F.A.Q. ecuații diferențiale

Erată: la ecuații cu variabilă separabilă, asta-i formula:

$$x' = f(t)g(x), \quad \text{devine: } \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\,dt$$

Ce înseamnă indefinit diferențiabilă?

R: Diferențiabilă de oricâte ori.

In exercițiul dat avem soluția (gasiți și pe Wolfram Alpha):

$$x(t) = e^{3t-t^3}, t \in \mathbb{R}$$

Care e chiar de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$ (deci și indefinit diferențiabilă).

Iar $x^{(n)}(t) = P(t)e^{3t-t^3}$, unde $P(t)$ este un polinom de grad 2^n (gradul nu contează).

Deci

$$\lim_{t\to\infty} x^{(n)}(t) = \lim_{t\to\infty} P(t)e^{3t-t^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{P(t)}{e^{t^3-3t}} = 0 \quad \text{(exponențiala crește mai repede decât polinomiala).}$$

Cum rezolvam mai exact Ecuații cu diferențiala exactă?

$$g(t,x)dt + h(t,x)dx = 0$$

Etapa 1 Verificăm dacă

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)$$

Etapa 2 Căutăm o funcție care să satisfacă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = g(t,x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = h(t,x) \end{cases}$$

Integrăm prima ecuație:

$$F(x,t) = \int g(t,x)\,dt$$

Obținem:

$$F(x,t) = E(t,x) + c(x), \quad \text{unde E(t, x) este o expresie}$$

Etapa 3 Derivăm în raport cu x și „potrivim c-ul să ne dea cum trebuie”.

$$E'(t,x) + c'(x) = h(t,x).$$

Exemplu concret Seminarul 6, pagina 2.