Коллоквиум по мат. анализу №1

29 октября 2020 г.

1 Билет

- **Рациональные числа** - числа вида $\frac{p}{q}$, где q - натуральное число, а p - целое. Считается, что две записи $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ задают одно и то же рациональное число, если $p_1q_2 = p_2q_1$. Обратим внимание на то, что рациональных чисел не достаточно для естественных потребностей математики.

- **Вещественные числа** - множество всех бесконечно десятичных дробей вида $\pm a_0a_1a_2...$, где $a_0 \in N \vee 0, a_j \in 0...9$ (Записи, в которых с какого-то момента стоят только 9-ки запрещены);
Число $\pm 0,000...$ называется нулём и совпадает с числом 0;
Нунелевое число:
- положительное, если в его записи стоит знак '+';
- отрицательное, если в его записи стоят знак '-';
В вещественные числа вложены рациональные естественным образом. У вещественных чисел также определены операции сложения и умножения для которых справедливы все их естественные свойства.
Отношение порядка у вещественных чисел задано лексикографическим порядком ($a_0a_1a_2... \leq b_0b_1b_2... \ \exists k : a_0 = b_0, ..., a_{k-1} = b_{k-1}, a_k \leq b_k$), который естественным обращом переносится на отрицательные.
Для вещественных чисел определён модуль числа a, т.е. такое вещественное число, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a < 0$. Также, для модуля выполняется неравенство треугольника $|a+b| \leq |a|+|b|$. Из неравенства треугольника следует, что $||a|-|b|| \leq |a+b|$.
Самое важное свойство - выполняется принцип полноты;

- **Десятичные дроби.** Рациональное число может быть представлено в виде конечной или периодической десятичной дроби ($\frac{1}{10} =$

0.1; $\frac{1}{6} = 0.1(6)$; $\frac{1}{7} = 0.(142857)$. Можно не рассматривать десятичные записи с периодом 9, т.к. $0.(9) = 1$ (Если $0.(9) = x$, то $10x = 9 + x$ - истина, октуда $x = 1$.

- **Принцип полноты.** Принцип полноты выполняется, если для произвольных непустых множеств A левее B найдется разделяющий их элемент.
  Принцип полноты не выполняется для рациональных чисел.
  Принцип полноты выполняется на множестве вещественных чисел (теорема).
  Доказательство:
  Пусть A и B - непустые множества. A левее B. Если A состоит только из неположительных чисел, а B только из неотрицательных, то нуль разделяет A и B. Пусть в A имеется положительный элемент, тогда B состоит только из положительных чисел (обратный случай аналогичен). Построим число $c = c_0c_1c_2...$, разделяющее A и B.
  Рассмотрим множество натуральных чисел, с которых начинаются элементы множества B. Пусть b_0 - наименьшее из таких и пусть $b_0 = c_0$. Затем рассмотрим все числа в множестве B, начинающиеся с b_0 и найдем у них наименьшую первую цифру после запятой и предположим, что $b_1 = c_1$ (где b_1 - эта цифра). Теперь рассмотрим все числа в в множестве B, начинающиеся с $b_0.b_1$ и найдем у них наименьшую вторую цифру после запятой b_2, тогда пусть $c_2 = b_2$ и т.д. получим бесконечную десятичную дробь $c_0c_1c_2...$. Покажем, что построенное число ряздеяет множества A и B. Во-первых, по построению $c \leq b$ для каждого $b \in B$. Действительно, либо $b = c$, либо $b \neq c$. Во втором случае пусть $b_0 = c_0, ..., b_{k-1} = c_{k-1}$ и $b_k \neq c_k$. Тогда по построению числа c, $c_k < b_k \Rightarrow c < b$.
  Покажем, что для каждого $a \in A$ $a \leq c$. Предположим, что $a > c$, т.е. $a \geq c$ и $a \neq c$. Тогда найдется позиция k, для которой $a_0 = c_0, ..., a_{k-1} = c_{k-1}$ и $a_k > c_k$. Но по построению числа c есть такой $b \in B$, что $b_0 = c_0, ..., b_k = c_k$, значит $a_k > b_k$, что противоречит условию A левее B.

- Рациональных решений уравнение $x^2 = 2$ не существует. Действительно, пусть $\frac{p}{q}$ - такое решение и p и q не имеют общих делителей. Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ - четное $\Rightarrow$ p - четное $\Rightarrow p = 2k, 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное $\Rightarrow$ числа p и q имеют общий делитель. Противоречие.

2 Билет

- **Предел последовательности**
Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие некоторое число a_n, то говорим, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N_\varepsilon \in N$, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при каждом $n > N_\varepsilon$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in N : \forall n > N_\varepsilon |a_n - a| < \varepsilon$
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$

- **Единственность предела** Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, тогда a = b.
Доказательство: Если $a \neq b$, то $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$. Но по определению найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_1$ и найдется номер N_2, для которого $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > max\{N_1, N_2\} : \varepsilon_0 = |a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq |a-a_n|+|a_n-b| < \varepsilon_0$. Противоречие.

- **Арифметика предела.** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
1) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \beta b_n) = \lambda a + \beta b\ \forall a, b \in R$
2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
3) Если $b \neq 0, b_n \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда найдется номер N_1, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$, и найдется номер N_2, для которого $|b_n - b| < \varepsilon$
1) При $n > N = max\{N_1, N_2\} : |\lambda a_n + \beta b_n - (\lambda a + \beta b)| = |\lambda(a_n - a) + \beta(b_n - b)| \leq |\lambda||a_n - a| + |\beta||b_n - b| < (|\lambda| + |\beta|)\varepsilon$
2) Заметим, что $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|$. Т.к. сходящаяся последовательность ограничена, то найдется $M > 0$, для которого $|b_n| \leq M$, поэтому при $n > N = max\{N_1, N_2\}$ выполнено $|a_n b_n - ab| \leq (M + |a|)\varepsilon$
3) Достаточно проверить, что $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ при $n \to \infty$. Заметим, что по условию $b \neq 0$, поэтому найдется номер $N_3 \in N$, для которого при $n > N_3$ выполнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Тогда при $n > max\{N_2, N_3\}$ выполнено
$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2} * \varepsilon$$

- **Ограниченность сходящейся последовательности**:
Утверждение: сходящаяся последовательность ограничена

Доказательство: Если $\lim_{n\to\infty} a_n \ = a$, то для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a| < 1$ при $n > N \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ при $n > N$. Значит $|a_n| \leq M = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_N|\}$, т. е. $-M = c \leq a_n \leq C = M$.

- **Отделимость**: Если $a_n \to a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.
  Доказательство: Взяв $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ в определении сходимости последовательности к числу a, получаем номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ при $n > N$. Тогда при $n > N$, выполнено $|a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, что равносильно тому, что мы доказываем.

3 Билет

- **Переход к пределу в неравенствах**
  Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Если для некоторого номера N выполнено $a_n \leq b_n$ при $n > N$, то и $a \leq b$;
  Доказательство: Предположим, что $a-b = \varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера $N_1 \in N$ и $N_2 \in N$, для которых $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_1$, и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N_2$. Тогда $\varepsilon = a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq a - a_n + b_n - b < \varepsilon$. Противоречие.

- **Лемма о зажатой последовательности**
  Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b$ и для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство: $a_n \leq c_n \leq b_n$ при $n > N$. Тогда $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
  Доказательство: Для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 \in \mathbb{N}$ и $N_2 \in \mathbb{N}$, для которых $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - a| < \varepsilon$. Тогда при $n > max\{N, N_1, N_2\}$ выполнено: $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$.

- **Принцип вложенных отрезков**
  Пусть $a, b \in R$ и $a < b$. Множества $[a; b] := \{x \in R : a \leq x \leq b\}$, $(a; b) := \{x \in R : a < x < b\}$ называются отрезком и интервалом соответственно. Длиной отрезка (интервала) называется величина $b - a$.
  Теорема: Всякая последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных отрезков (т.е. $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$) имеет общую точку. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, т.е. $b_n - a_n \longrightarrow 0$, то такая общая точка только одна.
  Доказательство: по условию $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$, откуда $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Заметим, что при $n < m$ выполнено $a_n \leq a_m \leq b_m$,

а при $n > m$ выполнено $a_n \leq b_n \leq b_m$. Таким образом, если $A := \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $B := \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$, то A левее B, а значит по принципу полноты найдется такое число $c \in \mathbb{R}$, что $a_n \leq c \leq b_m$ для произвольных $n, m \in N$. В частности $a_n \leq c \leq b_n$ т.е. $c \in [a_n; b_n]$.
Пусть общих точек две: c и c'. Не ограничивая общности $c < c'$. Тогда $a_n \leq c < c' \leq b_n$ и $c' - c \leq b_n - a_n$, что противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Действительно, найдется номер N, для которого $b_n - a_n < c' - c$ при каждом $n > N$.

- **Геометрическая интерпретация вещественных чисел, вещественная прямая.**
  Доказанная выше теорема позволяет дать вещественным числам следующую геометрическую интерпретацию. Сопоставим десятичной дроби $0.a_1a_2...$ последовательность вложенных отрезков по следующему правилу:
  Разделим отрезок $[0; 1]$ на 10 равных частей и выберем из получившихся 10 отрезков $(a_1 + 1)$-ый по счету. Делаем то же самое и выбираем $(a_2 + 1)$-ый по счету и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков, причем длина отрезка на n-ом шаге равна 10^{-n}. По доказанной теореме сущестует единственная общая точка построенной последовательности вложенных оторезков, которая как раз и совпадает с $0.a_1a_2...$

4 Билет

- **Точные верхние и нижние грани.** Пусть A - непустое подмножество вещественных чисел. Число b называется верхней гранью множества A, если $a \leq b$ верно для каждого числа $a \in A$. Если есть хоть бы одна верхняя грань, то множество называют ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A называется точной верхней гранью множества A и обозначается $sup(A)$ (супремум).
  Число b называется нижней гранью множества A, если $b \leq a$ верно для каждого числа $a \in A$. Если есть хотя бы одна нижняя грань, то множество называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A называется точной нижней гранью множества A и обозначается $inf(A)$ (инфинум)
  Ограниченное и сверху, и снизу множество называется ограниченным.

- **Теорема Вейерштрассе о пределе монотонной ограниченной последовательности.**
Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.
Анологично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфинуму.
Доказательство: Пусть $M = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup(a_n)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $M - \varepsilon < a_N$, (иначе $M-\varepsilon$ - верхняя грань, чего не может быть. В силу того, что последовательность неубывающая, при каждой $n > N$ выполнено $M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon$
Тем самым, по определению $M = \lim\ a_n$
Случай с невозрастающей последовательностью рассматривается аналогично.

- **Пример рекуррентной формулы для вычисления $\sqrt{2}$**
Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}), a_1 = 2$. Заметим, что
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \geq \frac{1}{2} * 2\sqrt{(a_n * \frac{2}{a_n})} = \sqrt{2}$$
Поэтому $a_n \geq \sqrt{2}$. Кроме того, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) = a_n$. По доказанной Теореме у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел a. Т. к. $a_n \geq 0$, то и $a \geq 0$.
Тогда по арифметике предела получаем $a = \frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$, откуда $a = \sqrt{2}$.

5 Билет

- **Фундаментальная последовательность**
Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная (или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждом $n, m > N(\varepsilon)$. То же самое в кванторах: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$. [Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальная]

- **Критерий Коши:** Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна

Это следует из того, что:
1) Если последовательность сходится, то она фундаментальная;
2) Если последовательность фундаментальная, то она сходится;
Доказательство:
1) Пусть $\varepsilon > 0$. По определению сходящейся последовательности найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, где $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Тогда при $m, n > N$ выполнено:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$$

2) Заметим, что последовательность $\lim_{n\to\infty} a_n$ ограничена. Действительно, для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n - a_m| < 1$ при $m, n > N$. Отсюда при $n > N$:

$$|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

Значит, $|a_n| \leq M = max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, ..., |a_N|\}$
Пусть $M_n := \sup_{k>n} a_k$. Тогда последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает, т.к. M_n является верхней гранью для множества $\{a_k : k > n + 1\}$, т.е. с ростом n количество значений, из которых берется супремум, не увеличивается. Кроме того, т.к. все $a_k \geq -M$, то и $M_n \geq -M$. Таким образом, $\exists a = \lim_{n\to\infty} M_n$.

Покажем, что $a_n \longrightarrow a$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдется номер N, для которого $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $m, n > N$. Кроме того, найдется номер N_1, для которого $|M_n - a| < \varepsilon$ при $n > N_1$. Пусть $N_2 = max\{N, N_1\}$. Найдется номер $m > N_2$, для которого $M_{N_2+1} - \varepsilon < a_m \leq M_{N_2+1}$. Тогда, при $n > N$:
$|a_n - a| = |a_n - a_m + a_m - M_{N_2+1} + M_{N_2+1} - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - M_{N_2+1}| + |M_{N_2+1} - a| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$

- **Пример применения критерия Коши для доказательства представления $\sqrt{2}$ целой дробью.**
  Пусть $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$. Заметим, что $a_n \geq 1$ и:

$$|a_{n+1} - a_n| = |\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}| \leq$$

$$\leq (\frac{1}{4})^{n-1}|a_2 - a_1| = (\frac{1}{4})^{n-1} * \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Отсюда при $m > n$

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + ... + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}((\frac{1}{4})^{m-2} + ... + (\frac{1}{4})^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{n-1}\frac{1-(\frac{1}{4})^{m-n}}{1-\frac{1}{4}} \leq \frac{8}{3}(\frac{1}{4})^n$$

Т.к. $(\frac{1}{4})^n \longrightarrow 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N, для которого $(\frac{1}{4})^n < \varepsilon$ при $n > N$. Тем самым, для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнен критерий Коши, а, значит, существует $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. По арифметике предела a удовлетворяет уравнению:

$$a(1+a) = 1 + a + 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2},$$

т.к. $a \geq 0$.

6 Билет

- **Числовые ряды.**
  Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числовая последовательность. Числовым рядом с членами a_n называется выражение $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
  Конечные суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ называют частичными суммами ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если у последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел, который называют суммой ряда. Если такого предела не существует, то говорят, что ряд расходится (не сходится).
  В силу арифметики предела на сходимость ряда (но не на сумму) не влияет добавление или отбрасывание первых нескольких слагаемых.

- **Переформулировка критерия Коши для числовых рядов**:
  Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > m > N$ выполнено $|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| = |S_n - S_m| < \varepsilon$.

- **Необходимое условие сходимости числового ряда:**
  Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$
  Доказательство: Действительно, из критерия Коши следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, для которого при каждом $n > N + 1$ выполнено $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$.

- **Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$:**
  Рассмотрим такой ряд. Исследуем его на выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{n}| \geq \frac{n-m}{n}$$

Какой бы ни был задан номер N всегда можно взять $m > N$ (например, $m = N + 1$) и $n = 2m$, тогда

$$|\sum_{k=m+1}^{n=2m} a_k| \geq \frac{1}{2},$$

а значит условие критерия Коши не выполнено и ряд расходится.

- **Абсолютная и условная сходимость рядов.**
Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

7 Билет

- **Сходимость рядов с неотрицательными слагаемыми + признак сравнения.**
Пусть $a_k \geq 0$, тогда ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.
Доказательство: утвеждение следует из того, что последовательность частичных сумм не убывает. Отсюда получаем такое признак сравнения.
Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{n} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$.
Наоборот, если ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{n} b_k$.

- **Признак Коши**
Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающая последовательность, $a_n \geq 0$. Ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2k}$.
Доказательство: Заметим, что $a_2 + 2a_4 + 4a_8 + ... + 2^{n-1}a_{2n} \leq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{2n} \leq 2a_2 + 4a_4 + 8a_8$. Отсюда получаем, что из ограниченности частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2k}$ следует ограниченность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{n} a_k$ и наоборот.

- **Сходимость и расходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ в зависимости от р.**
Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \leq 1$.

При $p \leq 1$ слагаемое $\frac{1}{k^p}$ не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.
Теперь рассмотрим $p > 0$. По доказанному признаку Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k$. Это геометрическая прогрессия, которая сходится при $2^{1-p} < 1$, т. е. при $p > 1$.

8 Билет

- **Подпоследовательность и частичные пределы** Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Последовательность $b_k = a_{n_k}$ называется подпоследовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

  Число $a \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнено $a = \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

- **Верхний и нижний частичные пределы ограниченной последовательности**
  Теорема. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.
  Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ и пусть $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность. По определение предела для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, для которого $|a_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Т. к. $1 \leq n$ и $n_{k-1} < n_k$, по индукции получаем, что $k \leq n_k$. Поэтому $|a_k - a| < \varepsilon$ при $k > N$.

  Рассмотрим последовательности $M_n := \sup\limits_{k>n} a_k$ и $m_n := \inf\limits_{k>n} a_k$. Ясно, что последовательность M_n - не возрастает, а последовательность m_n - не убывает. Поэтому для ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют пределы:

  $$\overline{\lim_{n \to \infty}} a_n := M_n, \quad \underline{\lim_{n \to \infty}} a_n := m_n$$

  которые называются соответственно верхним и нижним частичными пределами последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- **Теорема о том, что нижний и верхний частичные пределы действительно наименьший и наибольший частичный пределы соответственно**

Теорема. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ - частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой другой частичный предел принадлежит отрезку $[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n, \ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n]$.

Доказательство. Покажем, что $M = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ - частичный предел. Для этого индуктивно построим подпоследовательность, которая сходится к $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть индексы $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ уже построены. Тогда подберем такой номер $n_{k+1} > n_k$, что

$$M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} < M_{n_k}.$$

Как подпоследовательность сходящейся последоательности $M_{n_k} \to M$, поэтому по теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$. Аналогично проверяется, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ - частичный предел.

Пусть теперь a - частичный предел. Это означает, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}}$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

- **Теорема Больцано (следствие из предыдущего пункта)**

  Теорема. Во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.

- **Критерий сходимости последовательности в терминах структуры множества частичных пределов.**

  Теорема. Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда множество ее частичных пределов состоит из одного элемента.

  Доказательство. То, что у сходящейся последовательности есть единственный частичный предел уже проверено ранее.

  Предположим, что у ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует единственный частичный предел. По доказанному, это в частности означает, что

  $$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = a$$

  Тогда $m_{n-1} \leq a_n \leq M_{n-1}$ и по теореме о сходимости зажатой последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.