Pemodelan propagasi gelombang SH di medium elastik 1D menggunakan metode beda-hingga

Azhar Harisandi - 22320011

1. Pendahuluan

Persamaan gelombang homogen dinyatakan oleh persamaan diferensial parsial berikut :

$$\rho \partial_t^2 u \ = \ \partial_x (\mu \, \partial_x u)$$

Dengan menggunakan metode beda hingga, persamaan di atas dapat dinyatakan oleh persamaan aljabar berikut

$$\rho_i \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{dt^2} \ = \ \frac{\mu_{i+1} u_{i+2}^j - \mu_{i+1} u_i^j - \mu_{i-1} u_i^j + \mu_{i-1} u_{i-2}^j}{4dx^2}$$

Pada tugas kali ini akan digunakan metode beda-hingga dengan penerapan skema *staggered grid* yang meletakkan titik grid *velocity* dan *stress* di titik yang berbeda satu sama lainnya di dalam grid komputasi. Skema ini meningkatkan akurasi dari metode beda hingga karena memperkecil faktor pembagi dari 2dx menjadi dx.

Namun skema ini memerlukan parametrisasi persamaan yang sedikit berbeda dengan persamaan sebelumnya, dimana turunan displacement terhadap waktu akan diparametrisasi sebagai velocity dan gradien spasial dari perpindahan akan dinyatakan oleh stress.

$$\begin{aligned} \partial_t u \ &= \ v \\ \sigma \ &= \ \mu \partial_x u, \end{aligned}$$

Oleh karena itu, persamaan diferensial yang tadinya hanya memiliki satu *field variable* dan dapat dinyatakan oleh satu persamaan, akan menjadi suatu sistem persamaan diferensial dimana perlu yang terdiri dari dua persamaan karena sekarang kita memiliki dua *field variables* yaitu *velocity* dan *stress.*

$$\begin{aligned} \rho \partial_t v \ &= \ \partial_x \sigma \ + f \\ \partial_t \sigma \ &= \ \mu \partial_x v. \end{aligned}$$

Sehingga dalam bentuk persamaan aljabar beda-hingga dapat dituliskan sebagai berikut

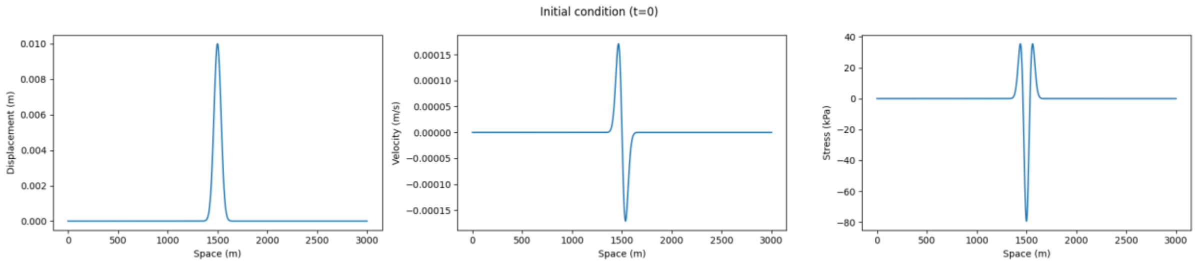
$$\begin{aligned} \frac{v_i^{j+\frac{1}{2}} - v_i^{j-\frac{1}{2}}}{dt} \ &= \ \frac{1}{\rho_i} \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}^j - \sigma_{i-\frac{1}{2}}^j}{dx} + \frac{f_i^j}{\rho_i} \\ \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} - \sigma_{i+\frac{1}{2}}^j}{dt} \ &= \ \mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - v_i^{j+\frac{1}{2}}}{dx}, \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dengan menggunakan sedikit aljabar kita dapat mendapatkan persamaan ekstrapolasi waktu untuk *velocity* dan *stress* sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
v_i^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{dt}{\rho_i}\frac{\sigma^j_{i+\frac{1}{2}} - \sigma^j_{i-\frac{1}{2}}}{dx} + v_i^{j-\frac{1}{2}} + \frac{dt}{\rho_i} f_i^j \\
\sigma^{j+1}_{i+\frac{1}{2}} &= dt\, \mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{v^{j+\frac{1}{2}}_{i+1} - v^{j+\frac{1}{2}}_i}{dx} + \sigma^j_{i+\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

2. **Skenario homogen (tanpa sumber)**

Untuk skenario homogen, diperlukan kondisi awal (*initial condition*) untuk *field variables* yang ada dalam persamaan diferensial. Dalam percobaan kali ini saya menggunakan kondisi awal yaitu *displacement* yang dinyatakan oleh fungsi Gaussian di titik tengah grid, sehingga kondisi awal dari velocity dan stress masing-masing dapat dinyatakan oleh turunan pertama dari fungsi Gaussian dan turunan kedua fungsi Gaussian yang dikalikan dengan modulus geser.



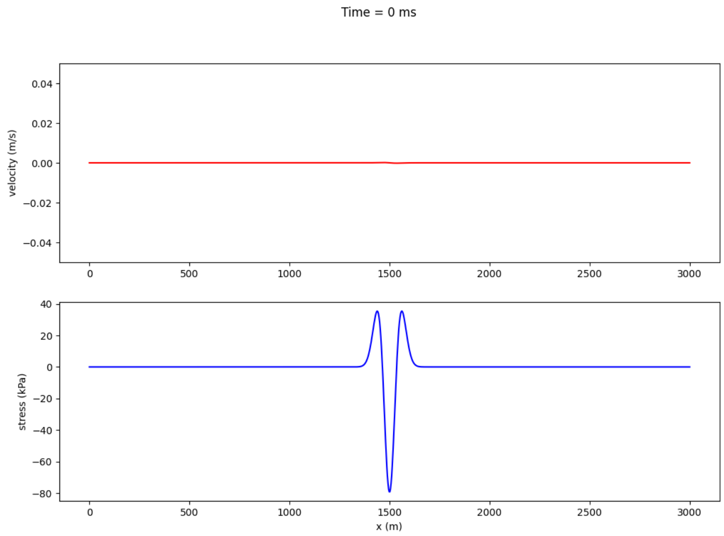
Berikut adalah parameter simulasi yang digunakan :

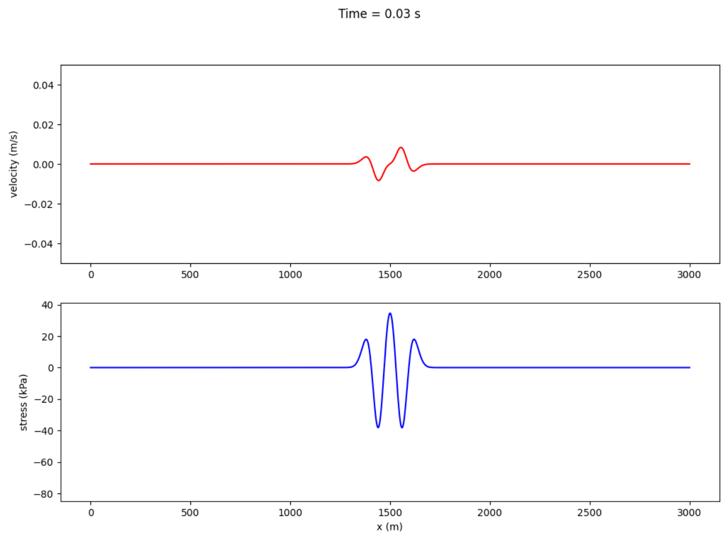
1. Jumlah time step = 1300
2. Jumlah grid spasial = 1000
3. SH wave velocity = 2000 m/s
4. Frekuensi = 10 Hz
5. Jarak maksimum = 3000 m
6. Densitas = 2500 kg/m^3
7. Modulus geser / Mu = 2500*2000*2000 = 100 GPa
8. Panjang gelombang = 200 m
9. Spasi grid = 3000/(1300-1) = 2.3 m

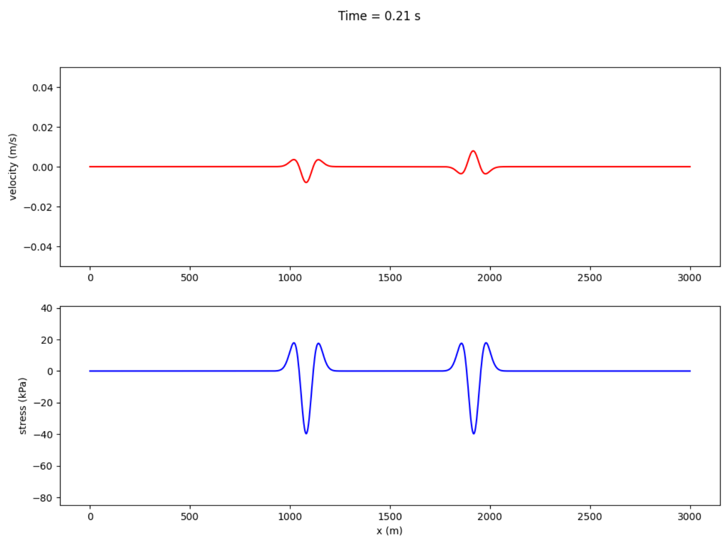
Dari parameter-parameter di atas dapat dilihat bahwa setiap satu panjang gelombang (200 m) diwakili oleh (200/2.3) = 87 titik kordinat, yang sudah jauh melebihi syarat interval sampling spasial, yaitu minimal empat titik kordinat untuk satu panjang gelombang.

Untuk interval sampling di domain waktu, dapat dihitung dengan syarat ***Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)*** untuk kestabilan secara numerik dan meminimalkan efek dispersi, dimana besaran yang dinyatakan oleh $(dt/dx)\ x\ velocity$ harus lebih kecil dari 1. Untuk di tugas ini saya menggunakan kriteria CFL sebesar 0.8, sehingga didapat interval sampling di domain waktu sebesar $dt = 0.8\ x\ (dx/velocity) = 0.8\ x\ (2.3/2000) = 0.00092\ s$ atau $0.92\ ms$.

2.1 *Snapshot* simulasi

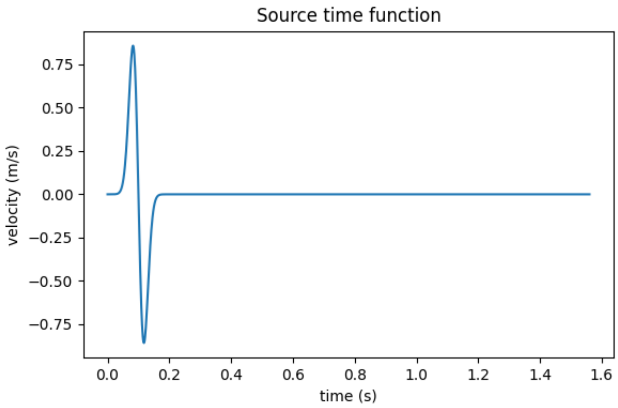






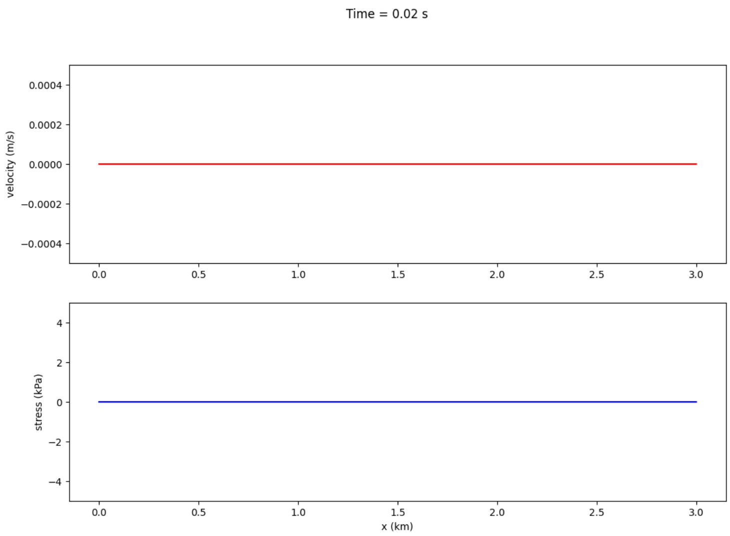
3. Skenario dengan sumber

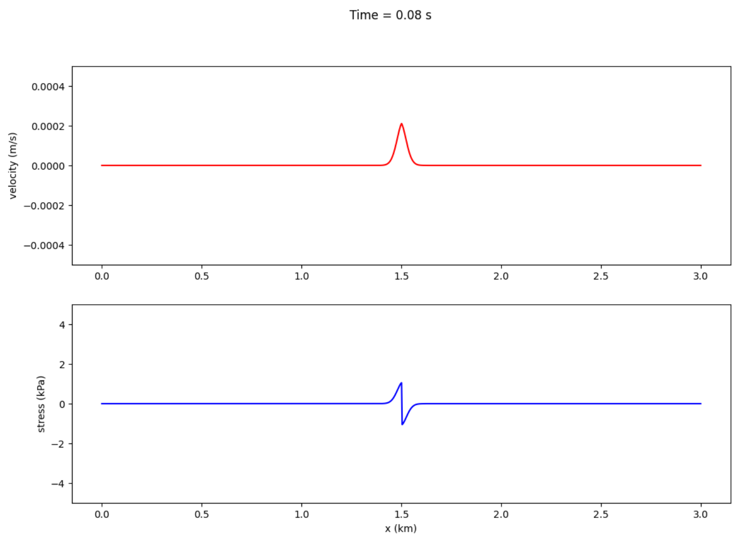
Untuk skenario dengan sumber, diperlukan fungsi yang menyatakan variasi sumber terhadap waktu (*source-time function*) dan posisi sumber. Dalam tugas ini, digunakan *source-time function* untuk *velocity* yang berupa turunan pertama dari fungsi Gaussian.

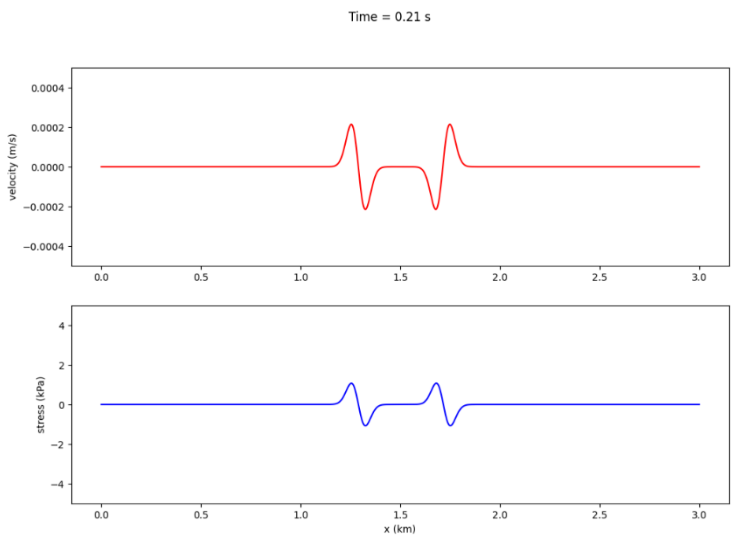


Parameter-parameter simulasi yang digunakan untuk skenario ini identik dengan skenario sebelumnya, namun ditambahkan satu parameter lagi yaitu lokasi sumber, dimana lokasi sumber diasumsikan bertepatan di titik tengah dari grid komputasi.

3.1 *Snapshot* simulasi







Pustaka

Igel, H. (2017). *Computational seismology: A practical introduction*.