Seeds - Random effect logistic regression

BRUNO LOPES Matheus, MOURDI Elias, SELAMNIA Najib, TRIOMPHE Amaury, YOUSFI Rim

15/04/2024

Lien vers notre Github : `https://github.com/azer1230/-BAYES-Projet-1`

Données étudiées

Le contexte de notre projet est l'étude de la germination de graines respectant certaines propriétés. Dans notre exemple, $N = 21$ plaques sont disposées pour accueillir deux types de graines issues de deux types de racines. Les tableaux ci-dessous recensent les résultat pour ces quatre types de population. $\forall i \in \{1, ..., 21\}, r_i$ correspond au nombre de graines germées et n_i correspond au nombre total de graines sur la $i-$ème plaque. Le rapport entre ces deux grandeurs est donc la proportion de graines ayant germé sur la dite plaque.

Bean			**Cucumber**		
r	**n**	**r/n**	**r**	**n**	**r/n**
10	39	0.26	5	6	0.83
23	62	0.37	53	74	0.72
23	81	0.28	55	72	0.76
26	51	0.51	32	51	0.63
17	39	0.44	46	79	0.58
			10	13	0.77

Table 1: Données récupérées pour la graine seed O. aegyptiaco 75

Bean			**Cucumber**		
r	**n**	**r/n**	**r**	**n**	**r/n**
8	16	0.5	3	12	0.25
10	30	0.33	22	41	0.54
8	28	0.29	15	30	0.5
23	45	0.51	32	51	0.63
0	4	0	3	7	0.43

Table 2: Données récupérées pour la graine seed O. aegyptiaco 73

Cadre mathématique

Hypothèses sur nos données

Si p_i est la probabilité de germination sur la plaque i, alors supposons que le nombre de graines germées r_i suit une loi binomiale :

$$r_i \sim \text{Binomial}(p_i, n_i)$$

De plus, supposons que le modèle est essentiellement une régression logistique à effets aléatoires, ce qui permet de traiter la surdispersion. Autrement dit :

$$\text{logit}(p_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \alpha_{12} x_{1i} x_{2i} + b_i \text{où } b_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\tau})$$

avec x_{1i}, x_{2i} le type de graine et l'extrait de racine de la i-ème plaque, et avec un terme d'interaction $\alpha_{12} x_{1i} x_{2i}$ inclus. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \tau$ ont des priors indépendants "non informatifs" fournis, qui seront supposés comme suit :

$$\alpha_i \sim \mathcal{N}(0, 10^6), \text{ pour } i \in \{0, 1, 2\} \alpha_{12} \sim \mathcal{N}(0, 10^6) \tau \sim \text{gamma}(10^{-3}, 10^{-3})$$

Une dernière hypothèse que nous ferons également est que les r_i sont indépendants.

Graphe acyclique orienté

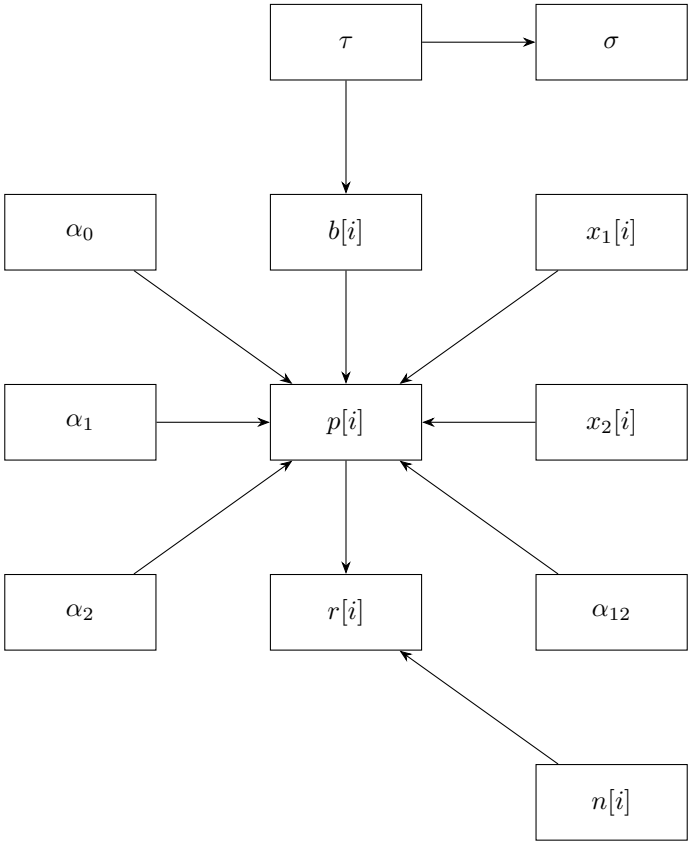


Figure 1: Graphe DAG représentant le modèle

Lois conditionnelles

Comme nous allons appliquer Hastings-within-Gibbs, nous devrons déterminer les lois conditionnelles de tous les paramètres de l'expression de $logit(p_i)$, c'est-à-dire que nous devrons obtenir toutes les lois à posteriori. Pour α_0, nous aurons :

$$\pi(\alpha_0|\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, r, b, \tau) \propto \pi(\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, r, b, \tau|\alpha_0)\pi(\alpha_0)$$

Dans le contexte de H-W-Gibbs, comme nous allons mettre à jour les paramètres séparément en considérant les autres comme des valeurs fixes, nous aurons :

$$\pi(\alpha_0|\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, r, b, \tau) \propto \pi(r|\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, b, \tau)\pi(\alpha_0) = \pi(\alpha_0) \prod_{i=1}^{N} \pi(r_i|\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, b, \tau) = \pi(\alpha_0) \prod_{i=1}^{N} p_i^{r_i}(1-p)^{n_i - r_i}$$

Comme tous les α suivent la même loi a priori, nous aurons des expressions similaires pour α_1, α_{12} et α_2. Pour τ, comme τ dépend de b qui suit une loi normale, qui dans ce cas est conjuguée par la loi gamma (loi a priori de τ), nous pouvons obtenir directement sa loi a posteriori :

$$\pi(\tau|\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, b, r) \sim gamma(10^{-3} + \frac{N}{2}, 10^{-3} + \frac{\sum_{i=1}^{N} b_i^2}{2})$$

Une fois τ mis à jour dans l'algorithme, nous pourrons mettre à jour chaque b_i, pour $i \in \{1, ..., N\}$, où chacun aura la loi à posteriori suivante :

$$\pi(b_i|\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, r_i, \tau) \propto \pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, r_i, \tau|b_i)\pi(b_i)$$

En considérant que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, \tau$ sont des paramètres déjà fixes et que $b_i \sim N(0, \frac{1}{\tau})$, nous pouvons écrire :

$$\pi(b_i|\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, r_i, \tau) \propto \pi(r_i|\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2, i, \tau, b_i) \exp(-\frac{b_i^2\tau}{2}) = p_i^{r_i}(1-p_i)^{n_i - r_i} \exp(-\frac{b_i^2\tau}{2})$$

Maintenant, ayant toutes les lois conditionnelles, nous pouvons appliquer notre algorithme Hastings-within-Gibbs.

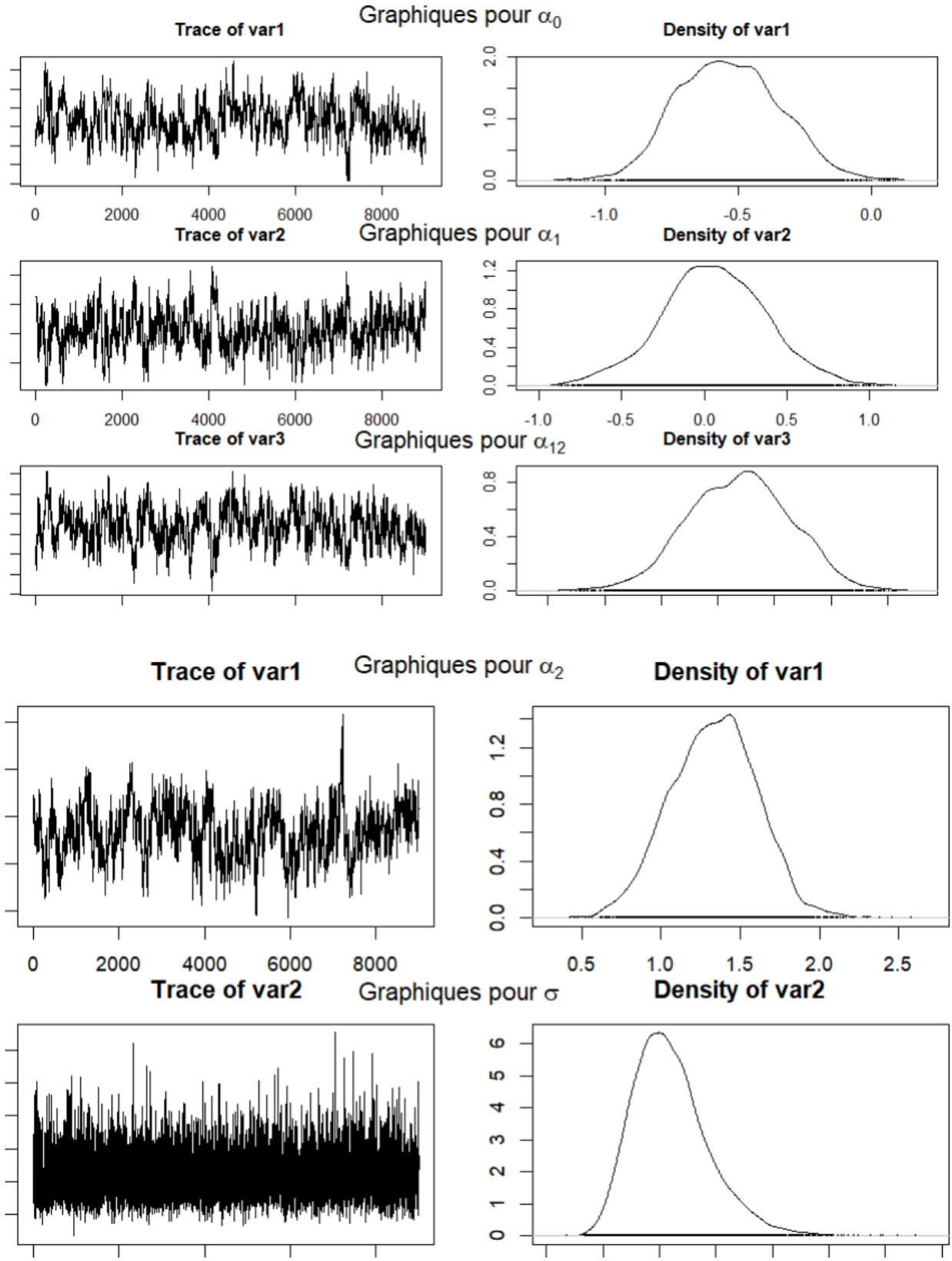
Résultats de l'implémentation algorithmique

Grâce au calcul précédent des lois conditionnelles, nous avons pu implémenter un algorithme de Hasting Within Gibbs pour estimer nos paramètres. De la même manière que ce qui est donné dans l'énoncé, nous avons généré 10^4 réalisations auxquelles nous avons retiré les 1000 premières, correspondant à la burnin period. Les résultats obtenus, ainsi qu'une comparaison avec ce qui est donné dans l'énoncé, sont mentionnés dans le tableau ci-dessous.

	Moyenne		**Écart-type**	
Paramètres	**Résultat**	**Énoncé**	**Résultat**	**Énoncé**
α_0	-0.5562	-0.5525	0.1865	0.1852
α_1	0.0706	0.08382	0.3252	0.3031
α_{12}	-0.8021	-0.8165	0.4564	0.4109
α_2	1.3511	1.346	0.2745	0.2564
σ	0.3198	0.267	0.0661	0.1471

Table 3: Résultats de notre algorithme Hastings within Gibbs

On rend également compte des résultats des chaînes de Markov générées (à gauche), ainsi que de leurs distributions (à droite) dans les graphiques ci-dessous :



Les résultats obtenues sont cohérents avec l'objectif initial visé dans l'énoncé. Les valeurs sont distribuées

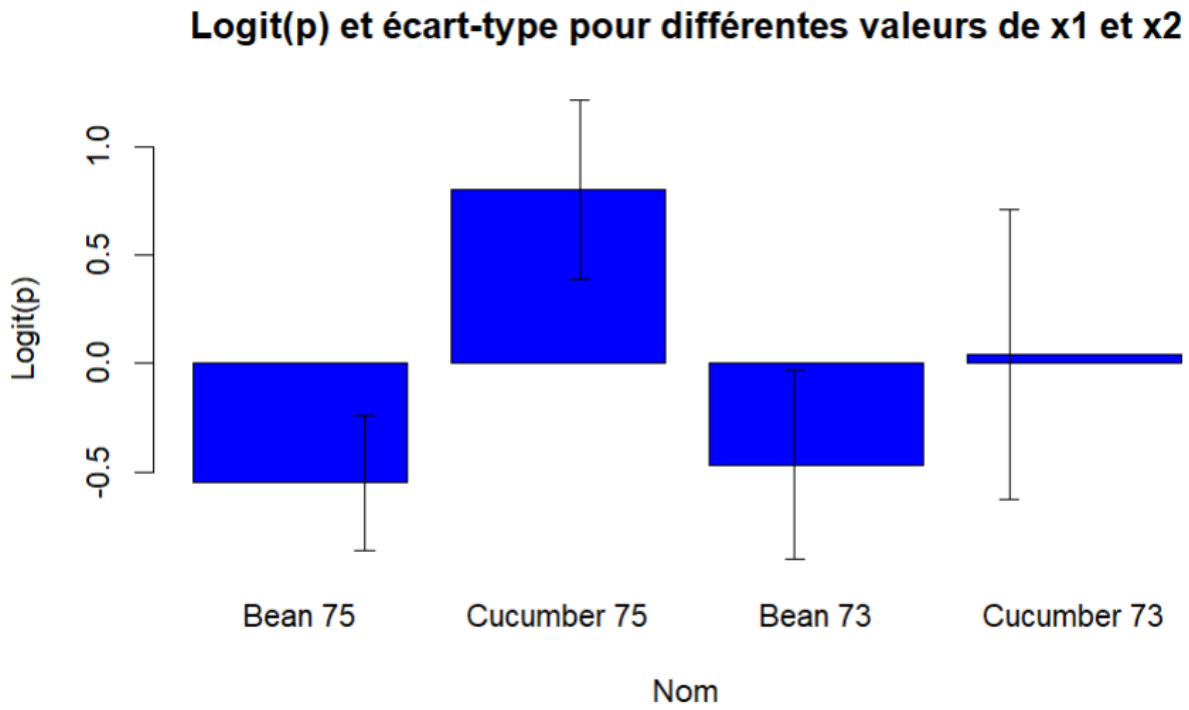
autour des moyennes attendues et les écart-types sont également en accord avec les attentes, en observant des variations inférieures à 20%.

Interprétation des résultats

On va maintenant essayer de voir l'impact de x_1 et x_2 sur $logit(p)$. Pour cela, on réutilise les moyennes des variables aléatoires que l'on a calculé avant.

Nom	x1	x2	logit(p)	ecart-type
Bean 75	0	0	-0.5517254	0.309775
Cucumber 75	0	1	0.8027722	0.4157986
Bean 73	1	0	-0.4682697	0.4345104
Cucumber 73	1	1	0.04229868	0.6678286

Table 4: Logit(p) pour différentes valeurs de x1 et x2



On voit que le cucumber de l'aegyptiao 75 est celle qui a le plus de chance de germer. C'est notamment plus élévé que pour l'autre type de graine l'aegyptiao 73 avec la même racine (cucumber). Pour la racine bean, on a mons de chance de germer que pour cucumber et il a très peu de différences selon le type de graine (aegyptiao 75 ou aegyptiao 73).