un graphe complet,  $E = V \times V$ .  
Plus exactement, on suppose que  $E = V \times V \setminus \{(x, x), x \in V\}$ .  
Si  $G$  est un 1-graphe orienté, il est complet si et seulement si  $(x, y) \notin E \Rightarrow (y, x) \in E$ .

**Définition 1.8.8 — n-clique.** Le graphe *simple* et *complet* d'ordre  $n$  est appelé **n-clique**.

**Notation 1.9.** La *n-clique* est notée  $K_n$ .

FIGURE 1.12 – La 5-clique  $K_5$ , graphe simple complet d'ordre 5.

**Définition 1.8.9 — Clique.** Une **clique** d'un graphe non orienté  $G$  est un sous-graphe complet de  $G$ .

La *taille* d'une clique est son nombre de sommets.

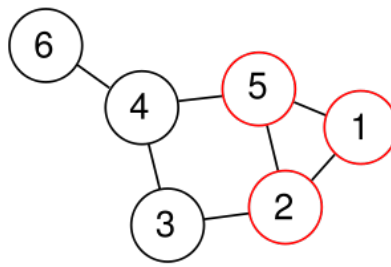


FIGURE 1.13 – Un exemple de clique d'ordre 3 (en rouge).

### 1.8.7 Graphe biparti

**Définition 1.8.10 — Graphe biparti.** Un **graphe biparti** est un graphe dont l'ensemble des sommets  $V$  peut-être partitionné en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de sorte que deux sommets du même sous-ensemble ne soient jamais voisins.

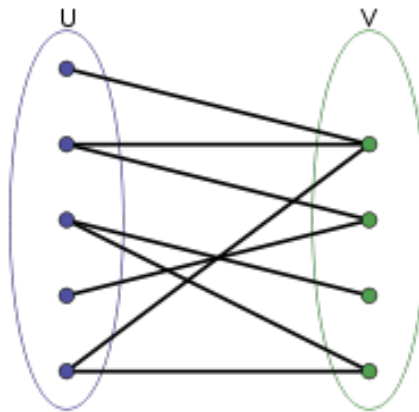


FIGURE 1.14 – Exemple de graphe biparti.

**R** Un graphe est biparti si  $V$  peut être partitionné en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de telle manière que  $E \subseteq V_1 \times V_2$ .

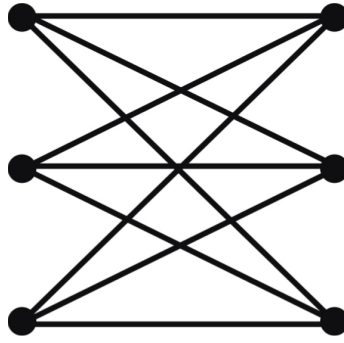
**Définition 1.8.11 — Graphe biparti complet.** Un *graphe biparti* tel que  $\forall x \in V_1, \forall y \in V_2, m_G(x, y) \geq 1$  est appelé **graphe biparti complet**.

**Notation 1.10.** Le *graphe biparti-complet* tel que  $|V_1| = n$  et  $|V_2| = m$  est noté  $K_{n,m}$ .

## 1.9 Morphisme et isomorphisme de graphe

### 1.9.1 Graphes homomorphes

**Définition 1.9.1 — Graphes homomorphes.** Deux graphes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  sont **homomorphes** s'il existe une application  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  qui envoie les sommets de  $G_1$  sur les sommets de  $G_2$  et telle que l'image par  $\phi$  de  $G_1$  dans  $G_2$  respecte les relations d'adjacence présentes dans  $G_1$ .

FIGURE 1.15 – Graphe biparti complet  $K_{3,3}$ .

Une telle application est appelée **morphisme de graphe**

**R** Si il existe une arête  $(x, y) \in E_1$  entre les sommets  $x$  et  $y$  de  $G_1$ , alors il existe une arête  $(\phi(x), \phi(y))$  entre les sommets  $\phi(x)$  et  $\phi(y)$  de  $G_2$ , images de  $x$  et  $y$  par  $\phi$ . On dit alors que  $G_1$  se projette dans  $G_2$ .

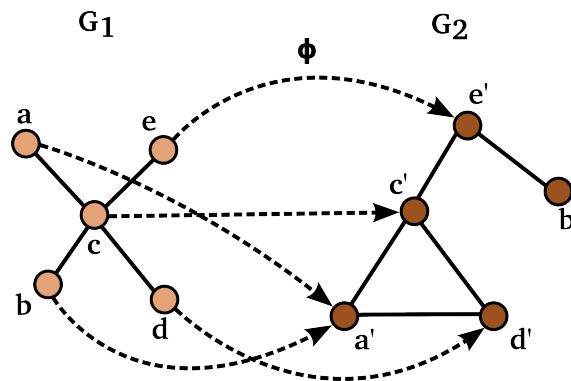


FIGURE 1.16 – Graphes homomorphes).

■ **Exemple 1.6** La figure 1.16 montre un exemple de morphisme entre deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ . Les arêtes de  $G_1$  sont préservées :  $(a, c) \rightarrow (a', c')$ ,  $(e, c) \rightarrow (e', c')$ ,  $(b, c) \rightarrow (a', c')$  et  $(d, c) \rightarrow (d', c')$ . On remarque que les sommets  $a$  et  $b$  de  $G_1$  ont la même image  $a'$  dans  $G_2$ , et que le sommet  $b'$  de  $G_2$  n'a pas d'antécédent par  $\phi$  dans  $G_1$ . ■

**R** La notion de morphisme de graphe permet de modéliser le cas où les relations d'adjacence présentes dans un graphe se retrouvent dans un autre graphe. Cependant, le lien inverse n'existe pas nécessairement : les relations d'adjacence du second graphe ne se retrouvent pas forcément dans le premier. Les graphes homomorphes ont donc des structures similaires, mais ne sont pas topologiquement équivalents.

### 1.9.2 Graphes isomorphes

**Définition 1.9.2 — Graphes isomorphes.** Si un morphisme  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  est bijectif, il est possible de définir sa *bijection réciproque*  $\phi^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$ . Si cette bijection est également un morphisme de graphe, alors on dit que  $\phi$  est un **isomorphisme de graphe**.

- R** L'isomorphisme implique également une bijection entre les arêtes puisqu'il existe un morphisme bijectif de  $G_1$  dans  $G_2$  et un morphisme bijectif de  $G_2$  dans  $G_1$ . Plus classiquement, on dit deux graphes  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  sont isomorphes s'il existe une *bijection*  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  entre les sommets qui préserve les arêtes : une paire de sommets  $(x_1, x_2)$  est une arête de  $G_1$  **si et seulement si**  $(\phi(x_1), \phi(x_2))$  est une arête de  $G_2$ .

■ **Exemple 1.7 — Exemple de graphes isomorphes.** Les graphes de la figure 1.17 sont isomorphes : les relations d'adjacence sont conservées même si les deux dessins sont très différents. Par exemple, les sommets 3 et 6 sont bien voisins dans les deux graphes. ■

- R** La notion d'isomorphisme de graphe permet de modéliser le cas où les relations d'adjacence présentes dans un graphe se retrouvent dans un autre graphe et réciproquement. Les graphes isomorphes ont donc des structures équivalentes : ils sont *topologiquement équivalents*. On remarque qu'il peut y avoir plusieurs isomorphismes entre deux graphes.

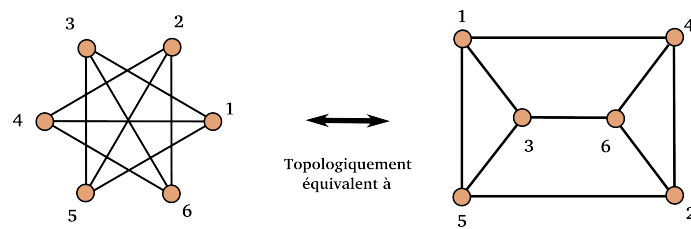


FIGURE 1.17 – Graphes isomorphes.

## 1.10 Hypergraphe

La notion de graphe est restrictive, car limitée à des relations binaires sur les ensembles. Une généralisation est possible.

**Définition 1.10.1 — Hypergraphe.** Un **hypergraphe** est un couple  $H = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble non vide et  $E$  une famille de parties non vides de  $V$ .

Les éléments de  $V$  sont appelés *sommets* ou *hypersommets* de  $H$ , et les éléments de  $E$  *arêtes* ou *hyperarcs*.

- R** Les hyperarcs d'un hypergraphe relient donc non pas nécessairement une paire de sommets, mais un nombre quelconque de sommets appelé *cardinalité* de l'hyperarc.

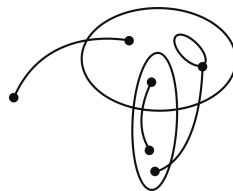


FIGURE 1.18 – Un exemple d'hypergraphe. Les arêtes de cardinalité 2 sont représentées par des traits. Les hyperarcs de cardinalité 3 ou plus sont représentés par des patatoïdes.

- R** Certaines définitions des graphes sont transposables aux hypergraphes, comme l'ordre, la matrice d'incidence, etc.

## 2. Modes de représentation d'un graphe

Nous nous intéressons dans ce chapitre à différentes structures de données correspondant aux différentes manières de représenter un graphe dans un ordinateur.

### 2.1 Matrice d'adjacence

La matrice d'adjacence, comme son nom l'indique, permet de représenter un graphe en décrivant les relations d'adjacences entre ses sommets.

**Définition 2.1.1 — Matrice d'adjacence.** Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Sa **matrice d'adjacence** est une matrice carrée de taille  $n * n$  où chaque ligne et chaque colonne correspond à un sommet. Le terme général  $a_{i,j}$  de la matrice est égal à  $a_{i,j} = m^+(x_i, x_j)$ , i.e au nombre d'arcs ayant  $x_i$  comme extrémité initiale et  $x_j$  comme extrémité finale.

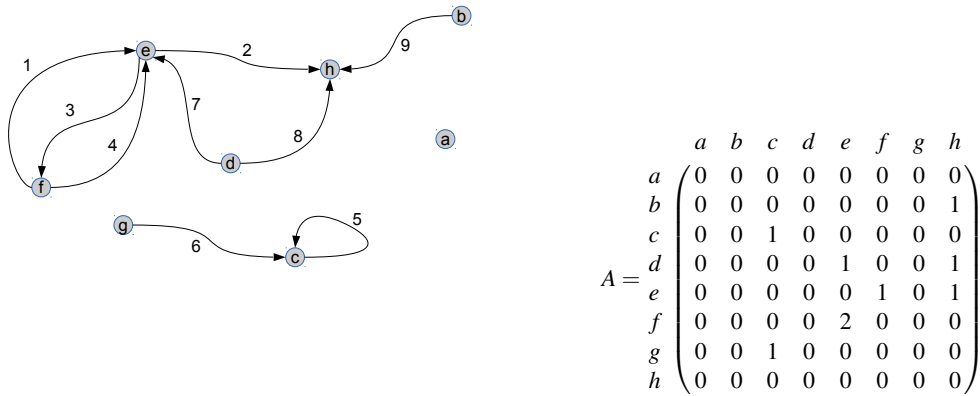
**R** La matrice d'adjacence permet de représenter les boucles.  
La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est *symétrique*.  
L'absence de boucle se traduit par une diagonale nulle.

**R** La matrice d'adjacence possèdent certaines propriétés intéressantes :

1. La somme des éléments de sa  $i$ ème ligne est égale au degré sortant du sommet  $x_i$ .
2. La somme des éléments de sa  $j$ ème colonne est égale au degré entrant du sommet  $x_j$ .
3. le coefficient  $a_{i,j}^k$  en position  $(i, j)$  de la puissance  $k$ ème  $A^k$  de la matrice d'adjacence est égal au nombre de chemins de longueur exactement  $k$  allant de  $x_i$  vers  $x_j$ , en supposant que chaque arc entre deux sommets est de longueur égale à 1.

### 2.2 Matrice d'incidence

La matrice d'incidence représente les graphes en exploitant les relations d'incidence entre arcs et sommets.

FIGURE 2.1 – Un graphe et sa **matrice d'adjacence**.

**Définition 2.2.1 — Matrice d'incidence.** Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  sans boucle possédant  $m$  arêtes. Sa **matrice d'incidence** est une matrice de taille  $n * m$  où chaque ligne correspond à un sommet et chaque colonne correspond à une arête. Le terme général  $a_{i,j}$  de la matrice est égal à

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } x_i \text{ est extrémité initiale de } a_j \\ +1 & \text{si } x_i \text{ est extrémité finale de } a_j \\ 0 & \text{si } x_i \text{ n'est pas une extrémité de } a_j \end{cases} \quad (2.1)$$

**R** La matrice d'incidence d'un graphe orienté ne permet pas de représenter correctement les boucles : si  $a_j$  est une boucle de  $x_i$  vers  $x_i$ , alors  $a_{i,j} = 0$ .  
Si le graphe est non orienté, la définition du terme général de la matrice d'incidence devient :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est une extrémité de } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ est une boucle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

■ **Exemple 2.1** La **Matrice d'incidence** sommets-arcs du graphe de la figure 2.1 est donnée ci-dessous. ■

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## 2.3 Matrice SIF

Les matrices d'adjacence et d'incidence sont des matrices *creuses* : la majorité de leurs termes sont nuls. La matrice SIF permet de les représenter sous forme condensée en minimisant la quantité d'information nécessaire pour représenter le graphe.

**Définition 2.3.1 — Matrice SIF.** La matrice **SIF** (ou matrice Sommets Initiaux et Finaux) d'un graphe comprenant  $m$  arcs est une matrice de taille  $m * 2$  où chaque ligne représente un arc, et où la première (resp. la dernière) colonne représente le sommet initial (resp. final) de chacun de ces arcs.


Forme condensée de la matrice d'incidence sommets  
sommets :

$$\begin{matrix} & x & y & m^+(x,y) \\ \left( \begin{array}{ccc} b & h & 1 \\ c & c & 1 \\ d & e & 1 \\ d & h & 1 \\ e & f & 1 \\ e & h & 1 \\ f & e & 2 \\ g & c & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Matrice SIF :

Arc	$S_i$	$S_f$
1	$f$	$e$
2	$e$	$h$
3	$e$	$f$
4	$f$	$e$
5	$c$	$c$
6	$g$	$c$
7	$d$	$e$
8	$d$	$h$
9	$b$	$h$





## 3. Étude de la connexité

De nombreux problèmes modélisés par la théorie des graphes reposent sur la notion de chemins.

### 3.1 Chaîne, cycles et cocycles

#### 3.1.1 Chaîne

**Définition 3.1.1 — Chaîne.** Une **chaîne** de *longueur*  $p > 0$  est une suite alternée de sommets et d'arcs telle que chaque arc de la séquence a une extrémité commune avec l'arc précédent, et l'autre extrémité en commun avec l'arc suivant.

Le nombre d'arcs de la chaîne est appelé sa *longueur*.

Le premier et le dernier sommet de la chaîne sont ses *extrémités*.

**R** La notion de chaîne n'a que faire de l'orientation éventuelle du graphe : les arêtes peuvent être parcourues dans un sens ou dans l'autre.

Une chaîne de longueur  $p$  peut-être notée par sa séquence de  $p$  arêtes  $(e_1, \dots, e_p)$ .

**Définition 3.1.2 — Chaîne élémentaire.** Une **chaîne élémentaire** est une chaîne pour laquelle tous les sommets sont différents, sauf éventuellement le sommet initial et le sommet final de la chaîne.

**Définition 3.1.3 — Chaîne simple.** Une **chaîne simple** est une chaîne pour laquelle tous les arcs sont différents.

#### 3.1.2 Cycle

**Définition 3.1.4 — Cycle.** Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident.

**Définition 3.1.5 — Cycle élémentaire.** Un **cycle élémentaire** est un cycle tel que l'on ne rencontre pas deux fois le même sommet en le parcourant.

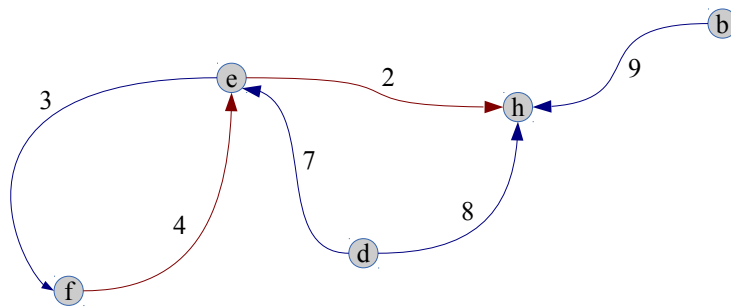


FIGURE 3.1 –  $(3, 7, 8, 9)$  est une **chaîne** de longueur 4.

**R** Un cycle élémentaire est minimal au sens de l'inclusion : il ne contient strictement aucun autre cycle.

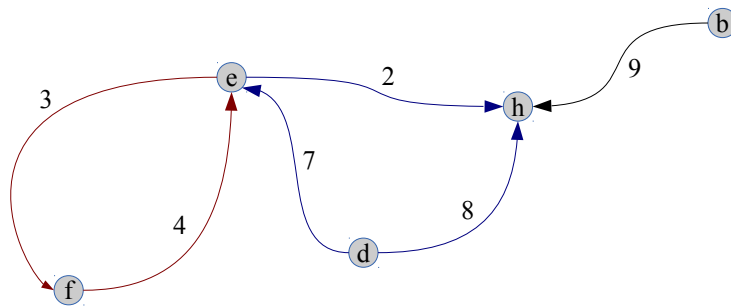


FIGURE 3.2 –  $(7, 2, 8)$  est un **cycle** de longueur 3,  $(4, 3)$  est un **circuit** de longueur 2.

### 3.1.3 Cocycle

**Définition 3.1.6 — Cocycle.** Un **cocycle** (ou une coupe)  $\omega(X)$  d'un graphe  $G$  est un ensemble d'arêtes incidences à un sous-ensemble de sommets  $X \subset V$ .

**R**  $\omega(X)$  est donc l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans  $X$  et l'autre extrémité dans  $V - X$ .

Un cocycle peut être partitionné en deux sous-ensembles d'arcs  $\omega(X) = \omega^+(X) \cup \omega^-(X)$  où  $\omega^+(X)$  désigne les arcs incidents à  $X$  vers l'extérieur (arcs sortants) et  $\omega^-(X)$  les arcs incidents à  $X$  vers l'intérieur (entrants).

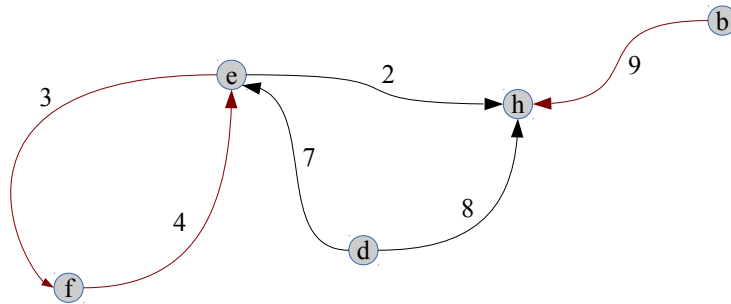


FIGURE 3.3 –  $\{3\} \cup \{4, 9\}$  est un **cocycle** avec  $X = \{e, d, h\}$ ,  $\{9\}$  est un **cocircuit** avec  $X' = \{e, d, h, f\}$ .

**Définition 3.1.7 — Cocycle élémentaire.** Un **cocycle élémentaire** est un cocycle constitué par des arcs reliant deux sous-graphes connexes non vides et disjoints  $G_{X_1}$  et  $G_{X_2}$  tels que  $G_{X_1 \cup X_2}$  est une composante connexes de  $G$ .

**R** Un cocycle élémentaire peut aussi être défini comme un cocycle minimal pour l'inclusion.

## 3.2 Chemin et circuit

### 3.2.1 Chemin

**Définition 3.2.1 — Chemin.** Un **chemin** est une chaîne  $(e_1, \dots, e_p)$  telle l'extrémité finale de tout arc de la chaîne  $e_{i-1}$  coïncide avec l'extrémité initiale de  $e_i$ , i.e chaque arc est sortant d'un sommet et entrant pour le sommet suivant dans la séquence.

**R** Une chemin correspond à la notion de chaîne orientée.

**Définition 3.2.2 — Chemin élémentaire.** Un **chemin élémentaire** est un chemin pour lequel tous les sommets sont différents, sauf éventuellement le sommet initial et le sommet final du chemin.

**Définition 3.2.3 — Chemin simple.** Un **chemin simple** est un Chemin pour lequel tous les arcs sont différents.

### 3.2.2 Circuit

**Définition 3.2.4 — Circuit.** Un **circuit** est un chemin dont les extrémités coïncident.

**Définition 3.2.5 — Circuit élémentaire.** Un **circuit élémentaire** est un circuit tel que l'on ne rencontre pas deux fois le même sommet en le parcourant.

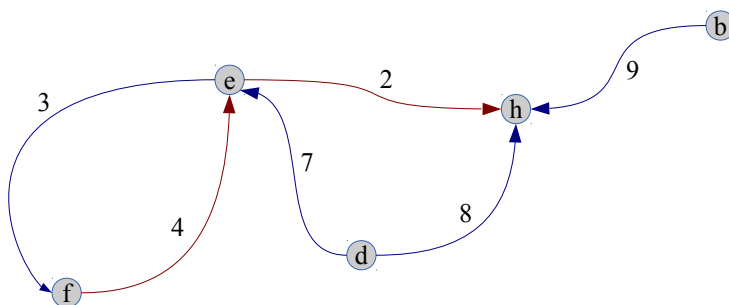


FIGURE 3.4 –  $(4, 2)$  est un **chemin** de longueur 2.

### 3.3 Graphe et sous-graphes connexes

Schématiquement, on dira qu'un graphe est connexe si n'importe quel sommet peut être atteint depuis n'importe quel autre sommet en parcourant des arêtes de proche en proche.

**Définition 3.3.1 — Connexité.** Un graphe est **connexe** si il existe au moins une chaîne reliant toute paire de sommets  $x$  et  $y$ .

**Proposition 3.3.1 — Connexité et relation d'équivalence.**

La relation " $x R Y \leftrightarrow x = y$  ou il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$ " est une relation d'équivalence.

*Démonstration.* La relation " $x R Y \leftrightarrow x = y$  ou il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$ " est clairement réflexive, symétrique (les chaînes ne sont pas orientées) et transitive. ■

**Définition 3.3.2 — Composantes connexes.** Les sous-graphes engendrés par les classes d'équivalences induites sur l'ensemble des sommets  $V$  par cette relation sont appelées **composantes connexes** du graphe.

Le nombre de ces composantes connexes est appelé **nombre de connexité** du graphe.

**R** On voit qu'un graphe est connexe si et seulement si son nombre de connexité est égal à 1. Chaque composante connexe est un sous-graphe connexe.

### 3.4 Points et ensembles d'articulation, isthmes

#### 3.4.1 Points et ensembles d'articulation

**Définition 3.4.1 — Point d'articulation.** Un **point d'articulation** d'un graphe connexe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe (et donc le nombre de connexité).

**Définition 3.4.2 — Ensemble d'articulation.** Un **ensemble d'articulation** d'un graphe connexe  $G$  est un ensemble de sommets  $X \subset V$  tel que le sous-graphe  $G_{V-X}$  déduit de  $G$  par la suppression des sommets de  $X$  n'est plus connexe.

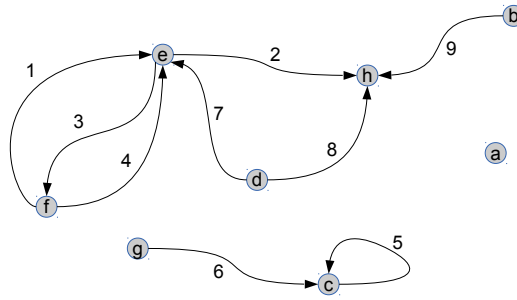


FIGURE 3.5 – Graphe non connexe, avec trois composantes connexes :  $\{a\}$ ,  $\{f, e, d, h, b\}$  et  $\{g, v\}$ .

### ■ Exemple 3.1

**Définition 3.4.3 — Graphe  $k$ -sommet-connexe.** Un graphe connexe d'ordre  $N \geq k + 1$  est dit  **$k$ -sommet-connexe** (ou simplement  *$k$ -connexe*) s'il n'admet pas d'ensemble d'articulation de cardinal  $k - 1$ , i.e il demeure connexe après la suppression de  $k - 1$  sommets quelconques.

**Définition 3.4.4 — Graphe  $k$ -arête-connexe.** Un graphe connexe d'ordre  $N \geq k + 1$  est dit  **$k$ -arête-connexe** s'il est possible d'augmenter son nombre de connexité en supprimant  $k$  arêtes et tel que  $k$  soit minimal : il n'existe pas d'ensemble de moins de  $k$  arêtes dont la suppression déconnecte le graphe.

■ **Exemple 3.2** Dans le sous-graphe (figure 3.5)  $\{f, e, d, h, b\}$ , les sommets  $e$  et  $h$  sont des **points d'articulation** et l'arc 9 est un **isthme**. ■

### 3.4.2 Isthme

**Définition 3.4.5 — Isthme.** Un **isthme** d'un graphe connexe est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

## 3.5 Graphe et sous-graphes fortement connexes

**Définition 3.5.1 — Connexité forte.** Un graphe orienté est **fortement connexe** si il existe au moins un chemin joignant deux sommets quelconques.

**Proposition 3.5.1 — Connexité forte et relation d'équivalence.**

La relation " $x R Y \leftrightarrow x = y$  ou il existe à la fois un chemin reliant  $x$  et  $y$  et un chemin reliant  $y$  à  $x$ " est une relation d'équivalence.

**Définition 3.5.2 — Composantes fortement connexes.** Les sous-graphes engendrés par les classes d'équivalences induites sur l'ensemble des sommets  $V$  par cette relation sont appelées **composantes fortement connexes** du graphe.



# Cycles, graphes planaires et arbres

<b>4</b>	<b>Vocabulaire autour des cycles</b> . . . . .	<b>32</b>
4.1	Décomposition des cycles en cycles élémentaires	
<b>5</b>	<b>Planarité</b> . . . . .	<b>35</b>
5.1	Graphe planaire	
5.2	Vocabulaire autour des faces	
5.3	Formule d'Euler	
5.4	Subdivision et théorème de Kuratowski	
5.5	Graphe dual	
5.6	Application : triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï	
<b>6</b>	<b>Vocabulaire sur les arbres</b> . . . . .	<b>45</b>



## 4. Vocabulaire autour des cycles

Les notions de cycle et de cycle élémentaire ont été définies dans la première partie de ce cours.

### 4.1 Décomposition des cycles en cycles élémentaires

#### 4.1.1 Notation vectorielle

**Notation 4.1.** Étant donné un graphe comprenant  $m$  arcs  $(a_1, \dots, a_m)$ , on peut faire correspondre à tout cycle simple  $\mu$  un vecteur de  $\{0, 1\}^m$   $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  de taille  $m$  tel que :

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i \text{ n'est pas un arc de } \mu \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**R** Nous considérons l'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire dans le corps  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ . Il est alors possible de définir la somme de deux cycles  $\mu_1$  et  $\mu_2$  dans  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$  ( $1 + 1 = 0$ , i.e les arêtes communes disparaissent) comme le cycle  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  représenté par le vecteur  $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ .

Par convention, nous considérons comme cycle toute union disjointe de cycles.

L'ensemble des cycles distincts d'un graphe constitue donc un  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -espace vectoriel.

#### 4.1.2 Décomposition des cycles en cycles élémentaires

**Proposition 4.1.1 — Décomposition des cycles.** Tout cycle est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs.

*Démonstration.* Il suffit de parcourir le cycle et de définir un cycle élémentaire chaque fois qu'un même sommet est rencontré. ■



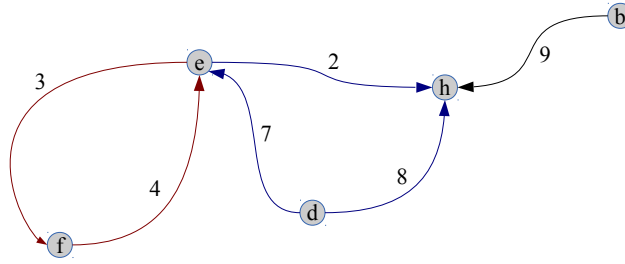


FIGURE 4.1 – Le cycle  $(3, 4, 7, 8, 2)$  est la somme de deux cycles élémentaires :  $(3, 4)$  et  $(7, 8, 2)$

### 4.1.3 Base de cycles et nombre cyclomatique

**Définition 4.1.1 — Cycles indépendants.**  $p$  cycles  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  sont dits **indépendants** si toute relation vectorielle de la forme  $\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{\mu}_i = \vec{0}$  implique  $\implies \forall i \in \{1, \dots, p\}, \lambda_i = 0$ .

**R**  $p$  cycles sont donc indépendants si une combinaison linéaire à coefficients dans  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$  des vecteurs associés ne peut être nulle que si chaque coefficient est nul.

**Définition 4.1.2 — Base fondamentale de cycles.** Une **base fondamentale de cycles** est un ensemble *minimal* de cycles *indépendants* tel que tout cycle puisse s'écrire comme combinaison linéaire des cycles de la base.

**Définition 4.1.3 — Nombre cyclomatique.** La dimension d'une base fondamentale de cycles est appelée **nombre cyclomatique**.

**Notation 4.2.** Le nombre cyclomatique d'un graphe  $G$  est noté  $v(G)$ .

**R** Le nombre cyclomatique  $v(G)$  correspond donc au nombre maximal de cycles élémentaires indépendants du graphe.  
Il est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les cycles.

**Proposition 4.1.2** Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  comprenant  $m$  arcs et  $p$  composantes connexes. Alors  $v(G) = m - n + p$ .

*Démonstration.*

On note  $M$  l'espace vectoriel des cycles et  $\Omega$  celui des cocycles.

(i) -  $M$  et  $\Omega$  sont orthogonaux.

En effet, soit  $\mu$  un cycle de  $M$  et  $\omega$  un cocycle de  $\Omega$ . Par définition,  $\exists X \subset V$  tel que  $\omega = \omega(X)$ . Or,  $\overrightarrow{\omega(X)} = \sum_{x \in X} \overrightarrow{\omega(\{x\})}$  puisque si une arête  $a_i$  est de la forme  $a_i = [x_1, x_2]$  avec  $x_1 \in X$  et  $x_2 \in X$ , elle disparaît dans la somme  $\overrightarrow{\omega(\{x_1\})} + \overrightarrow{\omega(\{x_2\})}$  ( $1+1=0$  dans  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ).

On en déduit que  $(\vec{\mu} | \vec{\omega}) = (\vec{\mu} | \sum_{x \in X} \overrightarrow{\omega(\{x\})}) = \sum_{x \in X} (\vec{\mu} | \overrightarrow{\omega(\{x\})})$ .

De plus,  $\mu$  peut s'écrire comme la somme de  $k$  cycles élémentaires sans arcs communs :  $\vec{\mu} = \sum_{i=1}^k \vec{\mu}_i$ .

D'où  $(\vec{\mu} \mid \vec{\omega}) = \sum_{x \in X} (\sum_{i=1}^k \vec{\mu}_i \mid \vec{\omega}(\{x\})) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^k (\vec{\mu}_i \mid \vec{\omega}(\{x\})) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \omega(\{x\})_j$ . Or, un cycle élémentaire  $\mu_i$  et un cocycle élémentaire de la forme  $\omega(\{x\})$  ont soit 0 soit 2 arcs en commun puisque si le cycle passe par  $x$ , alors exactement deux arêtes incidentes à  $x$  font partie de  $\mu_i$ , et ces deux arêtes appartiennent également à  $\omega(\{x\})$  par définition ; et sinon, aucune arête de  $\omega(\{x\})$  (donc incidente à  $x$ ) ne fait partie du cycle.

Ainsi,  $\forall x \in X, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \omega(\{x\})_j = 0$  si  $\mu_i$  et  $\omega(\{x\})$  n'ont pas d'arc en commun, et  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \omega(\{x\})_j = 1 * 1 + 1 * 1 = 1 + 1 = 0$  sinon. Donc  $\sum_{x \in X} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \omega(\{x\})_j = 0$  et  $(\vec{\mu} \mid \vec{\omega}) = \vec{0}$ .

$M$  et  $\Omega$  sont bien orthogonaux dans  $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^m$  et  $\dim(M) + \dim(\Omega) \leq m$ .

(ii) Il est possible de construire au moins  $m - n + p$  cycles élémentaires indépendants pour le graphe.

On raisonne par récurrence sur le nombre d'arcs  $m$  du graphe.

Si  $m = 1$ , le graphe possède  $n - 1$  sommets isolés si l'arc est une boucle, et  $n - 2$  sinon. Son nombre de composantes connexes vaut alors respectivement  $n$  et  $n - 1$  et il comporte 1 ou 0 cycles. Comme  $1 = 1 - n + n$  et  $0 = 1 - n + (n - 1)$ , la propriété est vraie pour  $m = 1$ .


On suppose la propriété vraie au rang  $m$ . On considère le graphe  $G'$  obtenu en rajoutant un arc  $e$  au graphe  $G$  d'ordre  $n$  comportant  $m$  arcs.

Cas 1 :  $e$  ne ferme pas un nouveau cycle :  $v(G') = v(G)$ . C'est le cas lorsque  $e$  relie deux sommets isolés dans  $G$ , ou un sommet isolé avec un sommet non isolé de  $G$  ou encore deux composantes connexes de  $G$ . Dans un cas comme dans les autres, le nombre de connexité du graphe diminue de 1 :  $p(G') = p(G) - 1$ . Or,  $v(G') = v(G) = m(G) - n + p(G)$  par hypothèse de récurrence. Donc  $v(G') = (m(G') - 1) - n + p(G') + 1 = m(G') - n + p(G')$ .

Cas 2 :  $e$  ferme un nouveau cycle :  $v(G') = v(G) + 1$ . Le cycle est indépendant des autres par construction puisqu'il contient un arc non contenu dans les autres. C'est le cas lorsque  $e$  forme une boucle ou lorsque  $e$  relie deux sommets non isolés de  $G$  d'une même composante connexe (si les sommets appartiennent à deux composantes connexes disjointes,  $e$  ne peut pas fermer un cycle). Dans les deux cas, le nombre de connexité du graphe ne change pas :  $p(G') = p(G)$ . D'où  $v(G') = v(G) + 1 = m(G) - n + p(G) + 1 = (m(G') - 1) - n + p(G') + 1 = m(G') - n + p(G')$ .

(iii) Il est possible de construire au moins  $n - p$  cocycles élémentaires indépendants pour le graphe. On raisonne comme pour le (ii).

(iv) On déduit de (ii) et (iii) que  $\dim(M) \geq m - n + p$  et  $\dim(\Omega) \geq n - p$ . Comme de plus  $\dim(M) + \dim(\Omega) \leq m$ , alors  $\dim(M) = \mu(G) = m - n + p$  et  $\dim(\Omega) = \lambda(G) = n - p$ . ■



## 5. Planarité

### 5.1 Graphe planaire

**Définition 5.1.1 — Graphe planaire.** Un **graphe planaire** est un graphe qu'il est possible de représenter sur un plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas en d'autres points que leurs extrémités. Une telle représentation d'un graphe est appelée **graphe planaire topologique**.

**R** La forme des arêtes n'a pas d'importance : elles ne sont donc pas nécessairement rectilignes. Un graphe planaire peut donc avoir plusieurs représentations distinctes.

### 5.2 Vocabulaire autour des faces

**Définition 5.2.1 — Face.** Dans un graphe planaire topologique, une **face** (ou *domaine*) est une partie connexe du plan délimitée par des arêtes du graphe, *i.e* une région telle que deux de ses points puissent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni arc ni sommet.

**Définition 5.2.2 — Frontière, faces adjacentes et opposées.** La **frontière**  $\partial f$  d'une face  $f$  est constituée de l'ensemble des arcs qui la touche.

Deux faces  $f_1$  et  $f_2$  sont **adjacentes** si leur frontière ont au moins un arc en commun :  $\partial f_1 \cap \partial f_2 \neq \emptyset$ . Si deux faces ne se touchent qu'en un sommet, on dit qu'elles sont **opposées**.

**R** La frontière d'une face est constituée par les arcs d'un ou plusieurs cycles élémentaires disjoints, d'arcs pendants ou d'isthmes reliant deux cycles disjoints.

**Définition 5.2.3 — Contour d'une face.** Le **contour** d'une face est constitué du cycle élémentaire de sa frontière qui contient tous les autres arcs de  $\partial f$ .

**R** Il existe toujours une (et une seule) **face infinie**, *i.e* qui n'admet pas de contour. Les autres faces sont finies et admettent toutes un contour.

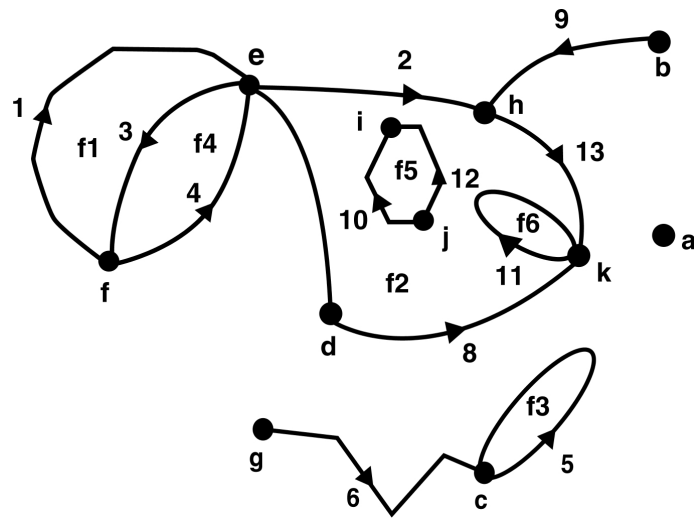


FIGURE 5.1 – Dans ce graphe planaire,  $f_1$  et  $f_4$  sont des faces **adjacentes**,  $f_2$  et  $f_4$  sont des faces **opposées**

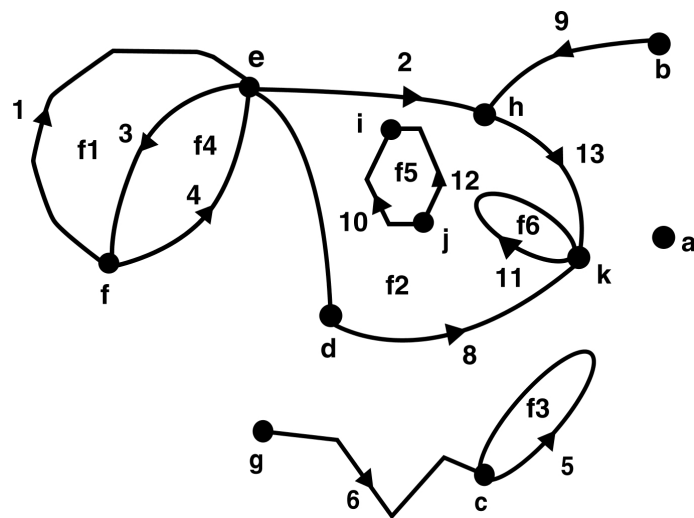


FIGURE 5.2 – La face  $f_2$  a pour **frontière**  $\{2, 7, 8, 10, 11, 12, 13\}$ , et pour **contour**  $(2, 13, 8, 7)$

### 5.3 Formule d'Euler

**Théorème 5.3.1 — Formule d'Euler.** Dans un graphe planaire connexe d'ordre  $n$  possédant  $m$  arêtes et  $f$  faces, on a :  $n - m + f = 2$ .

*Démonstration.*

On raisonne par récurrence sur le nombre d'arcs du graphe.

Si  $m = 1$ , l'arc est une boucle et dans ce cas  $f = 2$  et  $n = 1$ , ou un segment, auquel cas  $n = 2$  et  $f = 1$ .

Dans le cas général, supposons la propriété vraie pour  $m - 1$  arcs. Soit  $G$  un graphe comprenant  $m$  arcs.

(i)  $G$  est sans cycle.

Comme  $G$  est également connexe, c'est un arbre.

Montrons alors que la relation  $n = m + 1$  est vérifiée. Pour cela, on fait une nouvelle récurrence sur l'ordre du graphe cette fois-ci.

Si  $n = 1$ ,  $m = 0$  sinon l'arc est une boucle.

Dans le cas général,  $G$  possède une feuille, c'est à dire un sommet de degré 1. En effet, soit  $y$  un sommet de  $G$ . Considérons le chemin de longueur maximal construit à partir de  $y$  et soit  $x$  son extrémité. Ce chemin est fini car  $G$  est d'ordre fini, et élémentaire car sinon on forme un cycle.  $d_G(x) = 1$  car sinon, on peut continuer le chemin qui n'était alors pas de longueur maximale.

Soit  $x$  cette feuille et  $G'$  le sous-graphe engendré par l'ensemble des sommets de  $G$  privé de  $x$ . Comme  $n_{G'} = n - 1$ , par hypothèse de récurrence,  $n_{G'} = m_{G'} + 1$  et  $m_{G'} = n_{G'} - 1 = n - 2$ . De plus,  $m_{G'} = m - 1$  car  $x$  étant une feuille, on a supprimé un arc de  $G$  pour former  $G'$ . Donc  $m = m_{G'} + 1 = n - 2 + 1 = n - 1$  d'où le résultat.

$G$  étant sans cycle,  $f = 1$  (face infinie) donc  $n - m + f = m + 1 - m + 1 = 2$ .

(i)  $G$  possède un cycle.

Soit  $e$  un arc de ce cycle.  $e$  appartient à la frontière de deux faces  $A$  et  $B$  de  $G$  (l'une pouvant être la face infinie) :  $e \in \partial A \cap \partial B$ .

Soit  $G'$  le graphe partial déduit de  $G$  par la suppression de  $e$ .  $G'$  possède  $n$  sommets,  $m - 1$  arcs et  $f - 1$  faces car  $A \cup B$  forme alors une nouvelle face de  $G'$ . D'où le résultat. ■

**Proposition 5.3.2** Dans un graphe planaire, les contours des différentes faces *finies* constituent une base fondamentale de cycles élémentaires indépendants.

*Démonstration.*

On raisonne par récurrence sur le nombre de faces du graphe [Berge]. ■



Dans un graphe planaire connexe, le nombre de faces fini est donc égal au nombre cyclomatique  $v(G)$  du graphe :  $f = v(G) + 1 = (m - n + 1) + 1 = m - n + 2$ .

### 5.4 Subdivision et théorème de Kuratowski

#### 5.4.1 Homéomorphisme de graphe

**Définition 5.4.1 — Subdivision d'une arête.** Une **subdivision** d'une arête  $e = (x, y)$  d'un graphe  $G = (V, E)$  consiste à remplacer cette arête par deux nouvelles arêtes  $e_1 = (x, z)$  et  $e_2 = (z, y)$  avec  $z$  un nouveau sommet n'appartenant pas initialement à  $V$ .

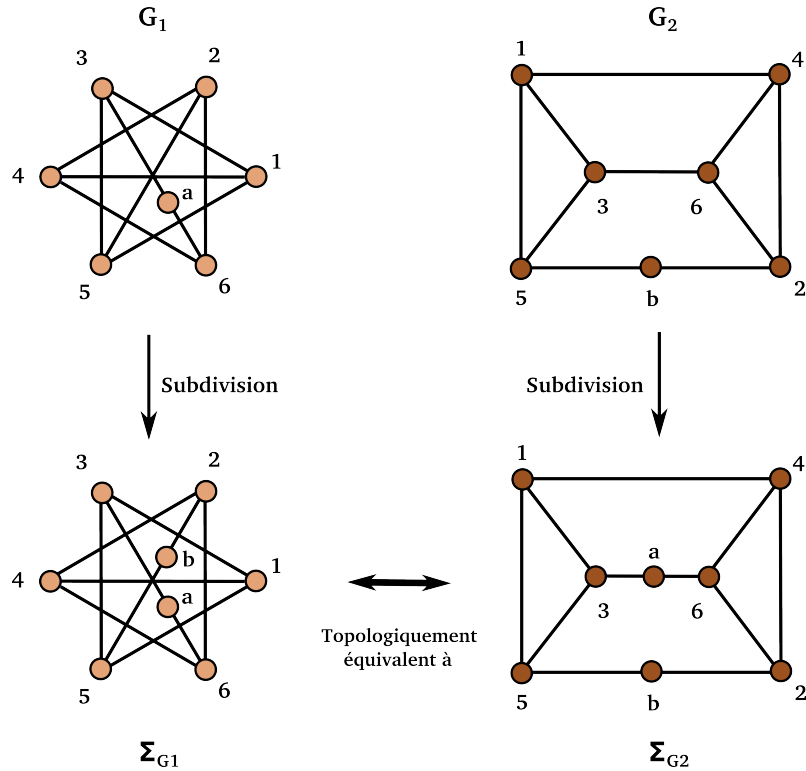


FIGURE 5.3 – Deux graphes homéomorphes.

**Définition 5.4.2 — Subdivision d'un graphe.** Une subdivision d'un graphe  $G = (V, E)$  est un graphe obtenu en subdivisant certaines de ses arêtes.

**R** La subdivision d'un graphe consiste donc à construire un nouveau graphe déduit d'un graphe initial en rajoutant des sommets sur certaines de ses arêtes. Le graphe subdivisé contient donc plus de sommets et plus d'arcs que le graphe initial.

**Définition 5.4.3 — Homéomorphisme de graphe.** Deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont dits **homéomorphes** si il existe un *isomorphisme* de graphe entre une subdivision de  $G_1$  et une subdivision de  $G_2$ .

**R** Deux graphes sont homéomorphes si ils peuvent être déduits à partir de deux subdivisions d'un même graphe.  
En particulier, si  $G_2$  est construit à partir de  $G_1$  en subdivisant certaines de ses arêtes, alors les graphes sont homéomorphes.

**R** La relation d'homéomorphisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des graphes finis non orientés.

#### 5.4.2 Théorème de Kuratowski

**Proposition 5.4.1** Les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  ne sont pas planaires.

*Démonstration.*

On raisonne par l'absurde.

On suppose que  $K_5$  est planaire.

On appelle degré d'une face  $f$  et on note  $\deg(f)$  le nombre d'arcs la bordant. Dans un graphe simple et planaire, une arête borde exactement deux faces et contribue pour 1 au degré de chacune. Lorsque l'on calcule la somme des degrés des faces, chaque arête est comptée exactement deux fois d'où  $\sum_{i=1}^f \deg(f_i) = 2 * m$ . De plus, la frontière de toute face d'un graphe simple non orienté contient au moins trois arêtes, donc en comptant le nombre de faces on compte au moins 3 arcs à chaque fois d'où  $\deg(f_i) \geq 3$ . En sommant on obtient  $\sum_{i=1}^f \deg(f_i) = 2m \geq 3f$ . Or, d'après la formule d'Euler,  $f = 2 - n + m$  d'où  $2m \geq 3(2 - n + m)$  i.e  $m \leq 3n - 6$ . Pour  $K_5$ , cette inégalité donnerait  $10 \leq 3 * 5 - 6 = 9$  ce qui est absurde.

On suppose que  $K_{3,3}$  est planaire.

Une face est bordée par au moins 4 arêtes. En effet, si il existe un triangle le graphe n'est plus biparti. Un raisonnement similaire au précédent aboutit à la relation  $m \leq 2n - 4$  et donc  $9 \leq 2 * 6 - 4 = 8$  ce qui est absurde. ■

**Théorème 5.4.2 — Théorème de Kuratowski.** Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucune subdivision de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ .

*Démonstration.* Admise (démonstration de la contraposée par récurrence sur le cardinal minimum des ensembles d'articulation (Sache, 1974)). ■

**R** Un graphe est donc planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à  $K_5$  ou à  $K_{3,3}$ .

## 5.5 Graphe dual

**Définition 5.5.1 — Graphe dual.** Étant donné un graphe  $G$  planaire connexe sans sommets isolés, on lui fait correspondre un graphe  $G^*$  construit de sorte que :

- chaque face de  $G$  correspond à un sommet de  $G^*$ ,
- il existe un arc entre deux sommets de  $G^*$  pour chaque arête commune des frontières des faces correspondantes dans  $G$ .

**R** Le graphe dual de  $G$  est aussi un graphe planaire, connexe et sans sommets isolés.  
Le dual du dual de  $G$  est  $G : (G^*)^* = G$ .  
A toute boucle de  $G$  correspond un arc pendant de  $G^*$  et réciproquement.

## 5.6 Application : triangulation de Delaunay et diagramme de Voronoï

### 5.6.1 Triangulation de Delaunay

**Définition 5.6.1 — Triangulation de Delaunay.** Une triangulation est une façon de découper un plan est une collection de triangle, et se base sur un semis de points qui constituent donc les sommets des triangles.

Parmi toutes les triangulations possible, celle de **Delaunay** est celle qui est telle qu'aucun des cercles circonscrits aux triangles ne contient d'autres sommets

**R** La triangulation de Delaunay a de nombreuses applications :

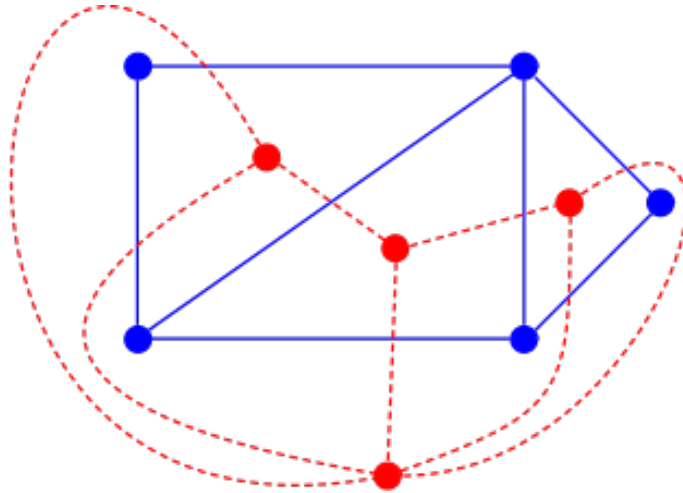


FIGURE 5.4 – Un exemple de graphe dual : le graphe rouge est le dual du bleu

- l'arbre couvrant de poids minimal d'un ensemble de points est un sous-ensemble de leur triangulation de Delaunay (résultat permettant de calculer efficacement cet arbre),
- construction des mailles de la méthode des éléments finis,
- maillage pour modélisation de terrains ou autres objets.

### 5.6.2 Diagramme de Voronoï

**Définition 5.6.2 — Diagramme de Voronoï.** Le graphe dual de la triangulation de Delaunay est appelé **diagramme de Voronoï**.

Ses sommets sont les centres des cercles circonscrits à la triangulation de Delaunay, et ses arêtes les médiatrices des arêtes de la triangulation de Delaunay.



Le diagramme de Voronoï a de nombreuses applications :

- partitionnement de l'espace en sphères d'influence,
- imagerie médicale (reconstitution d'un organe à partir de coupes d'imagerie médicale)
- proposition de modèles biologiques, par ex. pour expliquer les motifs sur le corps d'une girafe



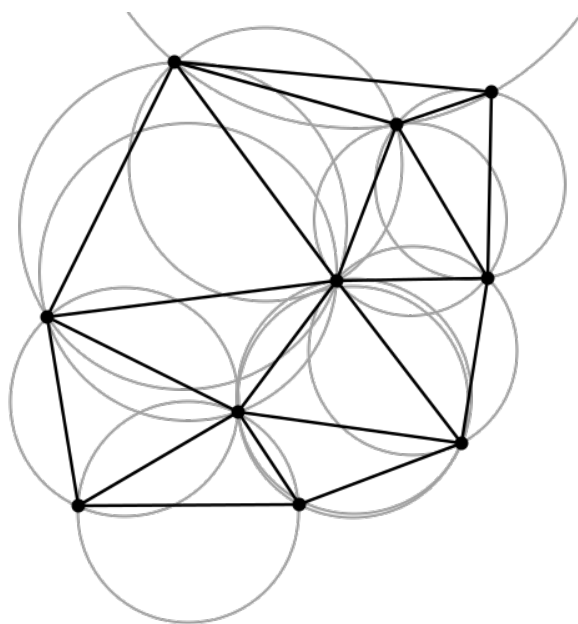


FIGURE 5.5 – Triangulation de delaunay et cercle circonscrits.

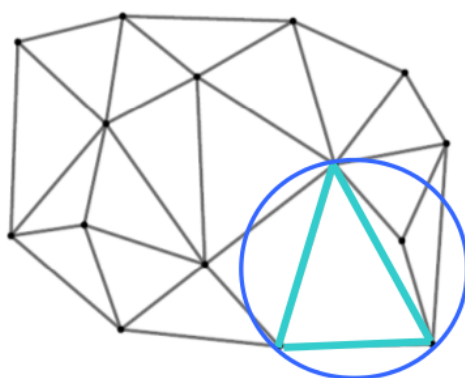


FIGURE 5.6 – Cette triangulation n'est pas une triangulation de Delaunay car un des cercle circonscrit contient un autre sommet.

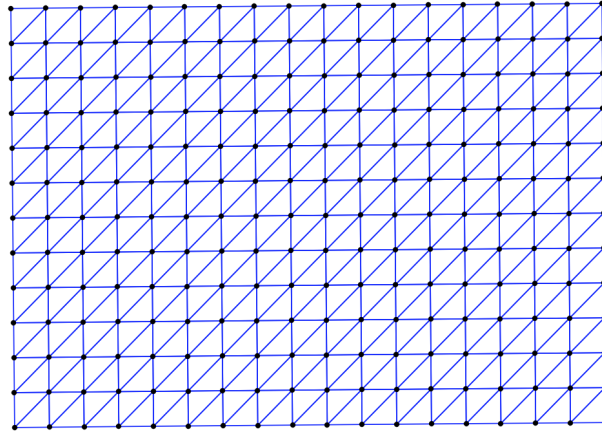


FIGURE 5.7 – Triangulation de Delaunay d'un semis régulier de points.

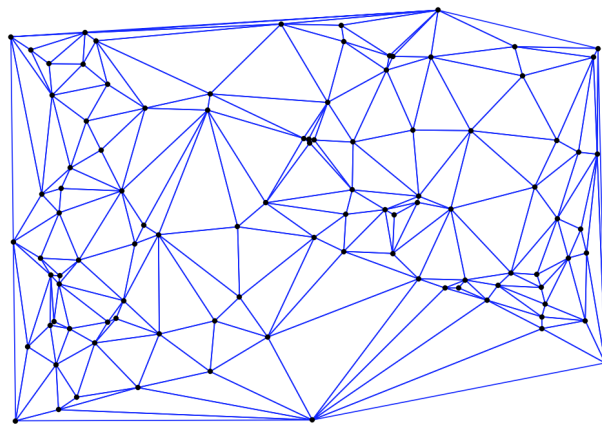


FIGURE 5.8 – Triangulation de Delaunay d'un semis de points aléatoires.



FIGURE 5.9 – Généralisation 3D de la triangulation de Delaunay (tétraédrisation) pour reconstruire un objet 3D à partir d'un nuage de points.

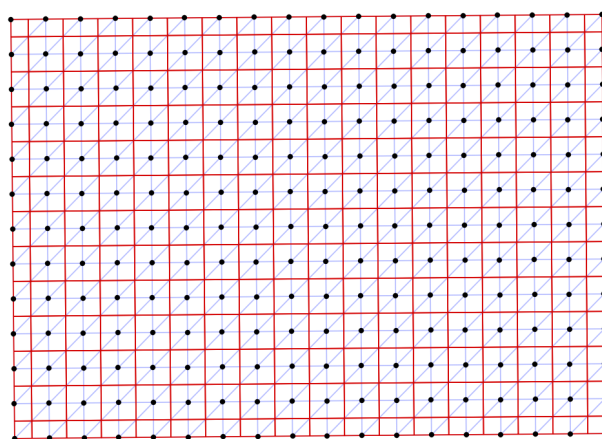


FIGURE 5.10 – Diagramme de Voronoï d'un semi régulier de points.

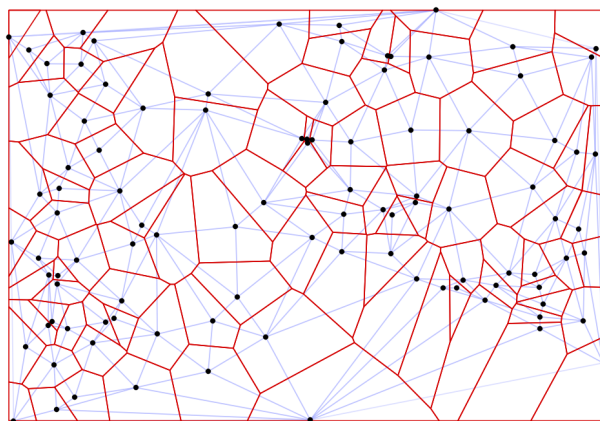


FIGURE 5.11 – Diagramme de Voronoi d'un semis de points aléatoires.

## 6. Vocabulaire sur les arbres

**Définition 6.0.1 — Arbre.** Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.

**R** Un arbre est donc nécessairement un 1-graphe.  
Un graphe est un arbre si et seulement si il existe une unique chaîne entre deux sommets quelconques.

**Définition 6.0.2 — Forêt.** Une **forêt** est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

**R** Une forêt est donc un graphe sans cycle qui n'est pas connexe.

**Définition 6.0.3 — Arborescence .** Une **racine** est une sommet  $x$  tel que pour tout autre sommet  $y$ , il existe un et un seul chemin de  $x$  vers  $y$ .  
Une **arborescence** est un arbre muni d'une racine.

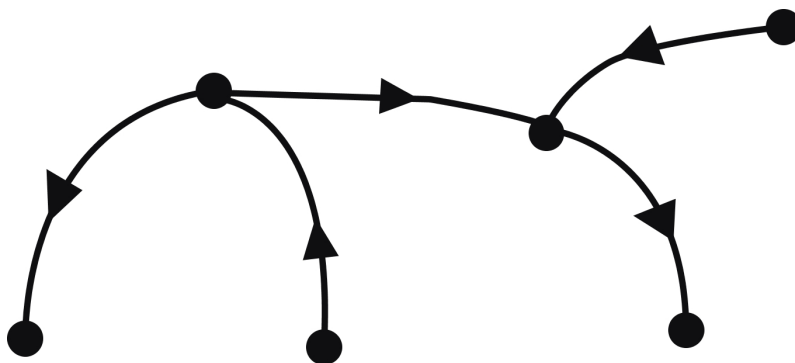


FIGURE 6.1 – Exemple d'arbre.

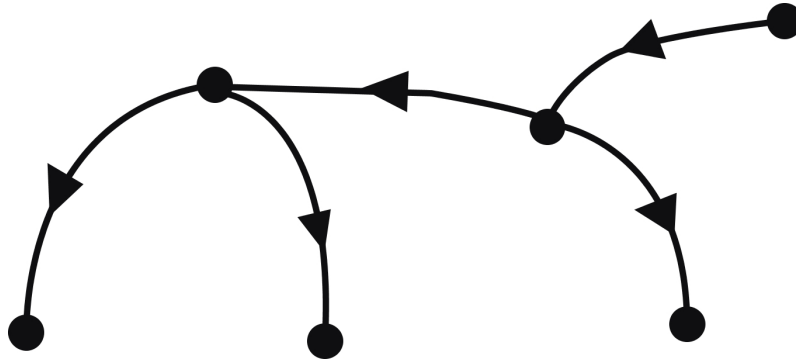


FIGURE 6.2 – Exemple d'arborescence.

**Proposition 6.0.1** Soit  $G(V, E)$  un graphe d'ordre  $|V| = n \geq 2$ . Les six propriétés suivantes sont équivalents pour caractériser un arbre :

1.  $G$  est un arbre (connexe et sans cycle) ;
2.  $G$  est sans cycle et admet  $n - 1$  arcs ;
3.  $G$  est connexe et admet  $n - 1$  arcs ;
4.  $G$  est sans cycle et en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul) ;
5.  $G$  est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe ;
6. Tout couple de sommets est reliés par une chaîne et une seule.

*Démonstration.*

(1)  $\longrightarrow$  (2) : on utilise la relation  $v(G) = m - n + p = 0 \longrightarrow m = n - p = n - 1$

(2)  $\longrightarrow$  (3) :  $v(G) = m - n + p = 0 \longrightarrow p = n - m = 1$

(3)  $\longrightarrow$  (4) :  $p = 1$  et  $m = n - 1 \longrightarrow v(G) = 0$  et en rajoutant un arc  $v(G) = 1$

(4)  $\longrightarrow$  (5) : supposons que  $G$  n'est pas connexe. On choisi  $x$  et  $y$  non connectés. Alors l'ajout de l'arc  $(x, y)$  ne suffit pas pour créer un cycle ce qui est absurde. Donc  $G$  est connexe,  $p = 1$ ,  $v(G) = 0$  et  $m = n - 1$ . En supprimant un arc, on obtient un graphe  $G'$  avec  $m' = m - 1 = n - 1 = n' - 1$ . Or,  $v(G') = 0$  d'où  $p' = -m' + n' = 2$  donc  $G$  n'est plus connexe.

(5)  $\longrightarrow$  (6) :  $G$  est connexe donc toute paire de sommet est reliée par au moins une chaîne. Mais si il en existe deux, alors la suppression d'un arc ne suffit plus à déconnecter  $G$ .

(6)  $\longrightarrow$  (1) : il existe une chaîne entre toute paire de sommets donc  $G$  est connexe.  $G$  est sans cycle sinon on pourrait créer deux chaînes. ■

**Proposition 6.0.2** Un arbre  $G$  d'ordre  $n \geq 2$  admet au moins deux sommets pendants.

*Démonstration.* Si  $G$  admet 0 ou 1 sommet pendant, on crée une chaîne de la façon suivante :

- on part d'un sommet quelconque s'il n'y a pas de sommet pendant, ou du seul sommet pendant s'il n'y en a qu'un.
- on choisi un arc adjacent à ce sommet.
- on considère l'autre extrémité de l'arc.
- on recommence en s'astreignant à ne jamais utiliser deux fois le même sommet. C'est toujours possible car sinon l'arbre posséderait un cycle.

La chaîne ainsi construite est infinie car l'absence de sommet pendant (ou de sommet pendant supplémentaire) permet de toujours trouver un nouvel arc non utilisé pour repartir du sommet courant. Ceci est absurde puisque le graphe est fini d'ordre  $n$ . ■

**Proposition 6.0.3** Un graphe  $G$  admet un arbre comme graphe partiel si et seulement si  $G$  est connexe.

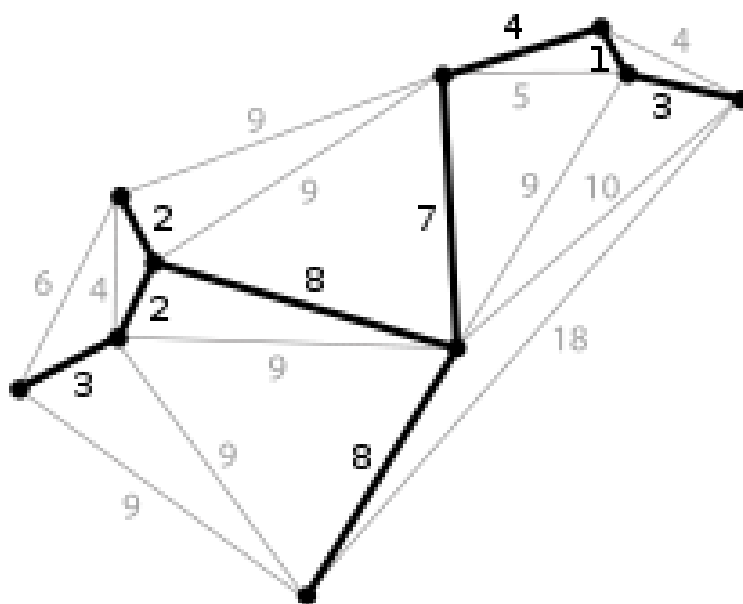


FIGURE 6.3 – Exemple d'arbre couvrant.

*Démonstration.* Si  $G$  n'est pas connexe, il n'admet pas de graphe partiel connexe puisqu'on supprime des arcs de  $G$ .

Si  $G$  est connexe, on cherche un arc dont la suppression ne rompt pas la connexité :

- si il n'existe aucun arc de telle sorte, alors d'après la propriété (5) qui caractérise les arbres,  $G$  est un arbre.
- sinon, on considère le graphe partiel issu de  $G$  par la suppression de cet arc et on recommence. Lorsqu'on ne peut plus trouver d'arc dont la suppression ne rompt pas la connexité, on aura trouvé un graphe partiel de  $G$  connexe qui forme un arbre d'après la propriété (5).

■

**Définition 6.0.4 — Arbre couvrant.** Un **arbre couvrant** d'un graphe  $G$  est à la fois un arbre et graphe partiel de  $G$ .



Un arbre couvrant de  $G$  inclut donc tous les sommets de  $G$ .

Un graphe possède un arbre couvrant si et seulement si il est connexe (d'après la proposition précédente).

**Définition 6.0.5 — Arbre couvrant de poids minimal.** Étant donné un graphe non orienté dont les arêtes sont pondérées, un **arbre couvrant de poids minimal** est un arbre couvrant dont la somme des poids des arêtes est minimale.



# Problèmes de cheminement

<b>7</b>	<b>Problème eulérien</b> .....	<b>51</b>
7.1	Chaîne eulérienne et cycle eulérien	
7.2	Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un cycle eulérien	
7.3	Algorithme pour tracer cycle eulérien	
<b>8</b>	<b>Problème hamiltonien</b> .....	<b>54</b>
8.1	Chaîne hamiltonienne et cycle hamiltonien	
8.2	Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien	
8.3	Condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien	
8.4	Condition suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien	
<b>9</b>	<b>Recherche des composantes connexes</b>	<b>57</b>
<b>10</b>	<b>Recherche de plus courts chemins</b> ...	<b>59</b>





Les problématiques de cheminement sont liées aux différentes façon de se déplacer d'arêtes en arêtes ou de sommets en sommets sur le graphe : chemins optimaux (plus court chemin, chemin le plus rapide, le plus fiable, ), chemins de contournement, chemins alternatifs (k plus courts chemins par exemple), chemins aléatoires, ou encore chemins issus de la théorie des graphes (eulériens, hamiltoniens).

L'intérêt des problèmes eulériens ou hamiltoniens s'explique par leurs très nombreuses applications : optimisation de tournées de distribution, problèmes d'ordonnancement, etc.

## 7. Problème eulérien

Les problèmes eulériens généralisent l'exercice bien connu consistant à dessiner toutes les arêtes d'un graphe (représentant par exemple une maison) sans jamais lever le crayon ni utiliser deux fois le même arc. Le problème des 7 ponts de Königsberg est également un exemple de problème eulérien : est-il possible de faire le tour de la ville de Königsberg en passant une et une seule fois par chacun de ses sept ponts ?

### 7.1 Chaîne eulérienne et cycle eulérien

**Définition 7.1.1 — Chaîne eulérienne, cycle eulérien.** Soit  $G(V,E)$  un graphe connexe d'ordre  $n$ . On appelle **chaîne eulérienne** (**cycle eulérien**), une chaîne (un cycle) **utilisant une fois et une seule chacune des arêtes de  $G$** .

Un graphe est un **graphe eulérien** s'il contient un cycle eulérien.

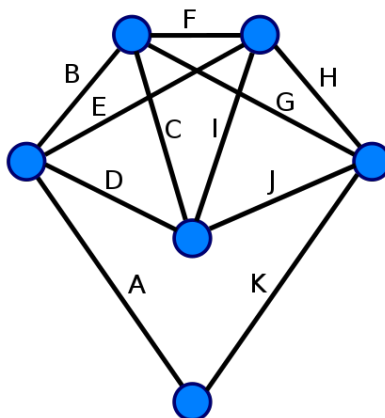


FIGURE 7.1 – Graphe eulérien :  $(A, B, F, E, D, C, G, J, I, H, K)$  est un cycle eulérien.

- R** Le problème du postier chinois qui consiste à modéliser la tournée d'un facteur devant effectuer le plus efficacement possible sa tournée en passant au moins une fois par chaque rue de son secteur se rapproche d'un problème eulérien. On rencontre ce genre de problème dans les organisations de tournées de distribution de courrier, de ramassage d'ordures, d'inspection de réseaux de distribution, etc.

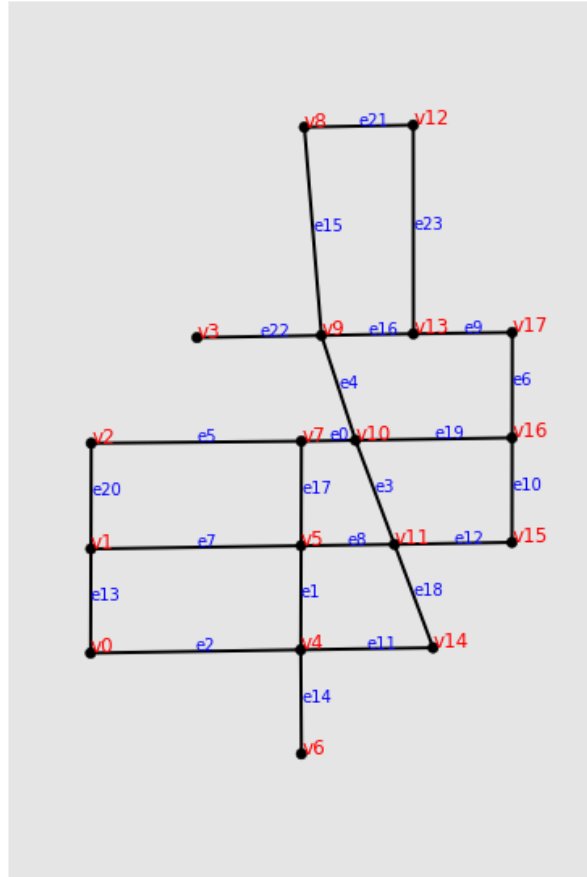


FIGURE 7.2 – Problème du postier chinois : on cherche le plus court chemin passant par toutes les rues.

## 7.2 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un cycle eulérien

**Théorème 7.2.1 — Théorème d'Euler.** Un graphe non orienté connexe  $G$  admet une **chaîne eulérienne** si et seulement le **nombre des sommets de degré impair** est **0 ou 2**. Il admet un **cycle eulérien** si et seulement tous ses sommets ont un degré pair.

*Démonstration.* La condition est nécessaire car s'il existe une chaîne eulérienne  $\mu$  le graphe est connexe. De plus, un sommet de  $\mu$  qui n'est pas sommet initial ou terminal est de degré pair car le nombre d'arcs entrants est égal au nombre d'arcs sortants. Donc les deux sommets terminaux de  $\mu$ , s'ils sont distincts, sont les seuls à avoir un degré impair : il y a donc 0 ou 2 sommets de degré impair.

Dans le cas d'un cycle, on peut partir de n'importe quel sommet donc ils sont tous de degré pair.

Pour montrer que la condition est suffisante, on raisonne par récurrence forte et on suppose que la propriété est vérifiée pour tout graphe de strictement moins de  $m$  arêtes.

Soit  $G$  un graphe connexe à  $m$  arêtes admettant deux sommets de degré impair  $a$  et  $b$  (si tous les sommets ont un degré pair on prend  $a$  quelconque et  $b = a$ ).

On va définir une chaîne  $\mu$  en partant de  $a$  dans une direction quelconque sans parcourir deux fois la même arête. Si on arrive en un sommet  $x \neq b$  on aura utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à  $x$  car  $x$  n'est pas sommet final donc il est de degré pair, donc on pourra repartir par une arête inutilisée. Quand on ne pourra plus repartir, on sera nécessairement en  $x = b$  sinon  $x$  serait de degré impair et on pourrait repartir. Si tous les arcs ont été utilisés,  $\mu$  est bien une chaîne eulérienne par construction.

S'il existe des arêtes non utilisées, elles permettent de définir un sous-graphe partiel  $G'$  dont tous les sommets sont de degré pair.

Soient  $C_1, \dots, C_k$  les composantes connexes de  $G'$  admettant au moins une arête; par hypothèse de récurrence, elles admettent des cycles eulériens  $\mu_1, \dots, \mu_k$ ; comme  $G$  est connexe, la chaîne  $\mu$  rencontre successivement les graphes  $C_i$  en des sommets  $x_i \in C_i$ . Alors la chaîne constituée par :

- $\mu$  entre  $a$  et  $x_1$ ,
- $\mu_1$  entre  $x_1$  et  $x_1$ ,
- $\mu$  entre  $x_1$  et  $x_2$ ,
- $\mu_2$  entre  $x_2$  et  $x_2$ ,
- ...
- $\mu$  entre  $x_k$  et  $b$ .

est une chaîne eulérienne entre  $a$  et  $b$ . ■

### 7.3 Algorithme pour tracer cycle eulérien

Cet algorithme a pour objectif de parcourir "d'un seul trait de plume" toutes les arêtes d'un graphe connexe non orienté dont tous les sommets sont de degré pair :

- Départ d'un sommet  $a$  quelconque, et on suit une chaîne sans réutiliser d'arêtes ;
- En  $x \neq a$  ( $k$ -étape), on prendra jamais une arête qui est un isthme de  $G_k$  (graphe engendré par les arêtes restantes) sauf si  $x$  est un sommet pendant de  $G_k$  ;
- En  $a$ , s'il existe une nouvelle arête on repart, sinon on s'arrête.

## 8. Problème hamiltonien

### 8.1 Chaîne hamiltonienne et cycle hamiltonien

**Définition 8.1.1 — Chaîne hamiltonienne, cycle hamiltonien.** Soit  $G(V, E)$  un graphe connexe non orienté d'ordre  $n$ . On appelle **chaîne hamiltonienne** (**cycle hamiltonien**), une chaîne (un cycle) **passant une fois et une seule par chacun des sommets** de  $G$ .

Un graphe est un **graphe hamiltonien** s'il contient un cycle hamiltonien.

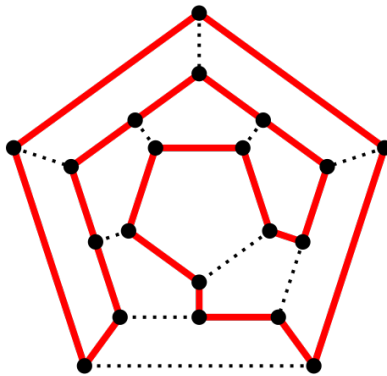


FIGURE 8.1 – Exemple de graphe hamiltonien (Christoph Sommer — Travail personnel).

- R** Les définitions précédentes sont adaptables aux graphes orientés : on parle alors de chemin / circuit hamiltonien, et un graphe orienté est hamiltonien s'il contient un circuit hamiltonien.
- R** Le problème du voyageur de commerce est lié à un problème hamiltonien : si un voyageur part du point A et que les distances entre toutes les villes sont connues, quel est le plus court chemin pour visiter toutes les villes une seule fois et revenir au point d'origine ?

Un autre problème classique concerne l'ordonnement de tâches. On cherche un ordre dans lequel on peut effectuer  $n$  tâches données (deux tâches quelconques ne pouvant être effectuées simultanément) tout en respectant un certain nombre de contraintes d'antériorité. Si l'on construit le graphe  $G$  dont l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble des tâches, et où il existe un arc  $(i, j)$  si la tâche  $i$  peut être effectuée avant la tâche  $j$ , le problème revient à déterminer un chemin hamiltonien de  $G$ .

Autres applications : logistique, mouvement machines ( minimiser le temps total que met une fraiseuse à commande numérique pour percer  $n$  points dans une plaque de tôle), problème aide au séquençage du génome, etc.

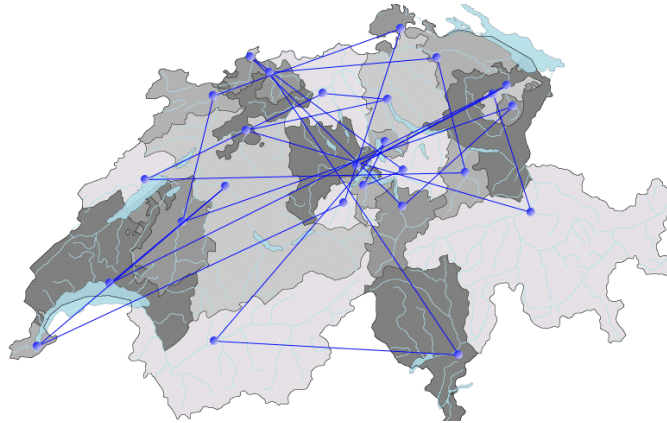


FIGURE 8.2 – Problème du voyageur de commerce.

- R** On ne connaît pas de solution polynomiale pour la recherche d'un cycle hamiltonien : cette recherche est donc très difficile. De plus, il n'existe pas de condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'existence d'un cycle hamiltonien. En outre, s'il existe de nombreux théorèmes concernant l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe simple, peu de théorèmes existent pour l'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté.

**Définition 8.1.2 — Cycle préhamiltonien.** On appelle **cycle préhamiltonien** d'un graphe  $G$  un cycle passant *au moins une fois* par chaque sommet de  $G$ .

Un graphe admettant un tel cycle est appelé **graphe préhamiltonien**.

- R** De nombreux problèmes du type voyageur de commerce se ramènent en réalité à des problèmes préhamiltoniens. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit préhamiltonien est qu'il soit connexe.

## 8.2 Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien

**Proposition 8.2.1** Une condition nécessaire pour qu'un graphe non orienté soit hamiltonien est qu'il soit 2-connexe.

- R** Cette condition n'est malheureusement pas suffisante car le graphe de la figure 8.3 n'est pas hamiltonien (c'est le graphe 2-connexe non hamiltonien ayant le plus petit nombre de sommets).

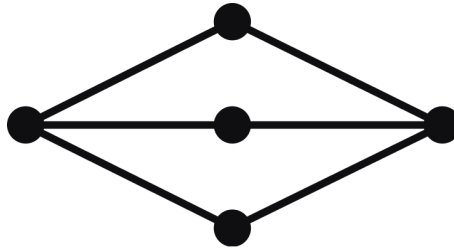


FIGURE 8.3 – Graphe 2-connexe non hamiltonien ayant le plus petit nombre de sommets

### 8.3 Condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien

**Théorème 8.3.1 — Théorème de Meyniel.** Soit  $G$  un graphe simple d'ordre  $n$  fortement connexe. Si pour toute paire de sommet non voisins  $x, y$ , on a :

$$d_G(x) + d_G(y) \geq 2n - 1$$

alors  $G$  contient un circuit hamiltonien.

*Démonstration.* Admise. ■

**Proposition 8.3.2 — Corollaire.** Si dans un graphe simple  $G$  d'ordre  $n$  fortement connexe on a  $\forall x \in X, d_G(x) \geq n$  alors  $G$  contient un circuit hamiltonien.

### 8.4 Condition suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien

**Théorème 8.4.1 — Théorème d'Ore.** Un graphe simple  $G(X, E)$  d'ordre  $n$  tel que toute paire  $x, y$  de sommets non adjacents vérifie  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$  admet un cycle hamiltonien.

*Démonstration.* Soit  $G^*$  le graphe symétrique orienté obtenu en remplaçant chaque arête de  $G$  par deux arcs de sens opposés. La condition d'Ore devient  $d_G(x) + d_G(y) \geq 2n$  pour  $G^*$ . Donc d'après le théorème de Meyniel,  $G^*$  admet un circuit hamiltonien. ■

**Théorème 8.4.2 — Théorème de Dirac.** Un graphe simple  $G(X, E)$  d'ordre  $n$  qui vérifie  $\forall x \in X, d_G(x) \geq \frac{n}{2}$  admet un cycle hamiltonien.

*Démonstration.* Ce théorème est une restriction du théorème d'Ore. ■

**Théorème 8.4.3 — Théorème de Tutte.** Si un graphe planaire  $G$  est 4 connexe alors il admet un cycle hamiltonien.

*Démonstration.* Admise. ■



## 9. Recherche des composantes connexes

La vérification de la connexité d'un graphe est un des premiers problèmes de la théorie des graphes. En effet, on se ramène généralement à un graphe connexe en ne considérant qu'une composante connexe à la fois.

On présente ici un algorithme de **recherche en profondeur d'abord** (Depth first search) qui a pour objectif de rechercher la composante connexe contenant un sommet particulier. Cette recherche est effectuée par création d'une arborescence dont la racine est le sommet choisi. La recherche s'effectue en profondeur d'abord : on explore à fond les chemins un par un ; pour chaque sommet, l'algorithme marque le sommet actuel et prend le premier sommet voisin jusqu'à ce qu'un sommet n'ait plus de voisin non marqué, et revient alors au sommet prédécesseur. A partir de ce prédécesseur, on essaye alors de redescendre de nouveau dans le graphe.

Au final, si le nombre de sommets marqués est égal à l'ordre du graphe, alors le graphe est connexe. Sinon, on recommence l'algorithme avec un sommet non marqués. Le nombre de fois où l'algorithme aura été exécuté correspond au nombre de connexité du graphe.

Pour la suite, on considère un graphe  $G = (V, E)$  et le graphe orienté symétrique associé  $G^* = (V, E^*)$  obtenu en remplaçant chaque arc de  $G$  par deux arcs orienté dans chaque sens :  $e = (x, y) \in E \Rightarrow e \in E^*$  et  $e^* = (y, x) \in E^*$ .

On suppose que les sommets sont numérotés de 1 à  $n = |V|$ . L'algorithme utilise une pile LIFO (Last In, First Out)  $S$  dans laquelle vont s'empiler les sommets voisins explorés récursivement lors du parcours en profondeur, une liste  $M$  contenant les sommets marqués par l'algorithme ainsi qu'une procédure  $neighbors(s)$  renvoyant une liste contenant les sommets voisins de  $s$ .

**R** La complexité dans le meilleur des cas est  $O(1)$  (dans le cas où  $s$  est un sommet isolé). Le pire des cas correspond au cas où  $G$  est un arbre. Chaque sommet  $s$  va être marqué soit  $|V|$  opérations, et pour chacun on va empiler tous ses voisins soit  $d_G(s)$  sommets, donc chaque sommets implique  $1 + d_G(s)$  opérations soit au total  $\sum_{x \in V} (1 + d_G(x)) = |V| + \sum_{x \in V} d_G(x) = |V| + 2 * |E|$ . La complexité dans le pire des cas est donc  $O(|V| + |E|)$ .

---

**Algorithm 1** Trouve la composante connexe de  $G$  contenant le sommet  $s$ 

---

$S \leftarrow s$     *on met  $s$  dans la pile*  
**while**  $S \neq \emptyset$  **do**    *tant qu'il y a des sommets dans  $S$*   
     $s \leftarrow S.pop()$     *on dépile le premier sommet de  $S$*   
    **if**  $s \notin M$  **then**    *si  $s$  n'est pas encore marqué*  
         $M \leftarrow s$     *on le marque*  
        **for**  $n \in \text{neighbors}(s)$  **do**    *pour chaque voisin  $n$  de  $s$*   
             $s \leftarrow n$     *on l'empile dans  $S$*   
        **end for**  
    **end if**  
**end while**

---

## 10. Recherche de plus courts chemins

Le **problème du plus court chemin** (ppc) est un problème de la théorie des graphes consistant à chercher un chemin entre deux sommets tel que la somme des poids des arcs du chemin soit minimale.

**Définition 10.0.1 — Plus court chemin.** On associe à chaque arc  $u$  d'un graphe  $G$  une **longueur**  $l(u)$  telle que  $\forall u \in E, l(u) \geq 0$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux sommets de  $G$ , on cherche un chemin  $\mu(a,b)$  tel que  $l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u)$  soit le plus petit possible.

$\mu(a,b)$  est appelé le **plus court chemin** de  $a$  à  $b$ .

**R** Selon la façon dont les arcs sont pondérés (longueur, temps de parcours, trafic, unitairement, etc.) le plus court chemin entre deux sommets n'est pas forcément le plus moins distant en considérant des déplacements sur le réseau ...

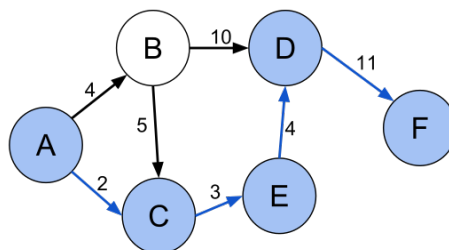


FIGURE 10.1 – Exemple d'utilisation de ppc dans le calcul d'itinéraires.

Il existe différentes version du problème de plus courts chemins :

- **single-pair shortest path problem (SPSP)**, recherche du ppc entre deux sommets donnés (la *source* et la *destination*),
- **single-source shortest path problem (SSSP)**, recherche du ppc entre un sommet et tous les autres sommets du réseau,
- **all-pair shortest path problem (APSP)**, recherche du ppc entre toute paire de sommets.

De nombreux algorithmes ont été développés, adaptés aux différentes versions du problème. Les plus connus sont :

- l'algorithme de Dijkstra (SSSP, poids positifs) (complexité dans le pire des cas en  $O(|V|^2)$  pur l'algorithme initial, en  $O(|E| + |V|\log(|V|))$  en l'optimisant) pour les graphes non orientés ou orientés,
- l'algorithme de Bellman-Ford (SSSP, poids éventuellement négatifs,  $O(|V||E|)$ ),
- l'algorithme de recherche A\* (SPSP avec heuristiques),
- l'algorithme de Floyd-Warshall (APSP,  $O(|V|^3)$ ),
- l'algorithme de Johnson (APSP,  $O(|V|^2\log|V| + |V||E|)$ ), meilleur que Floyd-Warshall sur les graphes à matrices creuses.

**Définition 10.0.2 — Algorithme de Moore-Dijkstra.** Soit un graphe  $G(V, E)$  connexe, tel que  $V = \{1, \dots, N\}$ .

L'algorithme de Moore-Dijkstra :

- obtenir le **plus court chemin** d'un sommet 1 à tous les autres ;
- en au plus  $N + 1$  itérations ;
- initialisation du plus court chemin de 1 à  $i \neq 1 : +\infty$  ;
- construction d'une arborescence  $H$  de racine 1 qui couvre  $G$ .

**Structure des données :**

Soit  $\forall (i, j) \in E, l(i, j) \geq 0$ .

Soit  $\pi_i^*$  longueur minimum des chemins de 1 à  $i$  et  $\pi_0^* = 0$ .

$X$  est partitionné en  $S$  et  $\bar{S} = X - S$

Étiquette  $\pi_i$  de chaque sommet  $i$  :

- $\pi_i = \pi_i^*$ , si  $i \in S$
- $\pi_i = \min_{\forall k \in S / (k, i) \in E} (\pi_k^* + l(k, i))$ , si  $i \notin S$

Tableau  $predH$  des prédécesseurs dans  $H$ .

**Initialisation :**

$\forall i \in \Gamma_G^+(1), \pi_i \leftarrow l(1, i); predH_i \leftarrow 1;$

$\forall i \in X - \Gamma_G^+(1), \pi_i \leftarrow +\infty; predH_i \leftarrow 0;$

$S = \{1\}$  et  $\bar{S} = \{2, \dots, N\}; \pi_i \leftarrow +\infty; predH_1 \leftarrow 0;$

---

**Algorithm 2** Algorithme de Moore-Dijkstra
 

---

```

while  $|\bar{S}| \neq 0$  do
  on recherche un sommet  $j$  de  $\bar{S}$  le plus proche des sommets de  $S$ 
   $\pi_j = \min_{i \in \bar{S}} (\pi_i)$ 
  on retire  $j$  des sommets restants
   $\bar{S} \leftarrow \bar{S} - \{j\}$ ;
  if  $|\bar{S}| \neq 0$  then
    alors il reste des éléments dans  $\bar{S}$ , on met à jour l'étiquette de chaque sommet restant
    for  $i \in \bar{S} \cap \Gamma_G^+(j)$  do
      if  $\pi_i \geq \pi_j + l(i, j)$  then
         $\pi_i \leftarrow \pi_j + l(i, j)$ 
         $predH_i \leftarrow j$ ;
      else
        rien
      end if
    end for
  else
    rien
  end if
end while

```

---

**Arrêt des itérations :**
 $|\bar{S}| = 0 \Rightarrow \forall i \in X, \pi_i^* \neq +\infty :$ 

- on a trouvé la longueur du plus court chemin de 1 à tout autre sommet  $i$ ;
- $PredH$  permet de retrouver le plus court chemin.

■ **Exemple 10.1** L'exemple ci-dessous illustre le fonctionnement général de l'algorithme de Dijkstra<sup>1</sup>. On recherche là le plus court chemin entre les villes A et J mais on pourrait continuer l'algorithme jusqu'à avoir couvert l'intégralité du graphe pour obtenir les plus courts chemins entre A et toutes les autres villes du réseau. ■

---

1. Exemple tiré de Wikipédia : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme\\_de\\_Dijkstra](https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Dijkstra)

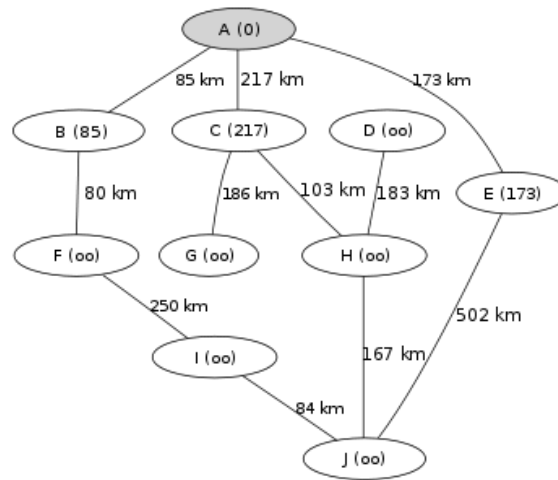


FIGURE 10.2 – On choisit la ville A. On met à jour les villes voisines de A qui sont B, C, et E. Leurs distances deviennent respectivement 85, 217, 173, tandis que les autres villes restent à une distance infinie.

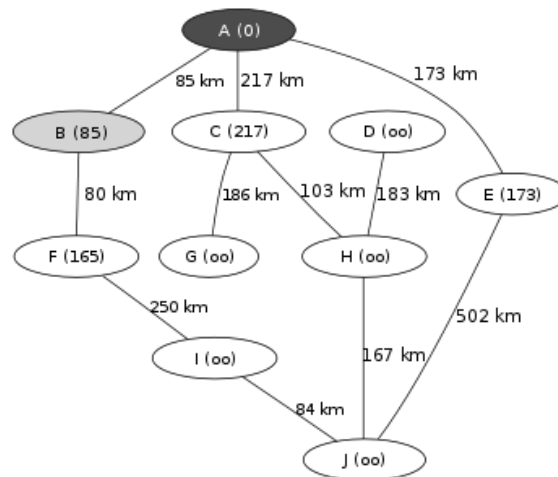


FIGURE 10.3 – On choisit la ville B. En effet, c'est la ville hors du sous-graphe qui est à la distance minimale (85). On met à jour le seul voisin (F). Sa distance devient  $85 + 80 = 165$ .

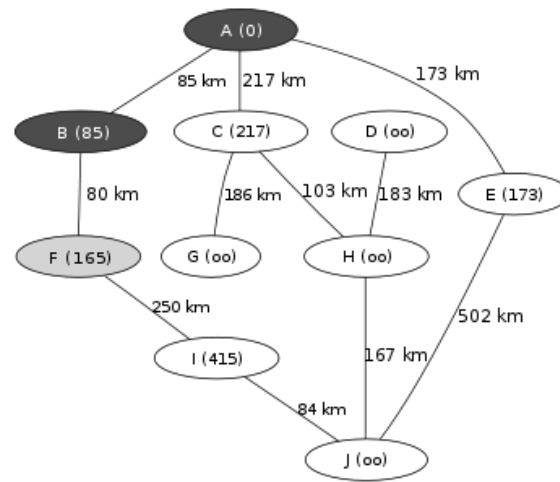


FIGURE 10.4 – On choisit F. On met à jour le voisin I (415).

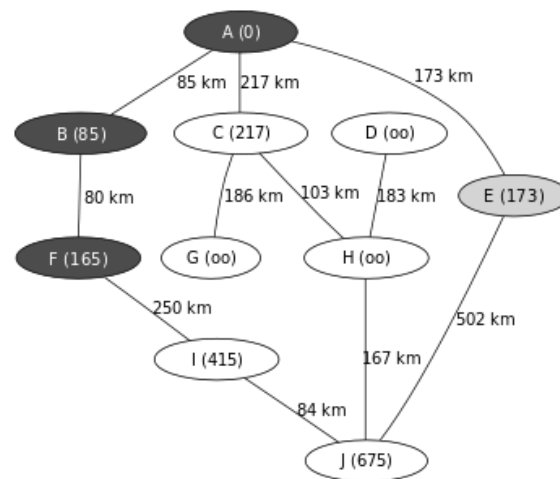


FIGURE 10.5 – On choisit E. On met à jour le voisin J (675).

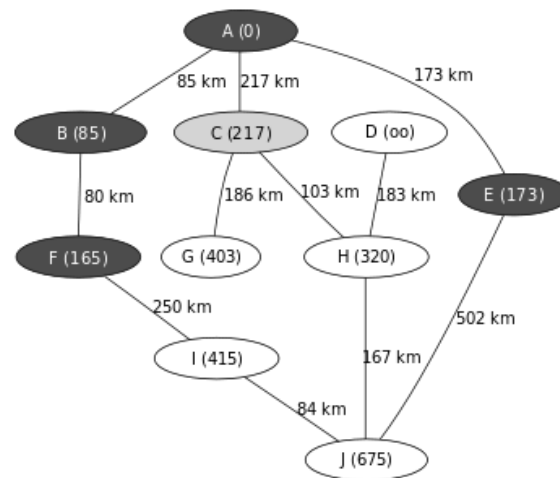


FIGURE 10.6 – La distance la plus courte en dehors du sous-graphe est maintenant celle de la ville C. On choisit donc C. On met à jour la ville G (403) et la ville H (320) (Wikipédia).

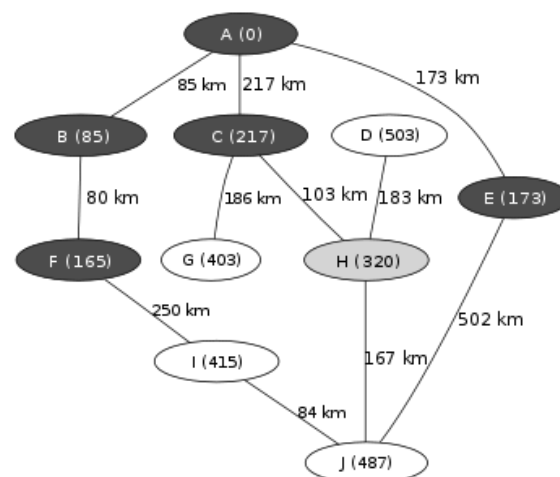


FIGURE 10.7 – La distance la plus courte en dehors du sous-graphe est maintenant celle de la ville H (320). On choisit donc H. On met à jour la ville D (503) et la ville J (487 < 675).



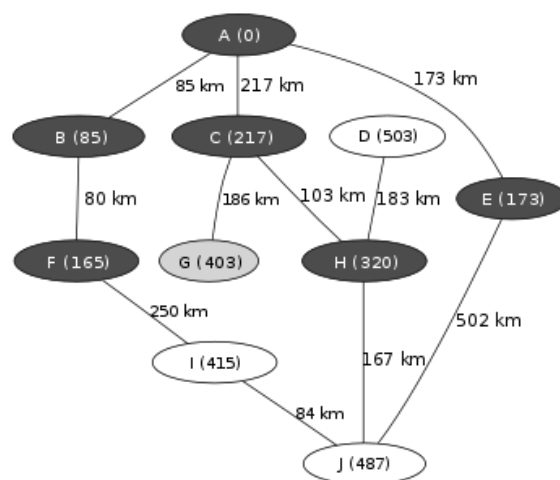


FIGURE 10.8 – La distance la plus courte suivante est celle de la ville G. On choisit G. La mise à jour ne change aucune autre distance (Wikipédia).

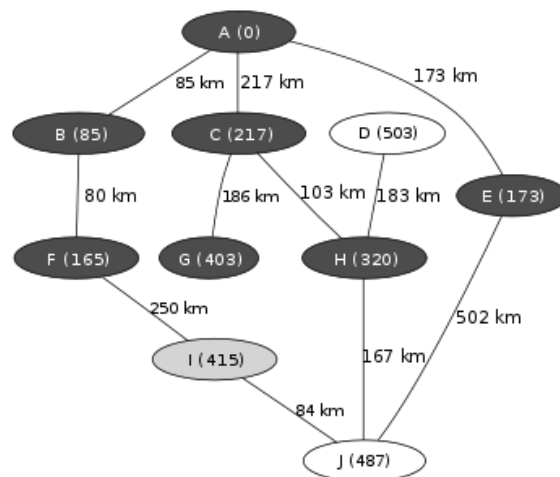


FIGURE 10.9 – La distance la plus courte suivante est celle de la ville I. La distance de la ville voisine J n'est pas modifiée car la distance existante est inférieure à celle que l'on obtiendrait en passant par I ( $415 + 84 > 487$ ) (Wikipédia).

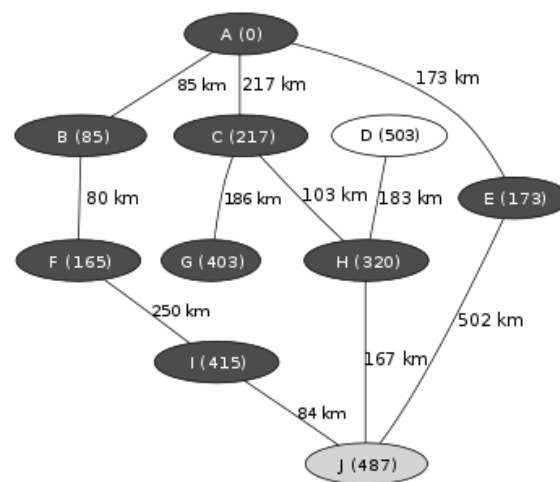


FIGURE 10.10 – La ville dont la distance est la plus courte est J (487). On choisit J et on l’ajoute au sous-graphe. On s’arrête puisque la ville d’arrivée est maintenant dans le sous-graphe .

# IV

## Notion de flots

<b>11</b>	<b>Définitions .....</b>	<b>69</b>
11.1	Flot et coupe	
11.2	Flot maximum, coupe minimum	
11.3	Chaîne améliorante	
<b>12</b>	<b>Algorithme de Ford-Fulkerson .....</b>	<b>72</b>



## 11. Définitions

### 11.1 Flot et coupe

**Définition 11.1.1 — Flot, capacité, quantité de flux.** Soit un graphe  $G(V, E)$  dont les arcs sont numérotés de 1 à  $m$ .

Un **flot** dans  $G$  est une valuation positive des arcs, c'est à dire une fonction de  $E$  dans  $R^+$ , telle qu'en tout sommet  $s$  du graphe la loi de Kirchhoff (ou *loi de conservation*) soit vérifiée :  $\sum_{u \in \omega^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(s)} \varphi_u$ .

La composant  $\varphi_u$  est appelée la **quantité de flux** et peut-être assimilée par exemple à la quantité d'électricité parcourant l'arc  $u$ .

La **capacité** de l'arc  $u$  ( $c_u \geq 0$ ) est la borne supérieure du **flux admissible** sur l'arc  $u$ .

Un flot  $\varphi$  tel que  $\forall u \in E, 0 \leq \varphi_u \leq c_u$  est un **flot compatible**.

**Définition 11.1.2 — Réseau de transport.** Un **réseau de transport** est graphe orienté valué  $G(V, E, C)$  sans boucles dans lequel il existe :

- un sommet  $s$  sans prédécesseur, nommé entrée ou source du réseau ;
- un sommet  $p$  sans successeur, nommé sortie ou puits du réseau ;
- et tel qu'au moins un chemin unisse  $s$  à  $p$ .

$C$  est le vecteur des capacités des arcs.

$\sum_{u \in \omega^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(p)} \varphi_u = \varphi_s$  est appelé la *valeur du flot*.

**Définition 11.1.3 — Coupe.** On appelle **coupe** une partition des sommets notée  $(X, \bar{X})$  telle que :

- $V = X \cup \bar{X}$ ,
- $X \cap \bar{X} = \emptyset$ ,
- $s \in X$  et  $p \in \bar{X}$ .

La capacité de la coupe est définie par :  $c(X, \bar{X}) = \sum_{u \in \omega^+(X)} c_u$  avec  $\omega^+(X)$  l'ensemble des arcs incidents à  $X$  vers l'extérieur (les arcs sortants aux sommets de  $X$  et entrant aux sommets de  $\bar{X}$ ).

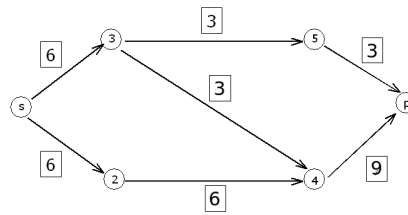
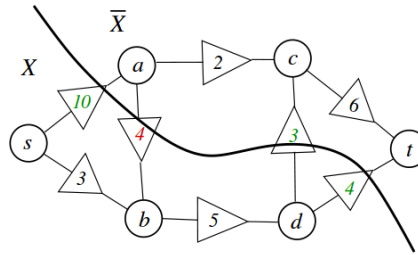
FIGURE 11.1 – Exemple de réseau de transport, d'entrée  $s$  et de sortie  $p$ .

FIGURE 11.2 – Exemple de coupe de capacité 17.

**Définition 11.1.4 — Arc saturé, insaturé.** On dit qu'une arête  $i$  est **saturée** si sa quantité de flux est égale à sa capacité ( $\varphi_i = c_i$ ), et **insaturée** si sa quantité de flux est nulle.

**R** Une coupe déconnecte la source du puits.  
Par la suite, on notera un flot par  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ .

## 11.2 Flot maximum, coupe minimum

**Définition 11.2.1 — Flot maximum.** Un **flot maximum** est un flot compatible de valeur maximale.

**R** Par exemple, on cherche le trafic maximal entre deux villes, entre lesquelles il existe différents itinéraires possibles passant par d'autres villages intermédiaires, sachant que chaque tronçon de route entre 2 villages ne peut supporter plus d'un certain nombre de véhicules par heure (la capacité de l'arc).

**Théorème 11.2.1 — Théorème de Ford-Fulkerson.** Dans un réseau de transport, avec  $(X, \bar{X})$  une coupe :  $\varphi_s \leq c(X, \bar{X})$ .

**Définition 11.2.2 — Coupe minimale.** Une coupe  $(X, \bar{X})$  sur un réseau de transport  $G(V, E, C)$  est dite **minimale** si sa capacité est minimale.

**Théorème 11.2.2 — Théorème max flow - min cut.** Si un flot et une coupe sont tels que la valeur du flot est égale à la capacité de la coupe, alors le flot est un **flot maximum** et la coupe est **minimale**.

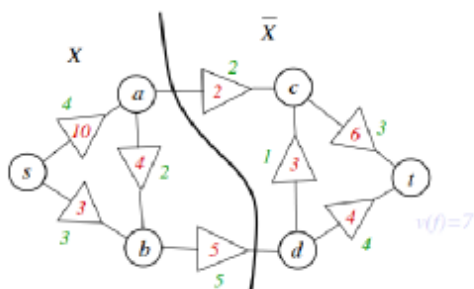


FIGURE 11.3 – Exemple de flot maximal. Valeur du flot :  $\varphi_s = 7$ , et  $c(X, \bar{X}) = 7$ .

**R** Une coupe  $(X, \bar{X})$  est minimale si toute arête de  $X$  vers  $\bar{X}$  est saturée et toute arête de  $\bar{X}$  vers  $X$  est insaturée.

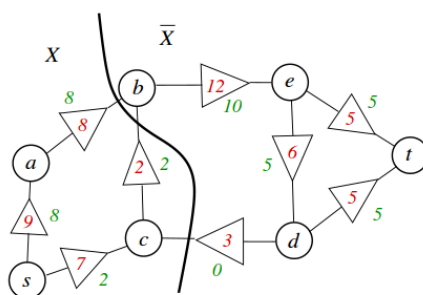


FIGURE 11.4 – Coupe minimale,  $c(X, \bar{X}) = 10$  donc  $\varphi_s = 10$ .

### 11.3 Chaîne améliorante

**Définition 11.3.1 — Chaîne améliorante.** Une chaîne de sommets  $c = (s, x_1, \dots, x_n, p)$  avec  $x_i \in V$  reliant  $s$  et  $p$  est dite **améliorante** pour un flot compatible  $\varphi$  si :

- $\varphi_{(x_i, x_{i+1})} < c_{(x_i, x_{i+1})}$  si  $(x_i, x_{i+1}) \in E$  (est dans le sens direct),
- $\varphi_{(x_{i+1}, x_i)} > 0$  si  $(x_{i+1}, x_i) \in E$  (est dans le sens inverse).

## 12. Algorithme de Ford-Fulkerson

L'algorithme de Ford-Fulkerson permet de rechercher un flot maximal dans un réseau de transport.

### Principe de l'algorithme :

On part d'un flot compatible (généralement initialisé à 0) et on augmente de proche en proche la valeur du flot  $\varphi_s$  à maximiser par plusieurs appels à une procédure de marquage. L'objectif est de construire à chaque itération une *chaîne améliorante* reliant  $s$  et  $p$  de la manière suivante :

1. initialisation par un flot compatible  $\varphi_0 = (0, \dots, 0)$  de valeur  $\varphi_s = 0$ ;
2. procédure de marquage (itérations) :
  - on marque le sommet  $s$  avec le symbole  $+$ ;
  - tant qu'un sommet peut être marqué, ou que le puits  $p$  n'est pas marqué :
    - on parcourt les sommets  $i$  déjà marqués;
    - on marque avec  $+$  les sommets  $j$  non marqués tels que  $\varphi_{(i,j)} < c_{(i,j)}$ ;
    - on marque avec  $-$  les sommets  $j$  non marqués tels que  $\varphi_{(j,i)} > 0$ .
  - si le puits  $p$  n'est pas marqué, alors le flot est maximal. Sinon, on peut *améliorer* le flot.
3. Procédure d'amélioration du flot :
  - Cette procédure ne s'applique que si le puits  $p$  a pu être marqué. On a trouvé une chaîne  $\mu$  qui a permis de marquer le puits  $p$ .
  - Soit  $\mu^+$  les arcs de la chaîne de la forme  $(x_i, x_{i+1})$  (arcs dans le sens direct) et  $\mu^-$  les arcs de la chaîne de la forme  $(x_{i+1}, x_i)$  (arcs dans le sens inverse).
  - Les arcs de  $\mu^+$  sont tels qu'il est possible d'augmenter la valeur du flot d'une quantité  $\varepsilon^+$ , et les arcs de  $\mu^-$  sont tels qu'il est possible d'augmenter la valeur du flot d'une quantité  $\varepsilon^-$ , quantités définies par :
    - $\varepsilon^+ = \min\{c_{(x_i, x_{i+1})} - \varphi_{(x_i, x_{i+1})}\}$  avec  $(x_i, x_{i+1}) \in \mu^+$  (sens direct);
    - $\varepsilon^- = \min\{\varphi_{(x_{i+1}, x_i)}\}$  avec  $(x_{i+1}, x_i) \in \mu^-$  (sens inverse).
  - On calcul alors  $\varepsilon = \min(\varepsilon^+, \varepsilon^-)$ .
  - On calcul le nouveau flot  $\varphi'$  tels que :
    - $\varphi'_{(x_i, x_{i+1})} = \varphi_{(x_i, x_{i+1})} + \varepsilon$  si  $(x_i, x_{i+1}) \in \mu^+$  (sens direct),
    - $\varphi'_{(x_{i+1}, x_i)} = \varphi_{(x_{i+1}, x_i)} - \varepsilon$  si  $(x_{i+1}, x_i) \in \mu^-$  (sens inverse).



---

— La valeur du flot est incrémentée de  $\varepsilon$  :  $\varphi_s = \varphi_s + \varepsilon$ .

**R** Il est possible de trouver une coupe minimale à l'issu de **la dernière procédure de marquage, n'ayant pas permis de marquer le puits  $p$**  (donc le marquage de la dernière itération n'ayant pas pu trouver de chaîne améliorante et n'ayant donc pu aboutir à l'augmentation de la valeur du flot) : la coupe  $C = (X, \bar{X})$  avec  $X$  l'ensemble des sommets marqués et  $\bar{X}$  l'ensemble des sommets non marqués est minimale.

**R** De nombreuses applications en optimisation, planification, allocation de ressources, etc.



# Coloration de graphe

<b>13</b>	<b>Coloration des sommets</b> .....	<b>77</b>
13.1	Ensembles stables et nombre de stabilité	
13.2	Encadrement du nombre chromatique	
13.3	Théorème des 4 couleurs	
13.4	Exemples d'applications	
13.5	Algorithme de coloration de graphe	
<b>14</b>	<b>Coloration des arrêtes</b> .....	<b>81</b>
<b>15</b>	<b>Graphes parfaits</b> .....	<b>82</b>
<b>16</b>	<b>Graphes triangulé, graphes d'intervalle</b>	<b>84</b>
16.1	Graphe triangulé	
16.2	Graphe d'intervalle	
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>85</b>



**Définition 12.0.1 — Colorations.** On définit deux types de coloration : **coloration des sommets** et **coloration des arêtes**.

La **coloration des sommets** (respectivement des arêtes) d'un graphe correspond à l'**affectation** à chacun des sommets (respectivement des arêtes) de telle sorte que deux **sommets** (respectivement arêtes) **adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur**.

Un graphe est dit **p-chromatique** si ses sommets admettent une coloration en  $p$  couleurs.

On appellera **nombre chromatique**  $\gamma(G)$  (respectivement **indice chromatique**  $q(G)$ ) le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration des sommets (respectivement des arêtes) de  $G$ .

**R** Ce problème peut être généralisé en ne cherchant plus une mais plusieurs couleurs par sommets et en associant des coûts à chacune des couleurs. Le champ d'applications de la coloration de graphe couvre notamment le problème de l'attribution de fréquences dans les télécommunications, la conception de puces électroniques ou l'allocation de registres en compilation.

Les premiers résultats de coloration de graphe concernent presque exclusivement les graphes planaires : il s'agissait alors de colorier des cartes. En cherchant à mettre en couleurs une carte des comtés d'Angleterre, Francis Guthrie postula la conjecture des quatre couleurs. Il remarqua en effet qu'il n'y avait besoin que de quatre couleurs pour que deux comtés ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Le frère de Guthrie transmit la question à son professeur de mathématiques, Auguste de Morgan de l'University College de Londres. De Morgan mentionna ce problème dans une lettre adressée à William Rowan Hamilton en 1852. Arthur Cayley évoqua cette question lors d'un colloque de la London Mathematical Society en 1879. La même année, Alfred Kempe publia ce qu'il prétendit en être une démonstration et pendant une décennie, on crut que le problème des quatre couleurs était résolu. Kempe fut élu membre de la Royal Society et devint ensuite président de la London Mathematical Society<sup>1</sup>.

En 1890, Percy John Heawood fit remarquer que la démonstration de Kempe était fausse. Il montra quant à lui le théorème des cinq couleurs (en) en reprenant des idées de Kempe. De nombreux travaux ont été publiés lors du siècle suivant pour réduire le nombre de couleurs à quatre, jusqu'à la démonstration finale de Kenneth Appel et Wolfgang Haken. La preuve réutilisait les idées d'Heawood et Kempe et pratiquement pas les développements ultérieurs. Il s'agit aussi de la première preuve majeure utilisant massivement l'ordinateur.

## 13. Coloration des sommets

### 13.1 Ensembles stables et nombre de stabilité

**Définition 13.1.1 — Ensemble stable.** Un sous ensemble de sommets de  $V$  est un **ensemble stable** s'il ne comprend que des sommets non voisins deux à deux.

On appelle **nombre de stabilité**  $\alpha(G)$  le cardinal maximum d'un sous ensemble stable.

**R** Une coloration des sommets est donc une **partition des sommets en sous ensembles stables**.

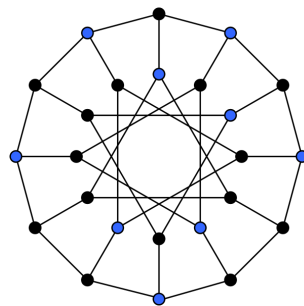


FIGURE 13.1 – L'ensemble des sommets en bleu dans ce graphe est un stable maximal du graphe (Life of Riley - Travail personnel).

### 13.2 Encadrement du nombre chromatique

#### 13.2.1 Minoration de $\chi(G)$

**Proposition 13.2.1** Le nombre chromatique est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

Le nombre chromatique est supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique.

**Proposition 13.2.2**  $\gamma(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ .

*Démonstration.* Une coloration correspond au partitionnement de l'ensemble des sommets en au minimum  $\gamma(G)$  sous ensembles stables  $X_i : V = \bigcup_{i=1}^{\gamma(G)} X_i$  avec  $\forall i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$ , et donc  $|\bigcup_{i=1}^{\gamma(G)} X_i| = |V|$ . Chaque sous ensemble de sommets de même couleur a un cardinal inférieur ou égal à  $\alpha(G) : \forall i \leq \gamma(G), |X_i| \leq \alpha(G)$ . D'où  $|V| = |\bigcup_{i=1}^{\gamma(G)} X_i| = \sum_{i=1}^{\gamma(G)} |X_i| \leq \gamma(G) * \alpha(G)$ . ■

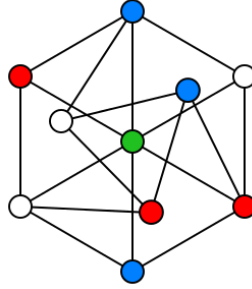


FIGURE 13.2 – Il faut au moins 3 couleurs pour colorier ce graphe car il contient une 3 clique (triangle) (MathsPoetry - Travail personnel).

### 13.2.2 Majoration de $\gamma(G)$

**Proposition 13.2.3** Soit un graphe non orienté  $G$ , alors  $\gamma(G) \leq \max_{x \in V} (d_G(x)) + 1$ .

*Démonstration.* Récurrence sur l'ordre du graphe  $G$ .

Propriété vérifiée pour  $|V| = 1 : \gamma(G) = 1$  et  $d(x) = 1$ .

Supposons la proposition vraie pour tout graphe d'ordre inférieur strictement à  $n$ . Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ .

Soit  $x$  un sommet de  $G$  de degré maximal :  $d_G(x) = \max_{x \in V} (d_G(x))$ . Considérons  $G'$  le sous graphe de  $G$  engendré par  $V \setminus \{x\}$  d'ordre  $n - 1$ . Le degré d'un sommet de  $G'$  est inférieur ou égal au degré maximum d'un sommet de  $G$  i.e à  $\max_{x \in V} (d_G(x))$ .

Par hypothèse de récurrence,  $\gamma(G') \leq \max_{x \in V'} (d_G(x)) + 1 \leq \max_{x \in X} (d_G(x)) + 1 : \max_{x \in V} (d_G(x)) + 1$  couleurs suffisent pour colorier  $G'$ .

Le sommet  $x$ , qui n'appartient pas à  $G'$ , a au plus  $\max_{x \in V} (d_G(x))$  voisins (moins si il y a des boucles), on peut colorier  $x$  avec une couleur non utilisée pour ses voisins. Il faut donc au plus  $\max_{x \in V} (d_G(x)) + 1$  couleurs pour colorier  $x$  et ses voisins. Il est donc toujours possible de colorier  $G$  avec  $\max_{x \in V} (d_G(x)) + 1$  couleur. ■

**Théorème 13.2.4 — Théorème de Brooks.** Dans tout graphe non orienté  $G$ , le nombre chromatique  $\gamma(G)$  vérifie  $\gamma(G) \leq \max_{x \in V} (d_G(x))$  sauf si  $G$  est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire, auquel cas  $\gamma(G) = \max_{x \in V} (d_G(x)) + 1$ .

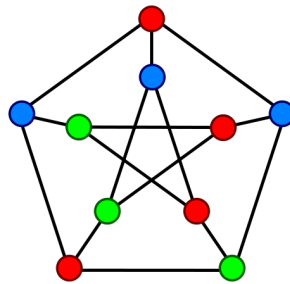


FIGURE 13.3 – Il faut au maximum 3 couleurs pour colorier ce graphe car le degré maximum d'un de ses sommets est 3.

### 13.3 Théorème des 4 couleurs

**Proposition 13.3.1** On peut colorier toute carte de géographie avec 4 couleurs, de sorte que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes.

*Démonstration.* À toute carte de géographie, on peut associer un graphe ("dual") :

- on associe un sommet à chaque région de la carte,
- on crée une arête entre deux sommets du graphe si et seulement si les deux régions correspondantes ont une frontière commune.

Toute coloration des régions correspond donc à une coloration des sommets. ■

**Théorème 13.3.2 — Théorème des 4 couleurs.** Tout graphe planaire est 4-chromatique.

*Démonstration.* Appel et Haken, 1976. ■



FIGURE 13.4 – Illustration du théorème des 4 couleurs.

### 13.4 Exemples d'applications

Certains réseaux de télécommunication sont composés d'émetteurs émettant chacun sur une fréquence particulière. Lorsque deux émetteurs sont trop proches on ne peut leur allouer la même fréquence à cause des interférences (sauf si éventuellement une montagne les sépare).

On associe un graphe au réseau—chaque sommet est un émetteur et chaque arête spécifie que l'on ne veut pas allouer la même fréquence aux deux émetteurs correspondant à ses deux extrémités—et ainsi déterminer une allocation réalisable avec un minimum de fréquences (dont la licence d'exploitation peut entraîner un coût important). Ce problème est un cas particulier du problème de la coloration de graphe.

Pour certains problèmes d'attribution de fréquences, on peut être amené à allouer plusieurs fréquences à un même émetteur; à imposer un écart minimum entre les fréquences allouées à deux émetteurs proches (et non plus seulement qu'elles soient distinctes); à imposer d'allouer à un émetteur une fréquence choisie parmi seulement un sous-ensemble des fréquences disponibles... La coloration apparaît alors comme un cas particulier de ces variantes.

### 13.5 Algorithme de coloration de graphe

- R** La coloration de graphe est un problème NP-complet : il n'existe a priori pas d'algorithme déterminant le nombre chromatique d'un graphe en temps polynomial.  
L'algorithme exact de Zykov est de complexité **exponentielle**.  
On a souvent recourt à des *heuristiques*, donc non exactes, voire des méta-heuristiques (recuit simulé, algorithmes génétiques, recherche par tabou, etc.)

L'algorithme de Welsh et Powell permet de trouver une approximation du nombre chromatique d'un graphe, souvent exact pour les "petits" graphes :

- Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants (dans certains cas plusieurs possibilités)
- Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
- Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
- Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B et ainsi de suite.
- Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore coloré de la liste.
- Continuer jusqu'à avoir coloré tous les sommets.

- R** Cette méthode peut potentiellement aboutir à la pire coloration possible. Ne donne donc pas systématiquement le nombre chromatique du graphe.





## 14. Coloration des arêtes

**Définition 14.0.1 — Indice chromatique.** On appelle **indice chromatique** de  $G$  le plus petit entier  $q$  qui a la propriété suivante : il est possible avec  $q$  couleurs de colorier les arêtes de  $G$  de sorte que **deux arêtes adjacentes ne soient pas de la même couleur**.

Une coloration des arêtes est une partition de l'ensemble des arêtes en classes qui sont des **couplages**.

**Proposition 14.0.1**  $q(G) \geq \max_{x \in X} (d_G(x))$ .

**Théorème 14.0.2** Théorème de Berge L'indice chromatique d'un multigraphe biparti  $G(X, Y, E)$  vérifie  $q(G) = \max_{x \in X} (d_G(x))$ .

## 15. Graphes parfaits

**Définition 15.0.1** Soit un graphe non orienté  $G(V, E)$  et  $w(G)$  le nombre maximum de sommets d'une clique.

Si  $\forall A \subset V, \chi(G(A, E)) = w(G(A, E))$  (nombre chromatique de chaque sous-graphe induit = la taille de la plus grande clique dudit sous-graphe induit) alors  $G$  est un **graphe parfait**.

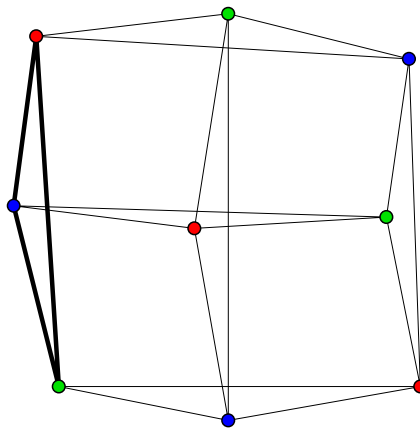


FIGURE 15.1 – Graphe parfait avec une clique de trois sommet. (Wikipédia)

**Théorème 15.0.1 — Théorème faible des graphes parfaits.** Le complémentaire d'un graphe  $G$  est un graphe  $G'$  tel que deux sommets de  $G'$  sont adjacents si et seulement si ils ne le sont pas dans  $G$ .

Un graphe est **parfait** si et seulement si son complémentaire est parfait.

*Démonstration.* László Lovász, 1972. ■

---

**Théorème 15.0.2 — Théorème fort des graphes parfaits.** Un graphe est **parfait** si et seulement si ni lui ni son complémentaire ne contiennent de cycle impair induit de longueur au moins cinq.

*Démonstration.* Chudnovsky *et al.*, 2002



## 16. Graphes triangulé, graphes d'intervalle

### 16.1 Graphe triangulé

**Définition 16.1.1 — Graphe triangulé.** Un graphe est un graphe triangulé si tout cycle de longueur  $> 3$  admet une **corde**, c'est à dire une arête reliant deux sommets non consécutifs.

### 16.2 Graphe d'intervalle

**Définition 16.2.1 — Graphe d'intervalle.** Soit une famille de segments (intervalles) d'une même droite du plan euclidien.

On associe un sommet à chaque segment (intervalle) et on relie deux sommets si les segments se chevauchent.

Un tel graphe est appelé un **graphe représentatif d'intervalles**.

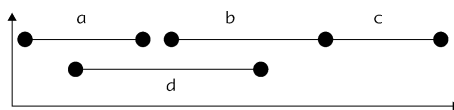


FIGURE 16.1 – Graphe d'intervalles.

**R** Les graphes d'intervalles sont utilisés pour modéliser les problèmes d'allocation de ressources en recherche opérationnelle. Chaque intervalle représente l'allocation d'une ressource pendant un certain temps; la recherche du stable maximum du graphe correspond à la meilleure allocation de ressources pouvant être réalisée sans conflits<sup>1</sup>.

La recherche d'un ensemble d'intervalles qui représente un graphe d'intervalle peut aussi être une manière d'assembler des séquences contiguës d'ADN<sup>2</sup>. L'étude des graphes d'intervalles a d'ailleurs été motivé en partie par les études biologiques de Seymour Benzer<sup>3,4</sup>.

**Proposition 16.2.1** Soit un graphe  $G$  **triangulé** alors chaque **ensemble d'articulation minimal** est une **clique**.

*Démonstration.* Admise. ■

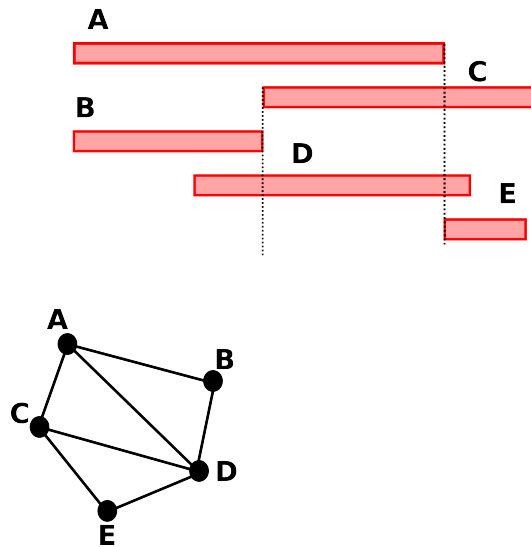


FIGURE 16.2 – Application en planification et allocation de ressources : 5 cours à donner, minimiser le nombre de professeurs à payer.

**Proposition 16.2.2** Un graphe **représentatif d'intervalles** est **triangulé**.

*Démonstration.* Admise. ■

- [AK76] K. APPEL et W. KAHEN. "Every planar map is 4-colorable". In : *Bulletin of the AMS* 82 (1976), pages 711-712.
- [Ber58] Claude BERGE. *Théorie des graphes et ses applications*. Sous la direction de DUNOD. 1958.
- [Ber69] Claude BERGE. "Some classes of perfect graphs". In : *Six papers on Graph Theory* (1969), pages 1-21.
- [Ber70] Claude BERGE. *Graphes et hypergraphes*. Sous la direction de DUNOD. 1970.
- [Kön36] D. KÖNIG. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Sous la direction de Chelsea Publishing Company (1950). Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.
- [Laz14] Emmanuel LAZEGA. *Réseaux sociaux et structures relationnelles : «Que sais-je ?» n 3399*. Presses universitaires de France, 2014.
- [Maq] Didier MAQUIN. "Eléments de Théorie des Graphes". Support de cours - INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE.
- [Pel] Stéphane PELLE. "La Théorie des Graphes". Support de cours - ENSG Géomatique.
- [Rig] Michel RIGO. "Théorie des graphes". Support de cours - Université de Liège.
- [Syl78] J.J. SYLVESTER. "Chemistry and algebra". In : *Nature* 17 (1878), page 284.
- [Van71] A-T. VANDERMONDE. "Remarques sur des problèmes de situation". In : *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (1771), pages 566-574.
- [WF94] S WASSERMAN et K. FAUST. *Social Network Analysis : Methods and Applications*. Sous la direction de Cambridge University PRESS. 1994, page 857.