Teorema de structură a multimilor deschise din $\mathbb{R}$

Orice mulțime deschisă se poate scrie ca o reuniune de sfere deschise cel mult numărabilă.

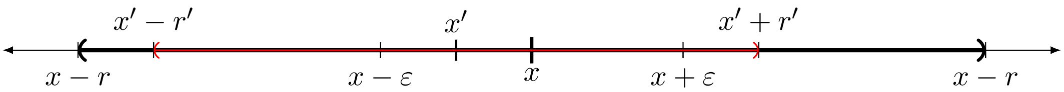
Demonstrație:

Fie $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $M \in \tau_o$.
Știm:
$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y, \exists\, q \in \mathbb{Q}$ a.î. $x < q < y$. (Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) $\quad (2)$

Fie $F = \{(x', r') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \exists r \in (0, \infty),\ x \in \mathbb{R}$ a.î. $S(x', r') \subseteq S(x, r) \subseteq M\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Fie $N = \bigcup\limits_{p \in F} S(p)$.

Arătăm că $N \subseteq M$ (*):
Fie $(x', r') \in F$.
$(x', r') \in F \implies \exists r \in (0, \infty),\ x \in \mathbb{R}$ a.î. $S(x', r') \subseteq S(x, r) \subseteq M \implies S(x', r') \subseteq M$.
Cum $N = \bigcup\limits_{p \in F} S(p) \implies N \subseteq M$.

Arătăm că $M \subseteq N$ (**).
Presupunem prin reducere la absurd că $\exists x \in M$ a.î. $x \notin N \iff \forall (x', r') \in F,\ x \notin S(x', r')$.
$$\left.\begin{array}{l} M \in \tau_o \\ x \in M \end{array}\right\} \implies \exists r \in (0, \infty) \text{ a.î. } S(x, r) \subseteq M.$$
Fie:
$\varepsilon \in \left(0,\ \frac{r}{2}\right)$;
$x' \in \mathbb{Q}$ a.î. $x - \varepsilon \leq x' \leq x + \varepsilon$ (există din (2));
$r' \in \mathbb{Q}$ a.î. $\varepsilon \leq r' \leq r - \varepsilon$.



Arătăm că $S(x', r') \subseteq N$ sau, echivalent, $S(x', r') \subseteq S(x, r)$.
Fie $y \in S(x', r') = (x' - r', x' + r')$.
Demonstrăm că $y \in S(x, r)$.

$\varepsilon < r' < r - \varepsilon < r \implies r' < r - \varepsilon \iff r' + \varepsilon < r \quad (3)$
$x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \quad (4)$
$y \in (x' - r', x' + r') \iff x' - r' < y < x' + r' \iff$
$$\iff \begin{cases} y < x' + r' \overset{(4)}{\implies} y < x + \varepsilon + r' \implies y < x + (\varepsilon + r') \overset{(3)}{\implies} y < x + r \quad (5) \\ x' - r' < y \overset{(4)}{\implies} x - \varepsilon - r' < y \implies x - (\varepsilon + r') < y \overset{(3)}{\implies} x - r < y \quad (6) \end{cases}$$
Din (5) și (6) $\implies x - r < y < x + r \iff |y - x| < r \iff y \in S(x, r) \iff S(x', r') \subseteq S(x, r)$.
Deci $S(x', r') \subseteq N$.

Arătăm că $x \in S(x', r')$.

$x - \varepsilon < x' < x + \varepsilon \iff -\varepsilon < x' - x < \varepsilon \iff |x' - x| < \varepsilon \implies d(x', x) < \varepsilon \overset{(3)}{<} r' \implies x \in S(x', r')$
Dar $S(x', r') \subseteq N$, deci $x \in N$. Contradicție.
Deci presupunerea făcută este falsă, adică $\forall x \in M,\ \exists (x', r') \in F$ a.î. $x \in S(x', r') \iff$
$\iff x \in N \iff M \subseteq N$.
Din (*) și (**) $\implies N = M$

$$\left.\begin{array}{l} \text{F} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \implies |F| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0 \\ \text{N} = \bigcup\limits_{(x,r) \in F} S(x, r) \end{array}\right\} \Rightarrow N \text{ este o reuniune cel mult numărabilă de sfere deschise.}$$
În concluzie am scris M ca o reuniune cel mult numărabilă de sfere deschise.