Green-thing

$$a_n u^n(x) + \ldots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = f(x)$$

Găsim sol ec omogene (Neculasenpai style, doar ca acolo notam cu λ, nu r):
radacinile polinomului caracteristic:

$$a_n r^n + \ldots + a_1 + r a_1 + a_0 = 0$$

daca avem radacinile r_i cu multiplicitatile $m_i, \quad i = \overline{1,k}$.
sol omogena este combinație de:

$$e^{r_1}, xe^{r_1}, \ldots, x^{m_1-1}e^{r_1}, \ldots, e^{r_k}, xe^{r_k}, \ldots, x^{m_k-1}e^{r_k},$$

pe care le notăm cu f_i
adică

$$S_{\text{omogena}} = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)$$

(keine panik, de obicei sunt 2 solutii)
găsim o soluție E la problema:

$$\begin{cases} a_n E^{(n)}(x) + \ldots + a_1 E'(x) + a_0 u(x) = 0 \\ E(0) = E'(0) = \ldots = E^{(n-2)} = 0 \\ E^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

adică, găsim niște coeficienții α_i de mai sus
avem soluția particulară:

$$S_{\text{part}}(x) = \int_0^x E(x-y) f(y) dy = \int_0^l E(x-y)\chi_{[0,x)}(y) f(y) dx$$

deci u este de forma:

$$u(x) = S_{\text{omogena}}(x) + S_{\text{part}}(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) + \int_0^l E(x-y)\chi_{[0,x)}(y) f(y) dx$$

inlocuind conditiile la limită (de genul $u(0) = 0, u'(0) = 0$) obținem ceva de forma: (daca ai ceva cu x în fată, il bagi sub integrală; poate sa dea si 0)

$$\alpha_i = \int_0^l h_i(x,y) f(x) dy$$

deci obținem:

$$u(x) = \sum_i \int_0^l h_i(x,y) f(x) dy f_i(x) + \int_0^l E(x-y)\chi_{[0,x)}(y) f(y) dx$$

sau

$$u(x) = \int_0^l \left(\sum_i h_i(x,y) f_i(x) + E(x-y)\chi_{[0,x)}(y) \right) f(x) dy$$

tada: funcția Green:

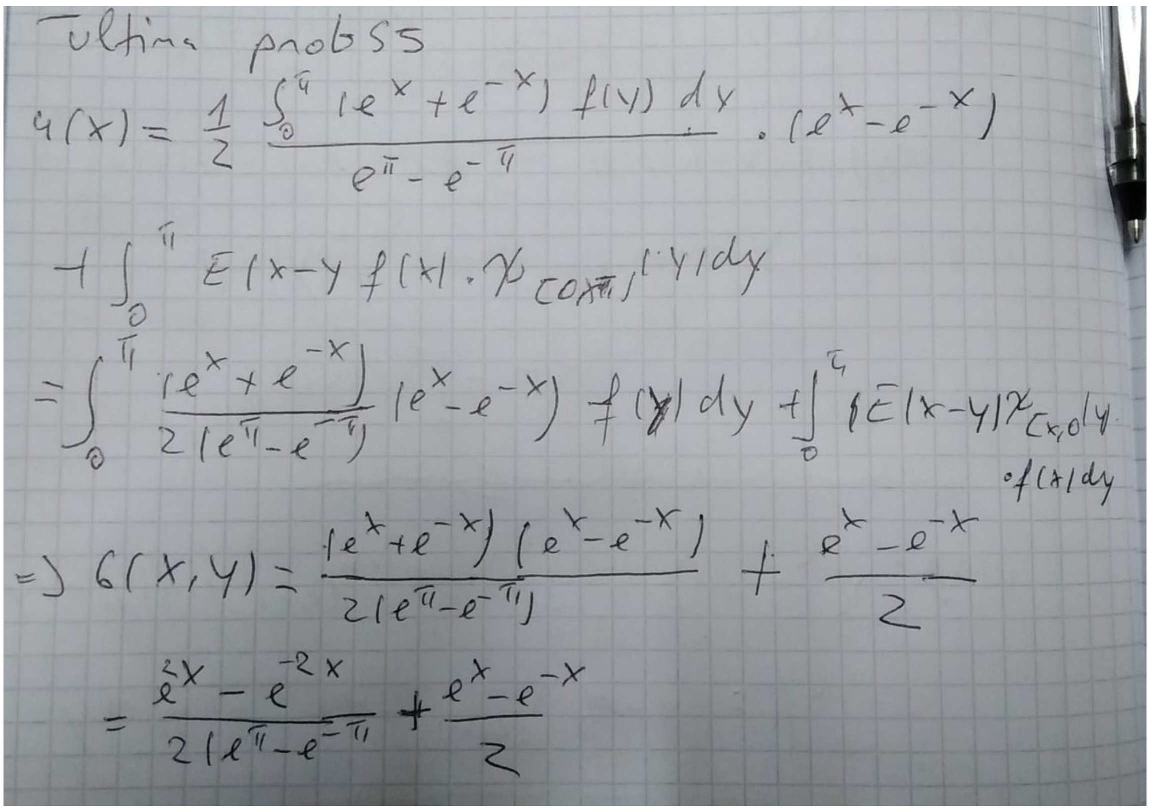
$$u(x) = \sum_i h_i(x,y) f_i(x) + E(x-y)\chi_{[0,x)}(y)$$

Exemplu:

continuarea ultimului exercitiu din S5 de pe dropboxul profului:

`https://www.dropbox.com/sh/tz4zxccsne2kbqv/AABsjAfwNwldtgIX2pepQ2j0a?dl=0&preview=EDP_533_S5.pdf`

(btw, profulul a scris gresit la penultima pagina: a inlocuit $E(x-y)$ cu $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ in loc de $\dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$, dar calculele nu se schimbă)



Ultima prob S5

$$u(x) = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\pi (e^x + e^{-x}) f(y)\, dy}{e^\pi - e^{-\pi}} \cdot (e^x - e^{-x})$$

$$+ \int_0^\pi E(x-y\, f(x) \cdot \chi_{[0,\pi)}(y)\, dy$$

$$= \int_0^\pi \frac{(e^x + e^{-x})}{2(e^\pi - e^{-\pi})} (e^x - e^{-x})\, f(y)\, dy + \int_0^\pi E(x-y)\chi_{[x,0]}(y) \cdot f(x)\, dy$$

$$\Rightarrow G(x,y) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2(e^\pi - e^{-\pi})} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2(e^\pi - e^{-\pi})} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Chestie folositoare:

cand aplici conditiile la limita, ai nevoie de formula:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x,y)\, dy\right) = f\big(x,x\big) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\, dy$$

care e obtinuta din formula Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt\right) = f\big(x, b(x)\big) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f\big(x, a(x)\big) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt$$