usefull

- ineg cauchy-bunyakovski-schwarz
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$
- Weierstraß:
continua pe compact $\implies$ marginită și-și atinge marginile
- crit sylvester:
  - daca minorii principali sunt pozitivi at mat e pozitiv semidefinita
  - daca minorii principali sunt $-, +, -, \cdots$ at mat e negativ semidefinita
- fcț coercivă - "grows rapidly" - $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$
  - $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq -xy$
  - see this `https://math.stackexchange.com/questions/1426897/`

fct distanta:

- def $d(A, x) = \inf\limits_{a \in A} \|a - x\|$
- $d(A, x) \iff x \in \overline{A}$
- $d_A(x) = d(A, x)$ lipschitz
- daca A închisă $\exists\ a_x$
- daca A închisă și convexa $\implies$ a_x unic și caracterizat de $\langle x - a_x, u - a_x\rangle \leq 0, \quad \forall u \in A$

multimi convexe

- def: $\forall x, y \in C, [x, y] \subseteq C$
- usually
$$\text{conv}A = \left\{ \sum_{i=1}^{?} \alpha_i x_i \middle| \sum \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, x_i \in A \right\}$$
- Carathéodory:
$$\mathbb{R}^p \supseteq \text{conv}A = \left\{ \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i \middle| \sum \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, x_i \in A \right\}$$
- Hermite-Hadamard - dacă f convex:
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

fct convexe

- def convexitate: f convexă pe $D \iff$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \forall x, y \in D,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

- ineg Jensen - good stuff

$$f\left(\sum \alpha_i x_i\right) \leq \sum \alpha_i f(x_i),\ \sum \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, x_i \in A$$

- ineg pantelor - pg15

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

- strict convexa $\iff$ f' strict crescatoare $\iff$ $f'' > 0 \iff$ def cu $\neq$
- pt mai multe variabile e:

$$\nabla^2 f(x)(y,y) > 0, \quad \forall x \in D, y \in \mathbb{R}^p$$

conuri pg 24

- def: $\forall k \in K, \lambda \geq 0, \quad \lambda k \in K$
- con convex: $C + C = C$
- înfăsurătoarea conică: con $A = [0,\infty)A \coloneqq \{\alpha a \mid \alpha > 0, a \in A\}$
- polara $S^- = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x\rangle \leq 0, \forall x \in S\}$
- con inchis și convex $\implies C = (C^-)^-$

vector tangent la o mulțime

- def: $u \in \mathbb{R}^p$ tg la M în $\bar{x} \in \text{cl } M \iff \exists (t_n) \xrightarrow{>0} 0$, și $u_n \to u$ aî $\forall n$

$$\bar{x} + t_n u_n \in M$$

- conul tangent (închis): $T_M(\bar{x})$
- conul normal: $N_M(\bar{x}) := (T_M(\bar{x}))^-$

lema Farkas - pg 28

- avem $n \in \mathbb{N}$ fixat
- fie $(\varphi_i)_i \subset L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ și $\varphi \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ at:

$$\Big([\varphi_i(x) \leq 0] \implies \varphi(x) = 0\Big) \iff \exists (\alpha_i) \geq 0 \text{ aî } \varphi = \sum_i \alpha_i \varphi_i$$

- corolar: fie $(a_i)_i \subset \mathbb{R}^p$ și $a \in \mathbb{R}^p$ at:

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R}^p : [\langle a_i, x\rangle \leq 0] \implies \langle a, x\rangle = 0\Big) \iff \exists (\alpha_i) \geq 0 \text{ aî } a = \sum_i \alpha_i a_i$$

acutual minimization problems:

- Weierstraß - pg 38: continua pe compact $\implies$ pb minimizarii si a maximizarii au sol globale
- Condiția necesara de ordinul I: $\bar{x}$ sol locala și f diferentiabilă at $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0\forall,\ u \in T_M(\bar{x})$
- Condiția necesara de ordinul II (D deschisă):
  $\bar{x}$ min local și f diferentiabilă at $\nabla f(\bar{x})) = 0$ și $\nabla^2 f(\bar{x}))$ pozitiv semidefinită
- pt fct convexe min local $\iff$ min global $\iff$ pct critic ($\nabla f(\bar{x})) = 0$)

Karush-Kuhn-Tucker

- pct fezabile:
$$M := \{x \in U \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$$
- indici restrictii active:
$$A(\bar{x}) = \{i \in 1..n \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$$
- other stuff:
$$G(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i \in A(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) \mid \lambda_i \geq 0, \mu_j \in \mathbb{R} \right\} = D(\bar{x})^-$$
$$D(\bar{x}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; \begin{array}{l} \nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0, \forall i \in A(\bar{x}) \\ \nabla h_j(\bar{x})(u) = 0, \forall j \in 1..m \end{array} \right\}$$

  - thing: $T_M(\bar{x}) \subseteq D(\bar{x})$
- lagrangianul:
$$L(x, (\lambda, \mu)) := f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x)$$

  $\bar{x}$ sol problemei $\implies \exists \lambda_i \geq 0, \mu$ aî $\nabla_x L(\bar{x}, (\lambda, \mu)) = 0$ și $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$

mafs:

pct min/max global/local

1. cautam pct stationare $\nabla f = 0$
2. calculam $\nabla^2 f$ în pct stationare
3. daca nu mer'e verificăm semnul lui $f(x,y) - f(x_A, y_A)$ și gasim niște șiruri > 0 și < 0

min/max cu restricții

1. existenta solutiilor: $M = \{x \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$
   - dacă M compact (închisă, mărginită) $\xRightarrow{\text{Weierstraß}} \exists$ sol
   - dacă M nemărginită, ne gândim dacă f coercivă $\left(\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty \right)$
     f coercivă $\implies \exists$ sol

2. verificare cond de calificare pt pct fezabil $\bar{x}$:
   Guignard: $T_M(\bar{x})^- = D(\bar{x})^-$
   $\Uparrow$
   cvasiregularitate: $T_M(\bar{x}) = D(\bar{x})$
   $\Uparrow$
   liniară independență: mulțimea $\{\nabla g_i(\bar{x}) \mid i \in A(\bar{x})\} \cup \{\nabla h_j(\bar{x}) \mid j \in i..m\}$ l.i.
   $\Uparrow$
   Mangasarian-Fromovitz: $\{\nabla h_j(\bar{x}) \mid j \in i..m\}$ l.i. și $\exists u \in \mathbb{R}^p$ aî
   $$\nabla h_j(\bar{x})(u) > 0 \text{ și } \nabla g_i(\bar{x})(u) < 0, \quad \forall i \in A(\bar{x})$$
   g_i, h_j afine - конец

   Slater: h afină, f, g_i convexe și $\exists u \in \mathbb{R}^p$ aî
   $$h(u) = 0 \text{ și } g_i(u) < 0, \quad \forall i \in 1..n$$
3. conditii K-K-T:
   rezolvam sistemul:
   $$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(x) = 0, \\ h(u) = 0, \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad \forall i \in 1..n, \\ \lambda_i \geq 0. \end{cases}$$

algoritmi

- f contracție $\iff |f'(x)| < \lambda, \quad \lambda \in (0,1) \iff \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \lambda \in (0,1)$
- f contracție $\implies f$ cont
- approximari cu th Banach:
  - $|x_n - \bar{x}| \leq |x_1 - x_0| \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}$
  - $|x_n - \bar{x}| \leq |x_n - x_{n-1}| \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$
  - $|x_n - x_{n+1}| \leq \lambda^n |x_1 - x_0|$
- iter picard: $x_{n+1} = f(x_n)$
- Banach: contractie are pct fix unic care-i lim $\forall$ iteratii Picard
- banach convergent - pg 34

viteza convergenta:

- ordinul de convergență: q cel mai mare pt care
  $$\lim_{k \to \infty} \frac{\|x_{n+1} - \bar{x}\|}{\|x_n - \bar{x}\|^q} < \infty$$
- $q = 1$ - conv liniara
- $q = 2$ - conv patratica

met newton

- mer'e daca $f \in C^2$ și toate iteratiile au $f'(x_k) \neq 0$
- iteratie newton:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
- converge la zerourile fct
- to solve linear equation we apply that to $\nabla L(x, (\lambda, \mu))$