

Коллоквиум по мат. анализу №1

29 октября 2020 г.

1 Билет

- **Рациональные числа** - числа вида $\frac{p}{q}$, где q - натуральное число, а p - целое. Считается, что две записи $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ задают одно и то же рациональное число, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Обратим внимание на то, что рациональных чисел не достаточно для естественных потребностей математики.

- **Вещественные числа** - множество всех бесконечно десятичных дробей вида $\pm a_0a_1a_2\dots$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup 0$, $a_j \in 0\dots 9$ (Записи, в которых с какого-то момента стоят только 9-ки зачеркнуты);

Число $\pm 0,000\dots$ называется нулём и совпадает с числом 0;

Нунелевое число:

- положительное, если в его записи стоит знак '+';

- отрицательное, если в его записи стоит знак '-';

В вещественные числа вложены рациональные естественным образом. У вещественных чисел также определены операции сложения и умножения для которых справедливы все их естественные свойства.

Отношение порядка у вещественных чисел задано лексикографическим порядком ($a_0a_1a_2\dots \leq b_0b_1b_2\dots \iff \exists k : a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \leq b_k$), который естественным образом переносится на отрицательные.

Для вещественных чисел определён модуль числа a , т.е. такое вещественное число, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Также, для модуля выполняется неравенство треугольника $|a + b| \leq |a| + |b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

Самое важное свойство - выполняется принцип полноты;

- **Десятичные дроби.** Рациональное число может быть представлено в виде конечной или периодической десятичной дроби ($\frac{1}{10} = 0.1$; $\frac{1}{6} = 0.1(6)$; $\frac{1}{7} = 0.(142857)$). Можно не рассматривать десятичные записи с периодом 9, т.к. $0.(9) = 1$ (Если $0.(9) = x$, то $10x = 9 + x$ - истина, откуда $x = 1$).

- **Принцип полноты.** Принцип полноты выполняется, если для произвольных непустых множеств A левее B найдется разделяющий их элемент.

Принцип полноты не выполняется для рациональных чисел.

Принцип полноты выполняется на множестве вещественных чисел (теорема).

Доказательство:

Пусть A и B - непустые множества. A левее B . Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неотрицательных, то нуль разделяет A и B . Пусть в A имеется положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (обратный случай аналогичен). Построим число $c = c_0c_1c_2\dots$, разделяющее A и B .

Рассмотрим множество натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B . Пусть b_0 - наименьшее из таких и пусть $b_0 = c_0$. Затем рассмотрим все числа в множестве B , начинающиеся с b_0 и найдем у них наименьшую первую цифру после запятой и предположим, что $b_1 = c_1$ (где b_1 - эта цифра). Теперь рассмотрим все числа в множестве B , начинающиеся с $b_0.b_1$ и найдем у них наименьшую вторую цифру после запятой b_2 , тогда пусть $c_2 = b_2$ и т.д. получим бесконечную десятичную дробь $c_0c_1c_2\dots$. Покажем, что построенное число разделяет множества A и B . Во-первых, по построению $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Действительно, либо $b = c$, либо $b \neq c$. Во втором случае пусть $b_0 = c_0, \dots, b_{k-1} = c_{k-1}$ и $b_k \neq c_k$. Тогда по построению числа c , $c_k < b_k \Rightarrow c < b$.

Покажем, что для каждого $a \in A$ $a \leq c$. Предположим, что $a > c$, т.е. $a \geq c$ и $a \neq c$. Тогда найдется позиция k , для которой $a_0 = c_0, \dots, a_{k-1} = c_{k-1}$ и $a_k > c_k$. Но по построению числа c есть такой $b \in B$, что $b_0 = c_0, \dots, b_k = c_k$, значит $a_k > b_k$, что противоречит условию A левее B .

- Рациональных решений уравнение $x^2 = 2$ не существует. Действительно, пусть $\frac{p}{q}$ - такое решение и p и q не имеют общих делителей. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ - четное $\Rightarrow p$ - четное $\Rightarrow p = 2k, 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное \Rightarrow числа p и q имеют общий делитель. Противоречие.
- **Существования $\sqrt{2}$ как следствие принципа полноты** Пусть $A = \{a : a > 0, a^2 \leq 2\}$ и $B = \{b : b > 0, b^2 \geq 2\}$. Заметим, что множество A лежит левее множества B , т.к. $0 < b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ для любых $a \in A, b \in B$, и $a+b > 0$. Если бы существовало число c , разделяющее множества A и B , то обязательно $c^2 = 2$. Действительно, во-первых, сразу заметим, что $1 \leq c \leq 2$, т.к. $1 \in A, 2 \in B$. Теперь, если $c^2 < 2$, то число $c + \frac{2-c^2}{5} \in A$, т.к.

$$\left(c + \frac{2-c^2}{5}\right)^2 = c^2 + 2c * \frac{2-c^2}{5} + \left(\frac{2-c^2}{5}\right)^2 \leq c^2 + 4 * \frac{2-c^2}{5} + \frac{2-c^2}{5} \leq 2.$$

Но $c + \frac{2-c^2}{5} > c$, а значит c не разделяет A и B .

Если же $c^2 > 2$, то $c - \frac{c^2-2}{4} \in B$, т.к.

$$\left(c - \frac{c^2-2}{4}\right)^2 \geq c^2 - 2c * \frac{c^2-2}{4} \geq c^2 - 4 * \frac{c^2-2}{4} = 2$$

Но $c - \frac{c^2-2}{4} < c$, а значит c не разделяет A и B .

Тем самым, $c^2 = 2$.

2 Билет

• Предел последовательности

Если каждому числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое число a_n , то говорим, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_\varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ или } a_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty$$

• Единственность предела Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, тогда $a = b$.

Доказательство: Если $a \neq b$, то $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1 , для которого $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2 , для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$: $\varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon_0$. Противоречие.

• Арифметика предела. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \beta b_n) = \lambda a + \beta b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$

3) Если $b \neq 0, b_n \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется номер N_1 , для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2 , для которого $|b_n - b| < \varepsilon$

1) При $n > N = \max\{N_1, N_2\}$: $|\lambda a_n + \beta b_n - (\lambda a + \beta b)| = |\lambda(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\lambda||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\lambda| + |\beta|)\varepsilon$

2) Заметим, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$

3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in \mathbb{N}$, для которого при $n > N_3$ выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $n > \max\{N_2, N_3\}$ выполнено

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} * \varepsilon$$

• Ограниченность сходящейся последовательности:

Утверждение: сходящаяся последовательность ограничена

Доказательство: Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит $|a_n| \leq M = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}$, т. е. $-M = c \leq a_n \leq C = M$.

• Свойство $|a_n - a| \leq \alpha \varepsilon$

Пусть $\alpha > 0$ - фиксированное число. Тогда свойство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) |a_n - a| \leq \alpha \varepsilon$$

равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Действительно, пусть ε' - произвольное число, тогда найдется номер $N(\frac{\varepsilon'}{2\alpha}) \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n - a| \leq \alpha * \frac{\varepsilon'}{2\alpha} < \varepsilon'$ при каждом $n > N(\frac{\varepsilon'}{2\alpha})$. В другую сторону доказательство аналогично.

- **Отделимость:** Если $a_n \rightarrow a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.

Доказательство: Взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в определении сходимости последовательности к числу a , получаем номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N$. Тогда при $n > N$, выполнено $|a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно тому, что мы доказываем.

3 Билет

- **Переход к пределу в неравенствах**

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Если для некоторого номера N выполнено $a_n \leq b_n$ при $n > N$, то и $a \leq b$;

Доказательство: Предположим, что $a - b = \varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера $N_1 \in \mathbb{N}$ и $N_2 \in \mathbb{N}$, для которых $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$, и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$. Тогда $\varepsilon = a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq a - a_n + b_n - b < \varepsilon$. Противоречие.

- **Лемма о зажатой последовательности**

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство: $a_n \leq c_n \leq b_n$ при $n > N$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Доказательство: Для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 \in \mathbb{N}$ и $N_2 \in \mathbb{N}$, для которых $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - a| < \varepsilon$. Тогда при $n > \max\{N, N_1, N_2\}$ выполнено: $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$.

- **Принцип вложенных отрезков**

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Множества $[a; b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $(a; b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ называются отрезком и интервалом соответственно. Длиной отрезка (интервала) называется величина $b - a$.

Теорема: Всякая последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных отрезков (т.е. $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, т.е. $b_n - a_n \rightarrow 0$, то такая общая точка только одна.

Доказательство: по условию $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$, откуда $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Заметим, что при $n < m$ выполнено $a_n \leq a_m \leq b_m$, а при $n > m$ выполнено $a_n \leq b_n \leq b_m$. Таким образом, если $A := \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $B := \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$, то A левее B , а значит по принципу полноты найдется такое число $c \in \mathbb{R}$, что $a_n \leq c \leq b_m$ для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$. В частности $a_n \leq c \leq b_n$ т.е. $c \in [a_n; b_n]$.

Пусть общих точек две: c и c' . Не ограничивая общности $c < c'$. Тогда $a_n \leq c < c' \leq b_n$ и $c' - c \leq b_n - a_n$, что противоречит тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Действительно, найдется номер N , для которого $b_n - a_n < c' - c$ при каждом $n > N$.

- **Геометрическая интерпретация вещественных чисел, вещественная прямая.**

Доказанная выше теорема позволяет дать вещественным числам следующую геометрическую интерпретацию. Сопоставим десятичной дроби $0.a_1a_2\dots$ последовательность вложенных отрезков по следующему правилу:

Разделим отрезок $[0; 1]$ на 10 равных частей и выберем из получившихся 10 отрезков

$(a_1 + 1)$ -ый по счету. Делаем то же самое и выбираем $(a_2 + 1)$ -ый по счету и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, причем длина отрезка на n -ом шаге равна 10^{-n} . По доказанной теореме существует единственная общая точка построенной последовательности вложенных отрезков, которая как раз и совпадает с $0.a_1a_2\dots$

4 Билет

- **Точные верхние и нижние грани.** Пусть A - непустое подмножество вещественных чисел. Число b называется верхней гранью множества A , если $a \leq b$ верно для каждого числа $a \in A$. Если есть хоть бы одна верхняя грань, то множество называют ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A называется точной верхней гранью множества A и обозначается $\sup(A)$ (супремум).

Число b называется нижней гранью множества A , если $b \leq a$ верно для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A называется точной нижней гранью множества A и обозначается $\inf(A)$ (инфинум)

Ограниченное и сверху, и снизу множество называется ограниченным.

- **Теорема Вейерштрассе о пределе монотонной ограниченной последовательности.**

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.

Аналогично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.

Доказательство: Пусть $M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup(a_n)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $M - \varepsilon < a_N$, (иначе $M - \varepsilon$ - верхняя грань, чего не может быть. В силу того, что последовательность неубывающая, при каждой $n > N$ выполнено $M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon$

Тем самым, по определению $M = \lim a_n$

Случай с невозрастающей последовательностью рассматривается аналогично.

- **Пример рекуррентной формулы для вычисления $\sqrt{2}$**

Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$, $a_1 = 2$. Заметим, что

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{(a_n * \frac{2}{a_n})} = \sqrt{2}$$

Поэтому $a_n \geq \sqrt{2}$. Кроме того, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) = a_n$. По доказанной Теореме у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a . Т. к. $a_n \geq 0$, то и $a \geq 0$.

Тогда по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$, откуда $a = \sqrt{2}$.

Скорость сходимости

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2|}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \leq (a_n - \sqrt{2})^2;$$

Индуктивно получаем:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (a_n - \sqrt{2})^2 \leq (a_{n-1} - \sqrt{2})^4 \leq (a_{n-2} - \sqrt{2})^8 \leq (a_1 - \sqrt{2})^{2^{n+1}} = (2 - \sqrt{2})^{2^{n+1}};$$

Заметим, что $q := 2 - \sqrt{2} < 1$, поэтому полученная скорость сходимости q^{2^n} быстрее экспоненциальной q^n (в смысле количества применений рекуррентной формулы для достижения заданной точности)

5 Билет

• Фундаментальная последовательность

Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная (или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждом $n, m > N(\varepsilon)$. То же самое в кванторах: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon$. [Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальная]

• Критерий Коши: Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна

Это следует из того, что:

- 1) Если последовательность сходится, то она фундаментальная;
- 2) Если последовательность фундаментальная, то она сходится;

Доказательство:

- 1) Пусть $\varepsilon > 0$. По определению сходящейся последовательности найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, где $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Тогда при $m, n > N$ выполнено:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

- 2) Заметим, что последовательность $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ограничена. Действительно, для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a_m| < 1$ при $m, n > N$. Отсюда при $n > N$:

$$|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

Значит, $|a_n| \leq M = \max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, \dots, |a_N|\}$

Пусть $M_n := \sup_{k \geq n} a_k$. Тогда последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает, т.к. M_n является верхней гранью для множества $\{a_k : k \geq n+1\}$, т.е. с ростом n количество значений, из которых берется супремум, не увеличивается. Кроме того, т.к. все $a_k \geq -M$, то и $M_n \geq -M$. Таким образом, $\exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.

Покажем, что $a_n \rightarrow a$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется номер N , для которого $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $m, n > N$. Кроме того, найдется номер N_1 , для которого $|M_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_1$. Пусть $N_2 = \max\{N, N_1\}$. Найдется номер $m > N_2$, для которого $M_{N_2+1} - \varepsilon < a_m \leq M_{N_2+1}$. Тогда, при $n > N$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_m + a_m - M_{N_2+1} + M_{N_2+1} - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - M_{N_2+1}| + |M_{N_2+1} - a| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$$

- **Пример применения критерия Коши для доказательства представления $\sqrt{2}$ цепной дробью.**

Пусть $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, $a_1 = 1$. Заметим, что $a_n \geq 1$ и:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{1}{4} |a_n - a_{n-1}| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} * \frac{1}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

\Rightarrow Отсюда при $m > n$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}} \leq \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Т.к. $\left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N , для которого $\left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$ при $n > N$. Тем самым, для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнен критерий Коши, а, значит, существует $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. По арифметике предела a удовлетворяет уравнению:

$$a(1+a) = 1+a+1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2},$$

т.к. $a \geq 0$.

6 Билет

- **Числовые ряды.**

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числовая последовательность. Числовым рядом с членами a_n называется выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Конечные суммы $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ называют частичными суммами ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если у последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел, который называют суммой ряда. Если такого предела не существует, то говорят, что ряд расходится (не сходится).

В силу арифметики предела на сходимость ряда (но не на сумму) не влияет добавление или отбрасывание первых нескольких слагаемых.

- **Переформулировка критерия Коши для числовых рядов:**

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех $n > m > N$ выполнено $|\sum_{k=m+1}^n a_k| = |S_n - S_m| < \varepsilon$.

- **Необходимое условие сходимости числового ряда:**

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$

Доказательство: Действительно, из критерия Коши следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N , для которого при каждом $n > N+1$ выполнено $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$.

- **Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$:**

Рассмотрим такой ряд. Исследуем его на выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \right| \geq \frac{n-m}{n}$$

Какой бы ни был задан номер N всегда можно взять $m > N$ (например, $m = N + 1$) и $n = 2m$, тогда

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n=2m} \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{2},$$

а значит условие критерия Коши не выполнено и ряд расходится.

- **Абсолютная и условная сходимость рядов.**

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

7 Билет

- **Сходимость рядов с неотрицательными слагаемыми + признак сравнения.**

Пусть $a_k \geq 0$, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство: утверждение следует из того, что последовательность частичных сумм не убывает.

Отсюда получаем такой признак сравнения.

Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Наоборот, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

- **Признак Коши**

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность, $a_n \geq 0$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Доказательство: Заметим, что $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n} \leq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{2^n} \leq 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n}$.

Отсюда получаем, что из ограниченности частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ следует ограниченность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и наоборот.

- **Сходимость и расходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ в зависимости от p .**

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \leq 1$.

При $p \leq 0$ слагаемое $\frac{1}{k^p}$ не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.

Теперь рассмотрим $p > 0$. По доказанному признаку Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится тогда

и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$$

Это геометрическая прогрессия, которая сходится при $2^{1-p} < 1$, т. е. при $p > 1$.

8 Билет

- **Подпоследовательность и частичные пределы** Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Последовательность $b_k = a_{n_k}$ называется подпоследовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнено $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

- **Верхний и нижний частичные пределы ограниченной последовательности**
Теорема. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и пусть $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность. По определению предела для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N , для которого $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Т. к. $1 \leq n$ и $n_{k-1} < n_k$, по индукции получаем, что $k \leq n_k$. Поэтому $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ при $k > N$.

Рассмотрим последовательности $M_n := \sup_{k \geq n} a_k$ и $m_n := \inf_{k \geq n} a_k$. Ясно, что последовательность M_n - не возрастает, а последовательность m_n - не убывает. Поэтому для ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют пределы:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$$

которые называются соответственно **верхним** и **нижним** частичными пределами последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- **Теорема о том, что нижний и верхний частичные пределы действительно наименьший и наибольший частичный пределы соответственно**

Теорема. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ - частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой другой частичный предел принадлежит отрезку $[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n]$.

Доказательство. Покажем, что $M := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ - частичный предел. Для этого индуктивно построим подпоследовательность, которая сходится к $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть индексы $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ уже построены. Тогда подберем такой номер $n_{k+1} > n_k$, что

$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} < M_{n_k}.$$

Как подпоследовательность сходящейся последовательности $M_{n_k} \rightarrow M$, поэтому по теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$. Аналогично проверяется, что $\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ - частичный предел.

Пусть теперь a - частичный предел. Это означает, что $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что $\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

- **Теорема Больцано (следствие из предыдущего пункта)**

Теорема. Во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.

- **Критерий сходимости последовательности в терминах структуры множества частичных пределов.**

Теорема. Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда множество ее частичных пределов состоит из одного элемента.

Доказательство. То, что у сходящейся последовательности есть единственный частичный предел уже проверено ранее.

Предположим, что у ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует единственный частичный предел. По доказанному, это в частности означает, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Тогда $m_{n-1} \leq a_n \leq M_{n-1}$ и по теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.