## Transformare linie best fit in segment best fit

Fie:

$$d : \vec{v} + P_0, \quad \text{cu } \vec{v} \neq \vec{0},\ P_0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\{P_i\}_{i=\overline{1,n}}, \quad \text{cu } n \in \mathbb{N}^*.$$

Notăm cu $Pr_d(A)$ proiecția punctului $A$ pe dreapta $d$.
Notăm $A = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$, unde $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ sunt vectorii bazei inițiale.

Proiectăm punctele $P_i$ pe linia $d$ și cautăm $P_i$ și $P_j$ cu distanța maximă între proiecții (ie $d(Pr_d(P_i), Pr_d(P_j))$).

Considerăm problema în baza dată de dreapta $d$:

$$\begin{cases} \hat{\imath} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}, \\ \hat{\jmath} = -v_y\vec{\imath} + v_x\vec{\jmath} \end{cases}$$

de unde avem:

$$\begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \end{pmatrix} = \frac{1}{v_x^2 + v_y^2} \begin{pmatrix} v_x & -v_y \\ v_y & v_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix}$$

Notăm $A = A_{x'}\hat{\imath} + A_{y'}\hat{\jmath}$.

Avem

$$Pr_d(P_i) = P_{ix'}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$$

$$d(Pr_d(P_i), Pr_d(P_j)) = \|P_{ix'}\hat{\imath} - P_{jx'}\hat{\imath}\| = P_{ix'} - P_{jx'}.$$

Deci distanța dintre proiecții este dată de prima componentă a vectorului în noua baza.
Punctele cu distanța maxima sunt:

$$P_i, \quad \text{unde } i = \arg\min_k (Pr_d(P_k))_{x'}$$

și

$$P_j, \quad \text{unde } j = \arg\max_k (Pr_d(P_k))_{x'}.$$

Revenind la baza inițială:

$$Pr_d(P_i) = \frac{1}{v_x^2 + v_y^2} \cdot (P_{ix}v_x + P_{iy}v_y) = \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \langle P, \vec{v} \rangle$$