0. Interpolació

» Polinomi interpolador de **Lagrange**

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i\, l_i \quad \text{amb} \quad l_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{m} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Error

$$f(x) - p_m(x) \leq \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_m)$$

» Polinomi interpolador d'**Hermite**

$$p_{2m+1}(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i(1 - 2\, l_i'(x_i)(x - x_i))\, l_i^2(x) + \sum_{i=0}^{m} f_i'(x - x_i)\, l_i^2(x)$$

Error

$$f(x) - p_{2m+1}(x) \leq \frac{f^{(2m+2)}(\xi(x))}{(2m+2)!}(x - x_0)^2\ldots(x - x_m)^2$$

1. **Integració** numèrica

1.1. Fórmules de **Newton-Cotes**

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \boldsymbol{NC_m(f, [a, b])} = \boxed{h \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, f(x_i)}$$

$$\text{amb} \quad h = \frac{b-a}{m}\,, \quad x_i = a + h\, i\,, \quad \alpha_i = \int_0^m \prod_{k=0,\, k\neq i}^{m} \frac{\frac{x-a}{h} - k}{i - k}$$

Error

$$E_m(f, [a, b]) \leq \boxed{K_m \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}\, h^{p+2}}$$

- $\begin{cases} p = m & \text{si } m \text{ senar} \\ p = m+1 & \text{si } m \text{ parell} \end{cases}$
- K_m constant (calcular $E_m(x^{p+1})$ on $f^{(p+1)}(\xi)$ és constant)

Trapezis	Simpson
$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$	$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$
$E \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in[a,b]} \mid f''(x) \mid$	$E \leq \frac{(b-a)^5}{90} \max_{x\in[a,b]} \mid f^{(4)}(x) \mid$

1.2. Fórmules de Newton-Cotes **compostes**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boldsymbol{\mathrm{Compo}_m(f, [a,b])} = \boxed{\sum_{i=0}^{I-1} NC_m(f, [x_i, x_{i+1}])}$$

$$\text{amb} \quad x_i = a + \frac{b-a}{I} i \quad \text{equiespaiats}$$

Error

$$\boldsymbol{EC_m(f, [a,b])} \leq \boxed{\frac{K_m}{(p+1)!} \frac{b-a}{m} f^{(p+1)}(\xi_i)}$$

- $\xi \in (a,b)$
- K_m constant (calcular $E_m(x^{p+1})$ on $f^{(p+1)}(\xi)$ és constant)

Trapezis composta	Simpson composta
$\frac{h}{2}(f(a)+2(f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))+f(b))$	$\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i-1})+2\sum_{j=2}^{n-2} f(x_{2j})+f(b)\right)$
$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} \mid f''(x) \mid$	$E \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \mid f^{(4)}(x) \mid$

1.2.1. Càlcul **automàtic** de l'error

$$\boldsymbol{Q_n} = \mathrm{Compo}_m(f, [a,b], 2^n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} NC_m(f, [x_i, x_{i+1}])$$

$$\text{amb} \quad x_i = a + \frac{b-a}{2^n} i$$

- $Q_n \to I(f)$ quan $n \to \infty$

Error

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_{n+1} \approx \boxed{\frac{Q_{n+1}-Q_n}{2^{p+1}-1}}$$

- $p = \begin{cases} m & \text{si } m \text{ és senar} \\ m+1 & \text{si } m \text{ és parell} \end{cases}$

Q_n per Trapezis

$$Q_{n+1} = \boldsymbol{F(a,b,n,Q_n)} = \boxed{\frac{Q_n}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{2^n-1} f(\overline{x}_i)}$$

$$\text{amb} \quad Q_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \quad \text{i} \quad \begin{cases} x_i = a + \dfrac{b-a}{2^n}\, i \\ \overline{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2} \end{cases}$$

1.3. Integració Gaussiana

$$\int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{m} W_k\, f(x_k)$$

$$\text{amb} \quad W_k = \frac{A_{m+1}}{A_m} \frac{\langle \psi_m, \psi_m \rangle}{\psi'_{m+1}(x_k)\, \psi_m(x_k)}$$

- x_k zeros simples de ψ_{m+1}
- A_m coeficient de grau màxim de $\psi_m(x)$

Error

$$|E_m| \le \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \frac{1}{A_{m+1}^2} \int_a^b \psi_{m+1}^2(x)\,\omega(x)\,dx$$

Nota

Calcular $\dfrac{1}{A_{m+1}^2} \displaystyle\int_a^b \psi_{m+1}^2(x)\,\omega(x)\,dx$ fent $f(x) = x^{2m+2}$, tal que $\dfrac{f^{(2m+1)}(\xi)}{(2m+1)!} = 1$.

	Gauss-Legendre	Gauss-Txebyshew
Interval	$[-1,1]$	$[-1,1]$
$w(x)$	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Punts x_k	zeros simples de $\psi_{m+1}(x)$ (polinomis de Legendre)	$\cos\left(\dfrac{\pi(1+2k)}{2m+2}\right)$
Pesos W_k	$\dfrac{2}{(1-x_k^2)\,\psi'_{m+1}(x_k)^2}$	$\dfrac{\pi}{m+1}$
Error	$\dfrac{2^{2m+3}((m+1)!)^4}{(2m+3)((2m+2)!)^3}\,f^{(2m+2)}(\xi)$	$\dfrac{\pi}{2^{2m+1}\,(2m+2)!}\,f^{(2m+2)}(\xi)$

1.4. Integrals singulars

Discontinuïtat de salt

> f amb una discontinuïtat de salt $c \in (a,b)$

Treballar els dos intervals $[a,c]$ i $[c,b]$ per separat:

$$I_1 = \int_a^c f(x)\,dx\,, \quad I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

Discontinuïtat asimptòtica en un extrem

> f de la forma $\dfrac{\phi(x)}{(x-a)^\mu}$, amb $\mu \in [0,1)$ i $\phi(x) \in C^1$

Separar la integral:

$$\int_a^b \frac{\phi(x)}{(x-a)^\mu}\,dx = \int_a^b \frac{\phi(x)-\phi(a)}{(x-a)^\mu}\,dx + \int_a^b \frac{\phi(a)}{(x-a)^\mu}\,dx$$

- Primera integral exacta
- Segona integral contínua:

$$\frac{\phi(x)-\phi(a)}{(x-a)^\mu} = \phi'(\xi(x))(x-a)^{1-\mu}$$

Interval no acotat

> $$\int_a^\infty f(x)\,dx \neq \infty\,.$$

1. Donat un error δ, trobar $c > a$ tal que $\displaystyle\int_c^\infty f(x)\,dx < \frac{\delta}{2}$.
2. Calcular numèricament $I = \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ amb un error menor a $\delta/2$.

---

2. Mètodes de **Monte Carlo**

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,dx \approx (b-a)\,\mathbb{E}(g(X))}\ \text{amb } X \sim U(a,b)$$

- **Error** $\sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ per n prou gran

IC per μ amb confiança $1-\alpha$

> $z(\alpha) > 0$ tal que $P(-z(\alpha) < Z < z(\alpha)) = 1-\alpha$

$$\boxed{\mu \in \left(\widehat{\mu}_n \pm \frac{\widehat{\sigma}_n\, z(\alpha)}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\text{amb} \quad \widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\,, \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_n)^2$$

2.1. Mostreig d'**importància**

Reducció de la variància $\implies$ Reducció de l'error

Mètode

> X amb densitat nominal f_X

1. Trobar $\tilde{X}$ amb densitat d'importància $f_{\tilde{X}}$
2. Prendre $\tilde{Y} = \dfrac{g(\tilde{X})\,f_X(\tilde{X})}{f_{\tilde{X}}(\tilde{X})} \implies \mathbb{E}(\tilde{Y}) = \mathbb{E}(X),\ \mathbb{V}(\tilde{Y}) \leq \mathbb{V}(X)$

2.2. **Generació** de V.A.s

Volem generar realitzacions de X.

Mètode de la inversa (coneixem F_X)

1. Inversa generalitzada: $F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq u\}$
2. $X \sim F_X^{-1}(U)$ amb $U \sim \text{Unif}(0, 1)$.

Mètode d'acceptació rebuig (no coneixem F_X)

> Y amb $f_X \leq m\, f_Y$ per un $m > 0$

1. Generem realització x de Y
2. Generem realització u de $U \sim \text{Unif}(0, 1)$
3. $u < \dfrac{f_X(x)}{m\, f_Y(x)} \implies$ acceptem x com a realització de X

---

3. Mètodes numèrics per EDOs

3.1. Convergència

- Esquema convergeix a la solució del PVI si per tot x_f del domini d'y:

$$\lim_{n \to 0} Y_n(h_n) = y(x_f) \quad \text{amb} \quad h_n = \frac{x_f - x_0}{n}$$

- Error de truncament local $\tau(h, x) = \dfrac{y(x+h) - y(x) - h\, \phi(x, y(x), h; f)}{h}$
- Esquema d'ordre de consistència p amb p natural més gran tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau(h, x)}{h^p} < \infty$$

3.2. Esquemes monopàs

$$\boxed{Y_{i+1} = Y_i + h\, \phi(x_i, Y_i, h; f)}$$

Euler explícit	$\begin{cases} Y_{n+1} &= Y_n + h\,f(Y_n, t_n) \\ Y_0 &= t_0 \end{cases}$
Taylor d'ordre 2	$\begin{cases} Y_{n+1} &= Y_n + h\,f(Y_n, t_n) + \frac{h^2}{2}(\partial_1 f(Y_n, t_n)\,f(Y_n, t_n) + \partial_2 f(Y_n, t_n)) \\ Y_0 &= t_0 \end{cases}$
Runge-Kutta 2	$\begin{cases} Y_{n+1} &= Y_n + \frac{h}{2}(f(Y_n, t_n) + f(Y_n + hf(Y_n, t_n), t_{n+1})) \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}$

3.3. Esquemes **multipàs**

Adams $\begin{cases} Y_{n+1} &= Y_n + \dfrac{3f(Y_n, t_n) - f(Y_{n-1}, t_{n-1})}{2}h \\ Y_0 &= t_0 \end{cases}$ (calcular Y_1 fent servir mètode d'un pas)

3.4. Esquemes **implícits**

$$\boxed{Y_{i+1} = Y_i + h\,\phi(x_i, Y_i, Y_{i+1}, h; f)}$$

- **Euler implícit** $\begin{cases} Y_{n+1} &= Y_n + hf(Y_{n+1}, t_{n+1}) \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}$

Pas a implícit

$$\boxed{Y_{i+1} = Y_i + h\,\overline{\phi}(x_i, Y_i, Y_i + h\,K(Y_i, x_i), h; f)}$$

- $K(Y_i, x_i)$ solució de $K(Y_i, x_i) = \overline{\phi}(x_i, Y_i, Y_i + h\,K(Y_i, x_i), h; f)$

3.5. **Runge-Kutta**

$$Y_{i+1} = Y_i + h\,\phi(x_i, Y_i, h; f) \quad \text{amb} \begin{cases} \phi(x_i, Y_i, h; f) = \displaystyle\sum_{r=1}^{m} c_r K_r(x_i, Y_i, h; f) \\ K_r = f\left(Y_i + h\displaystyle\sum_{s=1}^{m} b_{r,s}\,K_s, x_i + ha_r\right) \end{cases}$$

- Paràmetres $c_r, a_r, b_{r,s}$ per $r, s \in \{1, \dots, m\}$ seleccionats tal que l'esquema sigui d'ordre més gran possible
- **Runge-Kutta de 4 etapes:**

$$Y_{i+1} = Y_i + \tfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad \text{amb} \begin{cases} K_1 = f(Y_i, x_i) \\ K_2 = f\left(Y_i + \dfrac{h}{2}K_1, x_i + \dfrac{h}{2}\right) \\ K_3 = f\left(Y_i + \dfrac{h}{2}K_2, x_i + \dfrac{h}{2}\right) \\ K_4 = f(Y_i + hK_3, x_i + h) \end{cases}$$

Calcular K_r

- Si $b_{r,s} = 0$ per tot $s \geq r$:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(Y_i, x_i + ha_1) \\ K_2 &= f(Y_i + h\, b_{2,1}\, K_1, x_i + ha_2) \\ &\vdots \\ K_m &= f(Y_i + h(b_{m,1}\, K_1 + h\, b_{m,2}\, K_2 + \cdots + b_{m,m-1} K_{m-1}), x_i + ha_m) \end{aligned}$$

- Si no, sistema d'equacions

Ordre màxim p donat m

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$>= 10$
p	1	2	3	4	4	5	6	6	7	$\leq m - 2$

---

4. Apèndix

Teorema del **valor mitjà** per integrals

> $\omega : [a, b] \to [0, \infty)$ funció integrable no negativa

Per tot $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tenim

$$\int_a^b f(x)\, \omega(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b \omega(x)\, dx$$

per algun $\xi \in (a, b)$.

Identitats **trigonomètriques**

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$

» **Desenvolupament de Taylor**

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2}\,y''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\,y^{(n)}(x) + O(h^{n+1})$$

4.1. Polinomis **ortogonals**

Polinomis ortogonals

Polinomis $\psi_i(x)$ i $\psi_j(x)$ ortogonals sobre $[a,b]$ i per $w(x) : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ si

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_a^b \psi_i(x)\,\psi_j(x)\,w(x)\,dx \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Recurrència

$$\psi_{k+1} = \boxed{\frac{A_{k+1}}{A_k}\left((x-\alpha_k)\,\psi_k(x) - \alpha_{k-1}\,\psi_{k-1}(x)\right)}$$

- $\alpha_k = \dfrac{\langle \psi_k, x\,\psi_k \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle}\,, \quad \alpha_{k-1} = \dfrac{\langle \psi_k, x\,\psi_{k-1} \rangle}{\langle \psi_{k-1}, \psi_{k-1} \rangle}$
- $\psi_0 = A_0\,, \quad \psi_1 = A_1\left(x - \dfrac{\langle \psi_0, x\,\psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}\right)$

» **Polinomis de Legendre**

- $[a,b] = [-1,1]$
- $w(x) = 1$
- $\psi_k(1) = 1 \quad \forall k \geq 0$

Recurrència

$$\psi_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}\,x\,\psi_k(x) - \frac{k}{k+1}\,\psi_{k-1}(x)$$

- $\psi_0(x) = 1\,, \quad \psi_1(x) = x$

» **Polinomis de Txebyshew**

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$$

- $[a, b] = [-1, 1]$
- $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Recurrència

$$T_{k+1}(x) = 2x\, T_k(x) - T_{k-1}$$

- $T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x$