



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра оптимального управления

Хазиахметов Азат Айдарович

Задача граничного управления для волнового уравнения на звездообразном графе

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., ассистент

А. А. Дряженков

Москва, 2025

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	5
1.1. Постановка задачи граничного управления для волнового уравнения на звездообразном графе	5
2. Решение задачи оптимизации	5
2.1. Дискретизация	5
2.2. Формулировка оптимизационной задачи	7
2.3. Сопряженный оператор	8
2.4. Дискретизация сопряженной системы	10
3. Теоретическое обоснование управляемости системы	12
3.1. Вывод энергетических равенств	12
3.2. Условие разрешимости задач управления и наблюдения	15
4. Практическая реализация	17
4.1. Программа и результаты ее работы	17
Заключение	21
Список литературы	22

Введение

Изучение механических систем, включающих взаимосвязанные гибкие или упругие элементы, такие как струны, балки, мембраны и пластины, рассматривается как одна из задач в науке и инженерии. Эти системы известны как многосвязные, или многотельные, структуры. Их практическое значение огромно, однако математические модели, описывающие их эволюцию, обычно довольно сложны. Они могут рассматриваться как системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) на сетях или графах.

Существует обширная литература по этой теме, но еще многое предстоит сделать для создания полной теории. Взаимодействие между различными компонентами многосвязной структуры может приводить к новым, неожиданным явлениям. Следовательно, невозможно разработать полную теорию, просто накладывая существующие результаты для ДУЧП на области евклидового пространства. Это особенно актуально для задач управления.

Задачи управления для различных классов динамических систем исследовались, например, в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. В литературе [24, 25, 26] приведена теория, необходимая для исследования управляемости одномерного волнового уравнения на графе с топологией типа «звезда». Интересующиеся читатели могут обратиться к книге [24], где можно найти обширную информацию по вопросам управления и наблюдения.

Фундаментальным трудом, посвященным распространению волн, наблюдению и управлению в одномерных гибких многосвязных структурах, является монография [26]. В этой книге авторы подробно исследуют вопросы существования и единственности решений для волновых уравнений на различных типах графов, включая звездообразные структуры, которые являются центральным объектом нашего исследования. Для задачи управления на графе типа «звезда» в [26] детально анализируются условия наблюдаемости и управляемости. Используются различные подходы, такие как метод д'Аламбера, спектральные методы и метод моментов, для получения неравенств наблюдаемости и доказательства соответствующих теорем управляемости. Ключевыми результатами работы [26] являются установление связи между минимальным временем управления/наблюдения и геометрией графа, а также исследование влияния рациональных/иррациональных соотношений длин струн на свойства управляемости. Для звездообразных графов в [26] показано, что точная управляемость в энергетическом пространстве достигается, если время управления достаточно велико и выполняются определенные условия на длины ребер.

Опираясь на эти фундаментальные результаты и подходы, а также стремясь к практической реализации теоретических положений, целями данной работы является исследование управляемости одномерного волнового уравнения на графе с топологией типа «звезда» и разработка программы, осуществляющей численный поиск управления. Для достижения поставленной цели были выполнены следующие задачи:

1. Получено неравенство наблюдаемости и доказана с его помощью теорема об управляемости системы.
2. Написана программа для численного решения задачи управления на основе метода градиентного спуска.

В данной работе представлены следующие разделы:

- В разделе 1.1 *Постановка задачи граничного управления для волнового уравнения на звездообразном графе* изложена формулировка задачи управления одномерным волновым уравнением на графе с топологией типа «звезда».
- В разделе 2.1 *Дискретизация* описана процедура дискретизации задачи, включая выбор разностной схемы.
- В разделе 2.2 *Формулировка оптимизационной задачи* приведено выражение для функционала, который необходимо минимизировать, а также определения, необходимые для формулировки сопряженной задачи.
- В разделе 2.3 *Сопряженный оператор* приведена постановка сопряженной задачи и ее использование для вычисления градиента функционала.
- В разделе 2.4 *Дискретизация сопряженной системы* описана процедура дискретизации сопряженной задачи.
- В разделе 3.1 *Вывод энергетических равенств* получены равенства, используемые в дальнейшем при доказательстве теоремы управляемости.
- В разделе 3.2 *Условие разрешимости задач управления и наблюдения* приведена формулировка теоремы управляемости системы и представлено ее доказательство.
- В разделе 4.1 *Программа и результаты ее работы* описаны результаты численных экспериментов, проведенных с использованием разработанной программы, включая визуализацию полученных данных.

1. Постановка задачи

1.1. Постановка задачи граничного управления для волнового уравнения на звездообразном графе

Рассматривается задача управления графом с топологией «звезда», каждое ребро которого описывается пространственно-одномерным волновым уравнением:

$$\begin{cases} y_{jtt}(t, x) = y_{jxx}(t, x), & t \in (0, T), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ y_j(t, 0) = u_j(t), & t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ y_j(t, l_j) = y_k(t, l_k), & t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N y_{jx}(t, l_j) = 0, & t \in (0, T), \\ y_j(0, x) = 0, \quad y_{jt}(0, x) = 0, & x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где $T > 0$, $l_j > 0$ – заданные числа, а функции $u_j(t)$ являются управлениями, которые нужно найти вместе с неизвестными функциями-траекториями системы $y_j(t, x)$. Целью управления является перевод системы из начального нулевого состояния в заданный набор положений $f_j(x)$ в конечный момент времени T :

$$y_j(T, x) = f_j(x), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Если таких наборов управлений несколько, то требуется выбрать один из них, доставляющий минимум функционалу типа «энергия»:

$$\sum_{j=1}^N \int_0^T u_j^2(t) dt \rightarrow \min.$$

2. Решение задачи оптимизации

2.1. Дискретизация

Для решения задачи поиска по заданному управлению $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$ неизвестной траектории $y_1(t, x), \dots, y_N(t, x)$ была выбрана явная разностная схема. Рассмотрим процесс дискретизации пространственной переменной $x \in (0, l_j)$ и времени $t \in (0, T)$:

1. Пространственный отрезок $(0, l_j)$ делится на M_j равных сегментов, при этом шаг сетки $h_j = \frac{l_j}{M_j}$. Таким образом, получается $M_j + 1$ точка: $x_{i,j} = ih_j, i = 0, 1, \dots, M_j$, где $x_{i,j}$ обозначает i -ую точку на j -ом отрезке.
2. Временной интервал $(0, T)$ разбивается на N_t интервалов с шагом $\tau = \frac{T}{N_t}$. Таким образом, получается $N_t + 1$ точка: $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t$.
3. Сетка $Q_{\tau h} = \{(t_n, x_{i,j}) \mid i = \overline{0, M_j}, n = \overline{0, N_t}, j = \overline{1, N}\}$ представляет собой множество точек, образующих сетку, используемую для аппроксимации.

Обозначим через $y_j^{n,i}$ приближенное значение функций $y_j(t, x)$ в точке $(t_n, x_{i,j})$. На сформированной разностной сетке $Q_{\tau h}$ мы аппроксимируем исходную задачу следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{y_j^{n,i} - 2y_j^{n-1,i} + y_j^{n-2,i}}{\tau^2} = \frac{y_j^{n-1,i+1} - 2y_j^{n-1,i} + y_j^{n-1,i-1}}{h_j^2}, & j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1, \\ & n = 2, \dots, N_t, \\ y_j^{n,0} = u_j^n, & j = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t, \\ y_j^{n,M_j} = y_1^{n,M_1}, & j = 2, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t, \\ \sum_{j=1}^N \frac{y_j^{n,M_j} - y_j^{n,M_j-1}}{h_j} = 0, & n = 1, \dots, N_t, \\ y_j^{0,i} = 0, & j = 1, \dots, N, \quad i = 0, \dots, M_j, \\ \frac{y_j^{1,i} - y_j^{0,i}}{\tau} = 0, & j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1. \end{array} \right.$$

В первом уравнении выразим $y_j^{n,i}$:

$$y_j^{n,i} = 2y_j^{n-1,i} - y_j^{n-2,i} + \frac{\tau^2}{h_j^2} (y_j^{n-1,i+1} - 2y_j^{n-1,i} + y_j^{n-1,i-1}),$$

$$j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1, \quad n = 2, \dots, N_t.$$

В последнем уравнении выразим $y_j^{1,i}$:

$$y_j^{1,i} = y_j^{0,i} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1.$$

Значения y_j^{n,M_j} , $j = \overline{1, N}$ задаются из решения системы 3-го и 4-го уравнений. На каждом слое времени $n \geq 1$ все точки $y_j^{n,i}$, $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{0, M_j - 1}$ вычисляются явно, кроме y_j^{n,M_j} , $j = \overline{1, N}$. Чтобы вычислить значения сеточной функции в этих точках, надо решить систему линейных уравнений с N неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_j^{n,M_j} = y_1^{n,M_1}, \quad j = 2, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \frac{y_j^{n,M_j} - y_j^{n,M_j-1}}{h_j} = 0. \end{array} \right.$$

Эта система решается аналитически. Подставим $y_j^{n,M_j} = y_1^{n,M_1}$ во второе уравнение:

$$\sum_{j=1}^N \frac{y_j^{n,M_j}}{h_j} = \sum_{j=1}^N \frac{y_1^{n,M_1}}{h_j} = y_1^{n,M_1} \sum_{j=1}^N \frac{1}{h_j} = \sum_{j=1}^N \frac{y_j^{n,M_j-1}}{h_j},$$

отсюда:

$$y_1^{n,M_1} = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{y_j^{n,M_j-1}}{h_j}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{h_j}},$$

значит:

$$y_j^{n,M_j} = y_1^{n,M_1} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i^{n,M_i-1}}{h_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i}}, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t.$$

Опишем способ послойного нахождения значений функций $y_j^{n,i}$, для $n = 0, 1, 2, \dots$

1. При $n = 0$ набор неизвестных значений $y_j^{0,i}$ определяется исходя из равенств:

$$y_j^{0,i} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 0, \dots, M_j.$$

2. При $n = 1$ набор неизвестных значений $y_j^{1,i}$ определяется исходя из равенств:

$$y_j^{1,i} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1,$$

$$y_j^{1,0} = u_j^1, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$y_j^{1,M_j} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i^{1,M_i-1}}{h_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{0}{h_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i}} = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

3. При $2 \leq n \leq N_t$ набор неизвестных значений $y_j^{n,i}$ определяется исходя из равенств:

(a)

$$y_j^{n,i} = 2y_j^{n-1,i} - y_j^{n-2,i} + \frac{\tau^2}{h_j^2} (y_j^{n-1,i+1} - 2y_j^{n-1,i} + y_j^{n-1,i-1}),$$

$$j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1.$$

(b)

$$y_j^{n,0} = u_j^n, \quad j = 1, \dots, N.$$

(c)

$$y_j^{n,M_j} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i^{n,M_i-1}}{h_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

2.2. Формулировка оптимизационной задачи

В конечный момент времени систему нужно привести в состояние

$$y_j(T, x) = f_j(x), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

для этого надо минимизировать функцию стоимости:

$$J(u) = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} (y_j(T, x) - f_j(x))^2 dx + \lambda \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j^2(t) dt.$$

Второе слагаемое в функционале стоимости представляет собой регуляризационный член из метода регуляризации Тихонова [27]. Коэффициент λ регулирует баланс между точностью следования целевой траектории и затратами энергии на управление. Введем обозначения:

$$H = (L^2(0, T))^N,$$

$$F = L^2(0, l_1) \times \dots \times L^2(0, l_N),$$

где $L^2(a, b)$ — гильбертово пространство функций $f = f(x) \in L^1(a, b)$, у которых $|f(x)|^2 \in L^1(a, b)$; $\langle f, g \rangle_{L^2(a, b)} = \int_a^b f(x)g(x) dx$. $L^1(a, b)$ — банахово пространство функций $f = f(x)$, $x \in (a, b)$, измеримых и интегрируемых по Лебегу на интервале (a, b) , с нормой $\|f\|_{L^1(a, b)} = \int_a^b |f(x)| dx$. Определим скалярные произведения следующим образом:

$$\langle f, g \rangle_H = \sum_{j=1}^N \int_0^T f_j(t)g_j(t)dt, \quad f = (f_1, \dots, f_N) \in H, \quad g = (g_1, \dots, g_N) \in H.$$

$$\langle f, g \rangle_F = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} f_j(x)g_j(x)dx, \quad f = (f_1, \dots, f_N) \in F, \quad g = (g_1, \dots, g_N) \in F,$$

Отметим, что пространства H и F являются гильбертовыми. Определим линейный оператор $A : H \rightarrow F$ по правилу

$$Au = (y_1(T, \cdot; u), \dots, y_N(T, \cdot; u)) \quad (2)$$

Ограниченность оператора A следует из оценки (4.3.10) в [24]. Тогда функционал $J(u) : H \rightarrow \mathbb{R}$ можно записать в виде:

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2 + \lambda \|u\|_H^2.$$

По формуле для производной квадратичного функционала:

$$\frac{dJ(u)}{du} = 2A^*(Au - f) + 2\lambda u.$$

2.3. Сопряженный оператор

В данном разделе будет описано действие оператора A^* . По определению сопряженного оператора:

$$\langle Au, v \rangle_F = \langle u, A^*v \rangle_H, \quad (3)$$

$$\langle Au, v \rangle_F = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x)v_j(x)dx, \quad (4)$$

$$\langle u, A^*v \rangle_H = \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j(t)(A^*v)_j(t)dt. \quad (5)$$

Введем (пока произвольные) функции

$$\psi_1(t, x), \dots, \psi_N(t, x), \text{ где } \psi_j(t, x) \in C^2(Q_j), \quad Q_j = (0, T) \times (0, l_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Вначале рассуждения проводятся для гладких функций u, v , а затем с помощью предельного перехода распространяются на общий случай.

$$\langle Au, v \rangle_F = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x) v_j(x) dx + \underbrace{\sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} (y_{jxx} - y_{jtt}) \psi_j dt dx}_{=0}.$$

Проводим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} (y_{jxx} - y_{jtt}) \psi_j dt dx &= \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} y_{jxx} \psi_j dt dx - \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} y_{jtt} \psi_j dt dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^T y_{jx} \psi_j \Big|_{x=0}^{x=l_j} dt - \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_{jt} \psi_j \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} y_{jx} \psi_{jx} dt dx + \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} y_{jt} \psi_{jt} dt dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^T y_{jx} \psi_j \Big|_{x=0}^{x=l_j} dt - \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_{jt}(T, x) \psi_j(T, x) dx - \sum_{j=1}^N \int_0^T y_j \psi_{jx} \Big|_{x=0}^{x=l_j} dt + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j \psi_{jt} \Big|_{t=0}^{t=T} dx + \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} y_j (\psi_{jxx} - \psi_{jtt}) dt dx. \end{aligned}$$

Предъявим к функции ψ_j требования $\psi_j(t, 0) = 0$, $\psi_j(T, x) = 0$ и $\psi_{jtt} = \psi_{jxx}$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} (y_{jxx} - y_{jtt}) \psi_j dt dx &= \sum_{j=1}^N \int_0^T y_{jx}(t, l_j) \psi_j(t, l_j) dt - \sum_{j=1}^N \int_0^T y_j(t, l_j) \psi_{jx}(t, l_j) dt + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j(t) \psi_{jx}(t, 0) dt + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x) \psi_{jt}(T, x) dx. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное k и наложим на функцию ψ_j требования $\psi_j(t, l_j) = \psi_k(t, l_k)$

и $\sum_{j=1}^N \psi_{jx}(t, l_j) = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \iint_{Q_j} (y_{jxx} - y_{jtt}) \psi_j dt dx &= \int_0^T \psi_k(t, l_k) \sum_{j=1}^N y_{jx}(t, l_j) dt - \int_0^T y_k(t, l_k) \sum_{j=1}^N \psi_{jx}(t, l_j) dt + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j(t) \psi_{jx}(t, 0) dt + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x) \psi_{jt}(T, x) dx = \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j(t) \psi_{jx}(t, 0) dt + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x) \psi_{jt}(T, x) dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\langle Au, v \rangle_F = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x) v_j(x) dx + \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j(t) \psi_{jx}(t, 0) dt + \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} y_j(T, x) \psi_{jt}(T, x) dx.$$

Выберем $\psi_{jt}(T, x) = -v_j(x)$. Тогда получим

$$\langle Au, v \rangle_F = \sum_{j=1}^N \int_0^T u_j(t) \psi_{jx}(t, 0) dt.$$

С учетом равенств (3)–(5), получим, что оператор A^* определяется так:

$$(A^*v)(t) = (\psi_{1x}(t, 0; v), \dots, \psi_{Nx}(t, 0; v)) = \psi_x(t, 0; v), \quad (6)$$

где $\psi(t, x)$ – решение сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_{jtt}(t, x) = \psi_{jxx}(t, x), & t \in (0, T), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \psi_j(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \psi_j(t, l_j) = \psi_k(t, l_k), & t \in (0, T), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N \psi_{jx}(t, l_j) = 0, & t \in (0, T), \\ \psi_j(T, x) = 0, & x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ \psi_{jt}(T, x) = -v_j(x), & x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (7)$$

Согласно теореме 4.4.1 [24] краевая задача (7) для каждой функции $v = v(x) \in F$ имеет единственное обобщенное решение $\psi = \psi(t, x; v)$. Из свойств (4.4.7) [24] следует, что

$$\frac{\partial \psi_j(t, 0; v)}{\partial x} \in L^2(0, T), \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dJ(u)}{du}(t) = 2\psi_x(t, 0; v) \Big|_{v=(y_1(T, \cdot; u), \dots, y_N(T, \cdot; u))-(f_1, \dots, f_N)} + 2\lambda u(t).$$

2.4. Дискретизация сопряженной системы

Для дискретизации сопряженной системы сохраняем текущую сетку и обозначения, использованные в подразделе 2.

1. 1-ое уравнение: $\psi_{jtt}(t, x) = \psi_{jxx}(t, x)$

$$\frac{\psi_j^{n+2,i} - 2\psi_j^{n+1,i} + \psi_j^{n,i}}{\tau^2} = \frac{\psi_j^{n+1,i+1} - 2\psi_j^{n+1,i} + \psi_j^{n+1,i-1}}{h_j^2}.$$

Выразим $\psi_j^{n,i}$:

$$\begin{aligned} \psi_j^{n,i} &= 2\psi_j^{n+1,i} - \psi_j^{n+2,i} + \frac{\tau^2}{h_j^2}(\psi_j^{n+1,i+1} - 2\psi_j^{n+1,i} + \psi_j^{n+1,i-1}), \\ j &= 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1, \quad n = 0, \dots, N_t - 2. \end{aligned}$$

2. 2-ое уравнение: $\psi_j(t, 0) = 0$

$$\psi_j^{n,0} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, N_t - 1.$$

3. 3-ое уравнение: $\psi_j(t, l_j) = \psi_k(t, l_k)$

$$\psi_j^{n,M_j} = \psi_1^{n,M_1}, \quad j = 2, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t - 1.$$

4. 4-ое уравнение: $\sum_{j=1}^N \psi_{jx}(t, l_j) = 0$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\psi_j^{n,M_j} - \psi_j^{n,M_j-1}}{h_j} = 0, \quad n = 1, \dots, N_t - 1.$$

5. 5-ое уравнение: $\psi_j(T, x) = 0$

$$\psi_j^{N_t,i} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 0, \dots, M_j.$$

6. 6-ое уравнение: $\psi_{jt}(T, x) = -v_j(x)$

$$\frac{\psi_j^{N_t,i} - \psi_j^{N_t-1,i}}{\tau} = -v_j^i, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1.$$

Выразим $\psi_j^{N_t-1,i}$:

$$\psi_j^{N_t-1,i} = \tau v_j^i, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1.$$

Значения ψ_j^{n,M_j} , $j = \overline{1, N}$ задаются из решения системы 3-го и 4-го уравнений. Опишем процедуру пошагового вычисления значений функций $\psi_j^{n,i}$ для $n = N_t, N_t-1, N_t-2, \dots$

1. При $n = N_t$ набор неизвестных значений $\psi_j^{N_t,i}$ определяется исходя из равенств:

$$\psi_j^{N_t,i} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 0, \dots, M_j.$$

2. При $n = N_t - 1$:

$$\psi_j^{N_t-1,i} = \tau v_j^i, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1,$$

$$\psi_j^{N_t-1,0} = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\psi_j^{N_t-1,M_j} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\psi_i^{N_t-1,M_i-1}}{h_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

3. При $0 \leq n \leq N_t - 2$:

(a)

$$\psi_j^{n,i} = 2\psi_j^{n+1,i} - \psi_j^{n+2,i} + \frac{\tau^2}{h_j^2}(\psi_j^{n+1,i+1} - 2\psi_j^{n+1,i} + \psi_j^{n+1,i-1}),$$

$$j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1.$$

(b)

$$\psi_j^{n,0} = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

(c)

$$\psi_j^{n,M_j} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\psi_i^{n,M_i-1}}{h_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Получим итоговую формулу для дискретизированного градиента

$$G_j^n = 2 \frac{\psi_j^{n,1} - \psi_j^{n,0}}{h_j} + 2\lambda u_j^n, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t - 1,$$

где ψ — решение задачи (7) при

$$v_j^i = y_j^{N_t,i} - f_j^i, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M_j - 1.$$

3. Теоретическое обоснование управляемости системы

3.1. Вывод энергетических равенств

Рассмотрим следующую вспомогательную начально-краевую задачу, охватывающую как частный случай задачи (1), (7):

$$\frac{\partial^2 Y_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$Y_j|_{x=0} = U_j(t), \quad t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, N, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{x=l_j} = 0, \quad Y_j|_{x=l_j} = Y_k|_{x=l_k}, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$Y_j|_{t=0} = \varphi_{j0}(x), \quad \frac{\partial Y_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_{j1}(x), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Для фиксированных достаточно гладких входных данных $U_j(t)$, $\varphi_{j0}(x)$, $\varphi_{j1}(x)$, $j = 1, \dots, N$ задача (8)–(11) имеет достаточно гладкое классическое решение $Y_j = Y_j(t, x)$, $j = 1, \dots, N$, перейдем к выводу равенств этого решения и его производных через входные данные и их производные. Присутствующие в этих равенствах интегралы содержательно часто имеют энергетический смысл [28], поэтому сами равенства часто называют *энергетическими* равенствами. Для вывода равенств воспользуемся подходом, аналогичным использованному в [24].

Обозначим $Q_{t_1 t_2 j} = \{(t, x) : t_1 \leq t \leq t_2, 0 \leq x \leq l_j\}$ – замкнутый прямоугольник, ограниченный по t моментами t_1, t_2 , $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. В частности, $Q_{t_1 t_2 j}|_{t_1=0, t_2=T} = \overline{Q_j}$. Умножим уравнение (8) на $\frac{\partial Y_j}{\partial t}$ и полученное равенство проинтегрируем по $Q_{t_1 t_2 j}$:

$$\iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \right) \frac{\partial Y_j}{\partial t} d\tau dx = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Каждое слагаемое из левой части этого равенства преобразуем по частям:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial t^2} \frac{\partial Y_j}{\partial t} d\tau dx &= \int_0^{l_j} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 d\tau dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} dx, \quad j = 1, \dots, N, \\ \iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \frac{\partial Y_j}{\partial t} d\tau dx &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{l_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \frac{\partial Y_j}{\partial t} dx \right) d\tau = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l_j} - \int_0^{l_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial t \partial x} dx \right) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l_j} d\tau - \\ &- \int_0^{l_j} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 d\tau dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l_j} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} dx, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Подставив эти равенства в (12), получим

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left(\left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 \right) \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l_j} d\tau, \quad j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Равенство (13) будем называть *первым энергетическим равенством* системы (8)–(11).

Выведем формулу, которая будет использована во 2 подразделе. Для сокращения записи в дальнейших выкладках будем пользоваться обозначением:

$$E_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left[\left(\frac{\partial Y_j(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_j(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Заметим, что в силу начального условия (11)

$$E_j(0) = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left[(\varphi_{j1}(x))^2 + (\varphi'_{j0}(x))^2 \right] dx, \quad j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

С учетом этих обозначений, а также начальных и граничных условий (9), (11) первое энергетическое равенство (13) при $t_1 = 0, t_2 = t$ записывается в виде:

$$E_j(t) = E_j(0) + \int_0^t \left(\frac{\partial Y_j(\tau, l_j)}{\partial x} \frac{\partial Y_j(\tau, l_j)}{\partial t} - \frac{\partial Y_j(\tau, 0)}{\partial x} U'_j(\tau) \right) d\tau, \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Далее умножим уравнение (8) на $m_j(x) \frac{\partial Y_j}{\partial x}$, где $m_j = m_j(x)$, $x \in [0, l_j]$, $j = 1, \dots, N$, – непрерывные функции с кусочно-непрерывными производными, называемые *мультипликаторами*, и полученное равенство проинтегрируем по $Q_{t_1 t_2 j}$:

$$\iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \right) m_j(x) \frac{\partial Y_j}{\partial x} d\tau dx = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Каждое слагаемое из левой части этого равенства преобразуем по частям:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial t^2} m_j \frac{\partial Y_j}{\partial x} d\tau dx &= \int_0^{l_j} \left(m_j \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_j \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x \partial t} d\tau \right) dx = \\ &= \int_0^{l_j} m_j \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l_j} m_j \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 dx d\tau = \int_0^{l_j} m_j \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(m_j \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=l_j} - \int_0^{l_j} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 m_j' dx \right) d\tau, \quad j = 1, \dots, N, \\ \iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} m_j \frac{\partial Y_j}{\partial x} dx d\tau &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l_j} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 m_j dx d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(m_j \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=l_j} - \int_0^{l_j} \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 m_j' dx \right) d\tau, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Подставив эти равенства в (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(m_j \left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=l_j} + m_j \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0}^{x=l_j} \right) d\tau &= \int_0^{l_j} m_j \frac{\partial Y_j}{\partial t} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{Q_{t_1 t_2 j}} \left(\left(\frac{\partial Y_j}{\partial t} \right)^2 m_j' + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \right)^2 m_j' \right) d\tau dx, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (17)$$

Равенство (17) будем называть *вторым энергетическим равенством* системы (8)–(11). Подчеркнем, что энергетические равенства (13), (17) справедливы для любых классических решений задачи (8)–(11).

3.2. Условие разрешимости задач управления и наблюдения

О п р е д е л е н и е 4.5.1 [24]. Система A называется *вполне управляемой в момент T* , если уравнение $Au = f$ имеет хотя бы одно решение при каждом $f \in F$. Система A^* называется *вполне наблюдаемой в момент T* , если уравнение $A^*v = g$ имеет единственное решение при каждом $g \in R(A^*)$ (см. определения 1.3.1, 1.3.2, 7.1.2, 7.1.3 [24]).

Условия полной управляемости и полной наблюдаемости систем A , A^* вытекают из теоремы 1.2.7 [24] или, точнее, ее модификации — теоремы 7.1.6 [24]. В частности, из последней теоремы следует, что оценка

$$\|A^*v\|_H \geq \mu \|v\|_F, \quad \forall v \in F, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (18)$$

гарантирует полную управляемость системы A и полную наблюдаемость системы A^* .

Т е о р е м а 9.1. Пусть операторы A , A^* определены согласно (2), (6), а длина временного промежутка T превышает пороговый уровень $T_* = \max_j l_j$. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение при всех $f \in F$ (то есть система A (2) вполне управляемая), уравнение $A^*v = g$ при каждом $g \in R(A^*)$ имеет единственное решение (то есть система (6) вполне наблюдаема).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Докажем, что для оператора A^* оценка (18) справедлива для любых $T > T_*$. Для этого нам понадобятся энергетические равенства для системы (7).

Задача (7) заменой $t = T - s$ сводится к задаче (8)–(11), в которой $U_j = 0$, $Y_j = \psi_j$, $\varphi_{j0} = 0$, $\varphi_{j1} = v_j$, $j = 1, \dots, N$. Таким образом, первое из них имеет вид:

$$\begin{aligned} E_j(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left[\left(\frac{\partial \psi_j(t, x; v)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_j(t, x; v)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= E_j(T) + \int_T^t \frac{\partial \psi_j(\tau, l_j)}{\partial t} \frac{\partial \psi_j(\tau, l_j)}{\partial x} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} v_j^2(x) dx + \int_T^t \frac{\partial \psi_1(\tau, l_1)}{\partial t} \frac{\partial \psi_j(\tau, l_j)}{\partial x} d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^N E_j(t) = \frac{1}{2} \|v\|_F^2 + \int_T^t \frac{\partial \psi_1(\tau, l_1)}{\partial t} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \psi_j(\tau, l_j)}{\partial x} d\tau = \frac{1}{2} \|v\|_F^2. \quad (19)$$

Второе получается из (17) подстановкой $t_1 = 0$, $t_2 = T$, $Y_j = \psi_j$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{x=0} &= 0 : \\ -\frac{1}{2} \int_0^T m_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T m_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=l_j} dt - \frac{1}{2} \int_0^T m_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 \Big|_{x=l_j} dt - \\ &- \int_0^{l_j} m_j(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{t=0} dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{l_j} \left[\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 m'_j + \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 m'_j \right] dx dt. \quad (20) \end{aligned}$$

В качестве мультипликатора m_j в (20) возьмем функцию $m_j(x) = x - l_j$. Упростим последнее слагаемое из правой части (20):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{l_j} \left[\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 m_j' + \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 m_j' \right] dx dt &= \int_0^T \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \left[\left(\frac{\partial \psi_j(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \psi_j(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt = \int_0^T E_j(t) dt. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^T \int_0^{l_j} \left[\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 m_j' + \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 m_j' \right] dx dt &= \sum_{j=1}^N \int_0^T E_j(t) dt = \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^N E_j(t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \|v\|_F^2 dt = \frac{1}{2} T \|v\|_F^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее оценим снизу первое, второе и третье слагаемые из правой части (20):

$$\frac{1}{2} \int_0^T -m_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=l_j} dt = -\frac{1}{2} m_j(l_j) \int_0^T \left(\frac{\partial \psi_j(\tau, l_j)}{\partial x} \right)^2 d\tau = 0, \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^T m_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)^2 \Big|_{x=l_j} dt = -\frac{1}{2} m_j(l_j) \int_0^T \left(\frac{\partial \psi_j(\tau, l_j)}{\partial t} \right)^2 d\tau = 0, \quad (23)$$

$$-\int_0^{l_j} m_j(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{t=0} dx \geq -\|m_j\|_{C[0, l_j]} E_j(0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} m_j(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{t=0} dx &\geq -\sum_{j=1}^N \|m_j\|_{C[0, l_j]} E_j(0) = -\sum_{j=1}^N \|m_j\|_{C[0, l_j]} E_j(T) = \\ &= -\sum_{j=1}^N \max_{x \in [0, l_j]} (|m_j(x)|) E_j(T) = -\sum_{j=1}^N l_j E_j(T) \geq \\ &\geq -\max_j l_j \sum_{j=1}^N E_j(T) = -\frac{1}{2} (\max_j l_j) \|v\|_F^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (20) с учетом (21)–(24) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \max_j |m_j(0)| \|A^*v\|_H^2 &= \frac{1}{2} \max_j |m_j(0)| \sum_{j=1}^N \int_0^T \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 dt \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |m_j(0)| \int_0^T \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^T -m_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=0} dt \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \left(T - \max_j l_j \right) \|v\|_F^2.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\|A^*v\|_H \geq \mu \|v\|_{F^*} \quad \forall v \in F, \quad \mu = \left(\frac{T - T_*}{T_*} \right)^{1/2} > 0. \quad (25)$$

Из доказанной оценки (25) и теоремы 7.1.6 [24] непосредственно следует справедливость утверждения. \square

4. Практическая реализация

4.1. Программа и результаты ее работы

Для реализации предложенного алгоритма была написана программа на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и matplotlib. Программа содержит следующие основные функции:

1. **solve_wave_equation_forward**: Эта функция решает начально-краевую задачу (1) для одномерного волнового уравнения на графе с заданным управлением $u(t)$.
2. **solve_wave_equation_backward**: Эта функция для заданного v решает сопряженную начально-краевую задачу (7), необходимую для вычисления градиента функционала.
3. **J**: Функция вычисления функционала стоимости. Она принимает управление $u(t)$ и заданное конечное состояние $f(x)$.
4. **grad_J**: Функция вычисления градиента функционала. Она принимает управление $u(t)$ и заданное конечное состояние $f(x)$.
5. **optimize**: Функция для оптимизации управления с использованием метода градиентного спуска.
6. **show_animation**: Эта функция визуализирует результаты решения задачи.

Программа принимает на вход параметры задачи (длины отрезков l_j , конечное время T , коэффициент регуляризации λ , шаги сетки h_j и τ , начальное приближение для управления $u^0(t)$ и заданные функции $f_j(x)$). Результаты работы программы включают:

1. Значение функционала стоимости J на каждой итерации метода градиентного спуска, показывающее процесс сходимости.
2. Графики оптимальных управлений $u_j(t)$, найденных в результате работы алгоритма.
3. Графики функций $y_j(t, x)$ в различные моменты времени, демонстрирующие эволюцию системы под действием найденного управления.

Пример №1

Рассмотрим (1) при $n = 3$. Система описывается начально-краевой задачей:

$$\begin{cases} y_{jtt}(t, x) = y_{jxx}(t, x), & t \in (0, T), \quad x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, 3, \\ y_j(t, 0) = u_j(t), & t \in (0, T), \quad j = 1, 2, 3, \\ y_j(t, l_j) = y_k(t, l_k), & t \in (0, T), \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \\ \sum_{j=1}^3 y_{jx}(t, l_j) = 0, & t \in (0, T), \\ y_j(0, x) = 0, \quad y_{jt}(0, x) = 0, & x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (26)$$

Были проведены расчеты на сетках разной густоты при различных соотношениях $C = \frac{\tau}{h}$ шагов сетки. В таблице 1 приведены относительные погрешности полученных управлений относительно тестового управления $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = \sin(10 - t)$ в норме пространства L^2 , выраженные в процентах. Относительная погрешность вычислялась по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\|u_{\text{получ.}} - u_{\text{тест.}}\|_{L^2(0,T)}}{\|u_{\text{тест.}}\|_{L^2(0,T)}} \cdot 100\%.$$

- Количество ребер графа: $N = 3$.
- Длины отрезков: $l_1 = l_2 = l_3 = 10$.
- Конечное время: $T = 10$.
- Количество временных шагов: $N_t = 5000, 1000, 100$.
- Шаг по времени: $\tau = T/N_t$.
- Количество пространственных шагов: $M_j = \frac{l_j C}{\tau}, \quad j = 1, 2, 3$.
- Регуляризационный параметр: $\lambda = 0.00001$.
- Начальное приближение для управления $u^0(t) = 0$.
- Заданная функция $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = \sin(x)$

Таблица 1: Относительная погрешность решения для различных значений C и N_t

$C \backslash N_t$	100	1000	5000
0.9	7.328%	2.374%	0.852%
0.8	8.351%	2.974%	1.150%
0.7	8.972%	3.340%	1.408%
0.6	9.548%	3.684%	1.679%
0.5	10.221%	4.051%	1.961%
0.4	10.987%	4.480%	2.206%
0.3	12.254%	5.035%	2.528%
0.2	14.606%	5.872%	3.019%
0.1	29.662%	7.470%	4.011%

На рисунке 1 представлена относительная погрешность решения для различных значений C и N_t .

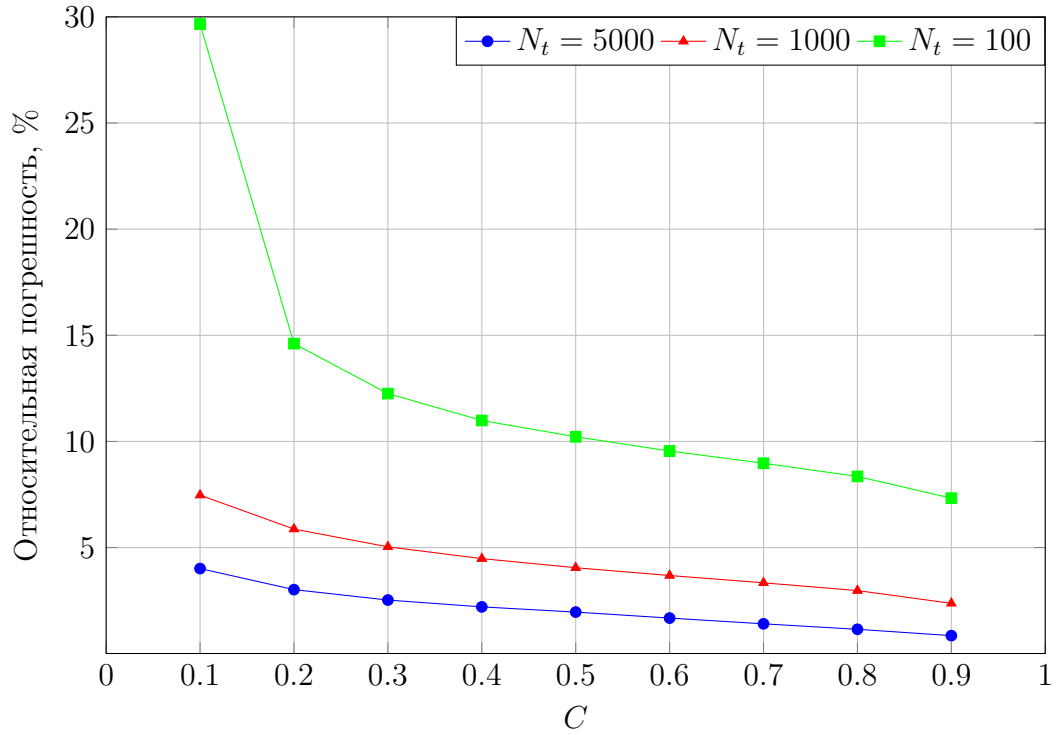


Рис. 1: Относительная погрешность решения в зависимости от C

На рисунке 2 представлены найденные управления и решения для $C = 0.9$ и $N_t = 1000$.

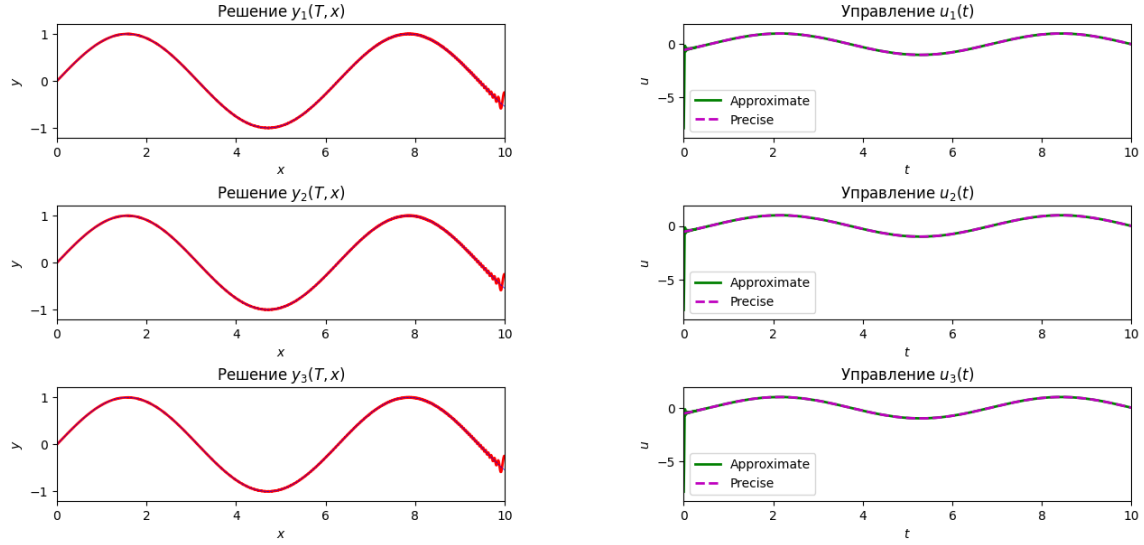


Рис. 2: Результаты теста при $C = 0.9$, $N_t = 1000$

Можно заключить, что предпочтительно выбирать значения C , близкие к 1, а также использовать более густые сетки.

Пример №2

- Количество ребер графа: $N = 2$.
- Длины отрезков: $l_1 = 10, l_2 = 8$.
- Конечное время: $T = 10$.
- Количество временных шагов: $N_t = 1000$.
- Шаг по времени: $\tau = T/N_t = 0.01$.
- Количество пространственных шагов: $M_1 = 500, M_2 = 400$.
- Регуляризационный параметр: $\lambda = 0.01$.
- Начальное приближение для управления $u^0(t) = 0$.
- Заданные функции $f_j(x)$:

$$\begin{cases} f_1(x) = \exp(-0.3x) \cdot \sin(5x), & x \in (0, 10), \\ f_2(x) = \sin(3x + \pi/2) \cdot \cos(5x), & x \in (0, 8). \end{cases}$$

На рисунке 3 представлены результаты работы программы для этого примера входных данных.

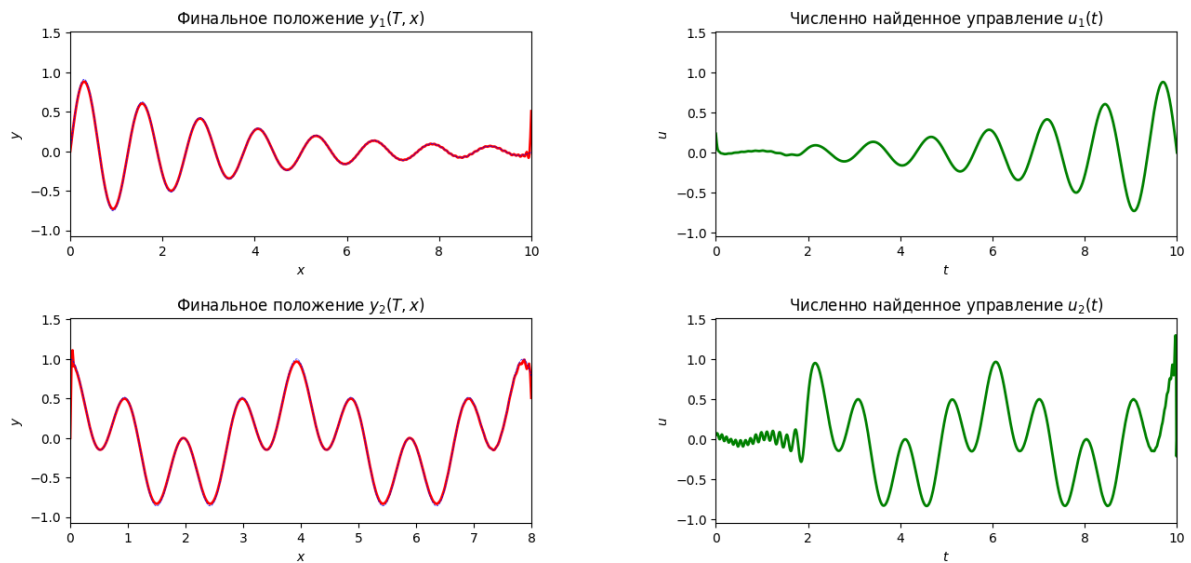


Рис. 3: Графики найденных численно управлений (справа) и соответствующих им финальных состояний системы (слева) для примера №2

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе была создана программа для численного решения задачи управления, которая позволяет проводить вычислительные эксперименты и визуализировать результаты. Программа продемонстрировала свою эффективность в решении задач управления волновыми процессами на графах.

Проведенные численные эксперименты продемонстрировали применимость предложенного подхода на практике. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего исследования и разработки методов управления сложными системами с распределенными параметрами, а также для практического применения в различных областях науки и техники, таких как телекоммуникации, транспортные сети и робототехника.

Список литературы

1. Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.
2. Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // Прикл. матем. и механика. 1981. Т. 45, № 6. С. 1095–1103.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
4. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
5. Арутюнов А. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Принципе максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006.
6. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление линейными системами. Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1982.
7. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
8. Блошанская Л. И., Смирнов И. Н. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце и смещением на втором конце за произвольный достаточно большой промежуток времени для задачи колебания струны // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 860–870.
9. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
10. Боровских А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной. I, II // Дифференц. уравнения. 2007, Т. 43, №1, С. 64-89; 2007, Т. 43, №5, С. 640-649.
11. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
12. Васильев Ф. П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1893–1900.
13. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
14. Васильев Ф. П., Ишмухаметов А. З., Потапов М. М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989.
15. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестник Московск. ун-та, Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернетика. 1993. № 3. С. 8–15.
16. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Разгулин А. В. О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны // Вестник Московск. ун-та, Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернетика. 1993. № 2. С. 3–8.

17. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
18. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
19. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во Белорусск. гос. ун-та, 1973.
20. Теория управления линейных дискретных систем. I, II, III / Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М., Кратко В. В. [и др.] // Дифференц. уравнения. 1972, Т. 8, №5, С. 767–773; №6, С. 1081–1091; №7, С. 1283–1291.
21. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Институт математики НАН Белоруссии, 1999.
22. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Белоруссии, 2001.
23. Гусев М. И., Куржанский А. Б. Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1: Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
24. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М. [и др.]. М.: МАКС Пресс, 2010.
25. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
26. Dáger R., Zuazua E. Wave propagation, observation, and control in 1-d flexible multistructures. Berlin: Springer, 2006.
27. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В. [и др.]. М.: Наука, 1983.
28. Тихонов А. Н. Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999.