

# Portofoliu Algoritmi și complexitate

Anul I, semestrul 2

*Student:*

Grupa M116  
PAVEL Andrei

*Profesor:*

Lect. Dr.  
Marius APETRII

Facultatea de Matematică  
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza"  
Iași  
2018 - 2019

## Laborator 1

15. O colecție de  $n$  monede sunt identice, cu excepția uneia, falsă, care are greutatea mai mică decât a celorlalte. Propuneți o strategie pentru a identifica moneda falsă folosind o balanță simplă și cât mai puține cântăriri.

```
1 import random, math
2
3 # The values aren't important, what matters is that fake < real
4 realWeight = 40
5 fakeWeight = 35
6
7 print("Please enter length: ", end="")
8 length = int(input())
9
10 coins = [realWeight] * length
11 coins[random.randrange(length)] = fakeWeight
12
13 bigPile = coins
14 steps = 0
15
16 while len(bigPile) > 1:
17     steps += 1
18     print("Step %d:" % steps)
19
20     # we split the big pile in 3 piles with the same size ±1
21     pileSize = len(bigPile) // 3 + (len(bigPile) % 3 == 2)
22     leftPile = bigPile[0:pileSize]
23     rightPile = bigPile[pileSize:pileSize*2]
24     leftoverPile = bigPile[pileSize*2:]
25
26     print("left", leftPile)
27     print("right", rightPile)
28     print("leftover", leftoverPile)
29
30     difference = 0
31     for i in range(pileSize):
32         difference += rightPile[i] - leftPile[i]
33
34     if difference > 0: bigPile = leftPile
35     elif difference < 0: bigPile = rightPile
36     else: bigPile = leftoverPile
37
38     print()
39
40 print("Took", steps, "steps to find the fake coin, expected",
41       math.ceil(math.log(length, 3)))
```

```
$ python3 src.py
Please enter length: 15
Step 1:
left [40, 40, 40, 40, 40]
right [40, 40, 40, 40, 40]
leftover [40, 40, 35, 40, 40]
```

```
Step 2:
left [40, 40]
right [35, 40]
leftover [40]
```

```
Step 3:
left [35]
right [40]
leftover []
```

Took 3 steps to find the fake coin, expected 3

16. Bucătarul unui restaurant a pregătit clătite și le-a stivuit pe o farfurie. Fiind începător, clătitele nu au ieșit la fel, având diametre diferite, iar farfuria arată destul de rău. Bucătarul șef a vrut să-i dea o lecție și i-a dat sarcina de a rearanja (cea cu diametrul cel mai mare să fie prima pe farfurie, apoi cea cu diametrul imediat următor ca mărime ș.a.m.d.) folosind doar o spatulă. Ce strategie să adopte?

```
1 print("Please insert a space separated list of pancake diameters:\n(",
2     end="")
3 strs = input().split(' ')
4 # index 0 represents the topmost pancake
5 pancakes = [int(num) for num in reversed(strs) if num != ""]
6
7 def draw(msg, vec, spatulaIndex = -1):
8     print(msg + "(", end="")
9     i = len(vec)
10    if spatulaIndex > 0:
11        for i in range(i-1, spatulaIndex-1, -1): print(vec[i], end=" ")
12        print("|", end="")
13
14    for i in range(i-1, -1, -1): print(vec[i], end=" ")
15    print()
16
17 flips = 0
18 def flip(vec, index):
19     global flips
20     flips += 1
21     draw("flip %2d: " % (flips), pancakes, index)
22     for i in range(0, index // 2):
23         t = vec[i]
24         vec[i] = vec[index-i-1]
25         vec[index-i-1] = t
26
```

```

27 for bottom in range(len(pancakes), 0, -1):
28     spatulaIndex = 0
29     for i in range(0, bottom):
30         if pancakes[i] >= pancakes[spatulaIndex]: spatulaIndex = i
31     spatulaIndex += 1
32     # if the biggest is at the bottom we do nothing
33     if spatulaIndex == bottom: continue
34     # if the biggest is already at the top we don't have to flip it
35     if spatulaIndex != 1: flip(pancakes, spatulaIndex)
36
37     flip(pancakes, bottom)
38
39 draw("", pancakes)
40 print("Done in %d flips" % flips)

```

```
$ python3 src.py
```

Please insert a space separated list of pancake diameters:

```

(5 9 4 3 7 2 8 1
flip 1: (5 |9 4 3 7 2 8 1
flip 2: (|5 1 8 2 7 3 4 9
flip 3: (9 4 3 7 2 |8 1 5
flip 4: (9 |4 3 7 2 5 1 8
flip 5: (9 8 1 5 2 |7 3 4
flip 6: (9 8 |1 5 2 4 3 7
flip 7: (9 8 7 3 4 2 |5 1
flip 8: (9 8 7 |3 4 2 1 5
flip 9: (9 8 7 5 1 2 |4 3
flip 10: (9 8 7 5 |1 2 3 4
(9 8 7 5 4 3 2 1
Done in 10 flips

```

```
$ python3 src.py
```

Please insert a space separated list of pancake diameters:

```

(4 3 2 1
(4 3 2 1
Done in 0 flips

```

```
$ python3 src.py
```

Please insert a space separated list of pancake diameters:

```

(3 3 1 4 3
flip 1: (3 3 1 |4 3
flip 2: (|3 3 1 3 4
flip 3: (4 3 1 |3 3
flip 4: (4 3 |1 3 3
(4 3 3 3 1
Done in 4 flips

```

## Laborator 2

10. Demonstrați corectitudinea algoritmului de determinare a valorii obținute prin inversarea ordinii cifrelor unui număr natural.

```
1 n = int(input("Please insert n: "))
2
3 res = 0
4 i = 0
5
6 while n != 0:
7     res *= 10
8     res += n % 10
9     n //= 10
10    i += 1
11
12 print("Result:", res)
```

```
$ python3 reversed.py
Please insert n: 1234
Result: 4321
```

```
$ python3 reversed.py
Please insert n: 2400
Result: 42
```

### I. Parțial corectitudinea

Considerăm aserțiunile de intrare și ieșire:

$$P_{in} = \left\{ n = \sum_{j=0}^k c_j 10^j; c_j \in \overline{0,9}, \forall j \in \overline{0,k}; c_k \neq 0 \right\},$$
$$P_{out} = \left\{ res = \sum_{j=0}^k c_{k-j} 10^j \right\}.$$

Alegem proprietatea:

$$I = \left\{ n = \sum_{j=0}^{k-i} c_{i+j} 10^j; res = \sum_{j=0}^{i-1} c_{i-1-j} 10^j \right\}.$$

La intrarea in buclă:

$$i = 0$$
$$n = \sum_{j=0}^k c_j 10^j$$

$$\text{Deci propoziția } I = \left\{ n = \sum_{j=0}^k c_j 10^j; res = \sum_{j=0}^{-1} c_{-1-j} 10^j = 0 \right\} \text{ este adevărată.}$$

Arătăm că propoziția  $I$  este invariantă.

Presupunem  $I$  adevărata la începutul iterației și  $n \neq 0$ ; demonstrăm  $I$  adevărata la sfârșitul iterației.

$$n = \sum_{j=0}^{n-i} c_{i+j} 10^j; res = \sum_{j=0}^{i-1} c_{i-1-j} 10^j$$

7

```
res *= 10
```

$$res = \left( \sum_{j=0}^{i-1} c_{i-1-j} 10^j \right) \cdot 10 = \sum_{j=0}^{i-1} c_{i-1-j} 10^{j+1} = \sum_{j=1}^i c_{i-j} 10^j$$

8

```
res += n % 10
```

$$res = \left( \sum_{j=1}^i c_{i-j} 10^j \right) + c_i = \left( \sum_{j=1}^i c_{i-j} 10^j \right) + c_{i-0} 10^0 = \sum_{j=0}^i c_{i-j} 10^j$$

9

```
n //= 10
```

$$n = \left\lfloor \left( \sum_{j=0}^{k-i} c_{i+j} 10^j \right) / 10 \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{j=0}^{k-i} c_{i+j} 10^{j-1} \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{j=1}^{k-i} c_{i+j} 10^{j-1} \right\rfloor + \lfloor c_i 10^{-1} \rfloor$$

Cum  $0 \leq c_i \leq 9 \implies 0 \leq c_i 10^{-1} \leq 0.9 \implies \lfloor c_i 10^{-1} \rfloor = 0$ .

Deci  $n = \left\lfloor \sum_{j=1}^{k-i} c_{i+j} 10^{j-1} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{k-i} c_{i+j} 10^{j-1} = \sum_{j=0}^{k-i-1} c_{i+j+1} 10^j$ .

10

```
i += 1
```

Scriem  $res$  și  $n$  în funcție de noul  $i$ . Deci  $i$  devine  $i - 1$ .

$$res = \sum_{j=0}^{i-1} c_{i-1-j} 10^j$$

$$n = \sum_{j=0}^{k-(i-1)-1} c_{i-1+j+1} 10^j = \sum_{j=0}^{k-i} c_{i+j} 10^j$$

Deci  $I$  adevărată și la sfârșitul iterației.

La ieșirea din buclă:

$$i = k + 1$$

$$n = \sum_{j=0}^{k-(k+1)} c_{k+1+j} 10^j = \sum_{j=0}^{-1} c_{k+1+j} 10^j = 0$$

$$res = \sum_{j=0}^{k+1-1} c_{k+1-1-j} 10^j = \sum_{j=0}^k c_{k-j} 10^j$$

$$\text{Deci } P_{out} = \left\{ res = \sum_{j=0}^k c_{k-j} 10^j \right\} \text{ adevărată.}$$

În concluzie algoritmului este parțial corect.

## II. Total corectitudinea

Considerăm funcția  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $t(i) = k + 1 - i$ ;

$t(i+1) - t(i) = k + 1 - (i+1) - (k + 1 - i) = -1 < 0$ , deci  $t$  monoton strict descrescătoare.

$$t(i) = 0 \iff i = k + 1 \iff n = \sum_{j=0}^{-1} c_{k+1+j} 10^j = 0 \iff \text{condiția de ieșire din buclă.}$$

În concluzie algoritmului este total corect.

## Laborator 3

10. Considerăm o secvență  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$  de  $n$  numere întregi, cu măcar un element pozitiv. O subsecvență a șirului este de forma  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ , cu  $0 \leq i \leq j \leq n-1$ , iar suma subsecvenței este suma elementelor componentelor sale. Descrieți un algoritm pentru a determina subsecvența de sumă maximă. Estimați timpul de execuție al algoritmului, precizând operația dominantă.

```
1 print("Please insert the sequence: ", end="")
2 strs = input().split(' ')
3 v = [int(num) for num in strs if num != ""]
4 n = len(v)
5 # python way of defining a n-dimensional list initialized to 0
6 sub_sums = [0 for i in range(0, n)]
7
8 best = (0, 0)
9 best_sum = 0
10 for i in range(0, n):
11     sub_sums[i] = v[i]
12     best_end_index = i
13     # after this loop v[j] = (sum from k=i to j of v[k])
14     for j in range(i+1, n):
15         sub_sums[j] = sub_sums[j-1] + v[j]
16         if sub_sums[j] > sub_sums[best_end_index]:
17             best_end_index = j
18     if sub_sums[best_end_index] > best_sum:
19         best_sum = sub_sums[best_end_index]
20         best = (i, best_end_index)
21
22 print("Best with a sum of", best_sum, "is: (x%d,..., x%d)" % best)
```

```
$ python3 src.py
Please insert the sequence: 1 2 3 4
Best with a sum of 10 is: (x0,..., x3)
```

```
$ python3 src.py
Please insert the sequence: 1 -2 3 4
Best with a sum of 7 is: (x2,..., x3)
```

```
$ python3 src.py
Please insert the sequence: 1 2 -3 4
Best with a sum of 4 is: (x0,..., x3)
```

Considerăm operația de bază ca fiind compararea elementelor tabloului  $v$  (liniile 16 și 18).

Notăm  $T_l(n) :=$  timpul total de execuție al liniei  $l$ ;

$T(n) :=$  timpul de execuție total.

$$T_{16}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} ((n-1) - i) = n(n-1) - \sum_{i=0}^{n-1} i = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$T_{18}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

$$T(n) = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

## Laborator 4

8. Considerăm o secvență  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$  de  $n$  numere întregi. Generați tabloul  $f = (f_0, \dots, f_{n-1})$ , cu  $f_i = \sum_{j=0}^i x_j$ , printr-un algoritm de complexitate liniară.

```
1  strs = input("Please insert the sequence: ").split(' ')
2  x = [int(num) for num in strs if num != ""]
3  n = len(x)
4  f = [0 for i in range(n)]
5
6  f[0] = x[0]
7  for i in range(1, n):
8      f[i] = f[i-1] + x[i]
9
10 print(f)
```

```
$ python3 src.py
Please insert the sequence: 1 2 3 0 -1 5
[1, 3, 6, 6, 5, 10]
```

9. Considerăm un tablou de valori întregi  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$  și o valoare dată,  $s$ . Să se verifice dacă există cel puțin doi indici  $i$  și  $j$  (nu neapărat distincți) cu proprietatea că  $x_i = x_j = s$ . Analizați complexitatea algoritmului propus.

```
1  strs = input("Please insert the sequence: ").split(' ')
2  x = [int(num) for num in strs if str != ""]
3  s = int(input("Please insert s: "))
4
5  def f(x):
6      for i in range(0, len(x)):
7          for j in range(i, len(x)):
8              if x[i] + x[j] == s:
9                  print("Found %d + %d = %d " % (x[i], x[j], s))
10                 return True
11     print("Not found")
12     return False
13
14 f(x)
```

Considerăm operația de bază ca fiind compararea sumei elementelor cu  $s$  (linia 10);  $T(n) \in O(n^2)$ .

```
$ python3 src.py
Please insert the sequence: 1 2 3 0 -1 5
Please insert s: 9
Not found
```

```
$ python3 src.py
Please insert the sequence: 1 2 3 0 5 -1
Please insert s: 7
Found 2 + 5 = 7
```



## Laborator 5

4. (*Shaker sort*) modificând algoritmul de sortare prin interschimbarea elementelor vecine, sortați elementele unui tablou, astfel încât, la fiecare pas, să se plaseze pe pozițiile finale câte două elemente: minimul, respectiv maximum din subtabloul parcurs la pasul respectiv.

```
1 print("Please insert the array: ", end="")
2 strs = input().split(' ')
3 v = [int(num) for num in strs if num != ""]
4
5 def impl(start, end, step):
6     sorted = True
7     for i in range(start, end, step):
8         if v[i] > v[i+1]:
9             t = v[i]
10            v[i] = v[i+1]
11            v[i+1] = t
12            sorted = False
13     return sorted
14
15 begin = 0
16 end = len(v) - 1
17
18 while True:
19     if impl(begin, end, 1): break
20     if impl(end-1, begin-1, -1): break
21
22     end -= 1
23     begin += 1
24
25 print(v)
```

```
$ python3 shaker_sort.py
Please insert the array: 6 5 3 1 8 7 2 4 0 9
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
$ python3 shaker_sort.py
Please insert the array: 4 1 0 2 7 3 9 8 5 6
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
$ python3 shaker_sort.py
Please insert the array: 9 4 3 0 5 6 1 8 7 0
[0, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
$ python3 shaker_sort.py
Please insert the array: 40 3 43 95 9 2 4 0
[0, 2, 3, 4, 9, 40, 43, 95]
```

5. (*Counting sort* - sortare prin numărare) Considerăm un tablou  $x$  de dimensiune  $n$ , cu elemente din mulțimea  $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ . Pentru sortarea unui astfel de tablou poate fi descris un algoritm de sortare de complexitate liniară, dacă  $m$  nu este semnificativ mai mare ca  $n$ . Pașii algoritmului sunt:

- (a) se construiește tabloul  $f[0..m]$  al frecvențelor de apariție a elementelor tabloului  $x$  ( $f_i$  reprezintă de câte ori apare valoarea  $i$  în tabloul  $x$ ,  $i = 0, \dots, m$ );
- (b) se calculează tabloul frecvențelor cumulate  $fc[0..m]$ ,  $fc_i = \sum_{j=0}^i f_j$ ,  $i = 0, \dots, m$ ;
- (c) se folosește tabloul frecvențelor cumulate pentru a construi tabloul ordonat.

Descrieți algoritmul de sortare prin numărare. Care este complexitatea acestuia?

```

1 print("Please insert the array: ", end="")
2 x = [int(num) for num in (input().split()) if num != ""]
3 n = len(x)
4 m = max(x) + 1
5
6 f = [0 for i in range(m)]
7 output = [0 for i in range(n)]
8
9 for i in x: f[i] += 1
10 print("f:", f)
11
12 for i in range(1, m): f[i] = f[i-1] + f[i]
13
14 print("fc:", f)
15 for i in range(n):
16     val = x[i]
17     f[val] -= 1
18     output[f[val]] = val
19
20 print("output:", output)

```

```

$ python3 counting_sort.py
Please insert the array: 0 1 2 2 1 0 2 1 2 4
f: [2, 3, 4, 0, 1]
fc: [2, 5, 9, 9, 10]
output: [0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4]

```

```

$ python3 counting_sort.py
Please insert the array: 1 2 2 1 2 1 2 4
f: [0, 3, 4, 0, 1]
fc: [0, 3, 7, 7, 8]
output: [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4]

```

Considerăm atribuirile în vectori ca fiind operațiile de bază (ignorăm inițializările).

Notăm  $T_l :=$  timpul total de execuție al liniei  $l$ ;  $T(n, m) :=$  timpul de execuție total.

$T_9 = n$ ;  $T_{12} = m - 1$ ;  $T_{17} = n$ ;  $T_{18} = n$ ;

$T(n, m) = 3n + m - 1$ .

$T \in O(n + m)$ .

6. (*Radix sort* - sortare pe baza cifrelor) Considerăm un tablou  $x$  de dimensiune  $n$ , cu elemente numere naturale de cel mult  $k$  cifre. Algoritmul de sortare este bazat pe următoarea idee: folosind counting sort, se ordonează tabloul în raport cu cifra cea mai puțin semnificativă a fiecărui număr, apoi se sortează în raport cu cifra de rang imediat superior ș.a.m.d., până de ajunge la cifra cea mai semnificativă.

Descrieți algoritmul radix sort. Care este complexitatea acestuia?

```

1  strs = input("Please insert the array: ").split()
2  x = [int(num) for num in strs if num != ""]
3  n = len(x)
4  max_x = max(x)
5  f = [0 for i in range(10)]
6  output = [0 for i in range(n)]
7
8  pow10 = 1
9  while max_x > 0:
10     def getDigit(num): return (num // pow10) % 10
11
12     for i in range(10): f[i] = 0
13     for i in x: f[getDigit(i)] += 1
14     for i in range(1, 10): f[i] += f[i-1]
15
16     for i in range(n - 1, -1, -1):
17         index = getDigit(x[i])
18         f[index] -= 1
19         output[f[index]] = x[i]
20
21     #output becomes new input
22     for i in range(n): x[i] = output[i]
23
24     pow10 *= 10
25     max_x //= 10
26
27 print("output:", output)

```

```
$ python3 radix_sort.py
```

```
Please insert the array: 3 2 4 23 427 459 56 90
```

```
output: [2, 3, 4, 23, 56, 90, 427, 459]
```

```
$ python3 radix_sort.py
```

```
Please insert the array: 89568 23 123 2 1 4 45 499
```

```
output: [1, 2, 4, 23, 45, 123, 499, 89568]
```

Considerăm atribuirile în vectori ca fiind operațiile de bază (ignorăm inițializările).

Notăm  $k = \lceil \log_{10}(\max(x)) \rceil + 1$ ;

$T_l :=$  timpul total de execuție al liniei  $l$ ;

$T(n, k) :=$  timpul de execuție total.

$T_{13} = 10k$ ;  $T_{14} = kn$ ;  $T_{16} = 9k$ ;  $T_{20} = kn$ ;  $T_{21} = kn$ ;

$T(n, k) = 3kn + 19k$ .

$T \in O(kn)$ .

## Laborator 6

6. Se poate demonstra că plecând de la numărul 4, se poate obține orice număr natural diferit de zero, printr-o succesiune de operații de tipul:

- se adaugă cifra 4 la sfârșitul numărului curent;
- se adaugă cifra 0 la sfârșitul numărului curent;
- numărul curent de împarte la 2.

Propuneți un subalgoritm recursiv care să descrie cum se poate obține un număr natural  $n \neq 0$ , pornind de la numărul 4, aplicând operațiile de mai sus. De exemplu, pentru  $n = 435$ , drumul parcurs pornind de la numărul 4 este:

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 174 \rightarrow 87 \rightarrow 870 \rightarrow 435$

sau pentru  $n = 5$ ,

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 10 \rightarrow 5$

*Indicație.* Drumul până la numărul  $n$  se poate determina prin construirea drumului invers de la  $n$  la numărul 4, folosind operațiile inverse.

```
1 def from4(n):
2     assert(n > 0)
3
4     def impl(n, steps):
5         steps.append(n)
6         if n == 4: return steps
7         if n % 10 == 4 or n % 10 == 0: return impl(n // 10, steps)
8         return impl(n * 2, steps)
9
10    steps = impl(n, [])
11    for num in reversed(steps[1:]):
12        print(num, "-> ", end="")
13    print(n)
14
15    print("Please insert a number (> 0): ", end="")
16    n = int(input())
17    from4(n)
```

```
$ python3 src.py
```

```
Please insert a number (> 0): 435
```

```
4 -> 2 -> 24 -> 12 -> 6 -> 3 -> 34 -> 17 -> 174 -> 87 -> 870 -> 435
```

```
$ python3 src.py
```

```
Please insert a number (> 0): 5
```

```
4 -> 2 -> 1 -> 10 -> 5
```

```
$ python3 src.py
```

```
Please insert a number (> 0): 231
```

```
4 -> 2 -> 1 -> 14 -> 144 -> 72 -> 36 -> 18 -> 184 -> 92 -> 924 -> 462 -> 231
```

```
$ python3 src.py
```

```
Please insert a number (> 0): 178
```

```
4 -> 44 -> 22 -> 224 -> 112 -> 56 -> 28 -> 284 -> 142 -> 1424 -> 712 -> 356 -> 178
```

11. Considerăm o scară cu  $n \in \mathbb{N}^*$  trepte. Determinați numărul de moduri în care poate fi urcată scara efectuând pași de una, două sau trei trepte. Descrieți algoritmul corespunzător.

Numarul de moduri în care poate fi urcată scara este dat de următoarea relație de recurență:

$$f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N},$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ f(n-1) + f(n-2) + f(n-3), & n > 2 \end{cases}$$

Observăm că  $f(n-1)$  este al  $n$ -lea termen din sirul Tribonacci. Deci putem folosi următoarea formulă pentru  $f(n)$ :

$$f(n-1) = \text{round} \left( \frac{3b}{b^2 - 2b + 4} \left( \frac{a_+ + a_- + 1}{3} \right)^n \right), \text{ unde } a_{\pm} = \sqrt[3]{19 \pm 3\sqrt{33}}, b = \sqrt[3]{586 + 102\sqrt{3}}.$$

```

1 from math import pow, sqrt
2
3 t = (pow(19 - 3*sqrt(33), 1/3) + pow(19 + 3*sqrt(33), 1/3) + 1) / 3
4 b = pow(586 + 102*sqrt(33), 1/3)
5 left = (3*b) / (b*b - 2*b + 4)
6
7 def f(n):
8     # this gives the correct answer from 1 to 53
9     if n < 54: return round(left * pow(t, n+1))
10    t1 = f(53)
11    t2 = f(52)
12    t3 = f(51)
13    n -= 53
14
15    while n > 0:
16        n -= 1
17        r = t1 + t2 + t3
18        t3 = t2
19        t2 = t1
20        t1 = r
21    return t1
22
23 n = int(input("Please insert a number (>= 0): "))
24 print(f(n))

```

```

$ python3 src.py
Please insert a number (>= 0): 4
7

```

```

$ python3 src.py
Please insert a number (>= 0): 5
13

```

```

$ python3 src.py
Please insert a number (>= 0): 55
222332455004452

```

## Laborator 7

6. Un vector ordonat crescător are componentele în progresie aritmetică. Un singur element lipsește din progresie (sigur acesta nu este nici primul și nici ultimul). Folosind tehnica reducerii, identificați elementul lipsă.

```
1 def find_missing(v):
2     size = len(v)
3
4     second = (v[0] + v[2]) // 2
5     if second != v[1]: return v[2] - v[1] + v[0]
6     ratio = v[1] - v[0]
7
8     def impl(v):
9         if len(v) == 1: return v[0] + ratio
10        middle = len(v) // 2
11        if v[0] + ratio * middle == v[middle]:
12            return impl(v[middle:])
13        return impl(v[:middle])
14
15    res = impl(v)
16    if res != v[-1] + ratio:
17        return res
18    return None
19
20 print("Please insert the vector: ", end="")
21 strs = input().split(' ')
22 v = [int(str) for str in strs if str != ""]
23
24 res = find_missing(v)
25 if res == None:
26     res = "Nothing"
27
28 print(res, "is missing")
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 1 2 3 4 5 6 7 9 10 11
8 is missing
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 10 8 6 2
4 is missing
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 1 2 3
Nothing is missing
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 3 2 1
Nothing is missing
```

9. (*Generarea permutărilor folosind algoritmul lui Heap*) Utilizați următorul algoritm pentru a genera toate permutările de ordin  $n$  ale mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ : fiecare permutare este generată pornind de la precedenta, interschimbând o singură pereche de valori, celelalte  $n - 2$  valori rămânând pe loc. Pornind cu un  $i = 0$ , pașii algoritmul se repetă până când  $i$  devine egal cu  $n$ :

- se generează cele  $(n-1)!$  permutări ale primelor  $n-1$  elemente, alăturând ultimului element fiecărei dintre acestea. Astfel se generează toate permutările cu  $n$  pe ultima poziție.
- dacă  $n$  este impar, se interschimbă primul și ultimul element; dacă  $n$  este par, se interschimbă elementul de indice  $i$  și ultimul element; se incrementează  $i$  și se reiau pașii algoritmului;
- după fiecare iterație, algoritmul produce toate permutările care se termină cu elementul care tocmai a fost mutat pe ultima poziție.

```

1 def permutations(v):
2     def impl(v, n):
3         if n == 1:
4             yield v
5             return
6         for i in range(n):
7             for p in impl(v, n-1):
8                 yield p
9                 if n % 2 == 1:
10                    v[0], v[n-1] = v[n-1], v[0]
11                else:
12                    v[i], v[n-1] = v[n-1], v[i]
13            return impl(v, len(v))
14
15 print("Please insert n: ", end="")
16 n = int(input())
17 v = [i for i in range(1, n+1)]
18
19 i = 0
20 for p in permutations(v):
21     print("(", end="")
22     for v in p[:-1]: print(v, end=" ")
23     print(p[-1], end="")
24     print(")", end=", ")
25     if i % 6 == 5: print()
26     i += 1

```

```
$ python3 perm.py
```

```
Please insert n: 4
```

```
(1 2 3 4), (2 1 3 4), (3 1 2 4), (1 3 2 4), (2 3 1 4), (3 2 1 4),
(4 2 3 1), (2 4 3 1), (3 4 2 1), (4 3 2 1), (2 3 4 1), (3 2 4 1),
(4 1 3 2), (1 4 3 2), (3 4 1 2), (4 3 1 2), (1 3 4 2), (3 1 4 2),
(4 1 2 3), (1 4 2 3), (2 4 1 3), (4 2 1 3), (1 2 4 3), (2 1 4 3),
```

## Laborator 8

5. Propuneți un algoritm de complexitate  $O(n)$  care transformă (pe loc) un tablou cu valori întregi astfel încât toate valorile negative să fie înaintea celor pozitive (partiționare cu pivot = 0).

```
1 def partition(v):
2     size = len(v)
3     i = -1
4     j = size
5
6     while True:
7         i += 1
8         while i < size and v[i] <= 0:
9             i += 1
10        j -= 1
11        while j >= 0 and v[j] >= 0:
12            j -= 1
13
14        if i < j:
15            v[i], v[j] = v[j], v[i]
16        else:
17            return
18
19
20 print("Please insert the vector: ", end="")
21 strs = input().split(' ')
22 v = [int(str) for str in strs if str != ""]
23
24 partition(v)
25 print(v)
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 1 2 3 4 -1 -2 -3 4 -6 -8 1
[-8, -6, -3, -2, -1, 4, 3, 4, 2, 1, 1]
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 1 2 -3 4 -1 -2 0 1
[-2, -1, -3, 4, 2, 1, 0, 1]
```

```
$ python3 src.py
Please insert the vector: 1 2 3
[1, 2, 3]
```



6. (*Aproximarea numerică a unei integrale folosind formula trapezului*) Considerăm o funcție reală  $f$  continuă pe intervalul  $[a,b]$ . (...) valoarea integralei definite a lui  $f$  între limitele  $[a,b]$  se aproximează prin aria trapezului cu vârfurile  $(a, 0), (b, 0), (a, f(a)), (b, f(b))$ . Deci:

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)), & b-a < \varepsilon \\ \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c = \frac{a+b}{2}, & b-a \geq \varepsilon \end{cases}$$

```

1 def exp(x, iterations=20):
2     factorial = 1
3     pow = 1
4     res = 1.0
5     for i in range(1, iterations):
6         factorial *= i
7         pow *= x
8         res += pow/factorial
9     return res
10
11 def cos(x, iterations=20):
12     factorial = 1
13     pow = 1
14     res = 1.0
15     for i in range(1, iterations, 2):
16         factorial *= i * (1+i)
17         pow *= - x * x
18         res += pow/factorial
19     return res
20
21 def integrate(f, a, b, eps=1e-4):
22     delta = b - a
23     if delta >= eps:
24         c = (a+b)/2
25         return integrate(f, a, c, eps) + integrate(f, c, b, eps)
26     return delta * (f(a) + f(b)) / 2
27
28 from math import pi
29
30 print("e^x:", integrate(exp, 0, 1))# should be e - 1
31 print("x^2:", integrate(lambda x: x*x, -1, 1))# should be 2/3
32 print("x^.5:", integrate(lambda x: x**0.5, 0, 1))# should be 2/3
33 print("cos:", integrate(cos, -pi/2, pi/2))# should be 2

```

```

$ python3 integrals.py
e^x: 1.7182818289924702
x^2: 0.6666666679084301
x^.5: 0.6666665676940103
cos: 1.9999999984680359

```

## Laborator 9

9. a) Avem la dispoziție 6 culori: alb, negru, galben, verde, roșu și albastru. Afișați toate modalitățile de realizare a unui drapel tricolor folosind aceste trei culori astfel încât cele 3 culori ale drapelului să fie distincte și culoarea din mijloc este ori galben, ori verde.

b) Avem la dispoziție, în plus, șase steme de aceleași șase culori. Fiecare steag poate să aibă sau nu o stemă, dar dacă are, atunci aceasta trebuie să aibă o culoare diferită de cele trei culori deja existente în steag. Afișați toate modalitățile de realizare a steagului.

```
1 #galben, verde, negru, alb, rosu, albastru, albastru, -
2 colors = ['g','v','n','a','r', 'b', '-']
3 index = 0
4
5 flag = [-1,0,0,0]
6 k = 0
7 maxK = 4
8 print("Long mode (y/N):", end="")
9 if input()[0].lower() == 'y': maxK = 3
10
11 while k >= 0:
12     maxVal = 6
13     if k == 1: maxVal = 3
14     elif k == 3: maxVal = 7
15     if flag[k] < maxVal-1:
16         flag[k] += 1
17         ok = True
18         for i in range(0, k):
19             if flag[k] == flag[i]:
20                 ok = False
21                 break
22         if not ok: continue
23
24     if k == maxK:
25         for f in flag[:maxK]: print(colors[f], end="")
26         print(colors[flag[maxK]], end=" ")
27         if index % 20 == 19: print()
28         index += 1
29     else:
30         k += 1
31         flag[k] = -1
32 else:
33     k -= 1
```

```
$ python3 flags.py
```

```
Long mode (y/N): n
```

```
gvn gva gvr gvb gnv gna gnr gnb vgn vga vgr vgb vng vna vnr vnb ngv nga ngr ngb
nvg nva nvr nvb agv agn agr agb avg avn avr avb ang anv anr anb rgv rgn rga rgb
rvg rvn rva rvb rng rnv rna rnb bgv bgn bga bgr bvg bvn bva bvr bng bnv bna bnr
```

11. Determinați toate submulțimile mulțimii  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}^*$ , cu proprietatea că suma elementelor unei submulțimi este  $s$ .

```

1  strs = input("Please insert the set: ").split(' ')
2  A = [int(num) for num in strs if num != ""]
3  s = int(input("Please insert s: "))
4
5  size = len(A)
6  x = [-1 for i in range(size+1)]
7  k = 0
8  empty = True
9  while k >= 0:
10     if x[k] < size-1:
11         x[k] += 1
12         sum = A[x[k]]
13
14     def valid():
15         global sum
16         for i in range(0, k):
17             if x[k] == x[i]:
18                 return False
19             sum += A[x[i]]
20         return True
21
22     if not valid() or sum > s: continue
23
24     if sum == s:
25         empty = False
26         print("{", end="")
27         for i in x[:k]: print(A[i], end=", ")
28         print(A[x[k]], end="}, ")
29
30     if k != size:
31         x[k+1] = x[k]-1
32         k += 1
33     else:
34         k -= 1
35
36 print("No subset can do that." if empty else "")

```

Please insert the set: 1 2 3 4 5  
Please insert s: 5  
{1, 4}, {2, 3}, {5},

Please insert the set: 0 1 2 3 4 5  
Please insert s: 5  
{0, 1, 4}, {0, 2, 3}, {0, 5}, {1, 4}, {2, 3}, {5},

Please insert the set: 1 2 3 4  
Please insert s: 44  
No subset can do that.

## Laborator 10-11

6. Se citește o secvență de  $n$  numere întregi. Afișați cea mai lungă subsecvență  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $m \leq n$ , care se poate construi din numerele citite, astfel încât  $x_1 \leq x_2 \geq x_3 \leq x_4 \geq \dots \leq x_{m-1} \geq x_m$ .

```
1 best = []
2 def find_seq(v, i, res= []):
3     global best
4     n = len(v)
5     if len(res) > len(best):
6         best = res
7     delta = len(best) - len(res)
8     for j in range(i+1, n):
9         if v[i] <= v[j]:
10             if n - j < delta+1: continue
11             for k in range(j+1, n):
12                 if v[j] >= v[k]:
13                     if n - k < delta+2: continue
14                     find_seq(v, k, res + [v[j], v[k]])
15
16
17 strs = input("Please insert the set: ").split(' ')
18 v = [int(str) for str in strs if str != ""]
19 for i in range(len(v)):
20     if len(v) - i <= len(best): continue
21     find_seq(v, i, [v[i]])
22
23 if len(best) >= 3: print("Result:", best)
24 else: print("No such sequence found")
```

```
$ python3 src.py
Please insert the set: 9 1 2 3 2 5 4 6 7 2
Result: [1, 2, 2, 5, 4, 6, 2]
```

```
$ python3 src.py
Please insert the set: 1 0 1 0 1 3 0 2 0 3 0 4 5
Result: [1, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0]
```

```
$ python3 src.py
Please insert the set: 0 0 0 0 0
Result: [0, 0, 0, 0, 0]
```

```
$ python3 src.py
Please insert the set: 1 2 3 4 5
No such sequence found
```

8. Se consideră  $n$  intervale  $[a_i, b_i]$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \overline{1, n}$

- Calculați suma lungimilor tuturor intervalelor (intervale care se suprapun se vor lua în considerare o singură dată).
- Determinați reuniunea acestora.
- Un interval poate fi eliminat dacă este inclus în alt interval din șir. Afișați numărul maxim de intervale care pot fi eliminate.
- Să se determine o mulțime  $X$  cu un număr minim de elemente așa încât pentru orice interval din șir să existe un element  $x \in X$  care să aparțină intervalului.

```
1 class Interval:
2     def __init__(self, a, b):
3         self.a = a
4         self.b = b
5     def intersection(A, B):#  $A \cap B$ 
6         # assume A is on the left
7         if A.a > B.b: return B.intersection(A)
8         if A.b < B.a: return None
9         return Interval(B.a, A.b)
10    def in_(A, B): #  $A \subseteq B$ 
11        return A.a >= B.a and A.b <= B.b
12    def __eq__(A, B): #  $A = B$ 
13        return A.a == B.a and A.b == B.b
14    def length(self): return self.b - self.a
15    def dup(self): return Interval(self.a, self.b)
16
17 class SuperInterval:
18     def __init__(self, interval):
19         self.intervals = [interval.dup()]
20
21     # returns True if it can be eliminated
22     def add_reunion(self, A):
23         # we could sort the intervals after b, but this is already
24         # a lot of code
25         for i in range(len(self.intervals)):
26             itv = self.intervals[i]
27             intr = A.intersection(itv)
28             if intr is None: continue
29             if A.in_(itv): return True
30             if itv.in_(A):
31                 itv.a = A.a
32                 itv.b = A.b
33                 return True
34             if A.a < itv.a: itv.a = A.a
35             if A.b > itv.b: itv.b = A.b
36             itv = self.intervals.pop(i)
37             return self.add_reunion(itv)
38         self.intervals.append(A.dup())
39         return False
```

```

40     # self ∩ A if not ∅, self ∪ A otherwise
41     def add_intersection(self, A):
42         for itv in self.intervals:
43             intr = A.intersection(itv)
44             if intr is None: continue
45             itv.a = intr.a
46             itv.b = intr.b
47             return
48         self.intervals.append(A.dup())
49     def length(self):
50         l = 0
51         for i in self.intervals: l += i.length()
52         return l
53     def __str__(self):
54         s = ""
55         for i in self.intervals: s += "[%d, %d] " % (i.a, i.b)
56         return s
57
58     strs = input("Please insert intervals (of format [a,b]): ").split(' ')
59     from parse import parse
60     intervals = []
61     for s in strs:
62         res = parse("[{},{})", s)
63         intervals.append(Interval(int(res[0]), int(res[1])))
64
65     si = SuperInterval(intervals[0])
66     si2 = SuperInterval(intervals[0])
67     count = 0
68     for i in intervals[1:]:
69         if si.add_reunion(i): count += 1
70         si2.add_intersection(i)
71     X = [i.a for i in si2.intervals]
72     print("a)", si.length())
73     print("b)", si)
74     print("c)", count)
75     print("d) X = {", ("%s" % X)[1:-1], "}")

```

\$ python3 intervals.py

Please insert intervals (of format [a,b]): [1,2] [1,3] [2,3] [4,5] [5,6] [3,4] [7,9]

a) 7

b) [1, 6] [7, 9]

c) 2

d) X = { 1, 4, 7 }

\$ python3 intervals.py

Please insert intervals (of format [a,b]): [1,3] [3,4] [4,6]

a) 5

b) [1, 6]

c) 0

d) X = { 1 }

## Laborator 12

6. Fiind date două șiruri de caractere  $s_1$  și  $s_2$ , determinați lungimea celui mai mic subșir al lui  $s_1$  care nu este subșir al lui  $s_2$  (de exemplu, dacă  $s_1 = \text{"abab"}$  și  $s_2 = \text{"babb"}$ , atunci subșirul "aa" de lungime 2 este în  $s_1$  și nu este în  $s_2$ ).

```
1 s1 = input("Please insert s1: ")
2 s2 = input("Please insert s2: ")
3 #a dictionary of type { subsequences : is_in_s2},
4 cache = {}
5
6 def contains_seq(seq):
7     def impl():
8         for i in range(len(s2) - len(seq)+1):
9             for j in range(len(seq)):
10                 if s2[i+j] != seq[j]: break
11                 else: # this gets called if the for didn't break
12                     return True
13     return False
14
15     if seq not in cache: cache[seq] = impl()
16     return cache[seq]
17
18 best_ss = None
19 def check_subsequences(str_, res="", i=0):
20     global best_ss
21     if i >= len(str_): return
22     check_subsequences(str_, res, i+1)
23
24     for j in range(i, len(str_)):
25         ss = res + str_[j]
26         if not contains_seq(ss):
27             if best_ss is None or len(ss) < len(best_ss):
28                 best_ss = ss
29         check_subsequences(str_, ss, j+1)
30
31 check_subsequences(s1)
32 if best_ss is not None:
33     print("Best sequence: '%s'" % best_ss)
34 else: print("No such sequence found")
```

```
$ python3 src.py
Please insert s1: abab
Please insert s2: babb
Best sequence: 'aa'
```

```
$ python3 src.py
Please insert s1: bab
Please insert s2: bbab
No such sequence found
```