

Teorema de structură a multilor deschise din \mathbb{R}

Orice mulțime deschisă se poate scrie ca o reuniune de sfere deschise cel mult numărabilă.

Demonstrație:

Fie $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $M \in \tau_o$.

Știm:

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ cu } x < y, \exists q \in \mathbb{Q} \text{ a.î. } x < q < y. \text{ (Densitatea lui } \mathbb{Q} \text{ în } \mathbb{R}) \quad (2)$$

Fie $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$,

$$\varphi(x, y) = q, \text{ unde } x < q < y \text{ (Exista din (2))} \quad (\text{Bine definit?})$$

Considerăm funcția $f : M \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definită astfel:

Fie $\forall x \in M$.

$$\left. \begin{array}{l} M \in \tau_o \\ x \in M \end{array} \right\} \implies \exists r \in (0, \infty) \text{ a.î. } S(x, r) \subseteq M.$$

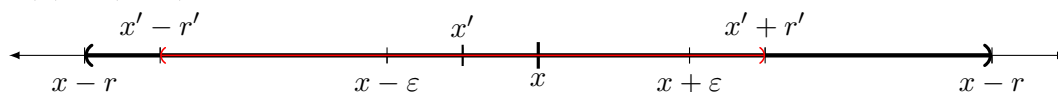
Fie

$$\varepsilon \in (0, \frac{r}{2});$$

$$x' = \varphi(x - \varepsilon, x + \varepsilon);$$

$$r' = \varphi(\varepsilon, r - \varepsilon).$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x', r').$$



Arătăm că $S(x', r') \subseteq S(x, r) \subseteq M$. (*)

Fie $y \in S(x', r') = (x' - r', x' + r')$.

Demonstrăm $y \in S(x, r)$.

$$\varepsilon < r' < r - \varepsilon < r \implies r' < r - \varepsilon \iff r' + \varepsilon < r \quad (3)$$

$$x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \quad (4)$$

$$y \in (x' - r', x' + r') \iff x' - r' < y < x' + r' \iff$$

$$\iff \begin{cases} y < x' + r' \stackrel{(4)}{\implies} y < x + \varepsilon + r' \implies y < x + (\varepsilon + r') \stackrel{(3)}{\implies} y < x + r & (5) \\ x' - r' < y \stackrel{(4)}{\implies} x - \varepsilon - r' < y \implies x - (\varepsilon + r') < y \stackrel{(3)}{\implies} x - r < y & (6) \end{cases}$$

Din (5) și (6) $\implies x - r < y < x + r \iff |y - x| < r \iff y \in S(x, r)$.

Deci $S(x', r') \subseteq S(x, r)$.

Arătăm că $x \in S(x', r')$. (**)

$$x' = \varphi(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \implies x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \iff$$

$$-\varepsilon < x' - x < \varepsilon \iff |x' - x| < \varepsilon \implies d(x', x) < \varepsilon \stackrel{(3)}{<} r' \implies x \in S(x', r')$$

Fie $F = \{f(x) \mid x \in M\}$.

Fie $N = \bigcup_{p \in F} S(p)$.

$$\left. \begin{array}{l} F \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \implies |F| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\aleph_0| \\ N = \bigcup_{p \in F} S(p) \end{array} \right\} \implies N \text{ este o reuniune cel mult numărabilă de sfere deschise.}$$

$$\text{Din (*) } S(f(x)) \subseteq M, \forall x \in M \implies N \subseteq M;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din (**) } x \in S(f(x)), \forall x \in M \implies \forall x \in M, x \in N \implies M \subseteq N. \end{array} \right\} \implies M = N.$$

În concluzie am scris M ca o reuniune cel mult numărabilă de sfere deschise.