Teorema de structură a multimilor deschise din $\mathbb{R}$

Orice mulțime deschisă se poate scrie ca o reuniune de sfere deschise cel mult numărabilă.

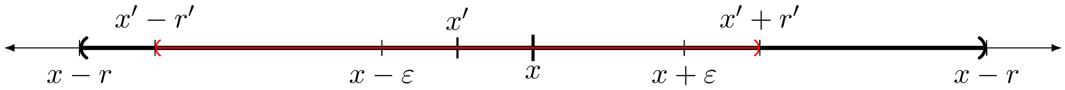
Demonstrație:

Fie $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $M \in \tau_o$.
Știm:
$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y, \exists\ q \in \mathbb{Q}$ a.î. $x < q < y$. (Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) $\quad (2)$

Fie $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$,
$\varphi(x, y) = q$, unde $x < q < y$ (Exista din (2))

Considerăm funcția $f : M \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definită astfel:
Fie $\forall x \in M$.
$$\left.\begin{matrix} M \in \tau_o \\ x \in M \end{matrix}\right\} \implies \exists r \in (0, \infty) \text{ a.î. } S(x, r) \subseteq M.$$

Fie
$\varepsilon \in \left(0, \frac{r}{2}\right)$;
$x' = \varphi\,(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;
$r' = \varphi\,(\varepsilon, r - \varepsilon)$.
$f(x) \overset{\text{def}}{=} (x', r')$.



Arătăm că $S(x', r') \subseteq S(x, r) \subseteq M$. $\quad$ (*)
Fie $y \in S(x', r') = (x' - r', x' + r')$.
Demonstrăm $y \in S(x, r)$.

$\varepsilon < r' < r - \varepsilon < r \implies r' < r - \varepsilon \iff r' + \varepsilon < r \quad (3)$
$x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \quad (4)$
$y \in (x' - r', x' + r') \iff x' - r' < y < x' + r' \iff$
$$\iff \begin{cases} y < x' + r' \overset{(4)}{\implies} y < x + \varepsilon + r' \implies y < x + (\varepsilon + r') \overset{(3)}{\implies} y < x + r & (5) \\ x' - r' < y \overset{(4)}{\implies} x - \varepsilon - r' < y \implies x - (\varepsilon + r') < y \overset{(3)}{\implies} x - r < y & (6) \end{cases}$$
Din (5) și (6) $\implies x - r < y < x + r \iff |y - x| < r \iff y \in S(x, r)$.
Deci $S(x', r') \subseteq S(x, r)$.

Arătăm că $x \in S(x', r')$. $\quad$ (**)
$x' = \varphi\,(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \implies x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \quad \iff$
$-\varepsilon < x' - x < \varepsilon \iff |x' - x| < \varepsilon \implies d(x', x) < \varepsilon \overset{(3)}{<} r' \implies x \in S(x', r')$

Fie $F = \{f(x) \mid x \in M\}$.
Fie $N = \bigcup\limits_{p \in F} S(p)$.

$$\left.\begin{matrix} \text{F} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \implies |F| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0 \\ \text{N} = \bigcup\limits_{p \in F} S(p) \end{matrix}\right\} \Rightarrow N \text{ este o reuniune cel mult numărabilă de sfere deschise.}$$
$$\left.\begin{matrix} \text{Din (*) } S(f(x)) \subseteq M,\ \forall x \in M \implies N \subseteq M; \\ \text{Din (**) } x \in S(f(x)),\ \forall x \in M \implies \forall x \in M,\ x \in N \implies M \subseteq N. \end{matrix}\right\} \implies M = N.$$
În concluzie am scris M ca o reuniune cel mult numărabilă de sfere deschise.