МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АМ

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Функциональный анализ»

Тема: Норма оператора

Студент гр. 1384		Шушков Е.В.
Преподаватель		Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2024

Задание. Вариант 21.

Условие задания - матрица $A(4 \times 4) - A : R^4 \to R^4$

$$A = \begin{bmatrix} -135/22 & -873/11 & 1269/22 & 783/22 \\ 27/2 & 156 & -147/2 & -129/2 \\ 0 & 54 & 9 & -18 \\ 243/22 & 1017/11 & -1611/22 & -855/22 \end{bmatrix}$$

Требуется вычислить:

1) норму оператора A в пространствах l_4^1 и l_4^∞ и предъявить векторы, на которых достигается норма.

2) норму оператора A^{-1} в пространствах l_4^1 и l_4^∞.

3) число обусловленности оператора A в пространствах l_4^1 и l_4^∞.

4) сформировать матрицу $G = A^*A$, показать, что она положительно определена. Найти ее собственные числа и векторы.

5) число обусловленности оператора A в пространстве l_4^2

Задание на пятерку: Метод итераций для решения системы $Ax = b$, начальное приближение $x0 = (1\ 1\ 1\ 1)$, $A = I - B$, $B = G^{-1}$, $b = (\ 1/2\ \ 1/3\ \ 1/4\ \ 1/5)$. Найдите точное решение $x*$, сравните его с 5-й и 10-й итерациями.

Основные теоретические положения.

Определение 1. Оператор А : X → У, действующий из линейного пространства X в линейное пространство У называется линейным, если

$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2$, $\forall\ k_1, k_2 \in C, \forall\ x_1, x_2 \in X$.

Определение 2. Оператор А: X → У называется ограниченным, если существует число М такое, что для любого $x \in X$, $||x|| < 1$, выполнено неравенство $||Ax|| < M$.

Определение 3. Оператор А: Х → У называется непрерывным, если для любой последовательности элементов $x_n \in X$ такой, что $||x_n - x_0|| \to 0$, выполнено $||Ax - Ax|| \to 0$

Определение 4. Нормой оператора А: Х → У называется такое число ||A||, что $||A|| = \sup\{||Ax|| : ||x|| \leq 1\}$.

Определение 5. Пусть А линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве Н, **сопряженным** к нему называется оператор А*, определенный соотношением: $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для любых $x, y \in H$.

Определение 6. Линейный оператор А, отображающий пространство Х на себя называется обратимым, если существует В: Х → Х такой, что АВ = ВА = I, здесь I – единичный (тождественный) оператор.

Если линейный и непрерывный оператор А имеет обратный оператор В, то оператор В тоже линейный и непрерывный.

Определение 7. Пусть А: Х - Х - линейный оператор. Ядром оператора называется множество элементов, которые он переводит в ноль:

$\ker A = \{x: Ax = 0\}$

Определение 8. Числом обусловленности линейного оператора А называется $\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$.

Определение 9. Вектор x_* называется вектором, на котором реализуется норма, если $||Ax_*|| = ||A||$.

Теорема 1. Пусть оператор A действует в конечномерном гильбертовом пространстве Н и его собственные вектора $\{e_n\}$: $Ae_n = \lambda_n e_n$ образуют ортогональный базис.

Тогда $||A|| = \max |\lambda_n|$.

Если собственные вектора не образуют ортогональный базис, то для поиска норма оператора А используется сопряжённый оператор A^*.

Доказательство. Любой x элемент пространства Н можно разложить по базису. $x = \sum_n x_n e_n$ и при этом $Ax = \sum_n Ax_n = \sum_n x_n \lambda_n e_n$.

По условию базис ортогональный. Будем считать его нормированным, тогда $||x||^2 = \sum_n |x_n|^2$.

Обозначим $M = \max|\lambda_n|$.

Ясно, что $||Ax||^2 = \sum_n |x_n|^2 |\lambda_n|^2 \le M^2 \sum_n |x_n|^2 = M^2 ||x||^2$.

Значит $||A|| \le M$. Покажем, что это оценка точная (найдётся такой x, что $||Ax|| = M||x||$).

Положим для определённости $|\lambda_1| = M$. Возьмём в качестве $x = e1$, тогда $||Ax|| = ||\lambda_1 e_1|| = M||x||$. Следовательно, $||A|| = \max|\lambda_n|$.

В случае несимметричной матрицы оператора А составляется матрица A^*A, которая является симметричной и её собственные вектора образуют ортонормированный базис. Легко видеть, что собственные числа $\lambda_k \ge 0$: $\lambda_k = (A^*Ae_k\ ,\ e_k) = (Ae_k\ ,\ Ae_k) \ge 0$ Будем считать, что $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$ Для вычисления нормы зафиксируем $x = \sum_k x_k e_k$. Тогда $||Ax||^2$:

$$||Ax||^2 = (Ax,\ Ax) = (A^*Ax,\ x) = (\sum_k x_k \lambda_k e_k, \sum_m x_m e_m) = \sum_k \lambda_k x_k^2 \le \lambda_1 ||x||^2$$

Положим, что $x = e_1$, тогда $||Ax|| = \sqrt{||\lambda_1 e_1||} = \sqrt{\lambda_1} \Rightarrow ||A|| = \sqrt{\lambda_1}$.

Теорема 2. Пусть $p = \infty$, $A : l_n^\infty \to l_n^\infty$

$||x|| = \sup_m |x_m|$, $Ax = (\sum_k a_{m,k} x_k)_{m = 1, 2, \dots , n}$,

Тогда $||A|| = \sup_m \sum_k |a_{m,k}|$ - максимум строковых сумм.

Доказательство.

$||Ax|| = \sup_m |\sum_k a_{m,k} x_k| \le \sup_m ||x|| \sum_k |a_{m,k}|$

Обозначим $M = \sup_m \sum_k |a_{m,k}|$ и заметим, что $||Ax|| < M||x||$.

Чтобы показать точность оценки предположим, что супремум достигается на первой строчке, то есть М = $\sum_k |a_{1,k}|$, и построим подходящий элемент по следующему правилу: x = sign(a_1,k)

Тогда ||x|| = $\sup_m |\sum_k a_{m,k} x_k|$ = M = M||x||. Следовательно, ||A|| = M.

Теорема 3. Пусть p = 1, A : $l^1_n \to l^1_n$

$||x|| = \sum_m |x_m|$, $Ax = (\sum_k a_{m,k} x_k)_{m = 1, 2, \dots, n}$,

Тогда $||A|| = \sup_k \sum_m |a_{m,k}|$ - максимум столбцовых сумм.

Доказательство.

$||Ax|| = \sum_m |\sum_k a_{m,k} x_k| \le \sum_m \sum_k |x_k|\ |a_{m,k}| \le \sum_k |x_k| \sum_m |a_{m,k}| \le \sum_k |x_k|\ (\sup_k \sum_m |a_{m,k}|) \le ||x||\ (\sup_k \sum_m |a_{m,k}|)$

Таким образом, ||A||≤M, M= $\sup_k \sum_m |a_{m,k}|$.

Чтобы показать точность оценки предположим, что супремум достигается на первой строчке, то есть М = $\sum_m |a_{m,1}|$, и построим подходящий элемент x. $x_1 = 1$, $x_m = 0$, если m > 1. Тогда $||Ax|| = \sum_k |a_{m,1}|$ = M||x||.

Теорема 4. В конечномерных пространствах оператор обратим тогда и только тогда, когда ядро оператора содержит только нулевой элемент.

Выполнение работы.

1) Из Теоремы 3 следует, что нормой линейного оператора А в пространстве l_4^1 будет максимальная столбцовая сумма. Подсчитаем сумму в каждом столбце (см. Таблицу 1):

Таблица 1 – Сумма элементов в каждом столбце матрица А

1 столбец	2 столбец	3 столбец	4 столбец
30.6818	381.8182	213.4091	156.9545

Таким образом, ||A|| = 381.8182 в l_n^1 , а вектор, на котором достигается норма $x_* = (0\ 1\ 0\ 0)$.

Из Теоремы 2 следует, что нормой линейного оператора А в пространстве l_n^∞ будет максимальная строковая сумма. Подсчитаем сумму в каждой строке (см. Таблицу 2):

1 строка	2 строка	3 строка	4 строка
178.7727	307.5	81.0	215.5909

Таблица 1 – Сумма элементов в каждой строке матрицы А

Таким образом, ||A|| = 307.5 в l_4^∞ , а вектор, на котором достигается норма $x_* = (1\ 1\ -1\ -1)$.

2) Найдём ядро оператора, чтобы доказать, что оператор обратим. Для этого приведём матрицу оператора А к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12.9333 & -9.4 & -5.8 \\ 0 & 1 & -2.8710 & -0.7419 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1345 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Так как в нижней части треугольной матрицы одни нули, можно сказать, что $kerA = \{0\}$. Соответственно, есть обратная матрица оператора.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2811 & 0.2189 & -0.1835 & -0.0208 \\ 0.0253 & -0.0808 & 0.0960 & 0.1127 \\ 0.0269 & 0.0471 & -0.0236 & -0.0426 \\ 0.0892 & -0.2189 & 0.2205 & 0.3171 \end{bmatrix}$$

Далее, аналогично п. 1, находим норму $\|A^{-1}\|$ в l_4^1 и l_4^∞. Для этого найдём суммы во всех столбцах и строках (см. Таблицу 3 и Таблицу 4, соответственно):

Таблица 3 – Сумма элементов во всех столбцах матрицы A^{-1}

1 строка	2 строка	3 строка	4 строка
0.4226	0.5657	0.5236	0.4933

Таким образом, $\|A^{-1}\| = 0.5657$ в l_4^1, а вектор, на котором достигается норма x* = (0 1 0 0).

Таблица 4 – Сумма элементов во всех строках матрицы A^{-1}

1 строка	2 строка	3 строка	4 строка
0.7043	0.3148	0.1403	0.8457

Таким образом, $\|A^{-1}\| = 0.8457$ в l_4^{∞} , а вектор, на котором достигается норма x* = (1 1 -1 -1).

3) Согласно Определению 8 числом обусловленности линейного оператора А будут являться:

Число обусловленности оператора А в пространстве в l_4^1: $cand(A)$ = 381.8182 * 0.5657 = 215.9780

Число обусловленности оператора А в пространстве в l_4^{∞}: $cand(A)$ = 307.5 * 0.8457 = 260.0463

4) Сформируем матрицу G = A^*A. Для надо найти сопряжённый оператор A^* согласно Определению №5. В случае вещественного конечномерного пространства необходимо просто транспонировать матрицу. Тогда матрица G будет равна:

$$G = \begin{bmatrix} 341{,}9070 & 3\,614{,}2066 & -2\,155{,}0351 & -1\,518{,}4153 \\ 3\,614{,}2066 & 42\,098{,}4298 & -22\,328{,}0331 & -17\,451{,}7438 \\ -2\,155{,}0351 & -22\,328{,}0331 & 14\,172{,}6756 & 9\,477{,}5764 \\ -1\,518{,}4153 & -17\,451{,}7438 & 9\,477{,}5764 & 7\,261{,}3450 \end{bmatrix}$$

Вычислим собственные числа и вектора матрицы G:

$\lambda_1 = 62036.5729$ V_1 = (0.0723 0.0756 0.8405 -0.5316)

$\lambda_2 = 1825.4711$ V_2 = (0.8200 -0.4590 0.1615 0.3013)

$\lambda_3 = 8.8242$ V_3 = (-0.4534 -0.8812 0.0373 -0.1285)

$\lambda_4 = 3.4892$ V_4 = (-0.3417 0.0837 0.5158 0.7811)

Как мы видим, все собственные числа матрицы G положительны, поэтому матрицу G можно считать положительно определённой.

5) Чтобы найти число обусловленности для оператора A в пространстве l_4^2 , надо вычислить ||A|| и $||A^{-1}||$. Для этого согласно Теореме 1 в случае несимметричной матрицы необходимо сделать следующие действия:

Т. к. ||A|| = $\max \lambda_k$, где λ_k − собственные числа матрицы G, определим самое большое собственное число матрицы G:

$\lambda_1 = 62036.5729$ V_1 = (0.0723 0.0756 0.8405 -0.5316)

$||A|| = \sqrt{\lambda_1} = 249.0714$ x_* = (0.0723 0.0756 0.8405 -0.5316)

Для того, чтобы найти $||A^{-1}||$ определим самое маленькое собственное число матрицы G, т. к. собственные числа обратной матрицы обратны к собственным числам матрицы A^{-1}:

$\lambda_4 = 3.4892$ V_4 = (-0.3417 0.0837 0.5158 0.7811)

$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_4}} = 0.5353$ x_* = (-0.3417 0.0837 0.5158 0.7811)

Таким образом, число обусловленности для оператора A в пространстве l_4^2 будет равно: cand(A) = $0.5353 * 249.0714$ = 133.3403.

6) Метод итераций для решения системы $Ax = b$, начальное приближение $x0$ = (1 1 1 1), $A = I - B$, $B = G^{-1}$, b = (1/2 1/3 1/4 1/5). Найдите точное решение $x*$, сравните его с 5-й и 10-й итерациями.

$$B = \begin{bmatrix} 0,1610 & -0,0305 & 0,0231 & -0,0699 \\ -0,0305 & 0,0291 & -0,0102 & 0,0769 \\ 0,0231 & -0,0102 & 0,0053 & -0,0266 \\ -0,0699 & 0,0769 & -0,0266 & 0,2050 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0,8390 & 0,0305 & -0,0231 & 0,0699 \\ 0,0305 & 0,9709 & 0,0102 & -0,0769 \\ -0,0231 & 0,0102 & 0,9947 & 0,0266 \\ 0,0699 & -0,0769 & 0,0266 & 0,7950 \end{vmatrix}$$

Подсчитаем норму B в пространствах l_4^1 и l_4^∞:

||B|| = 0.3784 в пространстве l_4^1 и l_4^∞. Т. к. ||B|| < 1, это значит, что оператор A будет иметь обратный оператор. Можно предположить, что метод сойдётся.

Точным решением Ax = b будет x = (0.5718 0.3405 0.2550 0.2257)

Алгоритм можно задать следующей формулой: $x_{n+1} = b + Bx_n$

Результат на 5 шаге алгоритма: x_5 = (0.5713 0.3408 0.2549 0.2264)

Результат на 10 шаге алгоритма: x_{10} = (0.5718 0.3405 0.2550 0.2257)

Как мы можем заметить, алгоритм действительно сошёлся и дал точный ответ.