

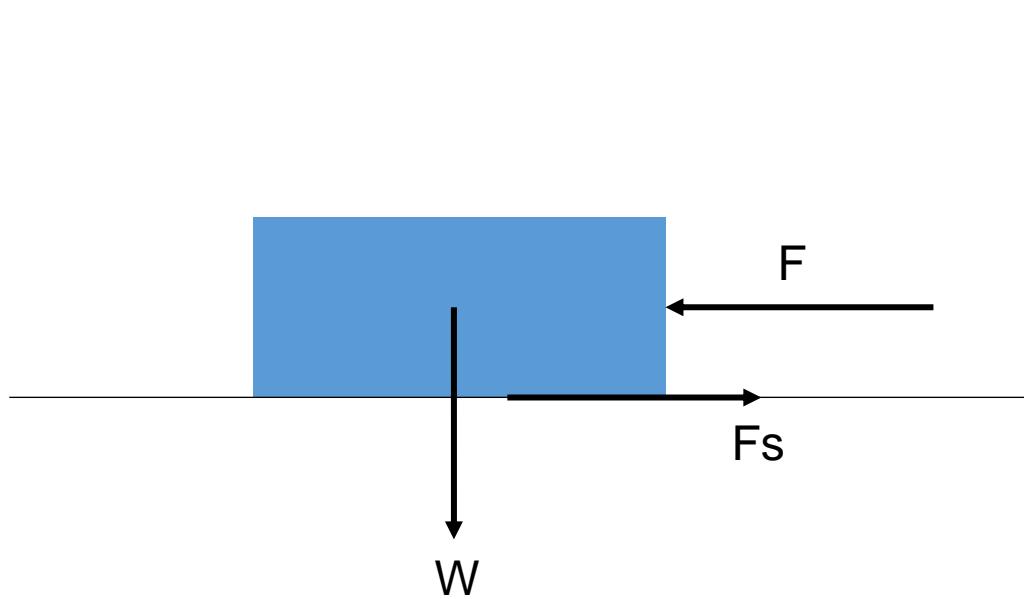
Geomekanika

Azhar Harisandi

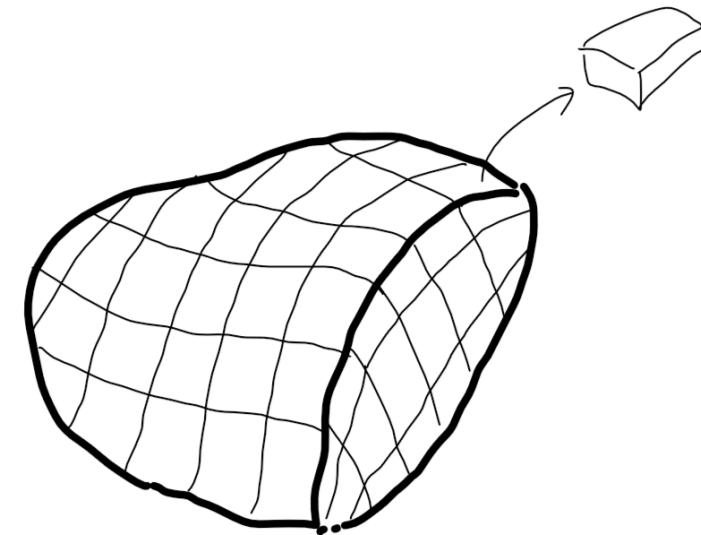
- 1. Perngantar Mekanika di Kontinuum dan Aljabar Linear**
 1. Konsep sistem koordinat
 2. Konsep mekanika di kontinuum
 3. Konsep Traksi dan stress
 4. Konsep "Tensor"
- 2. Subsurface Stress**
 1. Anderson's Faulting Theorem
 2. Rotasi sistem koordinat
 3. Traksi di bidang di subsurface
 4. Mohr Diagram
- 3. Frictional Faulting Theory**
 1. Shear Failure
 2. Mohr-Coulomb Faulting Criterion & Byerlee's Law
 3. Stress Polygon
- 4. Stress di lubang bor**
 1. Kirsch Solution

01 – Pengantar Mekanika Kontinuum dan Aljabar Linear

Kontinuum



Mekanika klasik = objek dilihat sebagai **titik**



Mekanika kontinuum = benda di 3D dilihat sebagai susunan parsel-parsel kecil yang disebut sebagai **kontinuum**

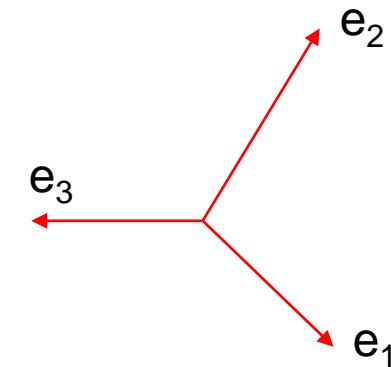
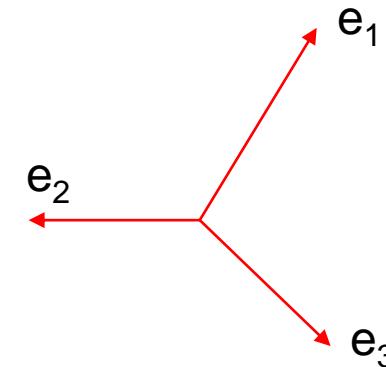
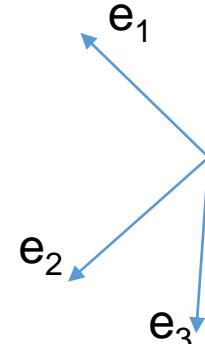
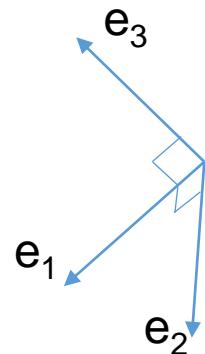
Sistem Koordinat

Pada umumnya dalam mekanika kita menggunakan

Orthonormal Right-handed Coordinate system

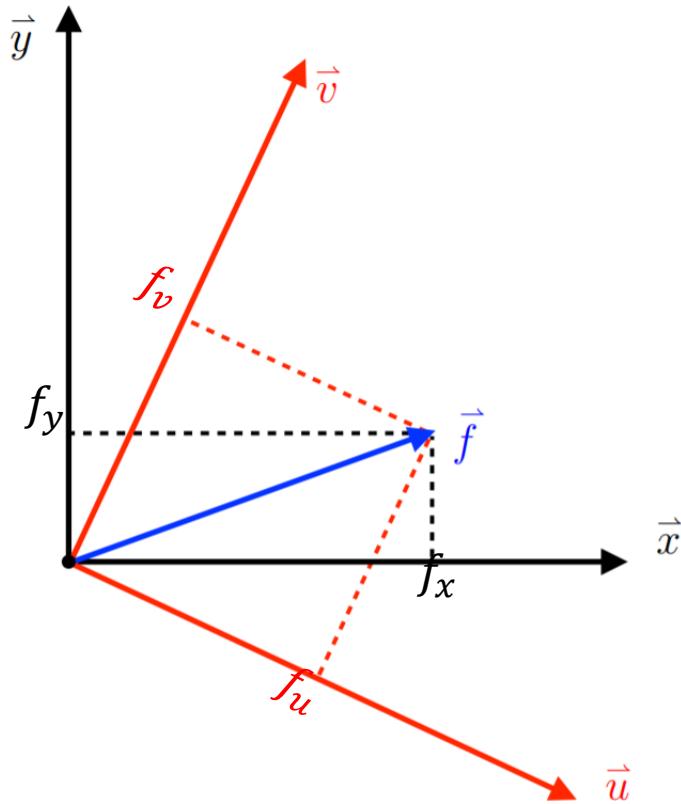
- Antar basis saling tegak lurus
- Panjang masing-masing basisnya = 1

$$\text{sumbu } 1 \times \text{sumbu } 2 = \text{sumbu } 3 \\ (\times = \text{cross product})$$



Sistem koordinat hanya ciptaan manusia

- Fenomena di alam dan hukum fisika tidak peduli dengan sistem koordinat



\vec{f} dalam koordinat sistem hitam (x, y) :

$$\vec{f} = f_x + f_y$$

\vec{f} dalam koordinat sistem merah (u, v) :

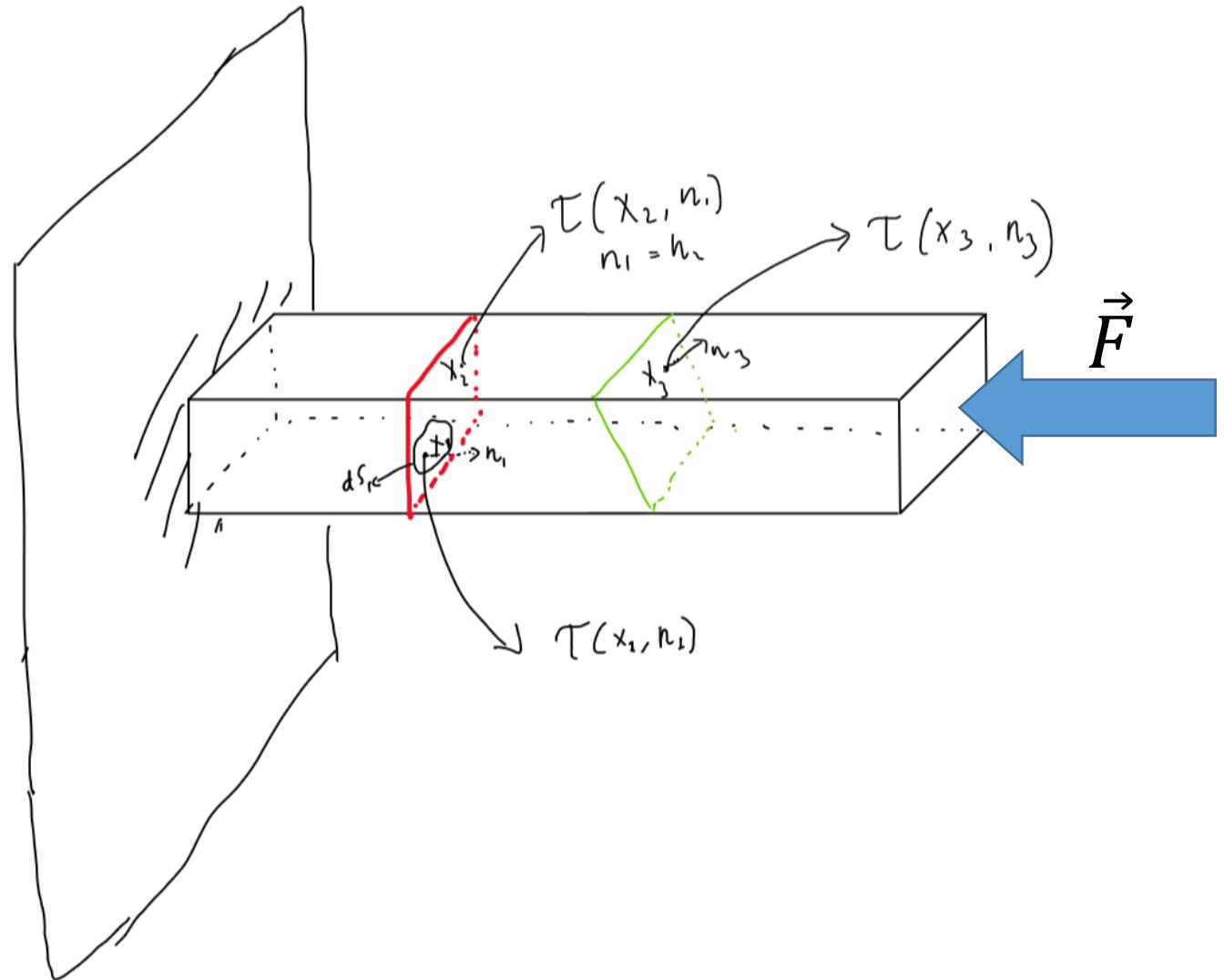
$$\vec{f} = f_u + f_v$$

Panjang dan arah \vec{f} secara absolut masih sama di kedua koordinat sistem, yang berbeda hanyalah besar **komponen** di tiap sistem koordinat.

Traksi

$$T(x, n) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{F}{dA}$$

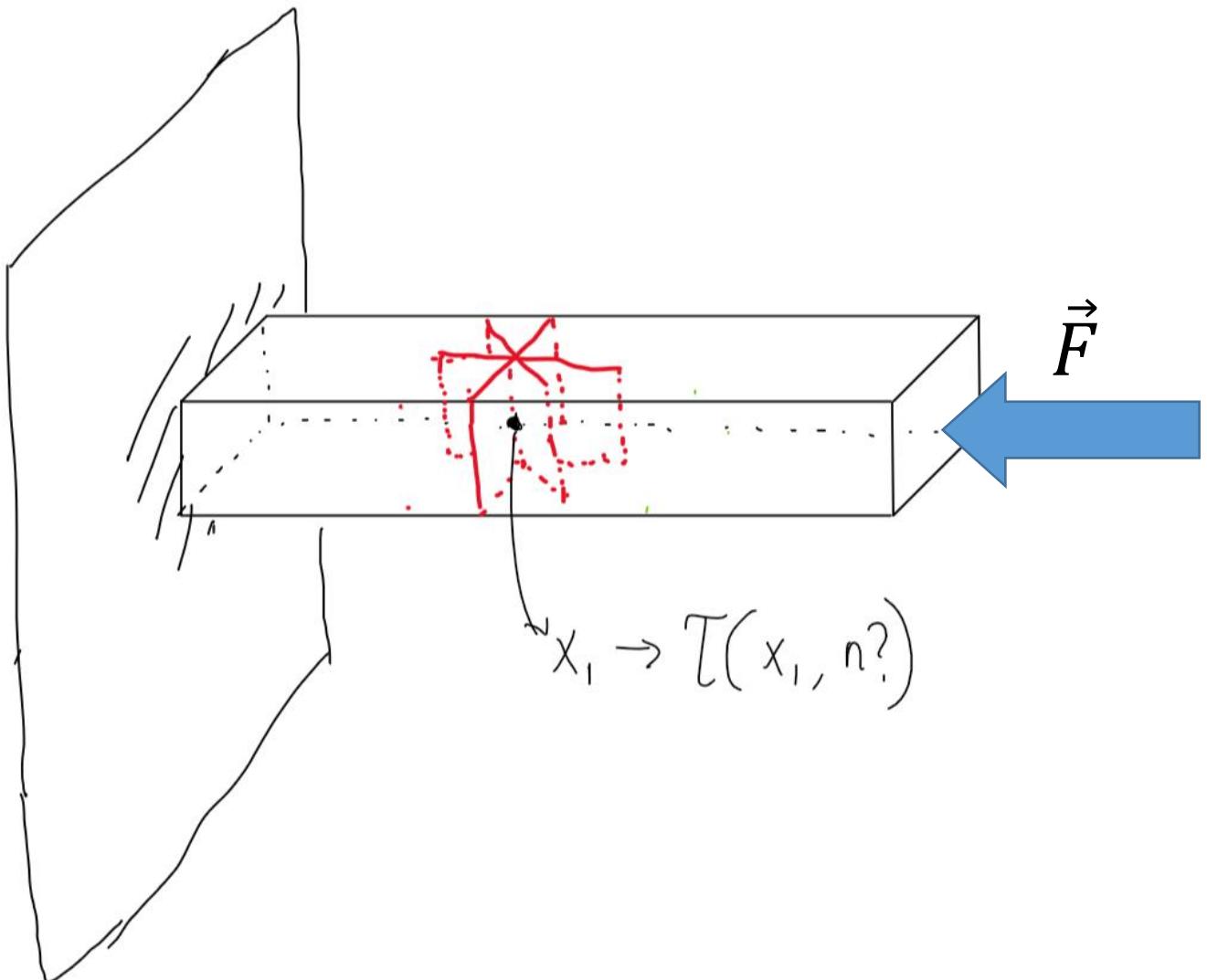
- Traksi menggambarkan **intensitas gaya di suatu permukaan / gaya kontak antarkontinuum**
- Traksi merupakan fungsi dari posisi dan arah normal dari suatu permukaan

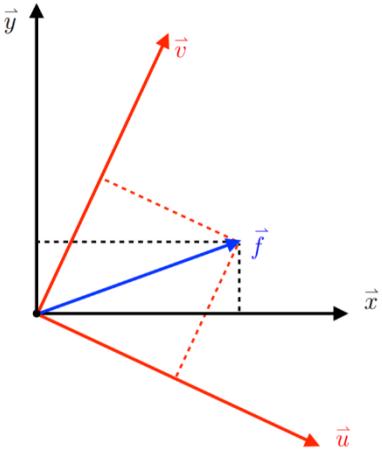


Traksi

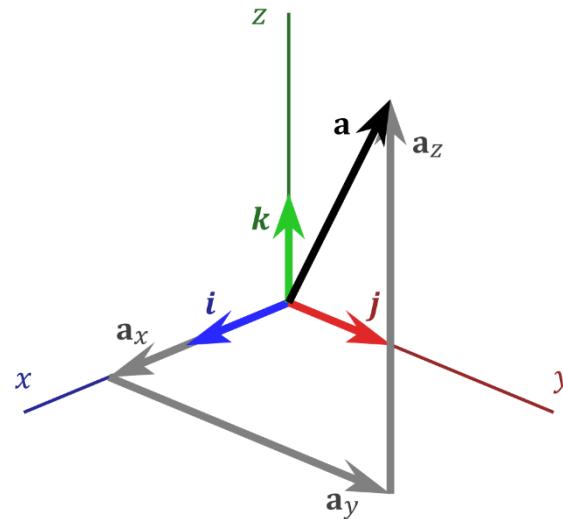
$$T(x, n) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{F}{dA}$$

- Ada tak hingga bidang yang melewati satu titik
- Bagaimana kita mendeskripsikan traksi di satu titik pada bidang orientasi acak di ruang 3-dimensi?

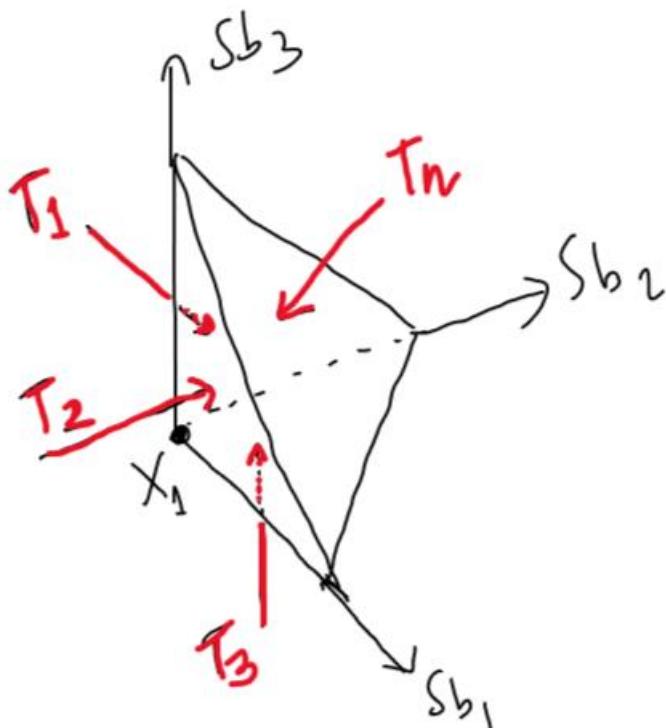




Seperti halnya kita mendeskripsikan vektor di ruang 2 dimensi dengan kombinasi linear dua basis vektor

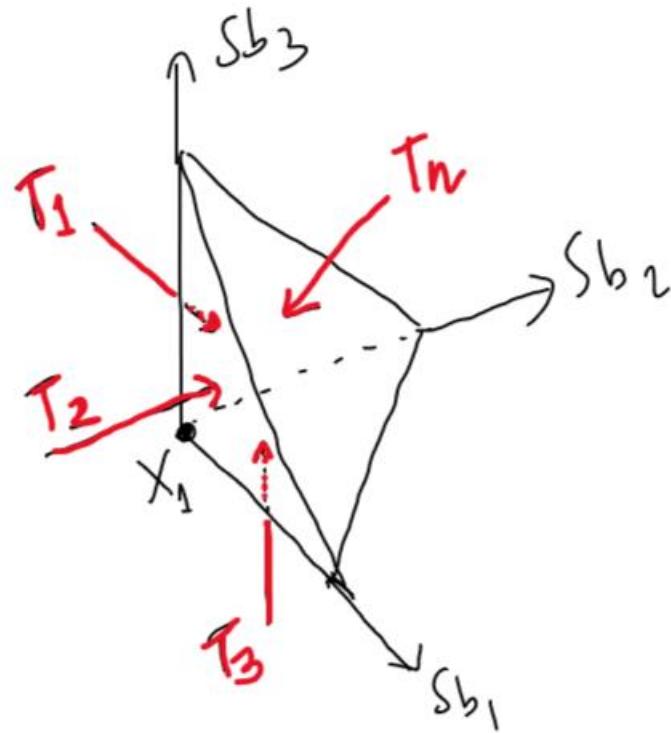


Dan vektor di ruang 3 dimensi dengan kombinasi linear tiga basis vektor



Kita dapat mendeskripsikan traksi di 3 dimensi dengan 3 **basis vektor** yang mewakili tiga **bidang basis**

T_n = Traksi di bidang orientasi acak yang melewati titik X1

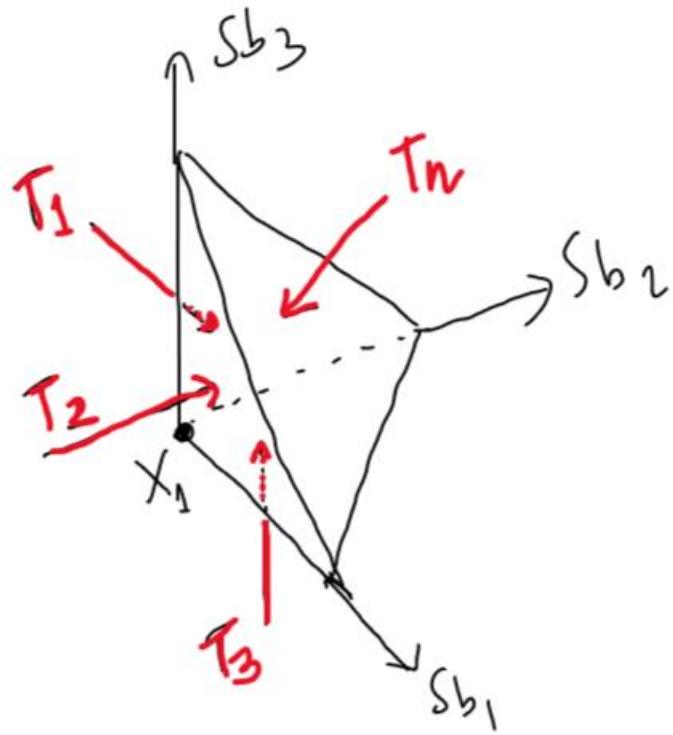


$$T_n = T_1 + T_2 + T_3$$

- T_1 = Traksi yang bekerja pada **bidang** yang memiliki vektor **normal sejajar dengan sumbu 1**
- T_2 = Traksi yang bekerja pada **bidang** yang memiliki vektor **normal sejajar dengan sumbu 2**
- T_3 = Traksi yang bekerja pada **bidang** yang memiliki vektor **normal sejajar dengan sumbu 3**

$$\mathbf{T}_{n(sb1,sb2,sb3)} = [T_1 \quad T_2 \quad T_3]$$

$$T_{n(sb1,sb2,sb3)} = [T_1 \quad T_2 \quad T_3]$$



Stress Tensor

$$T_{n(sb1,sb2,sb3)} = \begin{bmatrix} T_{1-sb1} & T_{2-sb1} & T_{3-sb1} \\ T_{1-sb2} & T_{2-sb2} & T_{3-sb2} \\ T_{1-sb3} & T_{2-sb3} & T_{3-sb3} \end{bmatrix}$$

Komponen T_1 di sumbu 3

(proyeksi vektor T_1 ke sumbu 3, ingat traksi sendiri adalah vektor yang memiliki komponen)

Pertanyaan hingga saat sini

1. Untuk apa kita mencaritahu traksi di suatu titik acak dengan orientasi bidang yang acak juga?
2. Apa sebenarnya tensor?

Pertanyaan 2

- Tensor adalah objek yang invariant (tidak berubah) terhadap perubahan sistem koordinat, tetapi memiliki komponen yang perubahannya mengikuti aturan tertentu dan dapat diprediksi dalam perubahan sistem koordinat.

Scalar = Tensor orde 0

Vektor = Tensor orde 1

Tensor orde 2 = Stress tensor

Ini adalah definisi paling pragmatis dari tensor, untuk definisi yang lebih dalam secara matematis, penulis menyarankan untuk menonton playlist youtube *What is a Tensor?* dari user [XylyXylyX](#)

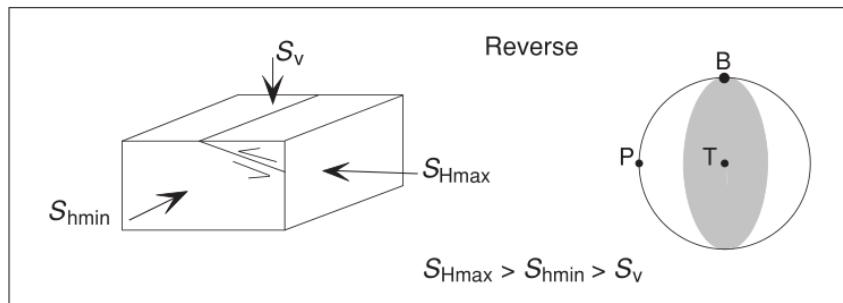
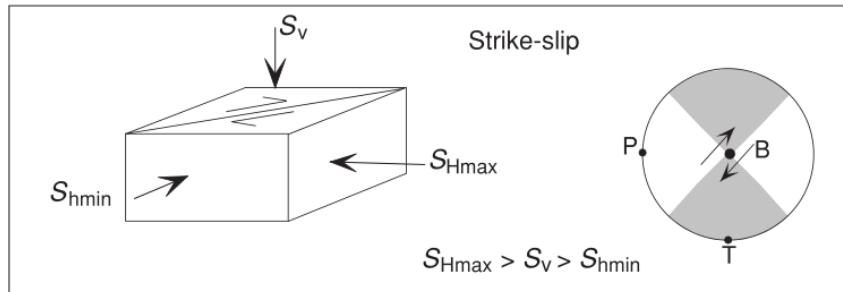
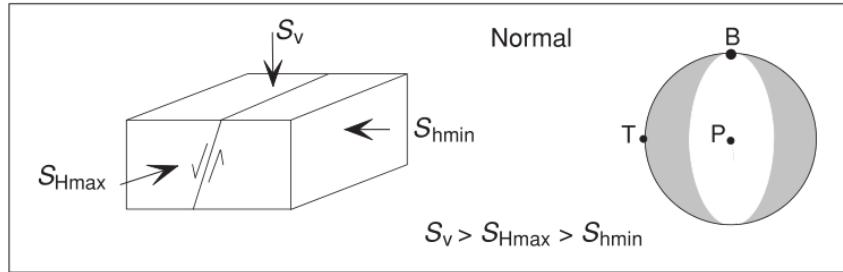
Pertanyaan 1

- Ingat kembali bahwa **traksi** menyatakan **intensitas gaya** pada suatu titik dengan orientasi bidang tertentu.
- Karena kita dapat menyatakan traksi di titik manapun dengan orientasi bidang manapun dengan stress tensor, dan kita dapat mentransformasi stress tensor dengan suatu aturan tertentu, kita dapat melihat kira kira di bidang mana yang intensitas gayanya paling tinggi.

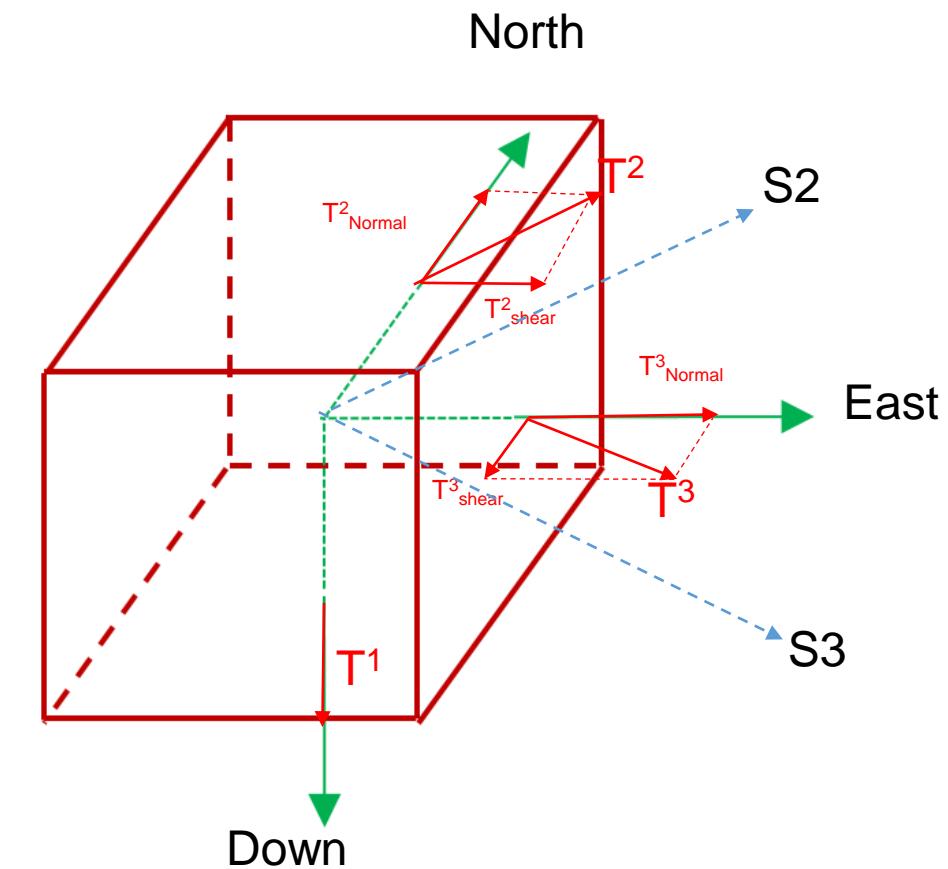
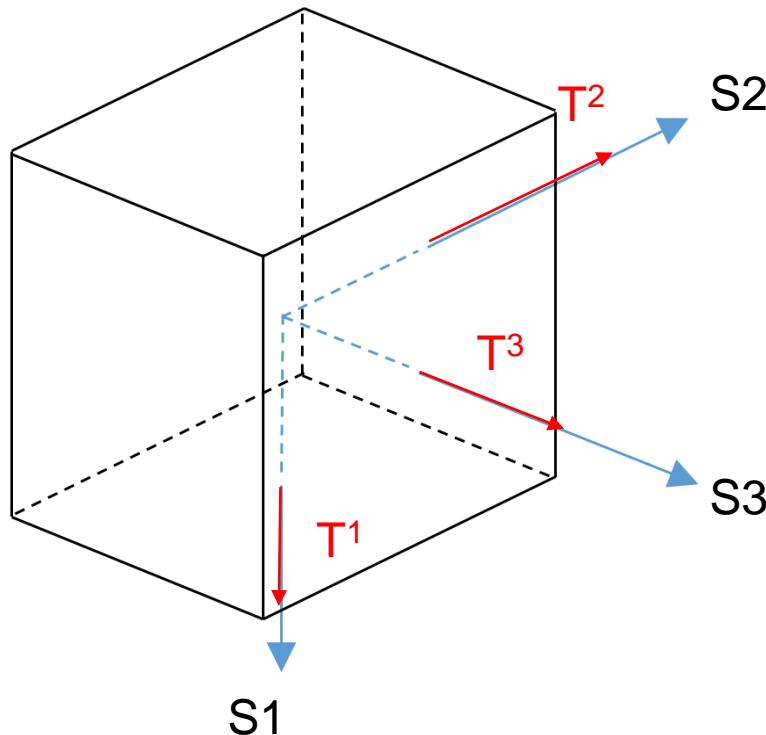
Intensitas gaya tinggi → **Resiko terjadi failure tinggi**

02 – Subsurface Stress

Deskripsi Stress State di bumi dan *Anderson's fault classification*



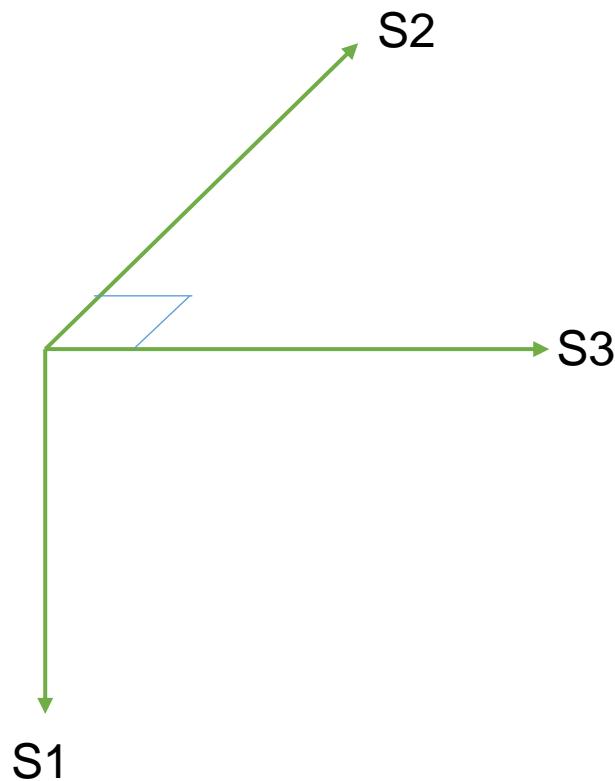
Transformasi sistem koordinat pada stress tensor



$$S_{(S1,S2,S3)} = \begin{bmatrix} T^1 & 0 & 0 \\ 0 & T^2 & 0 \\ 0 & 0 & T^3 \end{bmatrix}$$

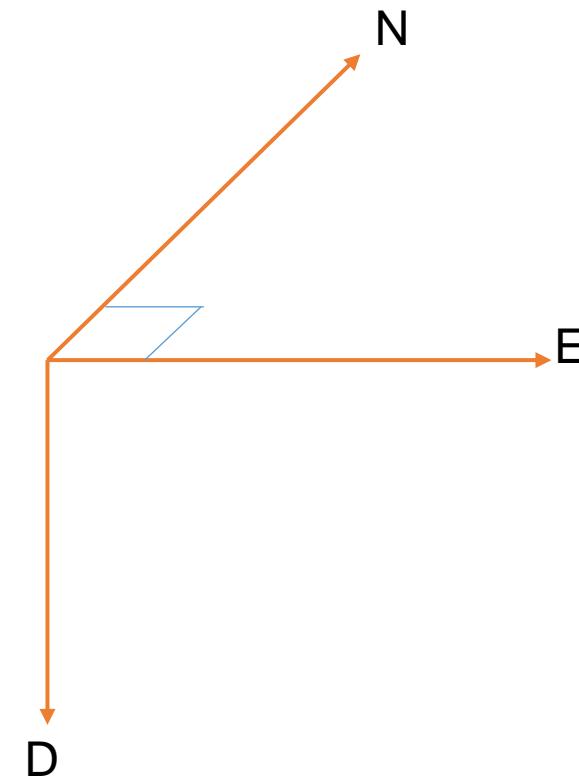
$$S_{(N,E,D)} = \begin{bmatrix} T^2_{\text{normal}} & T^3_{\text{shear}} & 0 \\ T^2_{\text{shear}} & T^3_{\text{normal}} & 0 \\ 0 & 0 & T^1 \end{bmatrix}$$

Principal coordinate system (Normal Faulting)



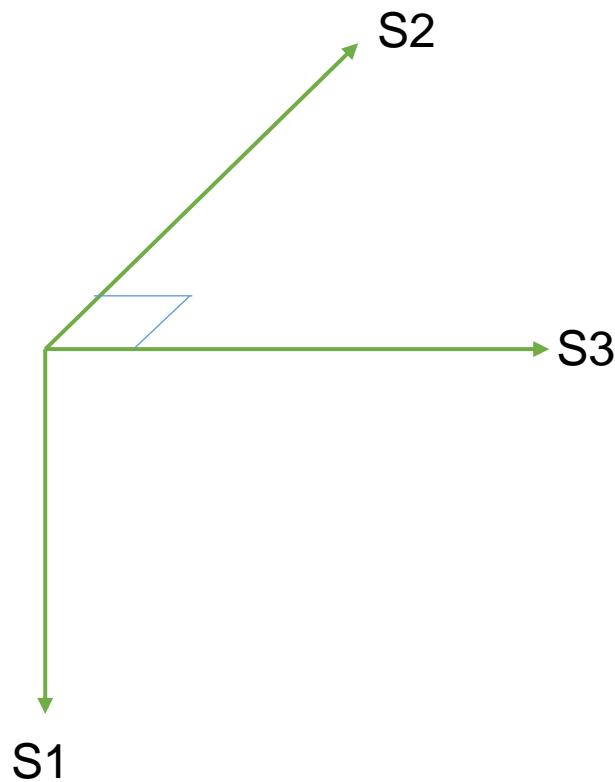
$$S_{(S_1, S_2, S_3)} = \begin{bmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

NED coordinate system



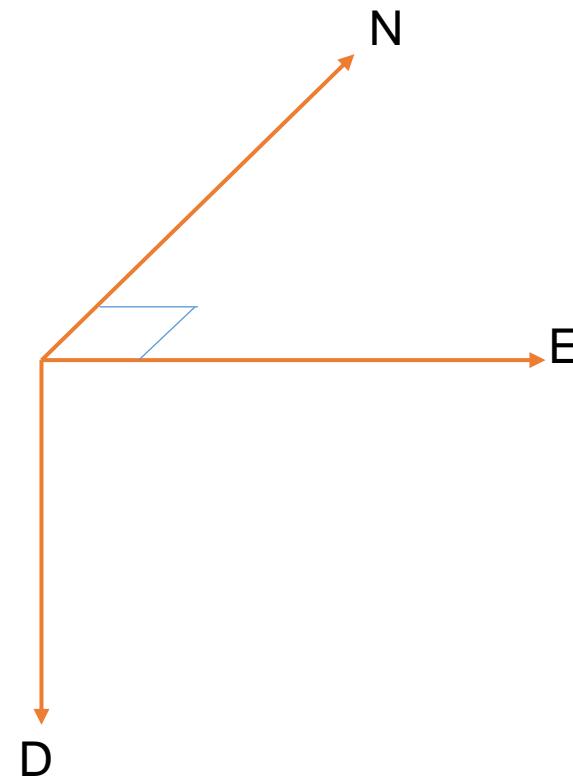
$$S_{(N, E, D)} = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

Principal coordinate system (Normal Faulting)



$$S_{(S1,S2,S3)} = \begin{bmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

NED coordinate system



$$S_{(N,E,D)} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}$$

Rotation Matrix

$$S_G = R_{PG}^T S_P R_{PG}$$

S_G = stress tensor dalam koordinat geografis (NED)

R_{PG} = Matriks rotasi

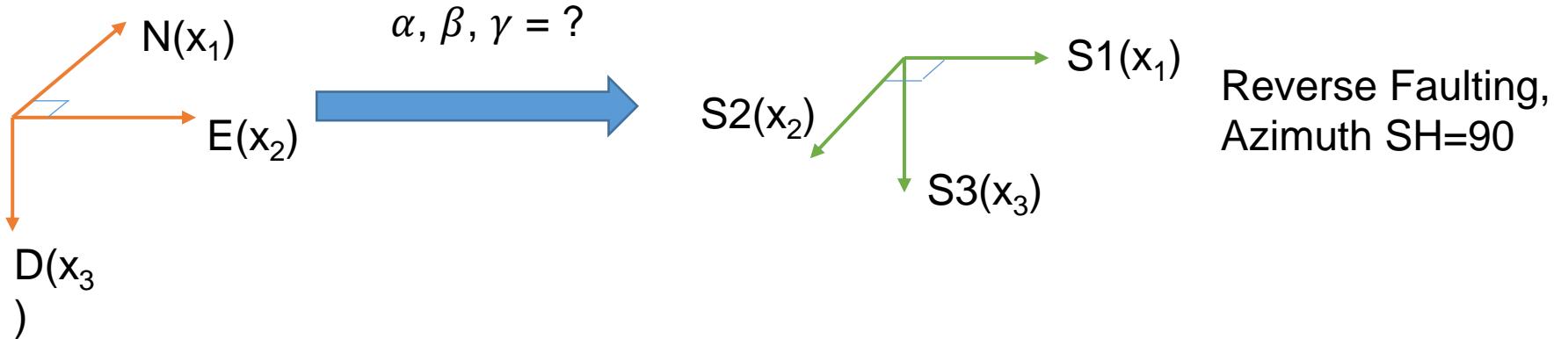
S_P = Stress tensor dalam koordinat principal (S1S2S3)

$$R_{PG} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & \sin\alpha \cos\beta & -\sin\beta \\ \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma & \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma & \cos\beta \sin\gamma \\ \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma & \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma & \cos\beta \cos\gamma \end{bmatrix}$$

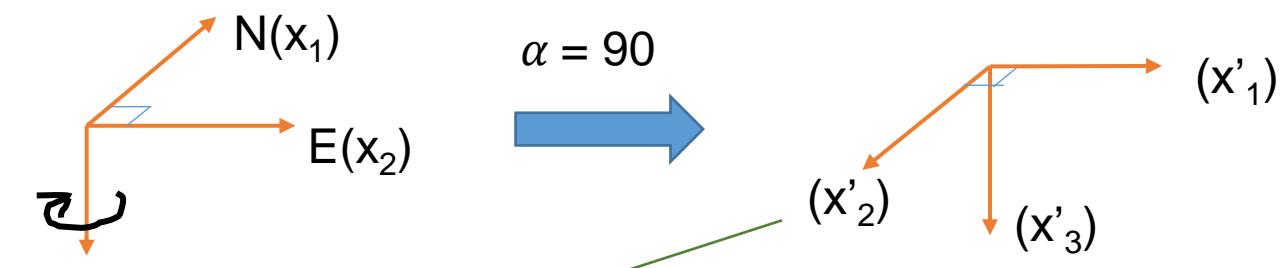
Dimana α, β, γ adalah sudut rotasi yang diperlukan untuk mentransformasi coordinate NED ke koordinat principal

	Normal Faulting	Strike Slip	Reverse Faulting
α	Azimuth Sh	Azimuth SH	Azimuth SH
β	90	0	0
γ	0	90	0

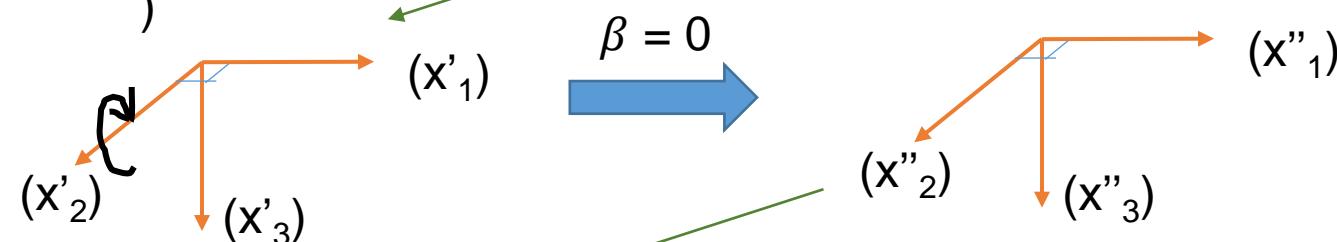
Contoh



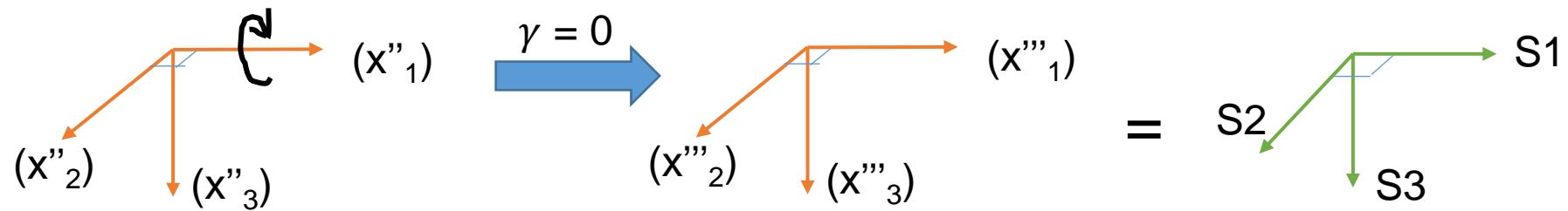
α = Rotasi terhadap sumbu x_3



β = Rotasi terhadap sumbu x'_2



γ = Rotasi terhadap sumbu x''_1



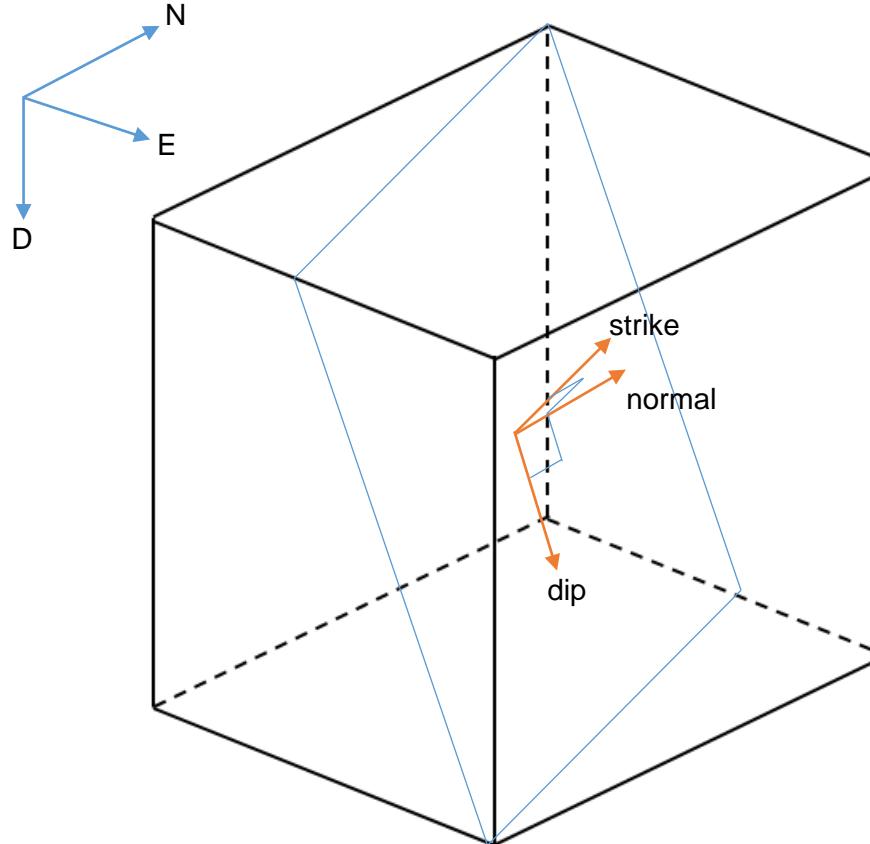
Reverse Faulting,
Azimuth SH=90

$$= S2 \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \end{array} S3$$

$S1$

Stress di bidang sesar

- Untuk mempermudah analisis stress di bidang sesar, komponen stress tensor di sistem koordinat NED ditransformasi di sistem koordinat sesar (dip-strike-normal)



$$n_n = \begin{bmatrix} -\sin(\text{strike}) \sin(\text{dip}) \\ \cos(\text{strike}) \sin(\text{dip}) \\ -\cos(\text{dip}) \end{bmatrix}$$

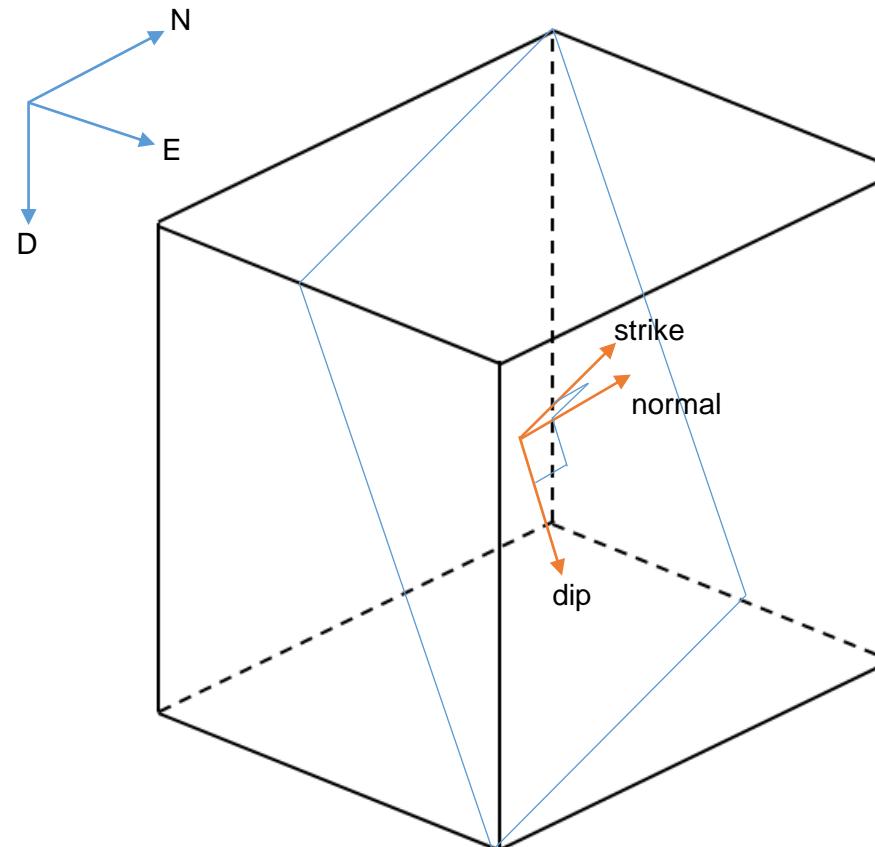
$$n_s = \begin{bmatrix} \cos(\text{strike}) \\ \sin(\text{strike}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n_d = \begin{bmatrix} -\sin(\text{strike}) \cos(\text{dip}) \\ \cos(\text{strike}) \cos(\text{dip}) \\ \sin(\text{dip}) \end{bmatrix}$$

Strike = azimuth strike (N strike E)
Dip = dip dari bidang horizontal

Stress di bidang sesar

- Untuk mempermudah analisis stress di bidang sesar, komponen stress tensor di sistem koordinat NED ditransformasi di sistem koordinat sesar (dip-strike-normal)



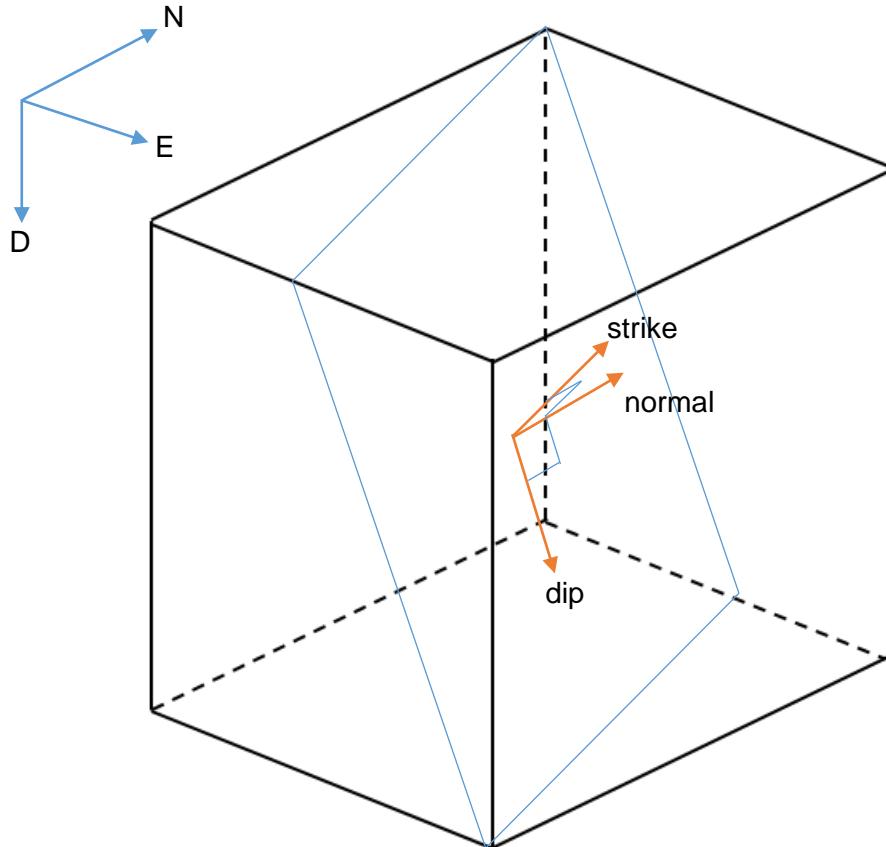
Vektor traksi pada bidang sesar

$$t = S_G n_n$$

Stress tensor pada kordinat NED (3x3)

Vektor normal bidang sesar relatif terhadap NED (3x1)

Stress di bidang sesar



Normal stress pada bidang

$$S_n = t \cdot n_n$$

Shear stress arah dip

$$\tau_d = t \cdot n_d$$

Shear stress arah strike

$$\tau_s = t \cdot n_s$$

Absolute shear stress

$$\tau_{abs} = \sqrt{\tau_d^2 + \tau_s^2}$$

Function python untuk menghitung normal stress dan absolute shear pada bidang sesar

```
import numpy as np

def fault_orientation(strike, dip):
    """
    returns fault orientation vector
    :param strike&dip:
        in degree, strike (N-E)
    """
    # convert to radian
    strike, dip = np.deg2rad(strike), np.deg2rad(dip)

    # plane normal direction vector relative to NED
    nn = np.array([[-np.sin(strike) * np.sin(dip)],
                  [np.cos(strike) * np.sin(dip)],
                  [-np.cos(dip)]])

    # plane dip direction vector relative to NED
    nd = np.array([[-np.sin(strike) * np.cos(dip)],
                  [np.cos(strike) * np.cos(dip)],
                  [np.sin(dip)]])

    # plane strike direction vector relative to NED
    ns = np.array([[np.cos(strike)],
                  [np.sin(strike)],
                  [0]])

    return nn, nd, ns
```

```
def stress2plane(Sg, strike, dip):
    """
    functions to calculate normal and absolute shear stress
    acting on a plane, given its strike and dip.
    :params Sg:
        Stress tensor in Geographical coordinate (NED)
        3 x 3 numpy array.
    :params strike:
        strike of the fault plane (N-E) in degree
    :params dip:
        dip of the fault plane in degree
    """
    # traction on plane
    nn, nd, ns = fault_orientation(strike, dip)
    traction = (Sg @ nn).T

    # normal stress, shear-dip, shear-strike
    normal = traction @ nn
    shear_dip = traction @ nd
    shear_strike = traction @ ns

    # absolute shear
    abs_shear = np.sqrt(shear_dip**2 + shear_strike**2)

    return normal[0], abs_shear[0]
```

Contoh kasus

- Diketahui pada sebuah daerah dengan rezim stress normal faulting, $S_v = 90$, $SH=50$, $Sh=40$, dengan azimuth $SH = N90E$
- Nyatakan stress tensornya dalam koordinat geografis (NED)
- Tentukan absolute shear stress dan normal stress pada bidang sesar dengan strike $N30E$, dip 60 derajat

```
import matplotlib.pyplot as plt

# geographical coordinate
Sg = np.array([[40, 0, 0],
               [0, 50, 0],
               [0, 0, 90]])

# kedudukan fault plane
strike, dip = 30, 60

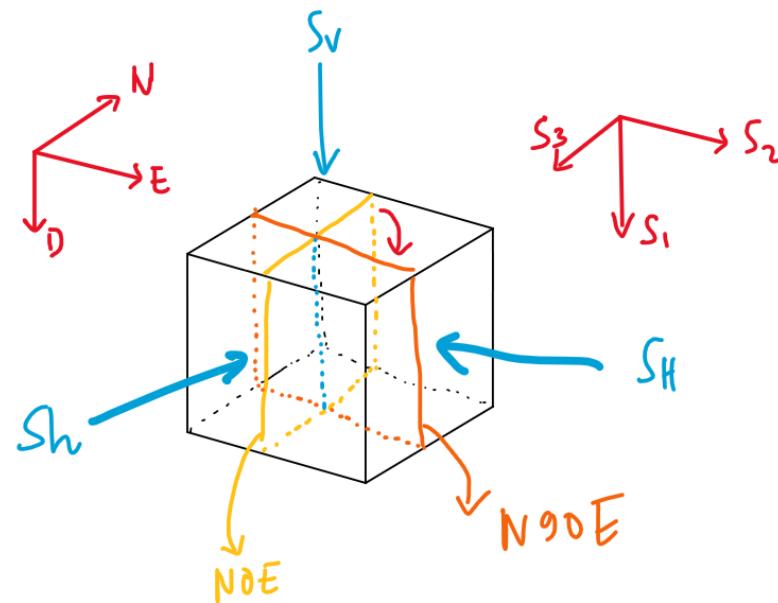
# stress normal dan shear pada fault plane
normal, abs_shear = stress2plane(Sg, strike, dip)

print(f"Normal stress : {normal}\nShear stress : {abs_shear}")
```

```
Normal stress : [58.125]
Shear stress : [18.781224]
```

Kasus 2

- Dengan menggunakan stress state yang sama pada soal sebelumnya, hitung stress normal dan shear pada bidang besar dengan dip 90 derajat dan strike mulai dari N0E sampai N90E, kemudian plot titik2nya pada plot normal stress (sumbu x) vs shear stress (sumbu y)



```

import matplotlib.pyplot as plt

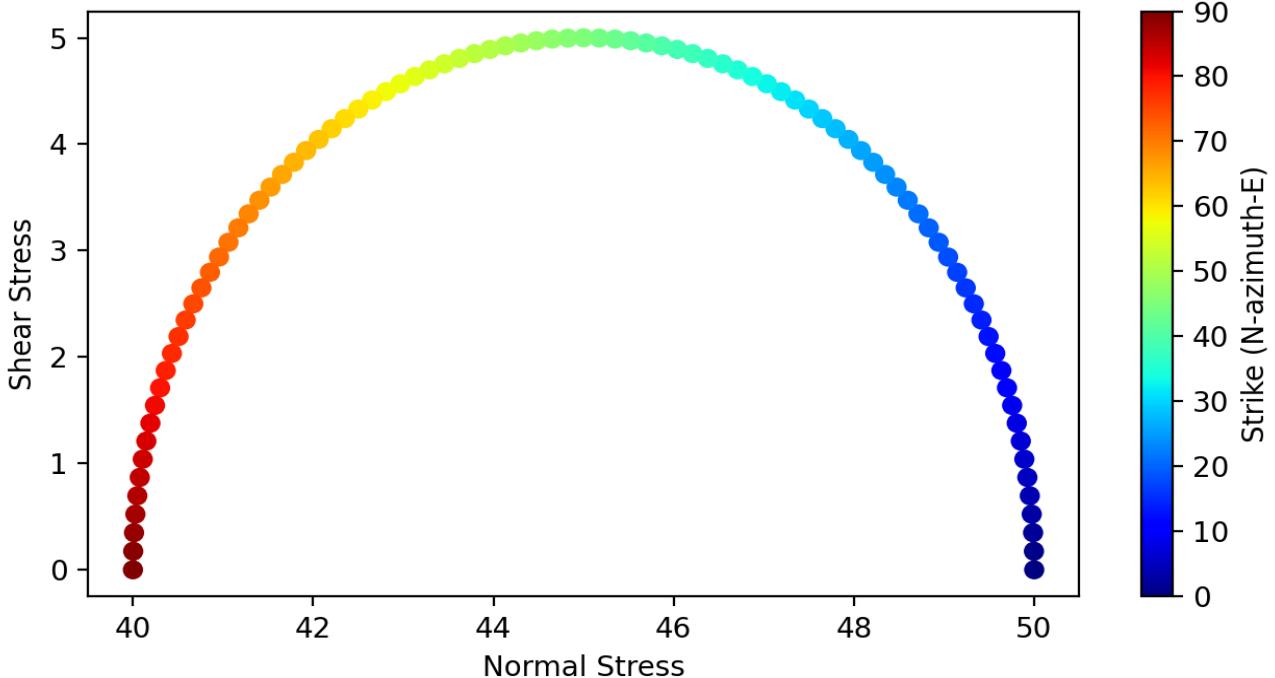
# geographical coordinate
Sg = np.array([[40, 0, 0],
               [0, 50, 0],
               [0, 0, 90]])

strikes, dip = np.arange(0, 91, 1), 90

# empty lists untuk nyimpan tiap sudut
all_normal = []
all_shear = []
for strike in strikes:
    normal, abs_shear = stress2plane(Sg, strike, dip)
    all_normal.append(normal)
    all_shear.append(abs_shear)

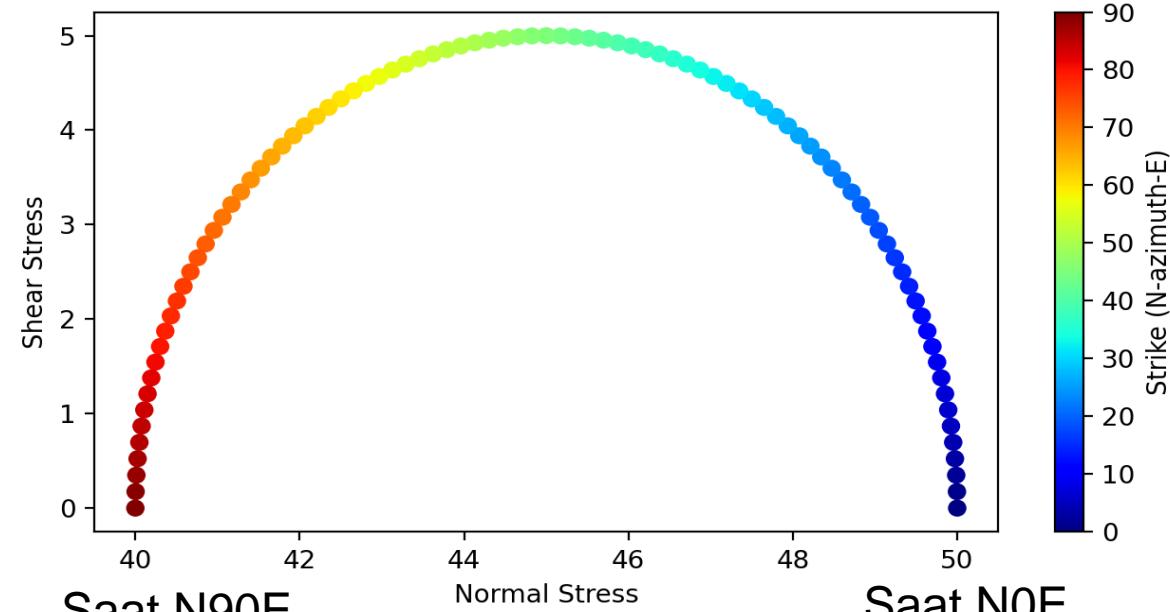
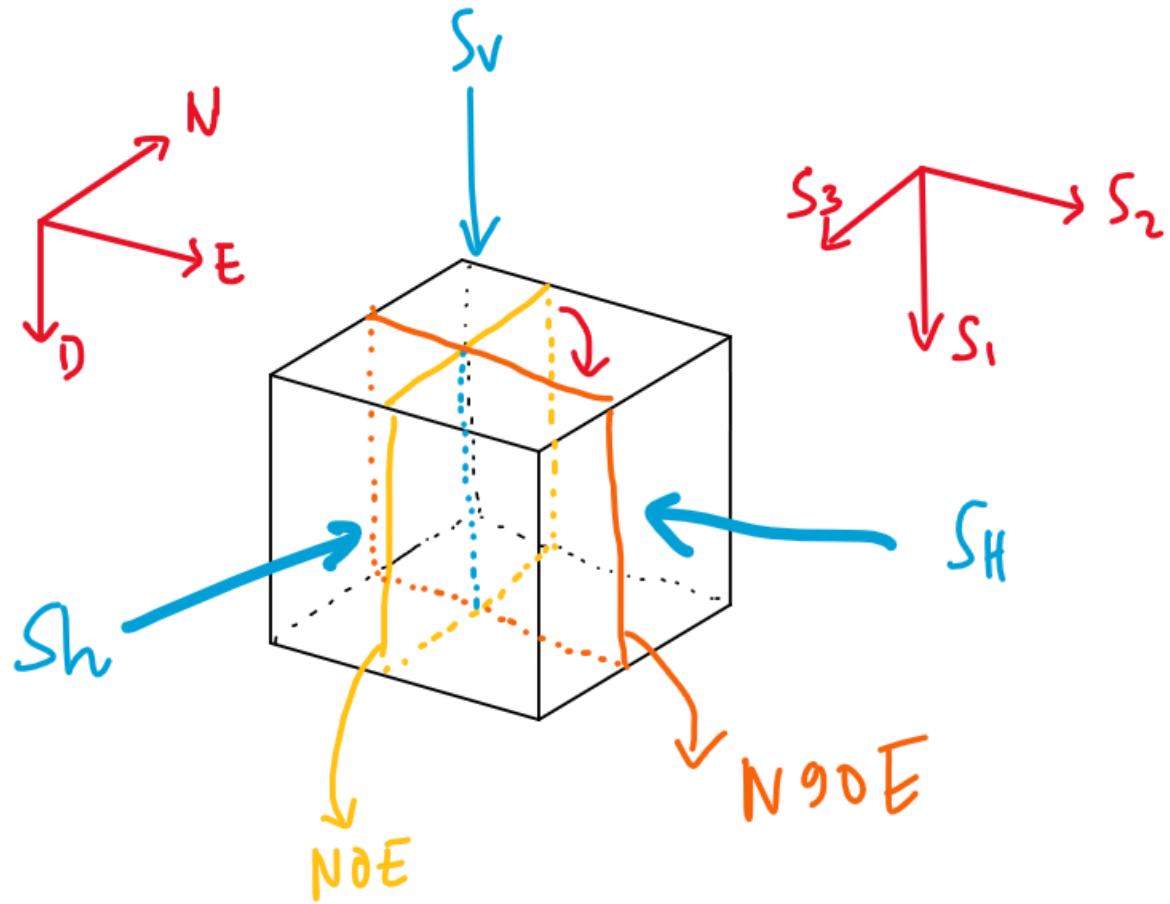
# plotting
plt.figure(dpi=200)
plt.scatter(all_normal, all_shear, c=strikes, cmap='jet')
plt.colorbar(label='Strike (N-azimuth-E)')
plt.xlabel('Normal Stress')
plt.ylabel('Shear Stress')
plt.show()

```



Seperti familiar?

$S_v = 90$, $SH=50$, $Sh=40$, dengan azimuth SH = N90E

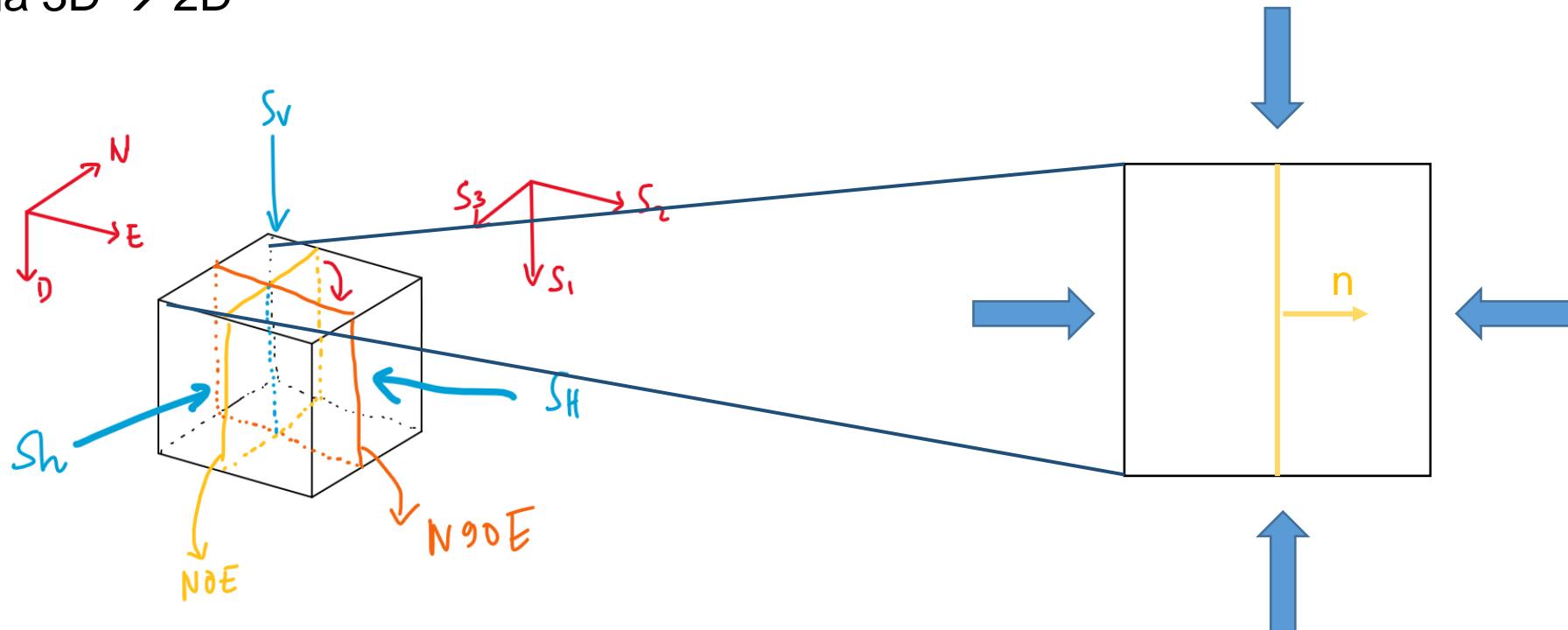


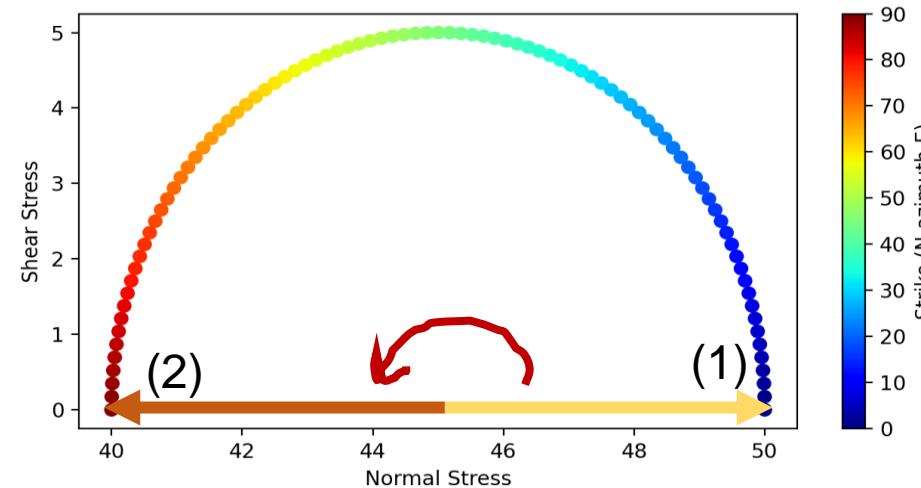
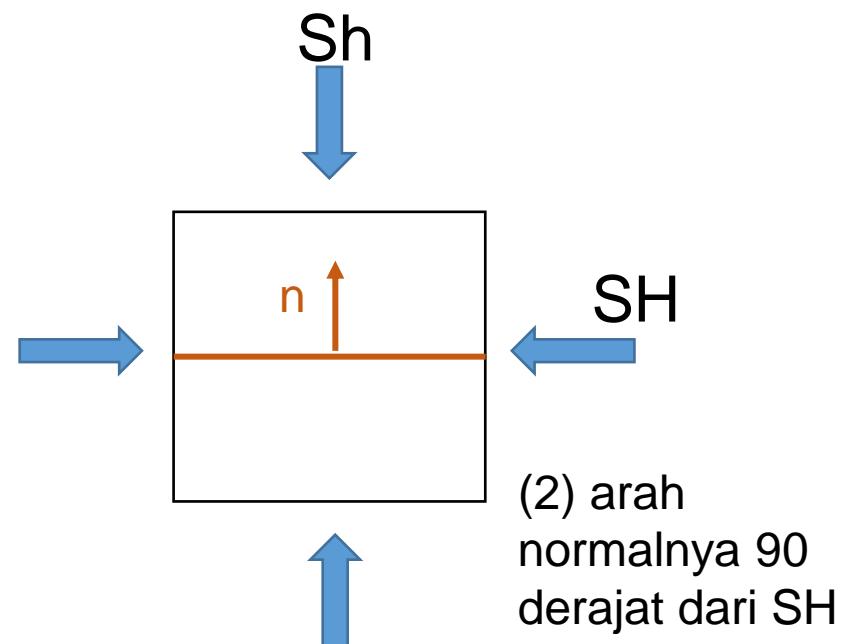
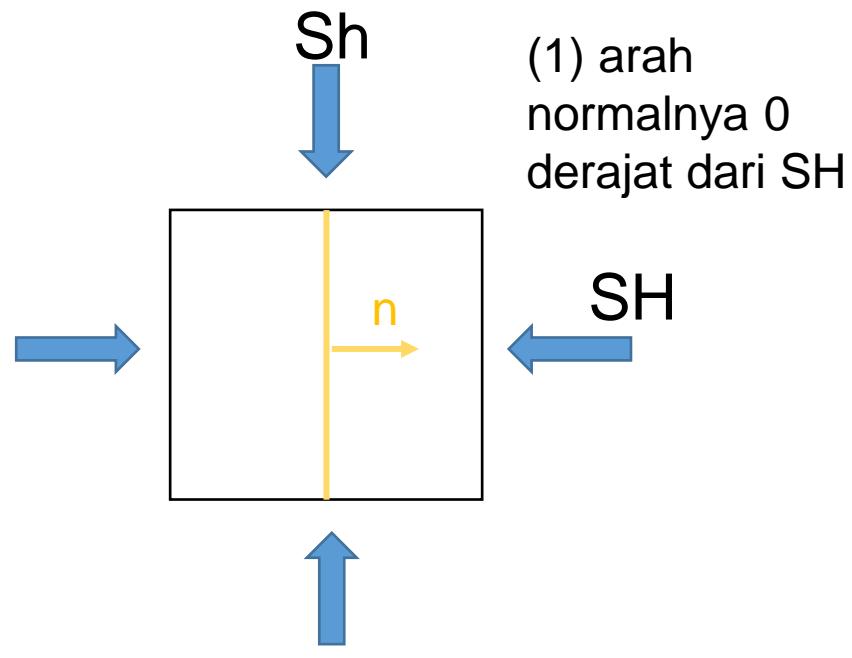
Saat N90E,
stress yang
bekerja
pada bidang
murni Sh

Saat N0E,
stress yang
bekerja
pada bidang
murni SH

Plane Stress dan Mohr Circle

- Plot yang kita dapat sebelumnya bagaimana ide Mohr circle diciptakan
- Mohr circle menyatakan stress yang bekerja pada bidang yang memiliki normal tegak lurus sumbu rotasi
- **Dengan syarat sumbu rotasi bidangnya harus berada pada principal axis**
- Asumsi plane stress = stress arah sumbu rotasinya tidak berubah secara signifikan, sehingga 3D → 2D





Namun di Mohr circle bidang (2) berjarak 180 derajat dari SH

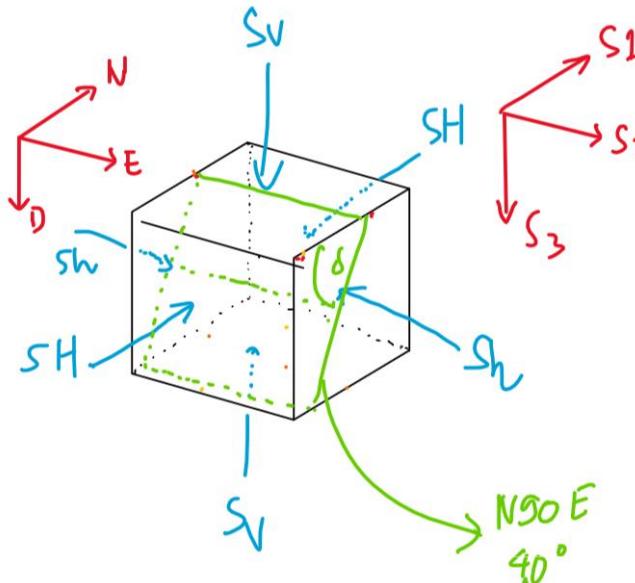
Sudut di Mohr circle = 2 x sudut rotasi di kenyataannya

Kegunaan 1 Mohr's circle

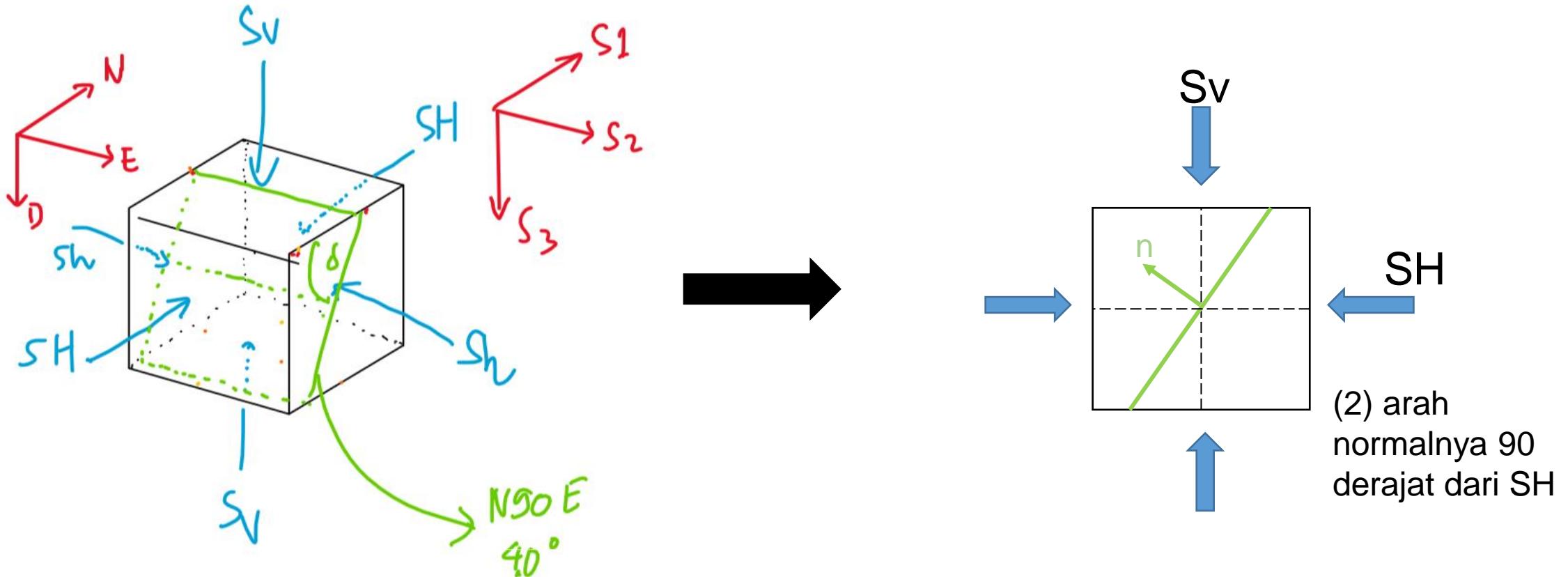
Mencari stress di suatu orientasi bidang acak diketahui principal stressnya.

Contoh : Diketahui suatu daerah dengan rezim reverse faulting, $S_v = 40$, $S_H = 70$, $S_h = 50$, dan azimuth S_H N0E. Tentukan stress pada bidang dengan kedudukan berikut

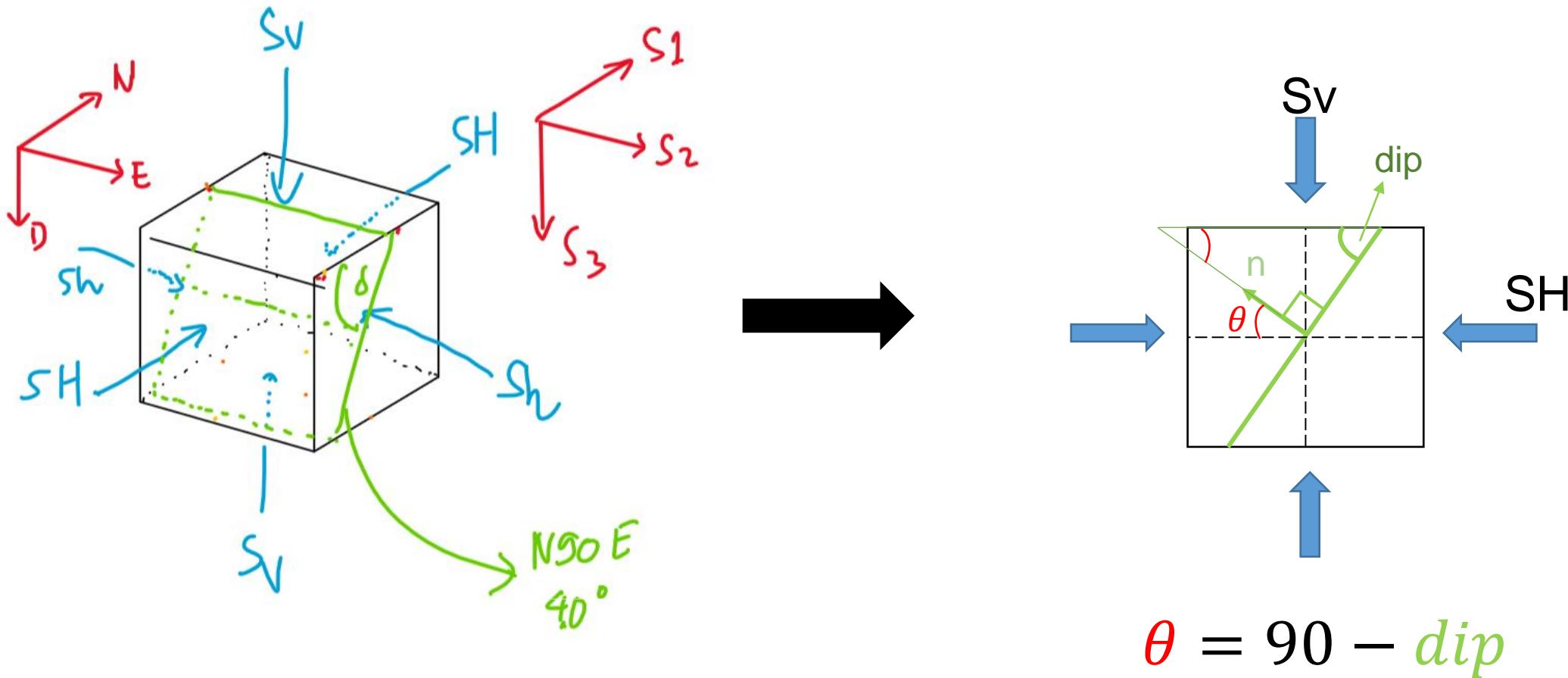
a.) N90E, dip = 40

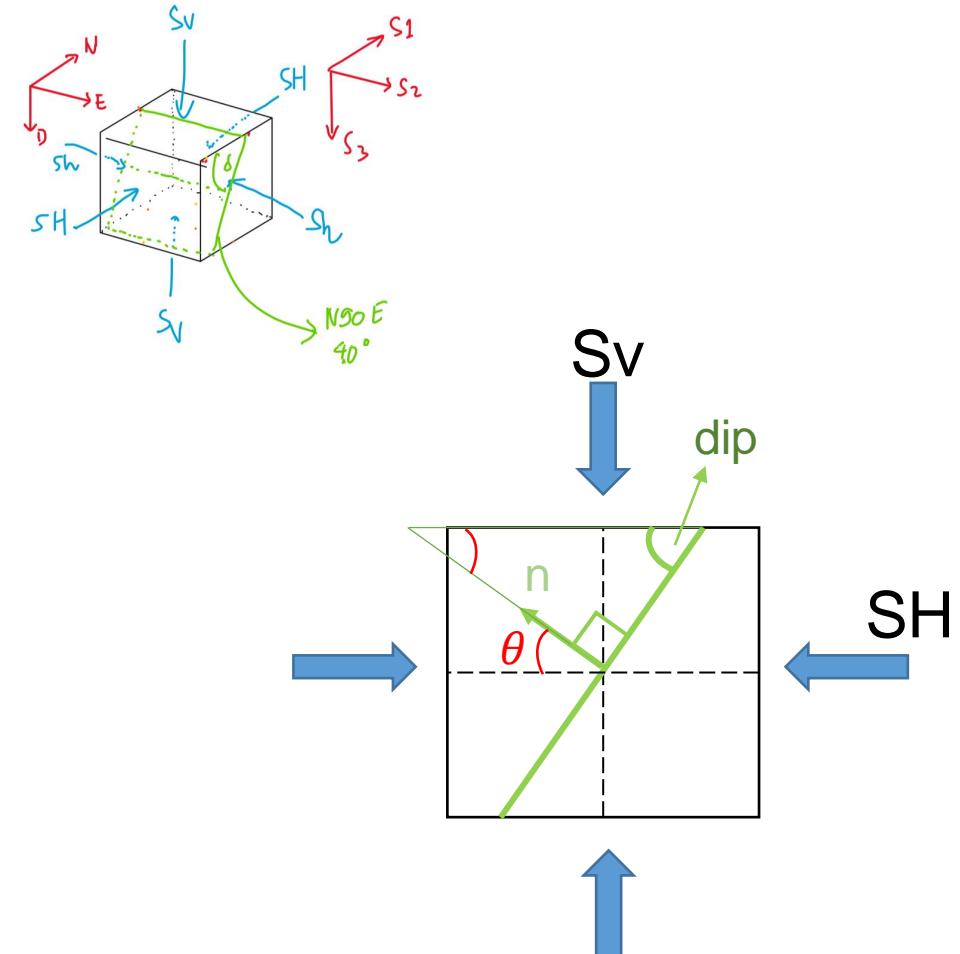


- Vektor normal bidangnya tegak lurus dengan arah Sh (Sh sebagai sumbu putar Mohr circlenya)



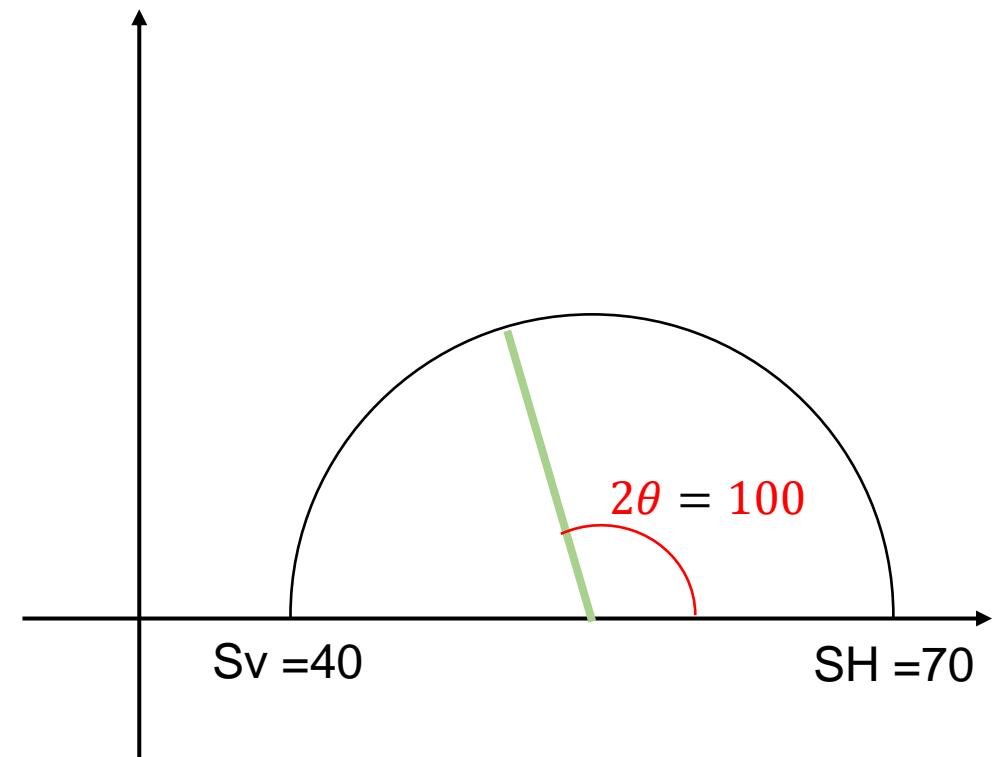
- Vektor normal bidangnya tegak lurus dengan arah Sh (Sh sebagai sumbu putar Mohr circlenya)



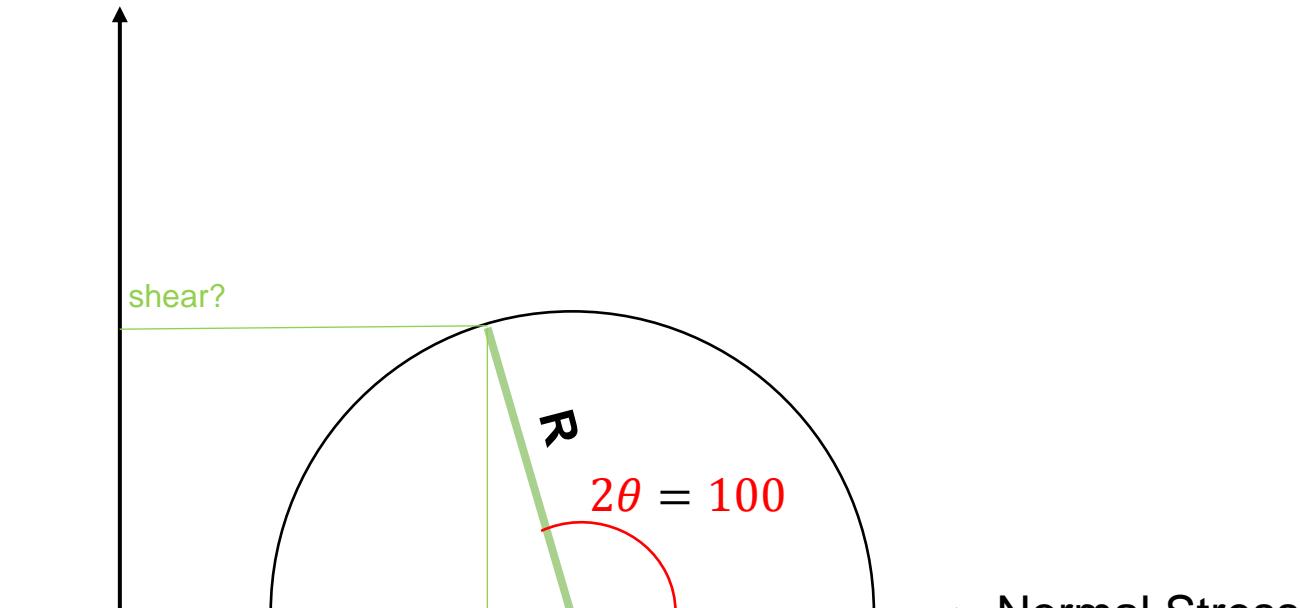


$$\theta = 90 - \text{dip}$$

$$\theta = 50$$



Shear Stress



R = radius
 C = center

$$C = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{70 + 40}{2} = 55$$

$$R = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{70 - 40}{2} = 15$$

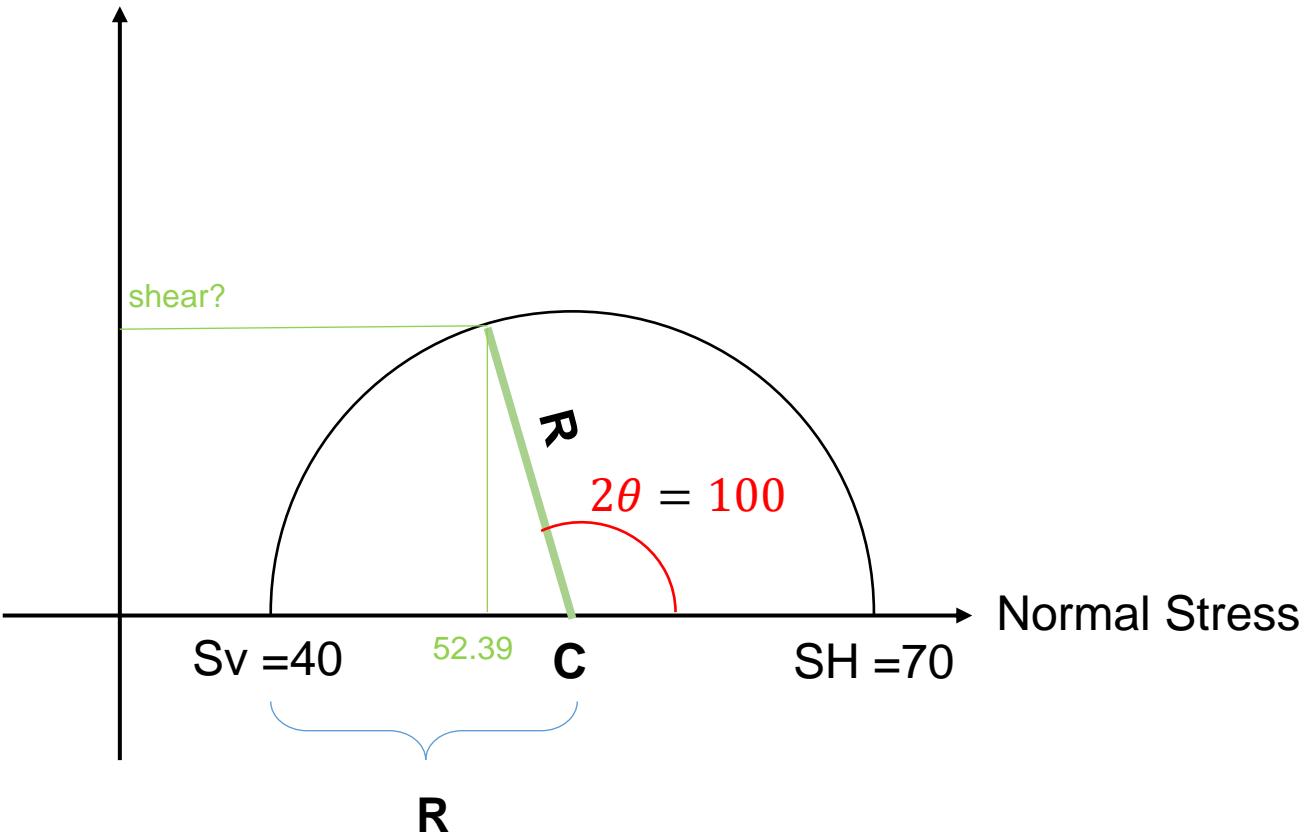
$$\text{normal} = C - R \cos(180 - 2\theta) = C + R \cos(2\theta)$$

$$\text{normal} = 55 - 15 \cos(80) = 55 + 15 \cos(100)$$

$$\text{normal} = 55 - 15(0.1736) = 55 + 15(-0.1736)$$

$$\text{normal} = 52.39$$

Shear Stress



R = radius
C = center

$$C = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{70 + 40}{2} = 55$$

$$R = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \frac{70 - 40}{2} = 15$$

$$\text{shear} = \sqrt{R^2 - (C - \text{normal})^2}$$

$$\text{shear}_n = \sqrt{15^2 - (55 - 52.39)^2}$$

$$\text{shear}_n = 14.71$$

Kegunaan Mohr's circle 2

Mencari principal stress dari stress state sembarang (dengan catatan satu sumbu lainnya sudah di principal axis)

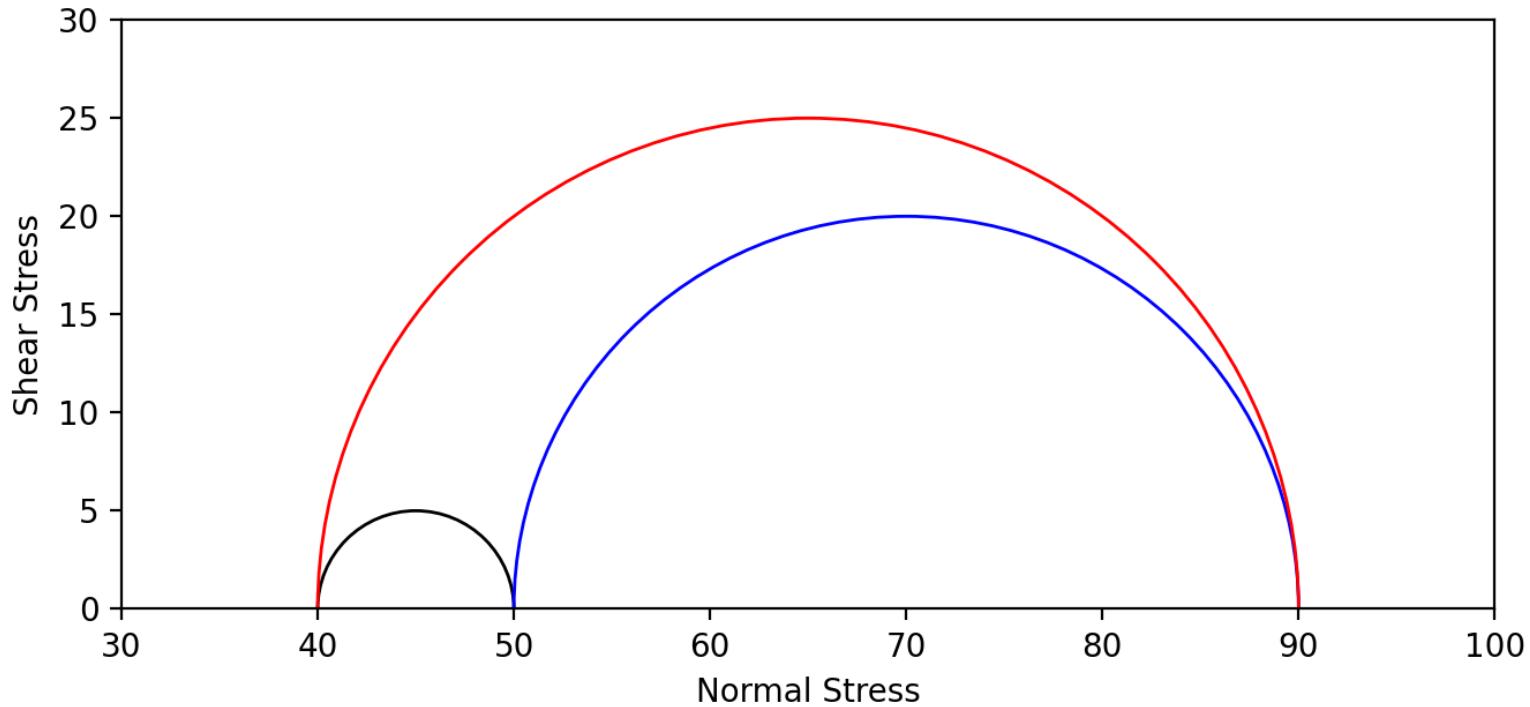
*prinsipnya sama hanya yang diketahui stress pada bidang yang bukan principal, kita bisa menyelesaiakannya dengan logika yang sama dengan problem sebelumnya

Mungkin pertanyaan sampai sini

- Bagaimana jika orientasi normal bidangnya tidak tegak lurus dengan principal stress/acak ?

3D stress state

Misal untuk rezim normal faulting dengan $S_v = 90$, $SH=50$, $Sh=40$, dengan azimuth SH = N90E



Functions untuk plotting 3D Mohr

```
def plot_circle(a, b, ax=None, **kwargs):
    center = (a + b)/2
    radius = abs((b - a)/2)

    draw_circle = plt.Circle((center, 0), radius,
                           fill=False, **kwargs)

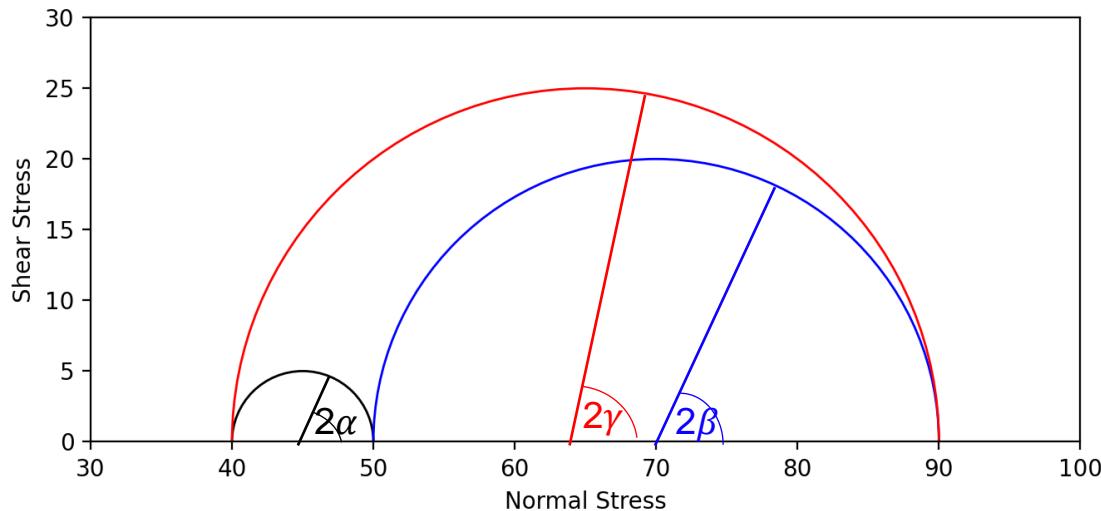
    if ax is None:
        ax = plt.gca()

    ax.set_aspect(1)
    ax.add_artist(draw_circle)
```

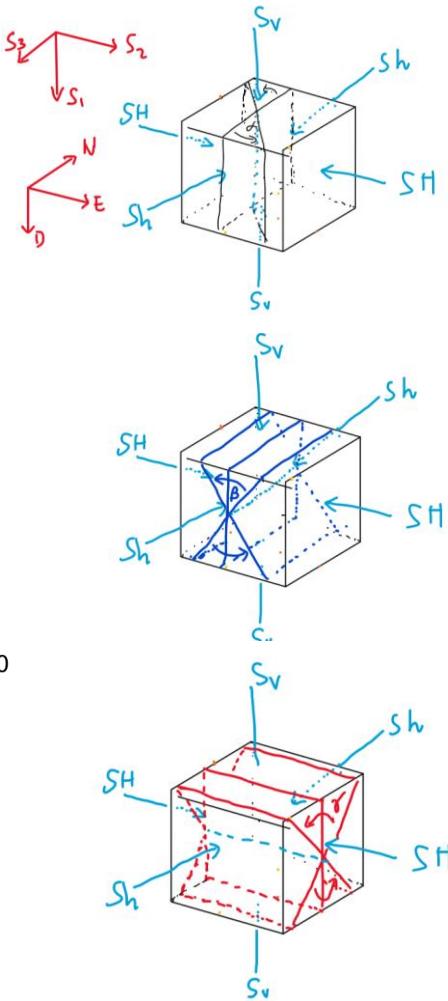
```
def mohr_3d(s1, s2, s3):
    plot_circle(s3, s2, color='k')
    plot_circle(s2, s1, color='b')
    plot_circle(s3, s1, color='r')
    plt.xlim(30, 100)
    plt.ylim(0, 30)
    plt.xlabel('Normal Stress')
    plt.ylabel('Shear Stress')
```

3D stress state

Misal untuk rezim normal faulting dengan $S_v = 90$, $S_H=50$, $S_h=40$, dengan azimuth SH = N90E



* α, β, γ disini, tidak sama dengan sudut untuk transformasi koordinat



Lingkaran mohr yang berwarna hitam menggambarkan kombinasi stress yang mungkin untuk orientasi bidang dengan normal tegak lurus terhadap S_v

Lingkaran mohr yang berwarna biru menggambarkan kombinasi stress yang mungkin untuk orientasi bidang dengan normal tegak lurus terhadap S_h

Lingkaran mohr yang berwarna merah menggambarkan kombinasi stress yang mungkin untuk orientasi bidang dengan normal tegak lurus terhadap S_v

Percobaan untuk bidang dengan orientasi acak

```
import matplotlib.pyplot as plt
import random
Sg = np.array([[40, 0, 0],
              [0, 50, 0],
              [0, 0, 90]])

# jumlah bidang
n = 500

# strike random dari 0-360 dengan jumlah n
strikes = [random.uniform(0, 360) for _ in range(n)]

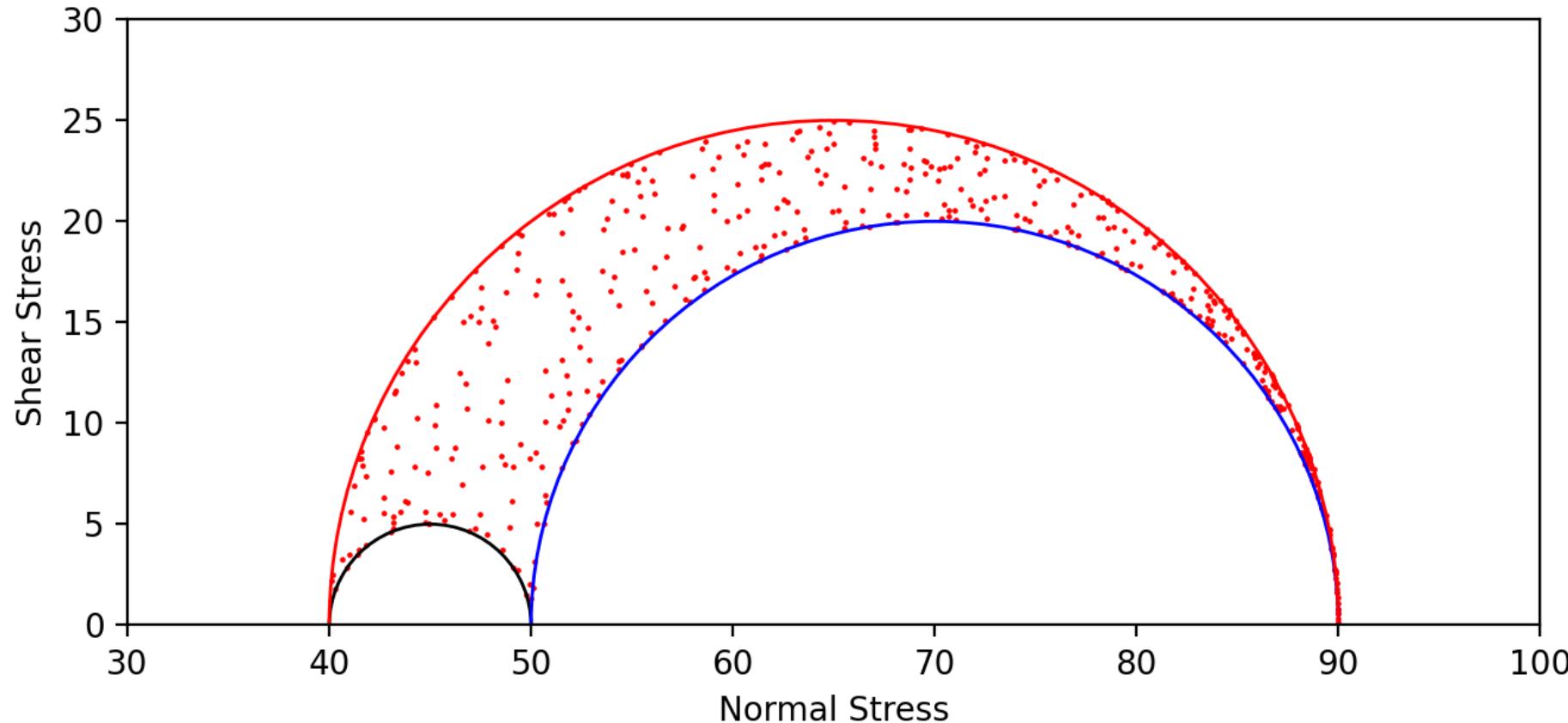
# dip random dari 0-90 dengan jumlah n
dips = [random.uniform(0, 90) for _ in range(n)]

# plot mohr 3d
plt.figure(dpi=200)
mohr_3d(90, 50, 40)

# loop untuk tiap kombinasi acak strik dan dip
for strike, dip in zip(strikes, dips):
    normal, shear = stress2plane(Sg, strike, dip)
    plt.scatter(normal, shear, c='r', s=0.5)

plt.show()
```

Percobaan untuk bidang dengan orientasi acak

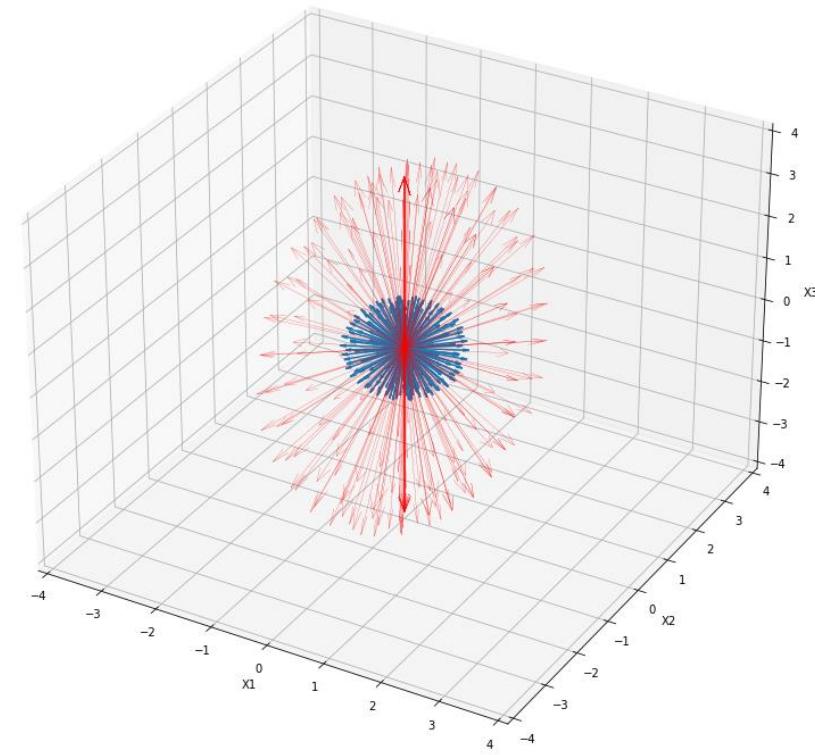
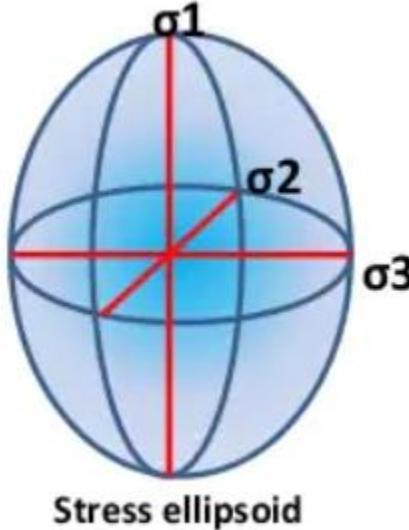
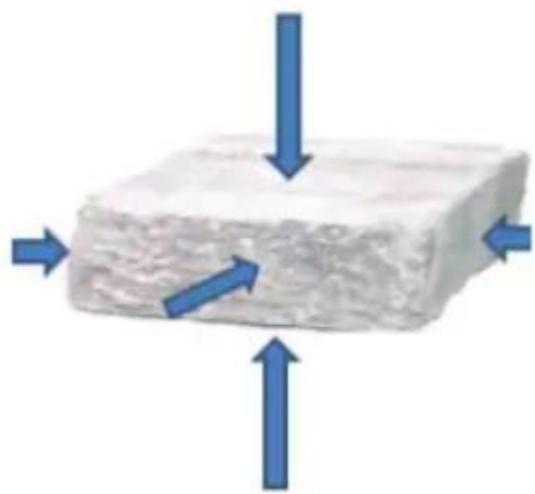


- Titik-titik merah menandakan kombinasi normal dan shear stress 500 bidang dengan orientasi acak.

Mohr's Circle summary

- Alat untuk menghitung secara grafis stress normal dan shear pada orientasi bidang dengan arah normal tegak lurus terhadap salah satu sumbu principal.
- Menggunakan pendekatan plane stress
- Untuk orientasi bidang yang normalnya tidak tegak lurus sumbu utama perlu dilakukan proyeksi stress tensor ke bidang sesar secara menyeluruh.

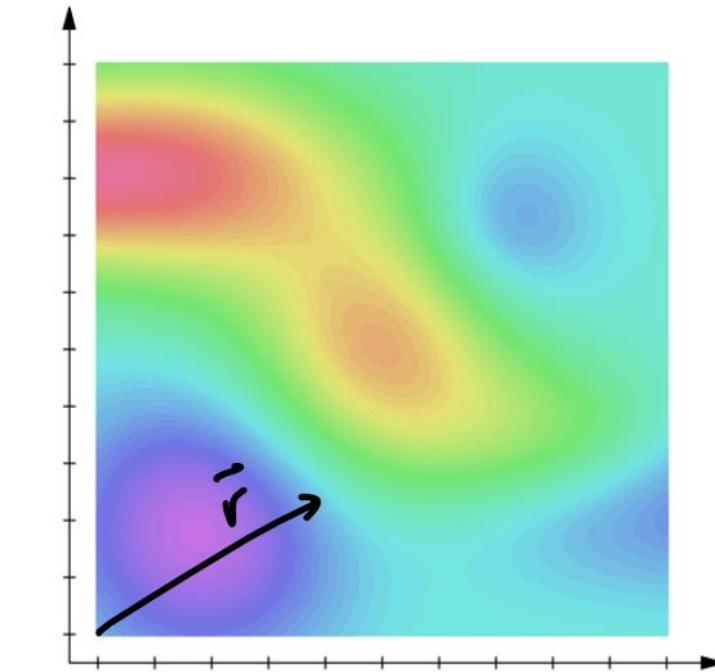
Tensor (Perspektif Lain)



Notion of Tensor

- Untuk mendapat perspektif lain dari Tensor, kita dapat menggunakan analogi menggunakan sesuatu yang lebih familiar, yaitu medan skalar

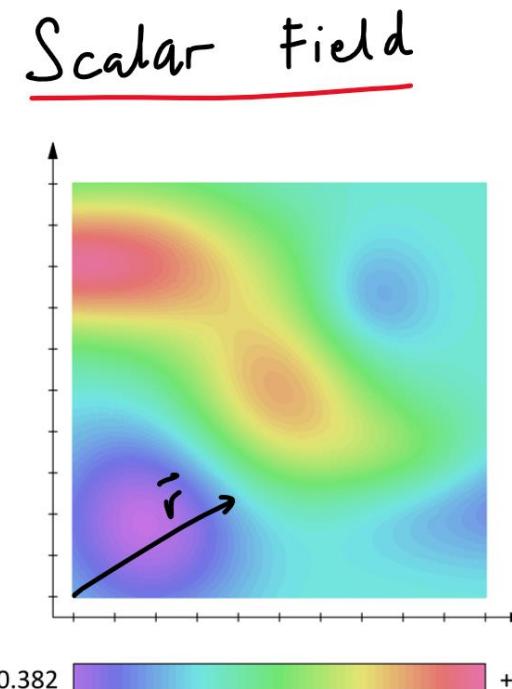
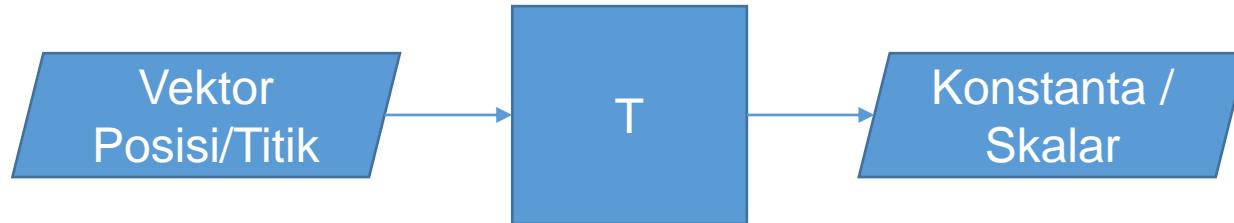
Scalar Field



-0.382 +0.459

Notion of Tensor

- Medan skalar berasal dari fungsi T yang menerima input berupa titik / vektor posisi di ruang dua dimensi dan memetakan titik tersebut ke suatu nilai/skalar.

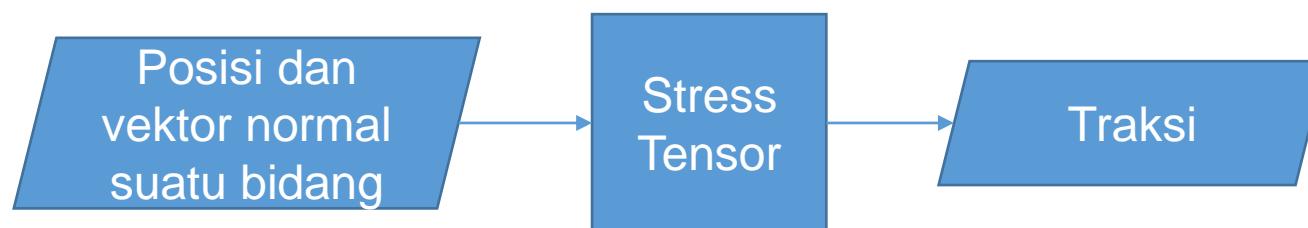


$$T(x, y, z) = C$$
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$T(\vec{r}) = C$$

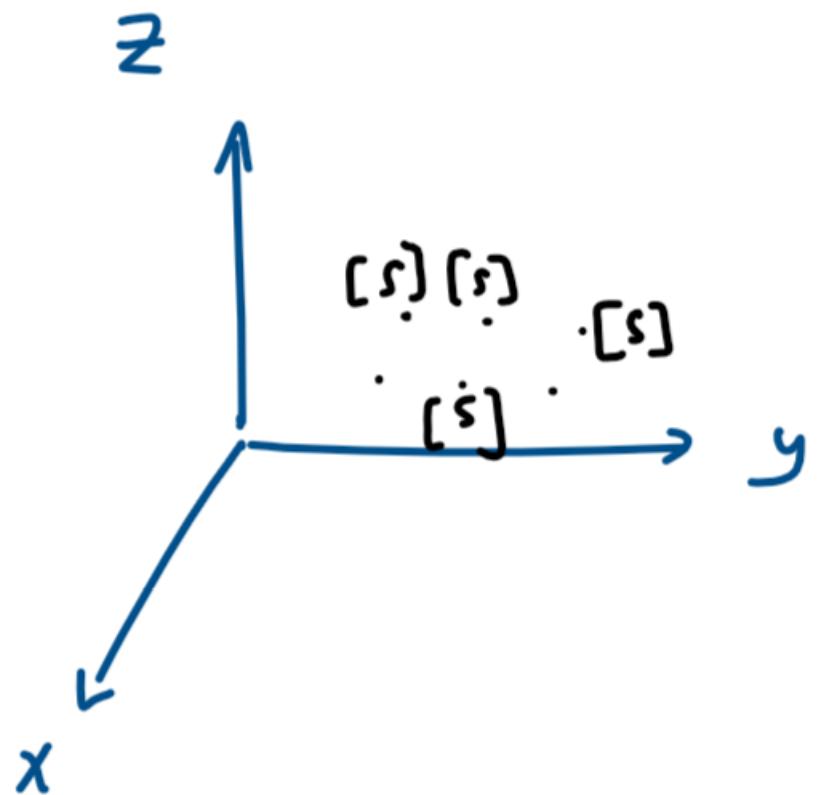
Field Tensor

- Traksi (x, n) = Traksi adalah vektor yang bergantung pada posisi (x) dan orientasi vektor normal suatu bidang (n)
- Stress Tensor = Objek yang menyimpan informasi tentang vektor traksi untuk semua orientasi bidang di suatu posisi
- **Stress tensor** dapat dilihat sebagai objek yang **memetakan vektor normal ke vektor traksi**

$$T = S \cdot n$$



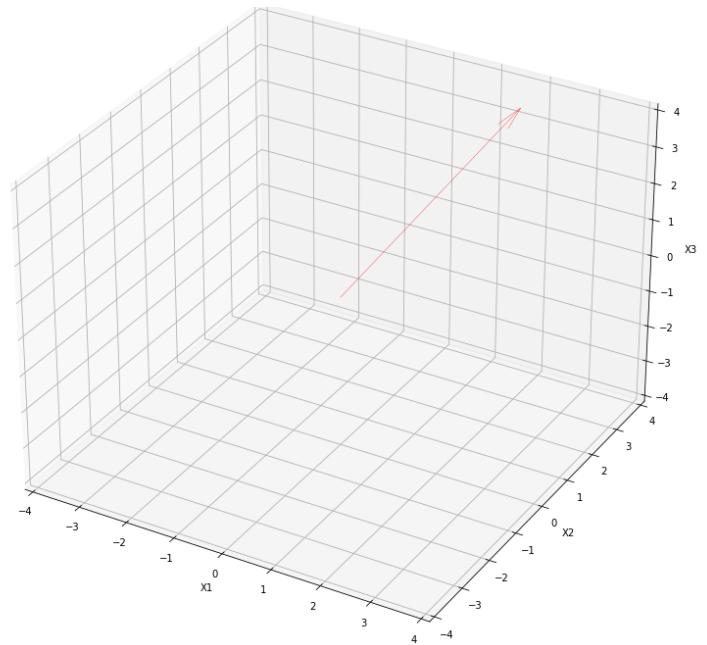
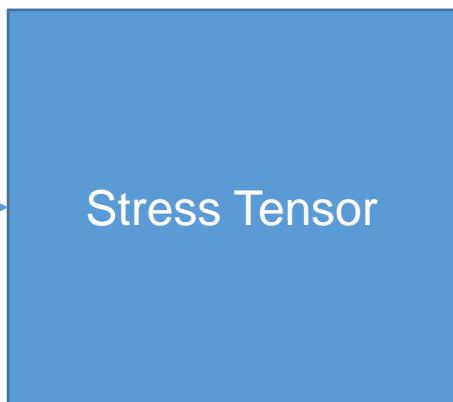
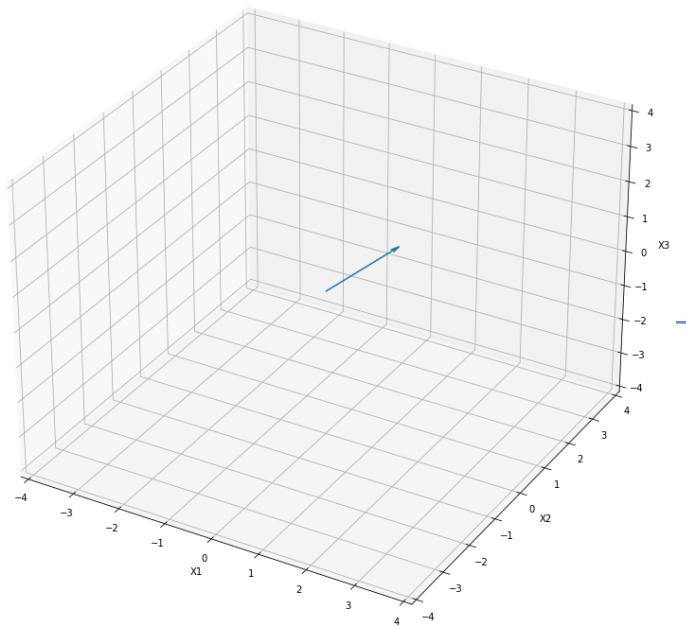
Field Tensor



Misal stress state
daerah ini dituliskan oleh
stress tensor

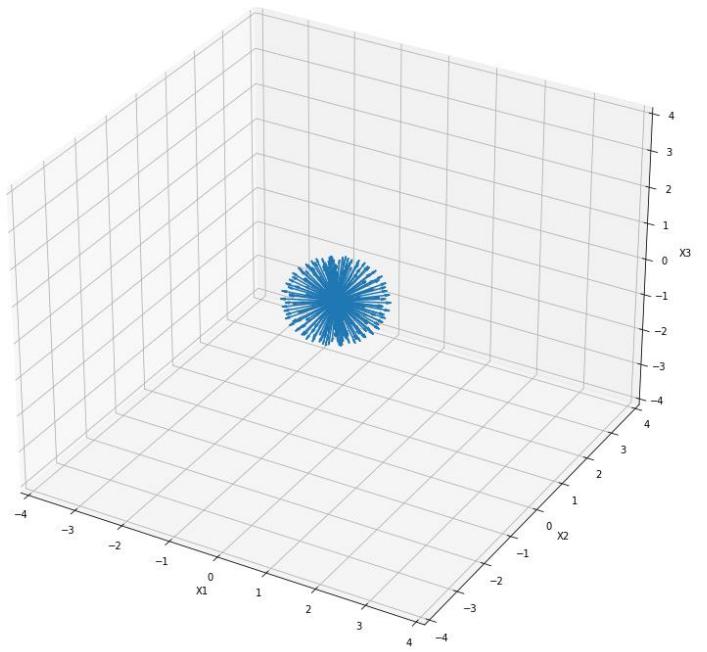
$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \underline{\underline{S}} \underline{n}$$

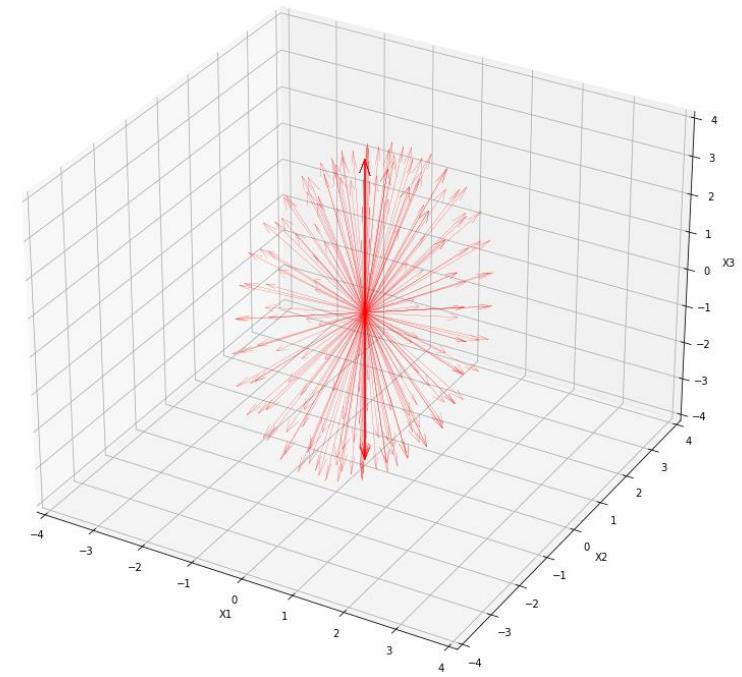
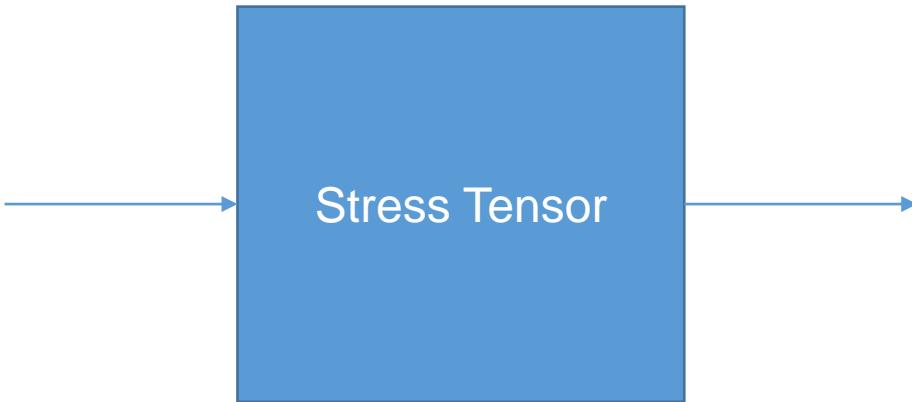


Vektor unit normal
suatu bidang

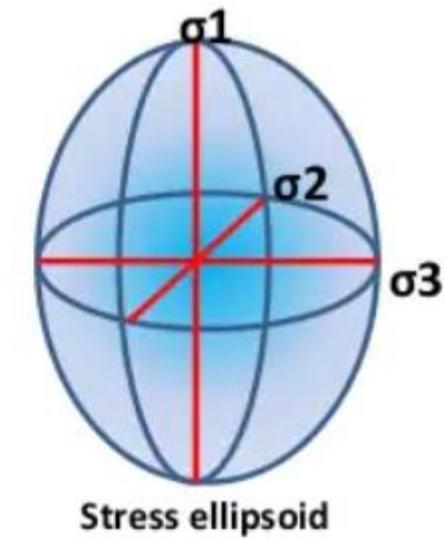
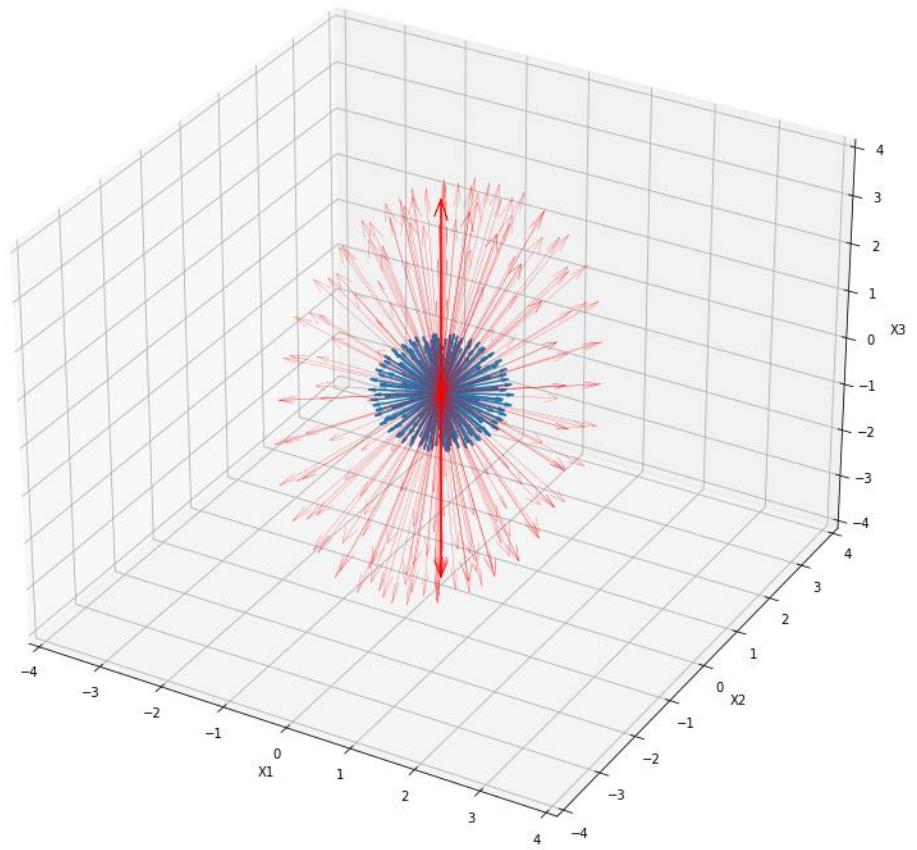
Vektor Traksi di bidang yang
orientasinya dinyatakan
oleh input vektor unit normal

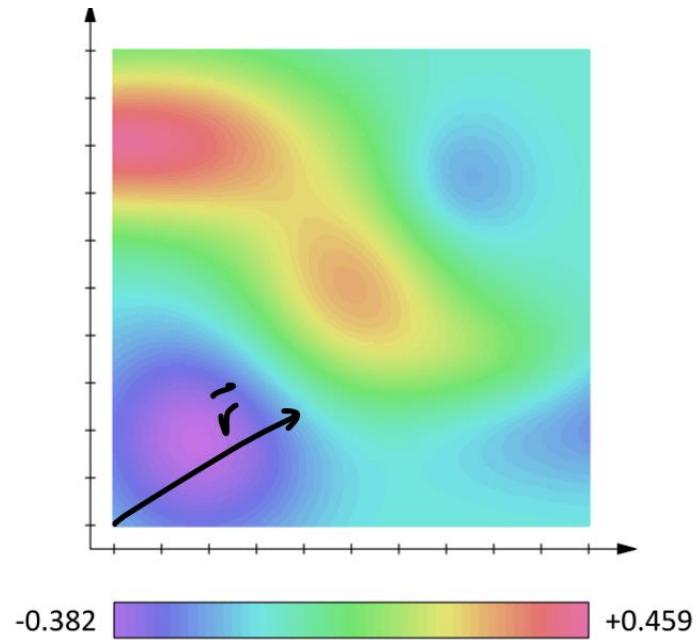


Vektor unit normal
untuk semua
kemungkinan
orientasi bidang



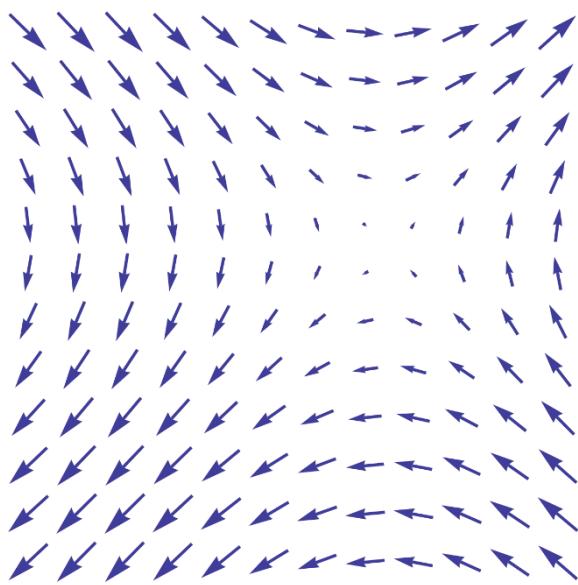
Vektor Traksi untuk semua
kemungkinan bidang





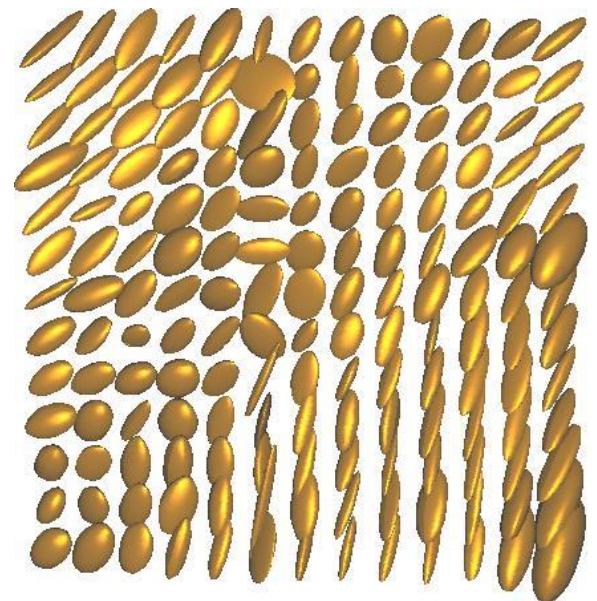
Scalar Field

Titik dipetakan ke skalar



Vector Field

Titik dipetakan ke **satu buah** vektor



Tensor Field

Vektor dipetakan ke vektor untuk satu titik

03 – Frictional Faulting Theory

Intro to Shear Failure

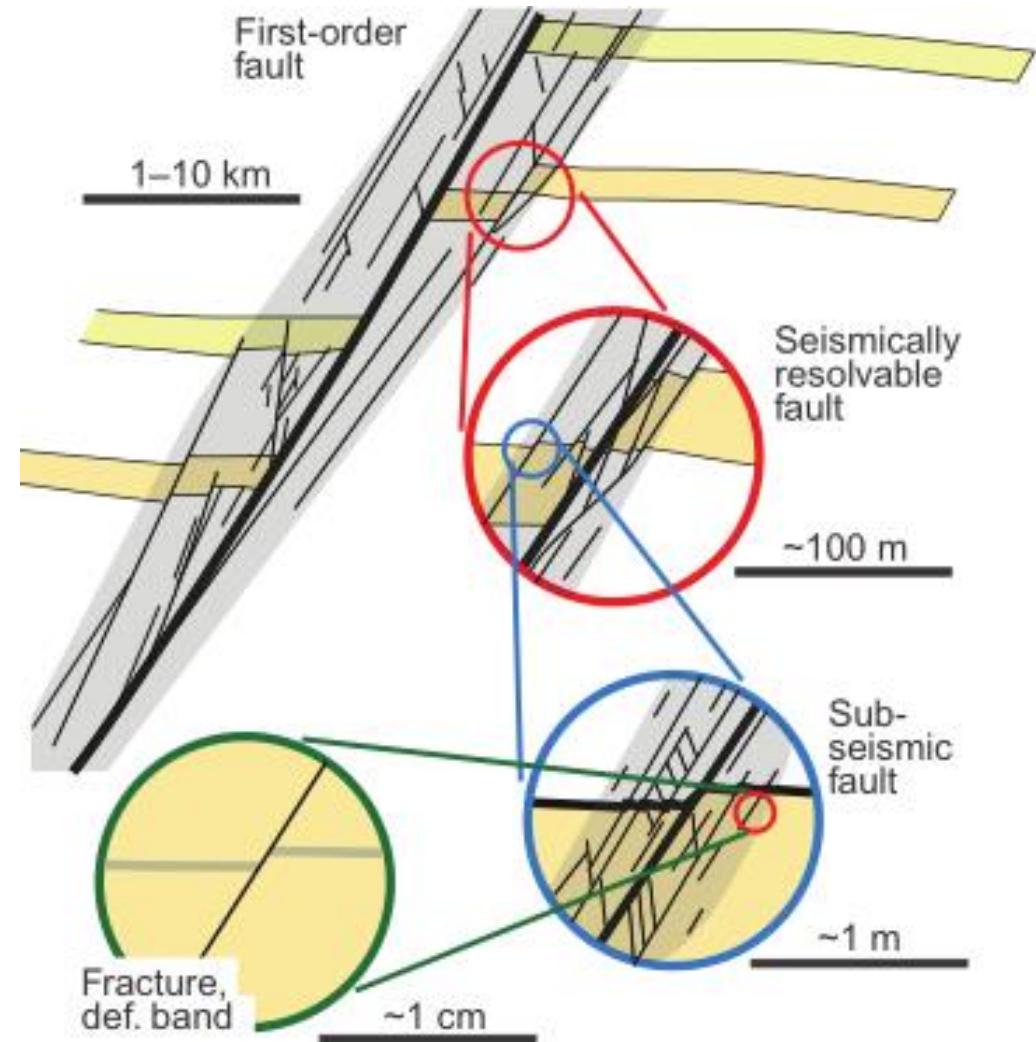
Problem mekanika di fisika dasar



Berapa gaya yang dibutuhkan hingga balok tepat akan bergerak?

Shear Failure

- Failure yang terjadi ketika sebagian dari material bergerak relatif terhadap bagian lainnya pada suatu bidang.
- Apakah shear failure hanya disebabkan oleh shear stress?



Mohr-Coulomb Faulting criterion

- Untuk preexisting fault, shear Failure akan terjadi saat

$$|\tau| = \mu\sigma_n$$

τ = Shear stress

S_o = Cohesion

σ_n = Normal effective stress ($S_n - P_p$)

μ = Koefisien friksi internal

Mohr-Coulomb Faulting criterion

- Untuk batuan intact, shear Failure akan terjadi saat

$$|\tau| = S_o + \mu\sigma_n$$

τ = Shear stress

S_o = Cohesion

σ_n = Normal effective stress ($\sigma_n = S_n - P_p$)

μ = Koefisien friksi internal

Mohr-Coulomb

$$\sigma_1 = C_0 + q\sigma_3$$

$$q = [(\mu_i^2 + 1)^{1/2} + \mu_i]^2 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

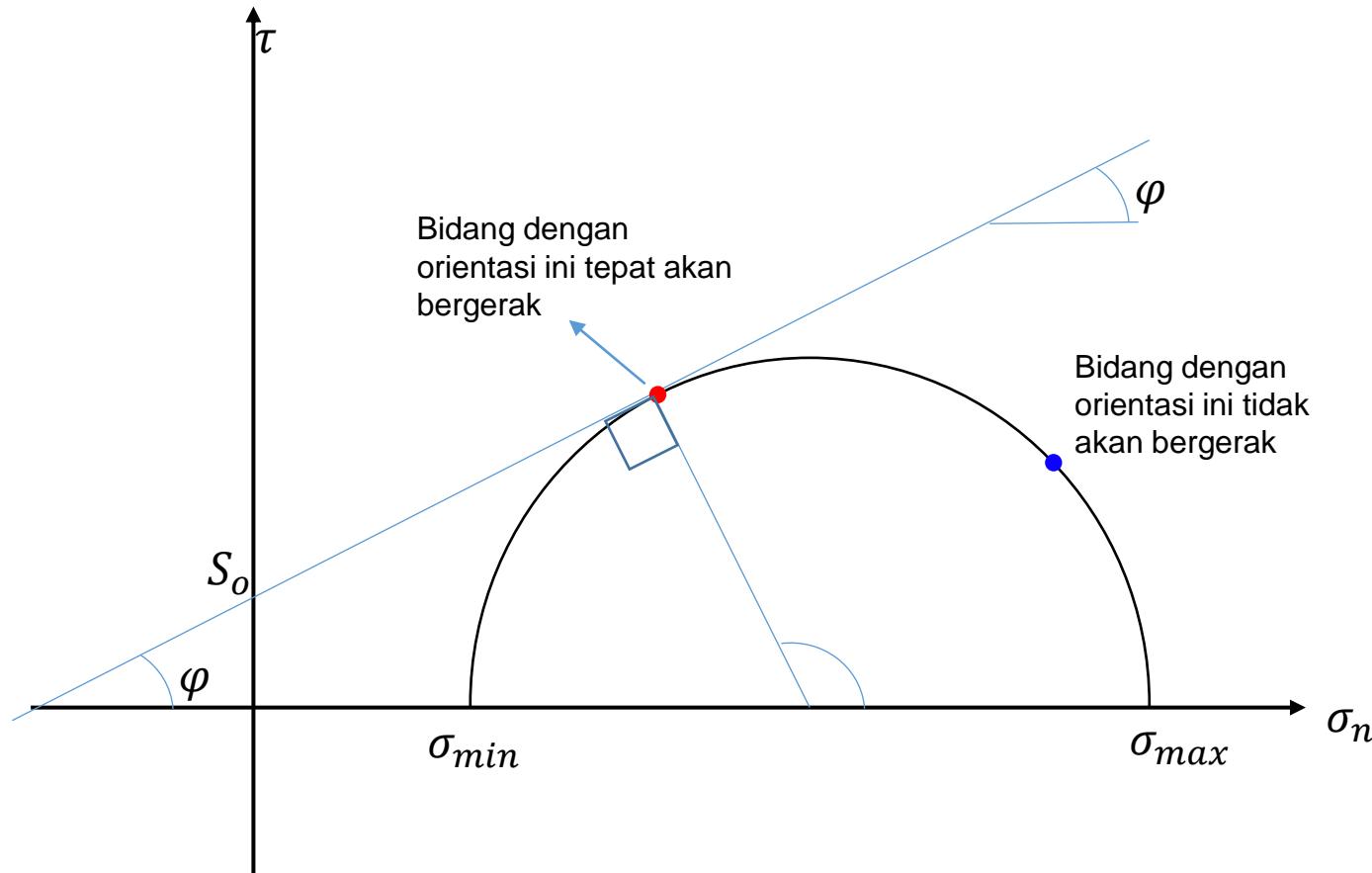
$$\phi = \tan^{-1}(\mu_i)$$

Analogi dengan problem mekanika dasar

$$|\tau| = \mu \sigma_n$$

$$F_s = \mu_s F_N$$

Normal stress – Shear stress plane



$$|\tau| = S_o + \mu\sigma_n$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\mu)$$

φ = angle of internal friction

Shear Failure terjadi saat Mohr's circle menyentuh failure envelope

Contoh

- Pada suatu daerah normal Faulting, $S_v = 40$, $S_H=30$, $S_h=25$, dan Pore Pressure = 10, dan azimuth $S_H = N0E$, asumsikan bahwa nilai $\mu = 0.6$. Di daerah tersebut terdapat dua fault dengan orientasi $N0E/dip1$ dan $N180E/20$, fault manakah yang lebih rawan untuk slip?

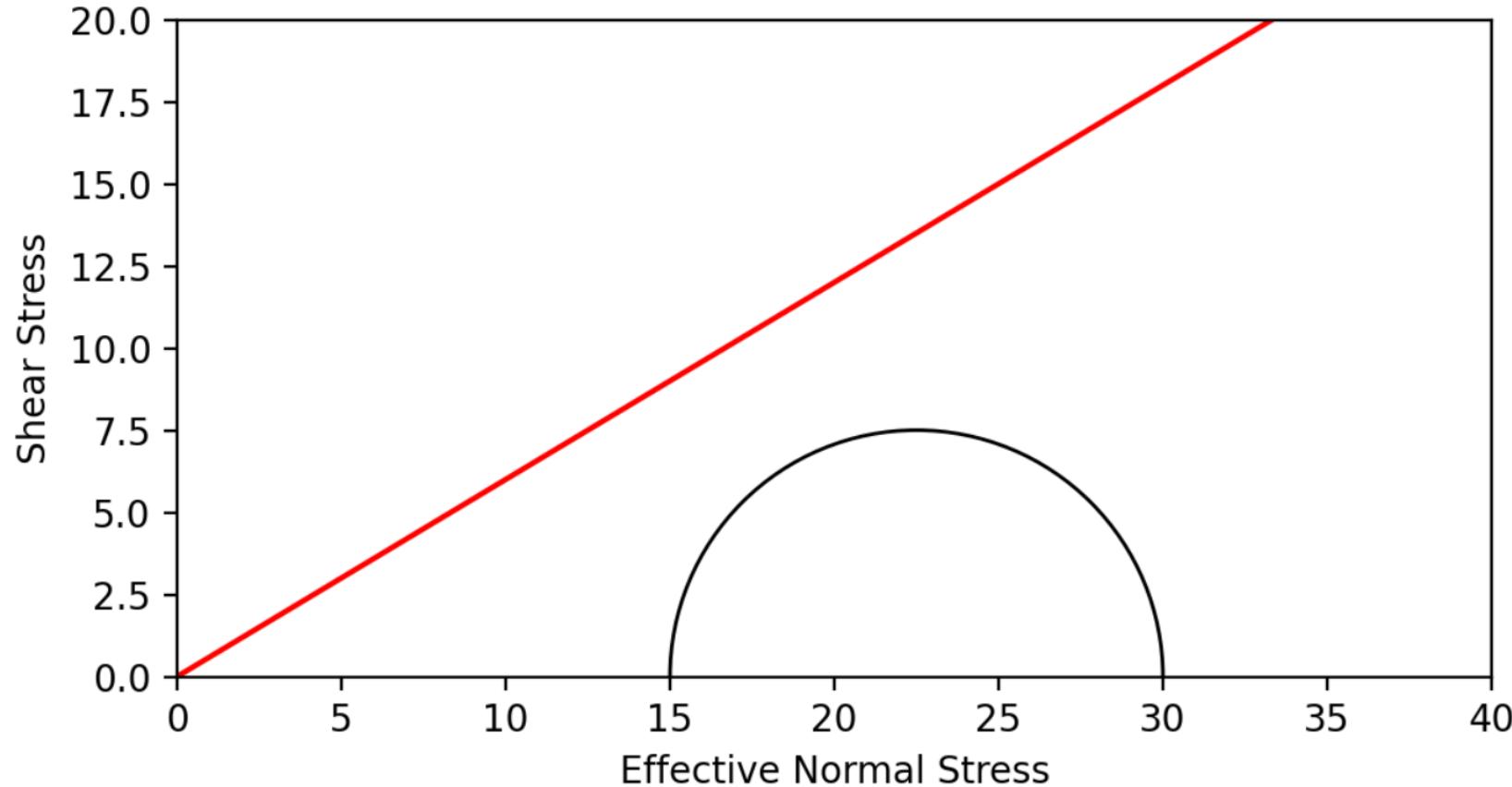
$$\sigma_1 = S_v - P_p = 40 - 10 = 30$$

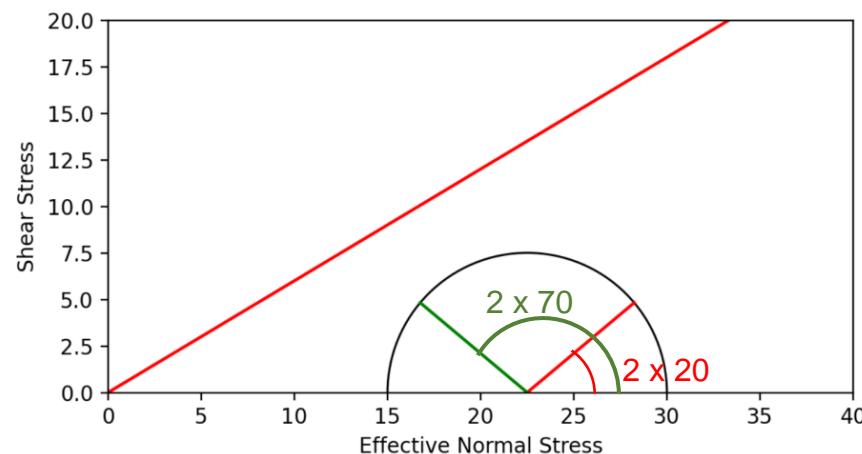
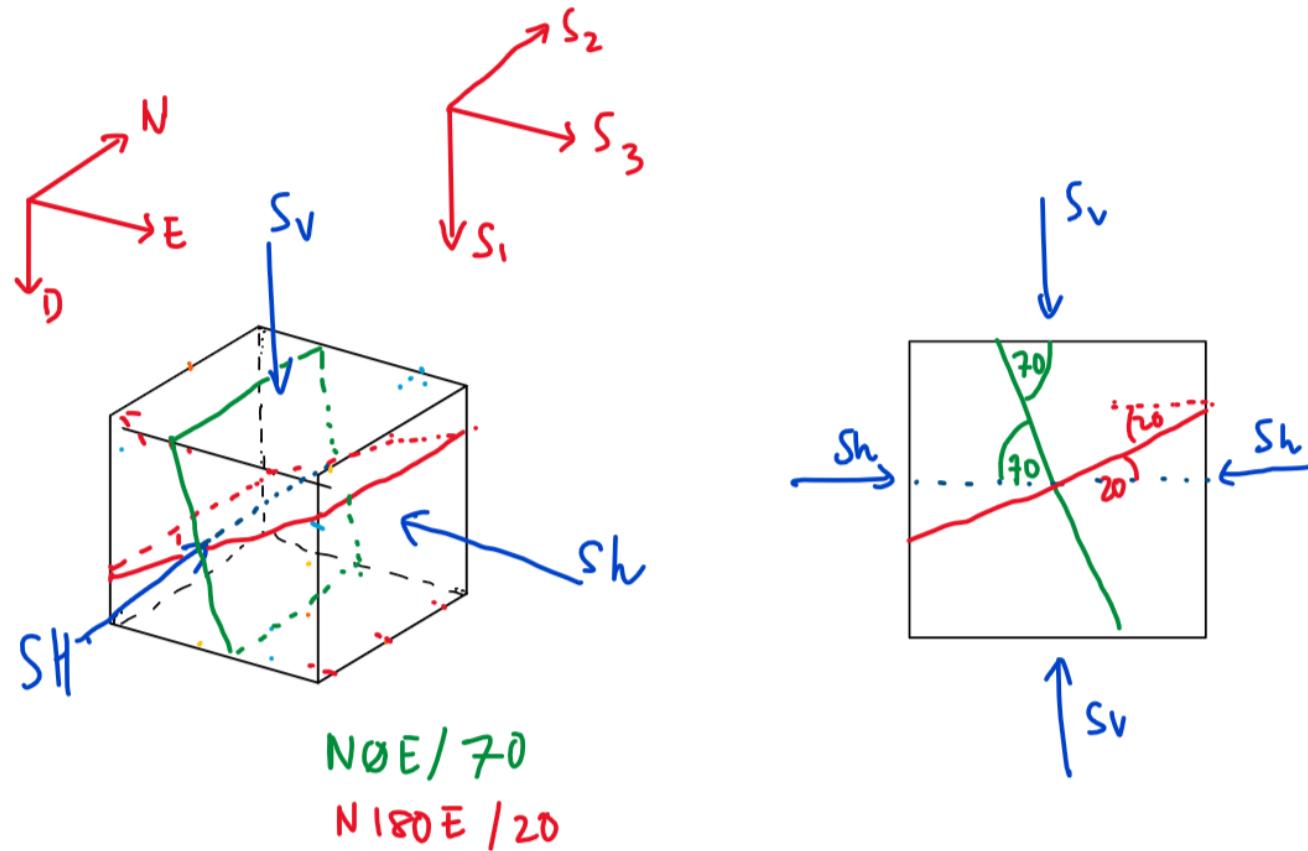
$$\sigma_2 = S_H - P_p = 30 - 10 = 20$$

$$\sigma_3 = S_h - P_p = 25 - 10 = 15$$

$$\varphi = \text{atan}(0.6) = 0.31 \text{ derajat}$$

Mohr's Circle dan Failure Criterion





Jadi, Fault dengan orientasi N0E/70 lebih rawan slip dibandingkan fault dengan orientasi N180E/20

Efek pore pressure

- Masih sama dengan kasus sebelumnya, namun bagaimana jika pore pressurenya naik menjadi 20?

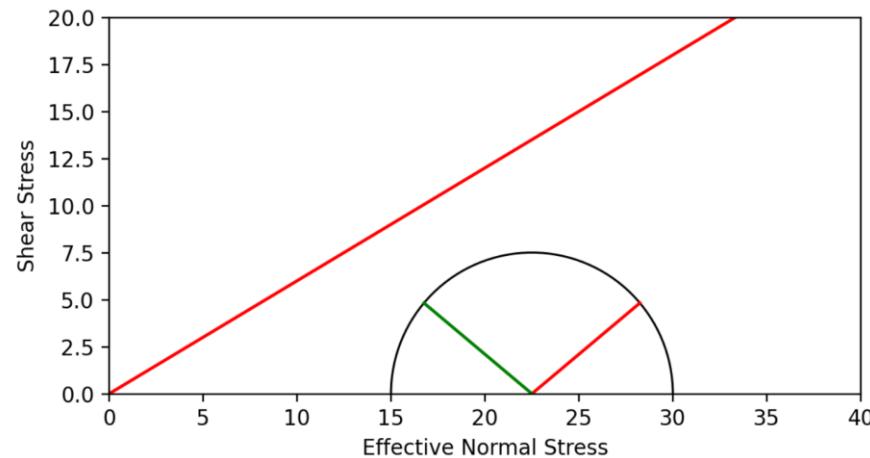
$$\sigma_1 = S_v - P_p = 40 - 20 = 20$$

$$\sigma_2 = S_H - P_p = 30 - 20 = 10$$

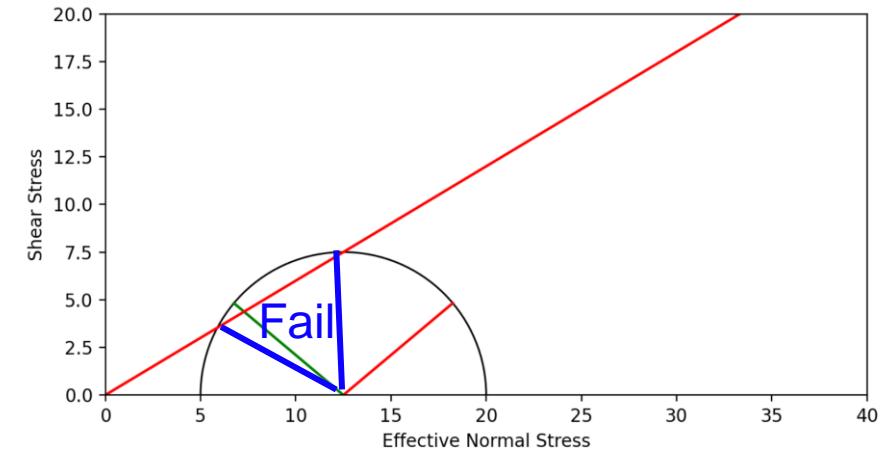
$$\sigma_3 = S_h - P_p = 25 - 20 = 5$$

$$\varphi = \tan(0.6) = 0.31 \text{ derajat}$$

Efek pore pressure

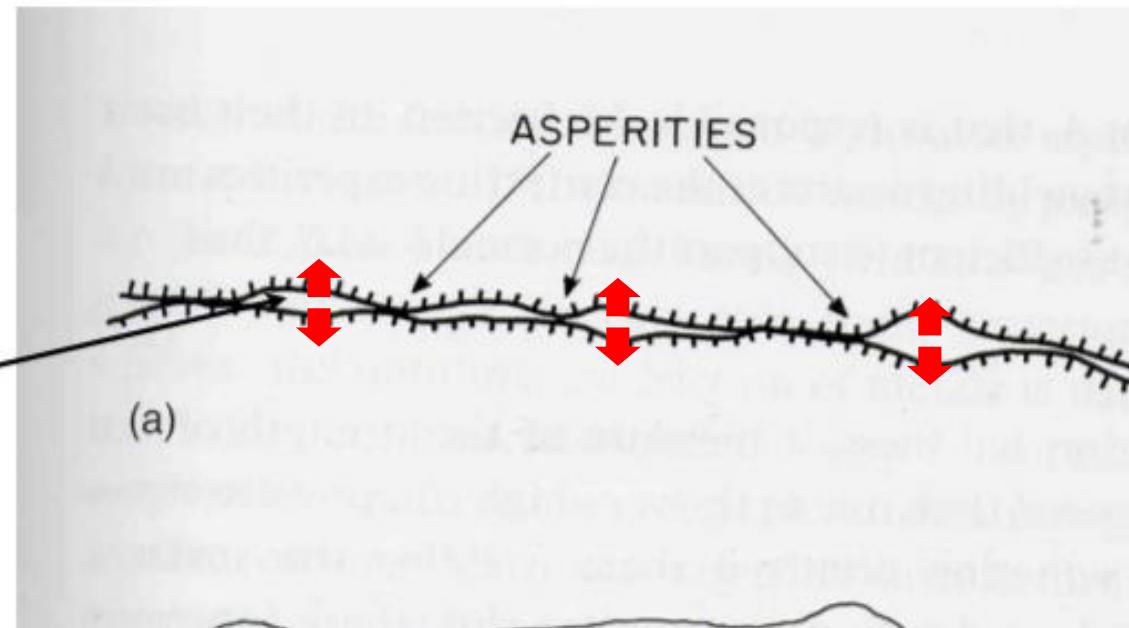


Increasing pore
pressure
→

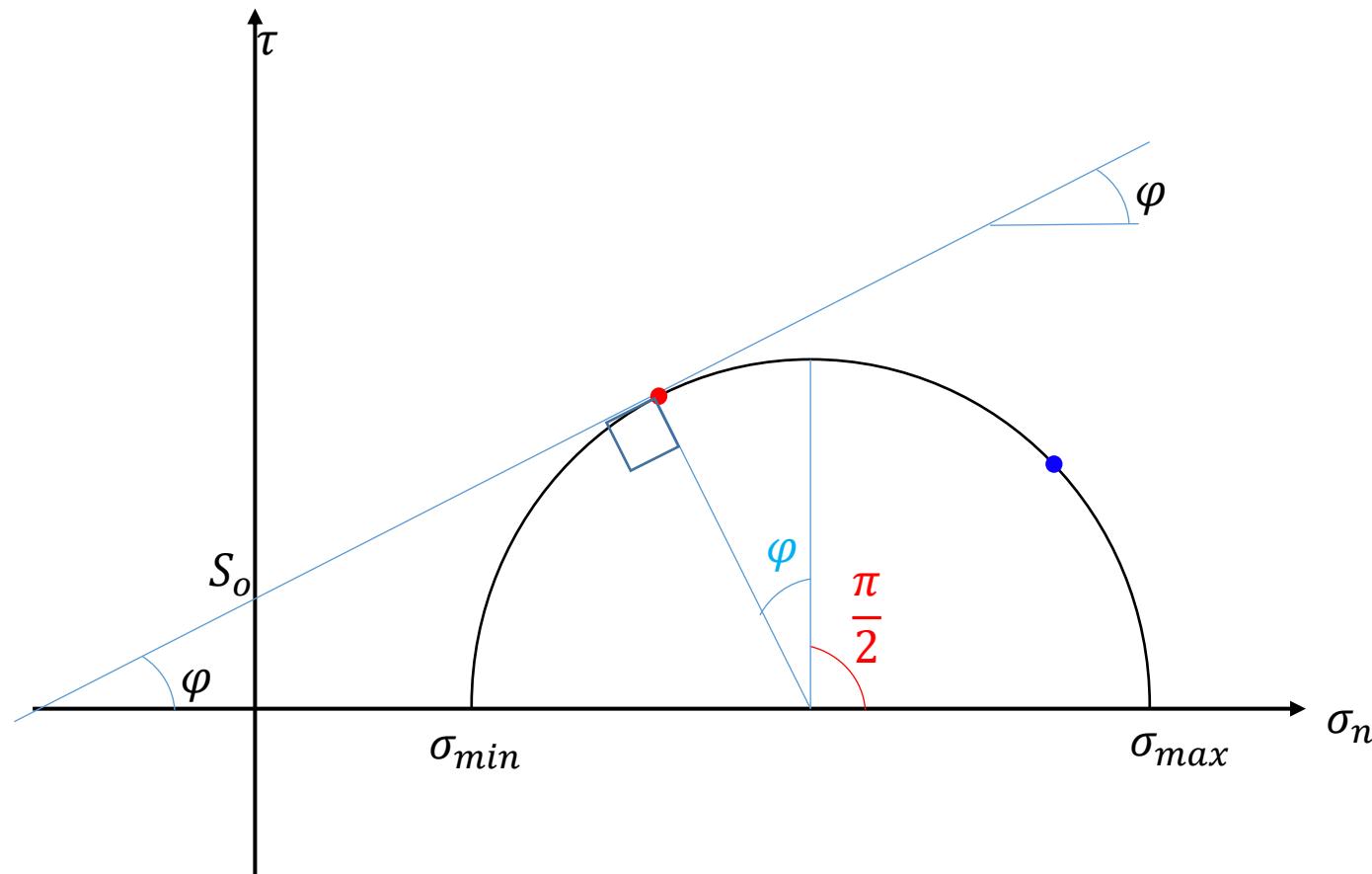


Intuisi efek pore pressure

just add water
at high
pressure.
what will
happen?



Ideal fracture orientation



Pada suatu stress state, kita dapat menentukan orientasi fracture seperti apa yang seharusnya terbentuk.

Untuk suatu stress state, orientasi ideal fracturenya dapat dinyatakan oleh :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \text{ dari } S1$$

Ideal fracture orientation

Contoh : Pada rezim normal faulting di suatu titik kedalaman, $Sv=90$, $SH=60$, $Sh=40$, azimuth $SH=90$, Pore pressure = 30. Asumsikan nilai $\varphi = 30$ derajat

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

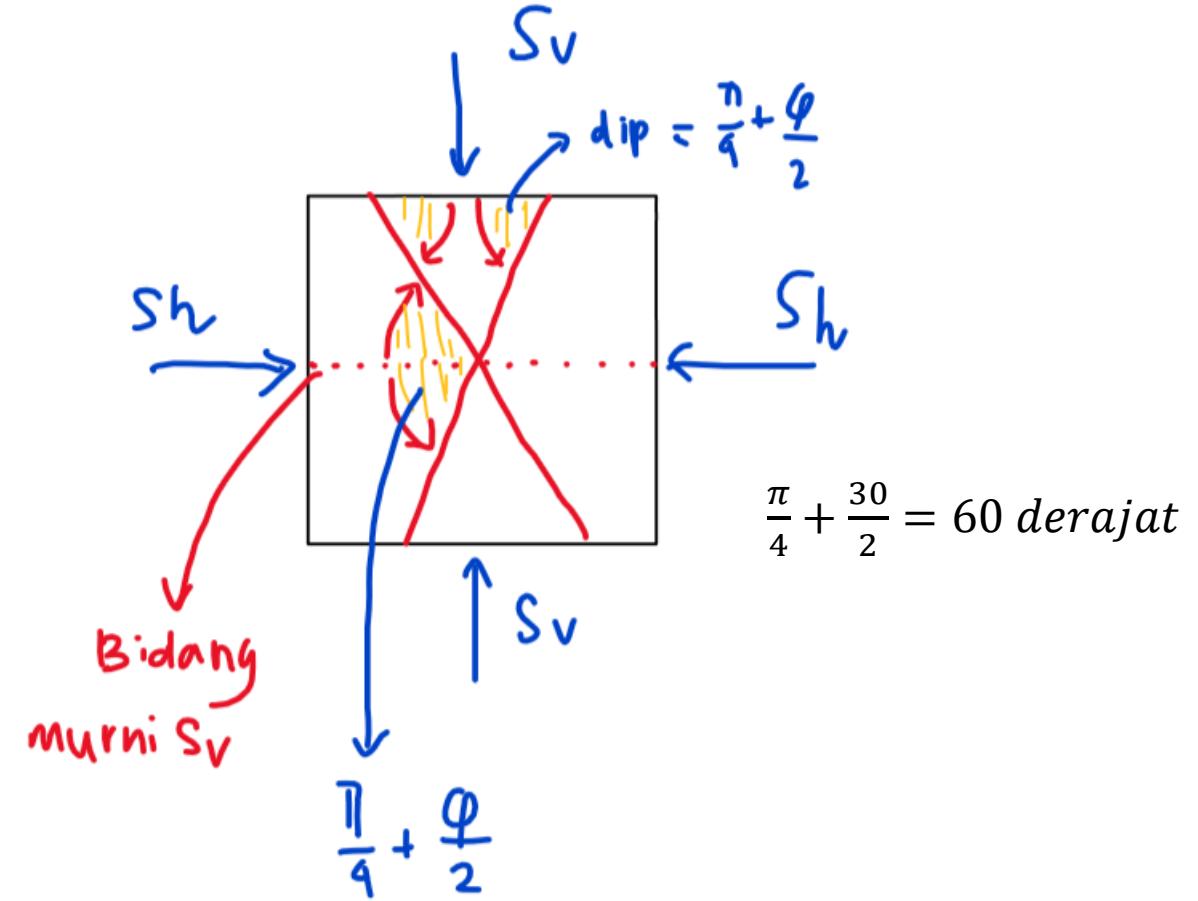
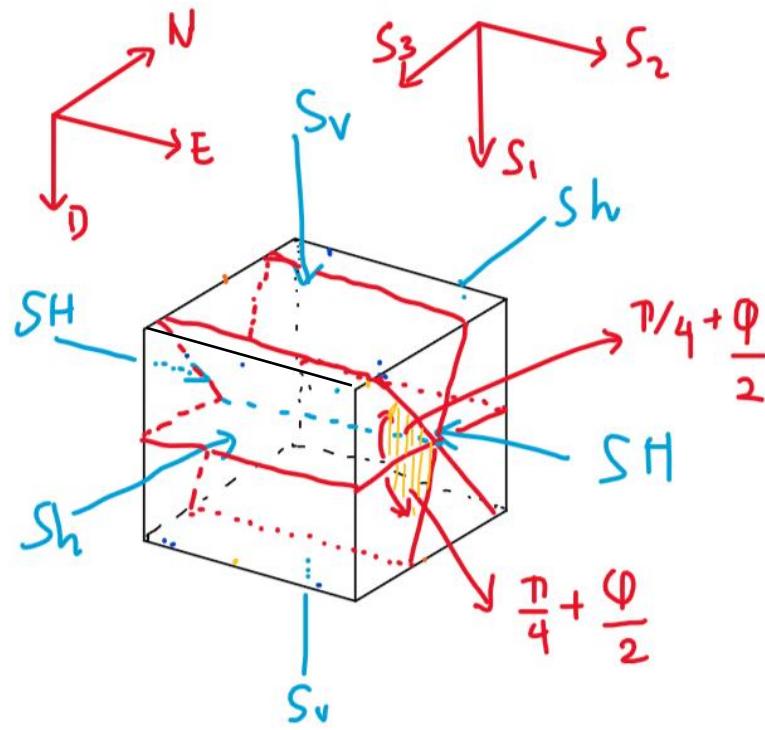
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \text{ dari } S1$$

$$\sigma_1 = Sv - Pp = 90 - 30 = 60$$

$$\sigma_2 = SH - Pp = 60 - 30 = 30$$

$$\sigma_3 = Sh - Pp = 40 - 30 = 10$$

$$\mu = \tan(30) = 0.577$$



- Orientasi fault ideal adalah N90E/30 derajat dan N270E/30

Frictional Faulting Theory

- Nilai sigma1 dan sigma3 pada *critically oriented fault* (Jaeger and Cook, 1979)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{S_1 - P_p}{S_3 - P_p} = [(\mu^2 + 1)^{1/2} + \mu]^2$$

Frictional Faulting Theory

- Nilai sigma1 dan sigma3 pada *critically oriented fault* (Jaeger and Cook, 1979)

Normal faulting $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{S_v - P_p}{S_{h\min} - P_p} \leq [(\mu^2 + 1)^{1/2} + \mu]^2$

Strik-slip faulting $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{S_{H\max} - P_p}{S_{h\min} - P_p} \leq [(\mu^2 + 1)^{1/2} + \mu]^2$

Reverse faulting $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{S_{H\max} - P_p}{S_v - P_p} \leq [(\mu^2 + 1)^{1/2} + \mu]^2$

Contoh

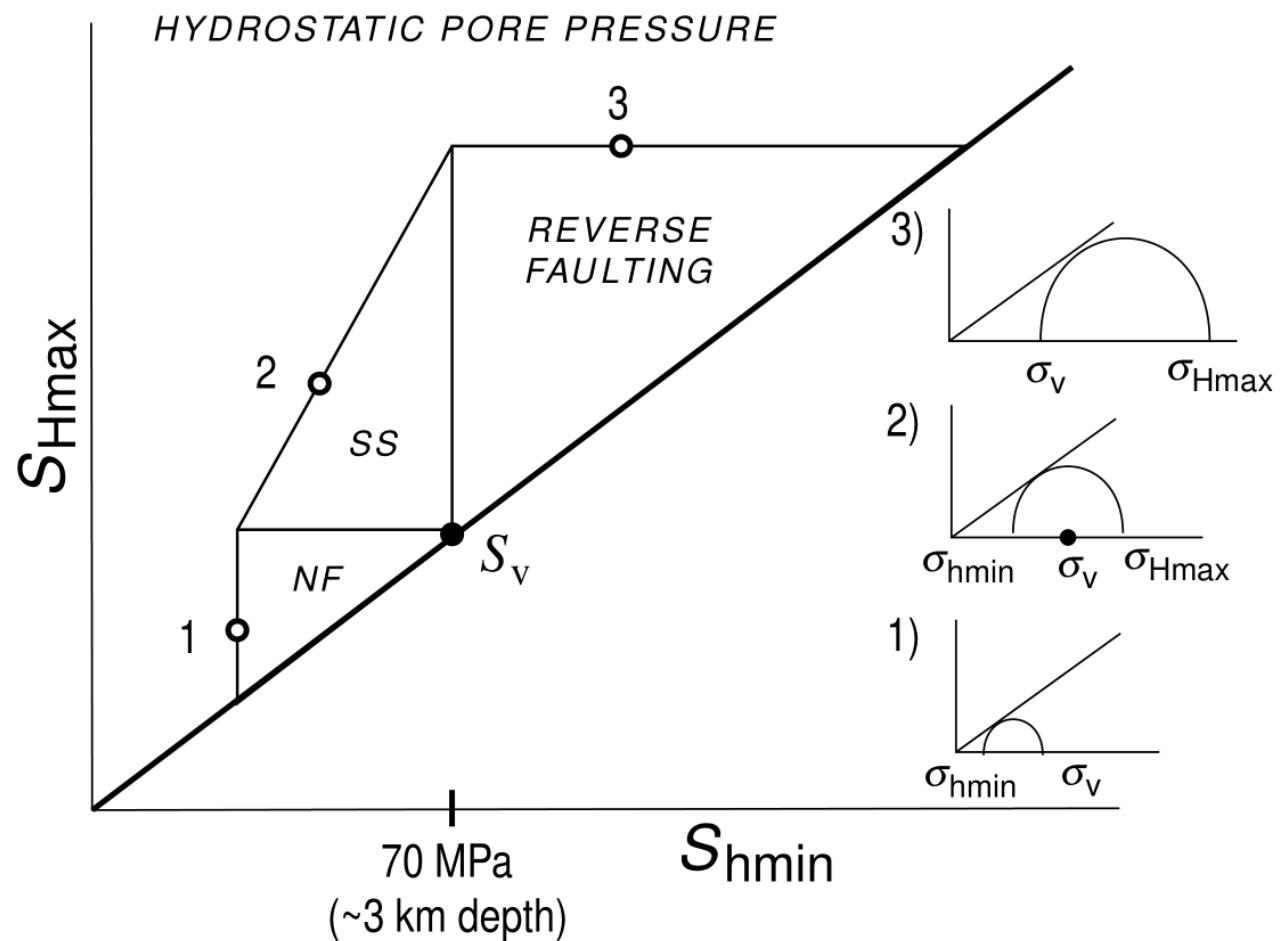
Jika kita memiliki nilai $S_v = 11000$ psi, $P_p = 4400$ psi, berapakah batas bawah dari S_{hmin} ? (Asumsi $\mu=0.6$)

S_h terkecil didapat saat $S_v = S_1$, dan $S_3 = S_h$ (Normal Faulting), maka :

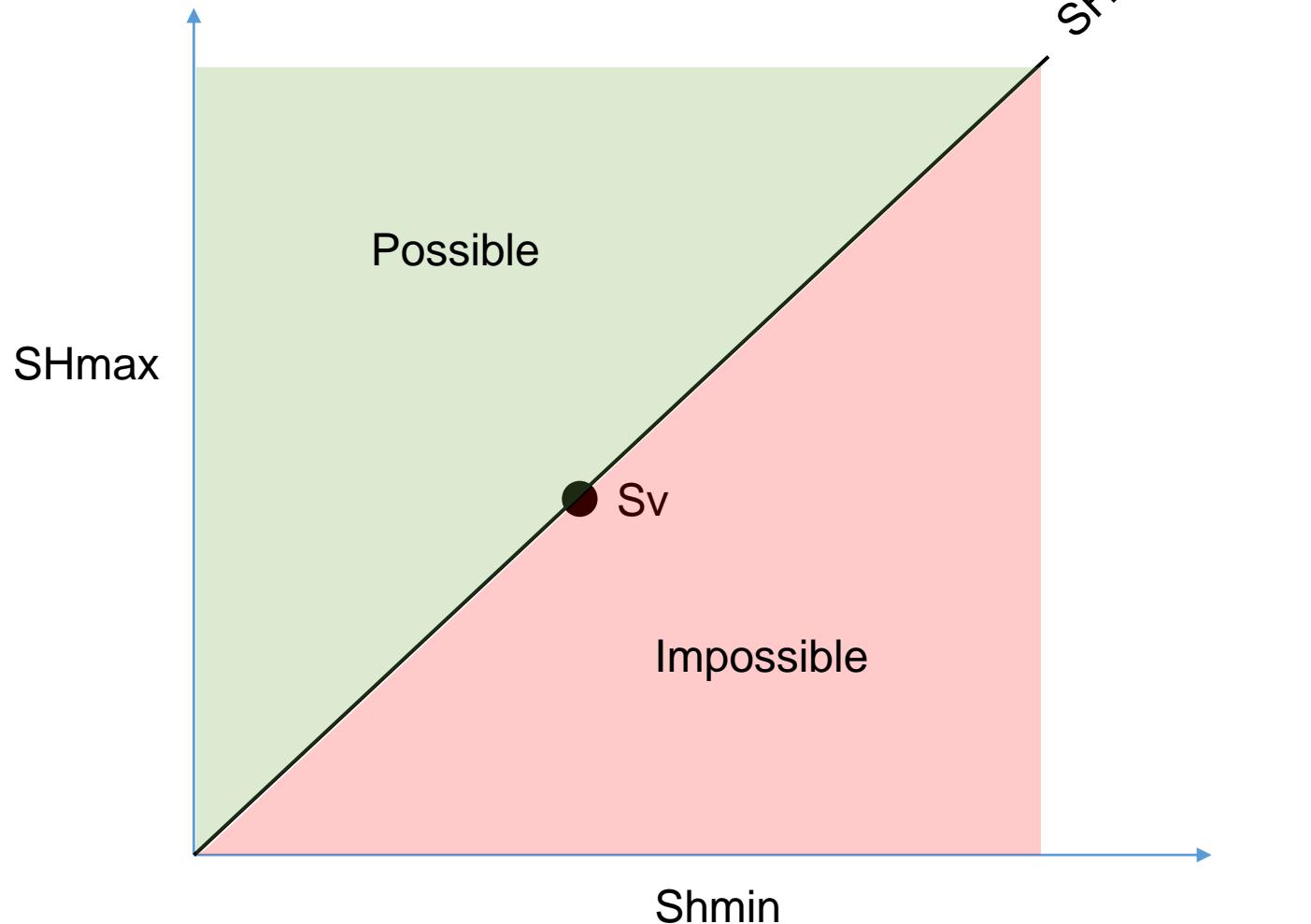
$$\frac{11000 - 4400}{S_h - 4400} \leq 3.1$$

Stress Polygon

- Menggunakan *frictional faulting theory*, kombinasi nilai stress yang memungkinkan antara $S_{H\max}$, $S_{h\min}$, dan S_v untuk suatu rezim pensesaran dapat dibatasi oleh *Stress Polygon*

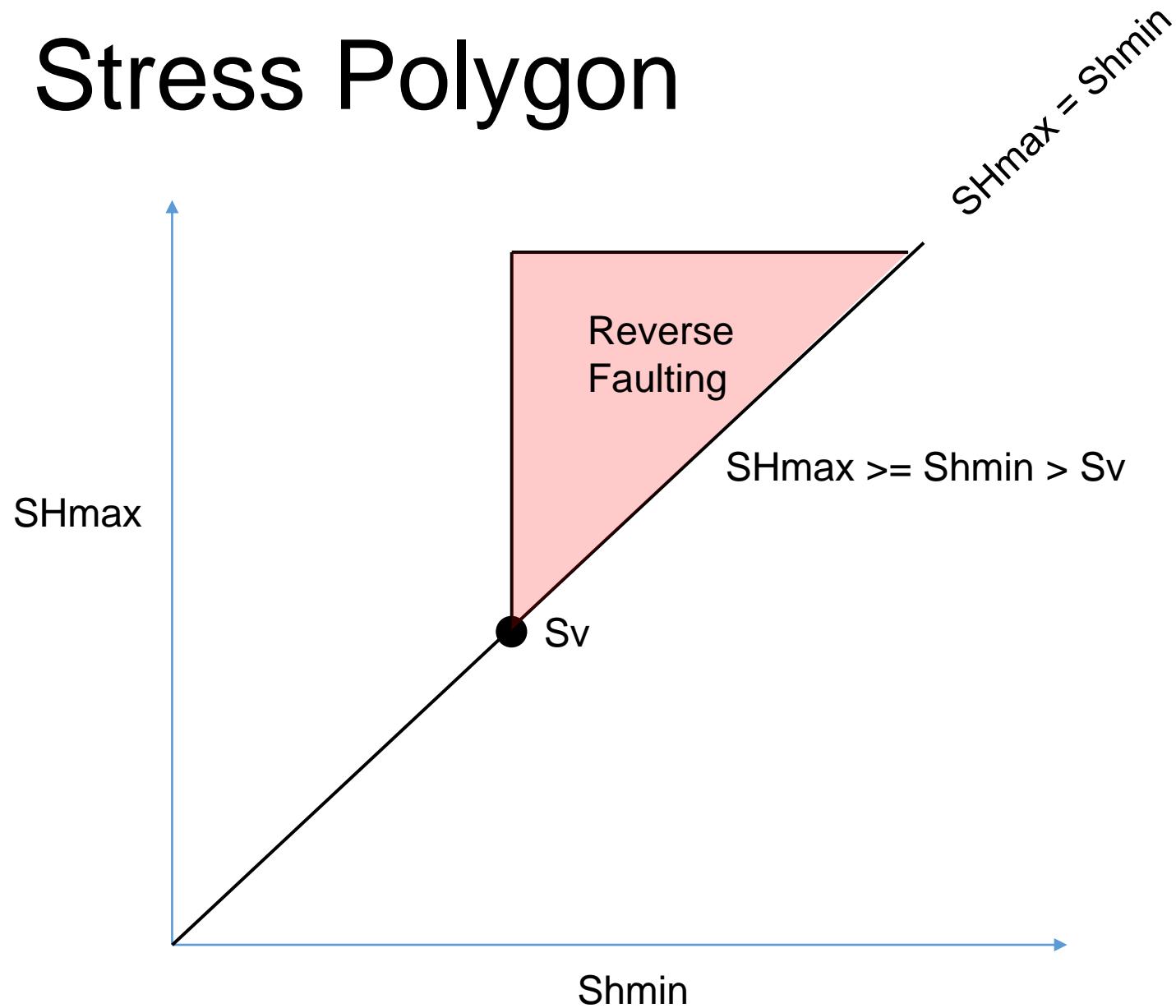


Stress Polygon

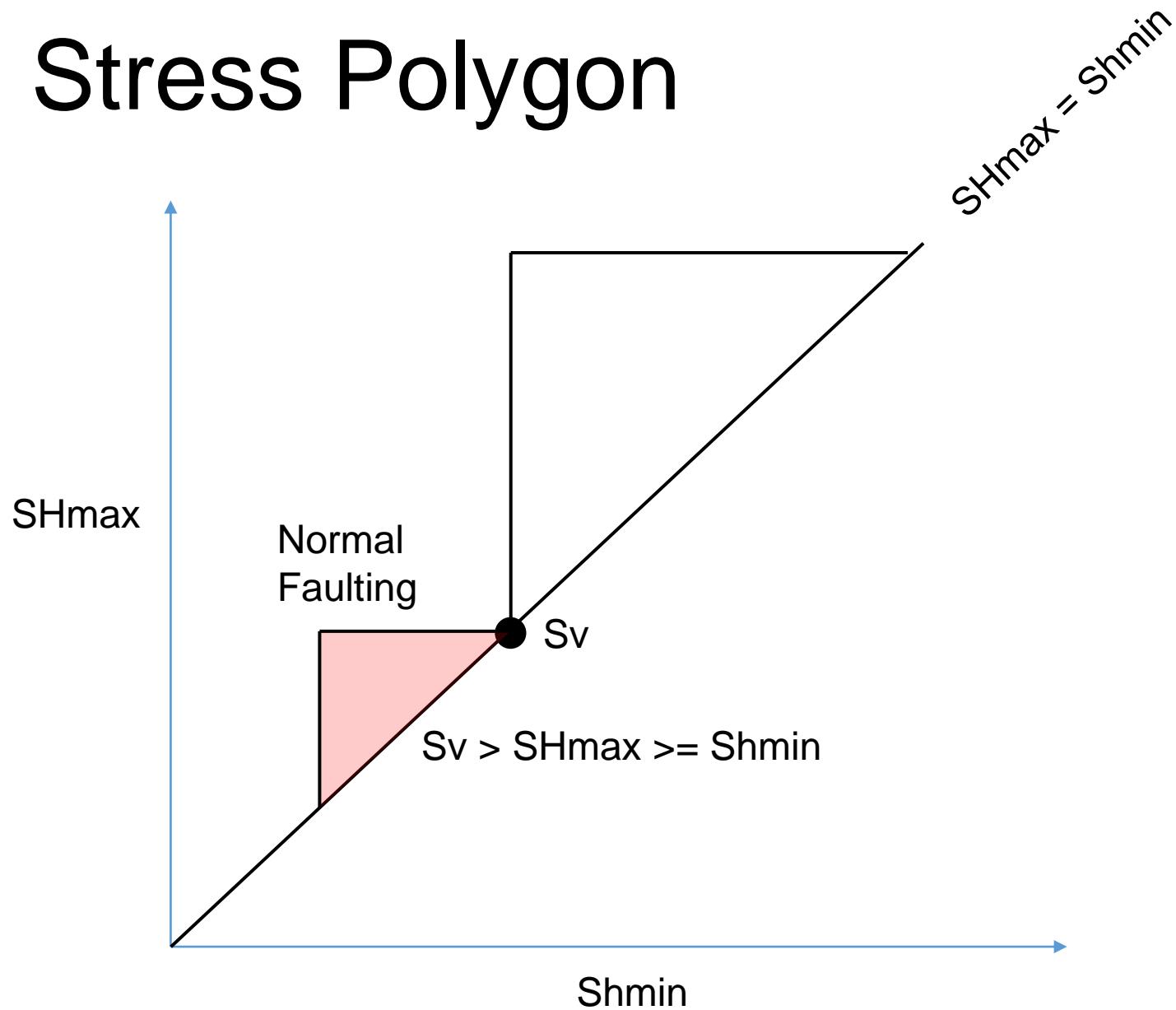


- Karena $SH_{max} > Sh_{min}$, maka kombinasi stress yang memungkinkan harus berada di atas garis $SH_{max} = Sh_{min}$

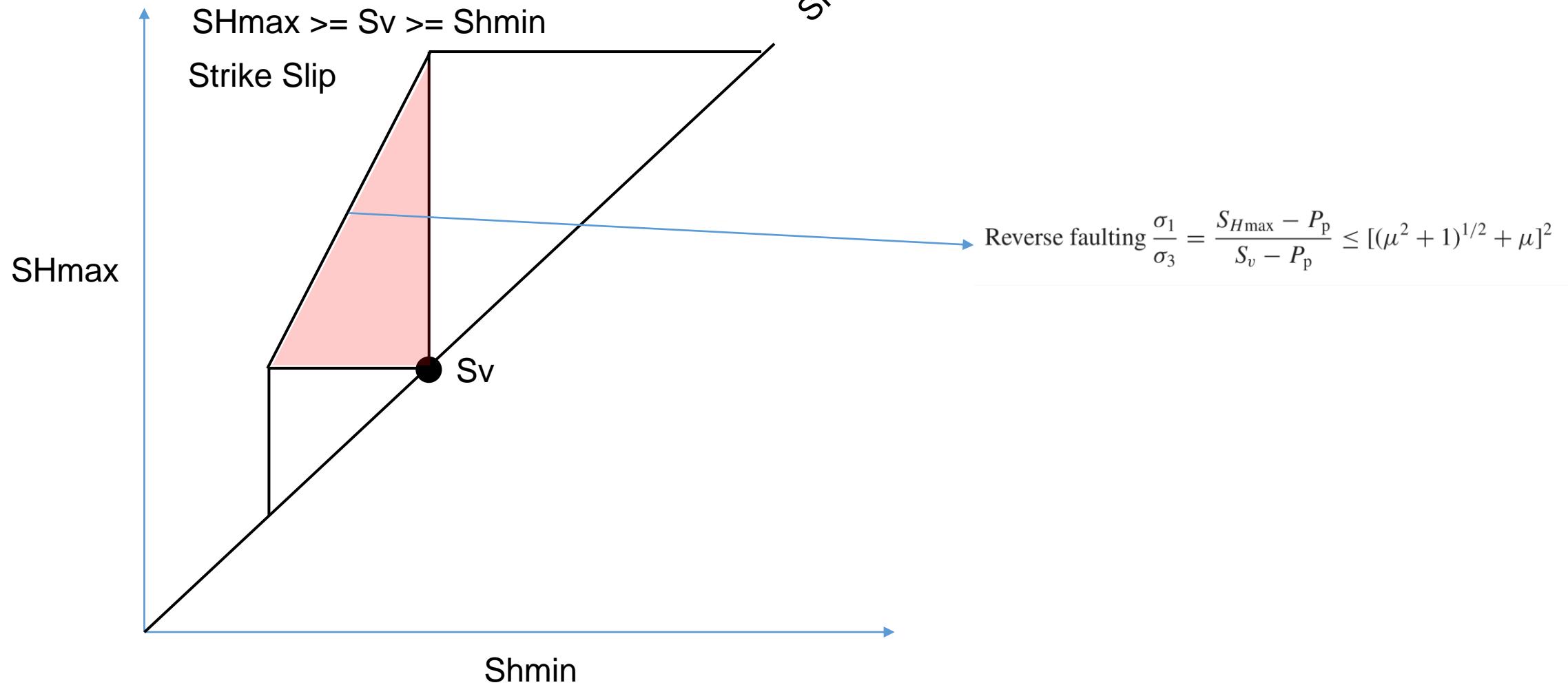
Stress Polygon



Stress Polygon



Stress Polygon



Program untuk plotting stress polygon

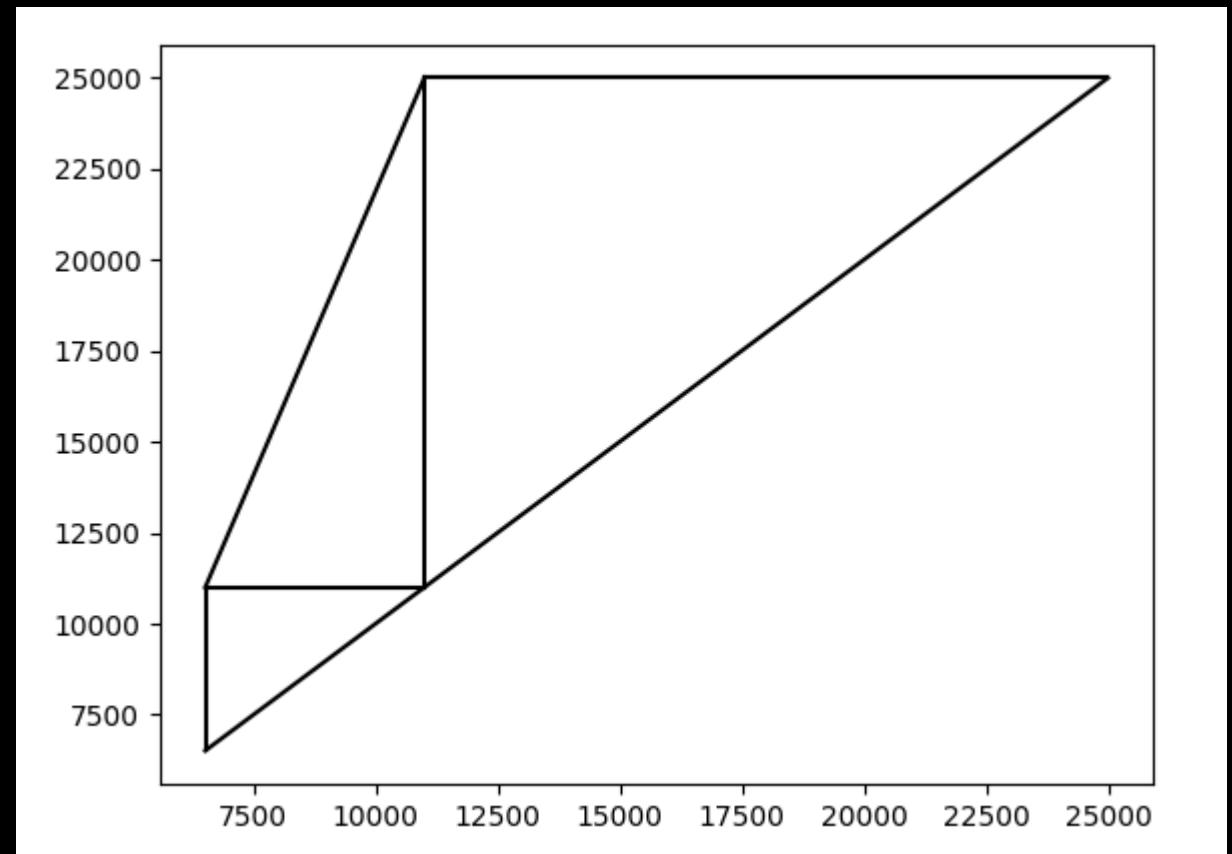
- from math import sqrt
-
- def get_q(mu:float) -> float:
- """calculate ratio of s1/s3 as a function of mu (friction coefficient)
-
- Args:
- mu (float): friction coefficient
-
- Returns:
- float: q
- """
- return (sqrt(mu**2 + 1) + mu)**2
-
- def get_s1(s3:float, pp:float, q:float) -> float:
- return q * (s3-pp) + pp
-
- def get_s3(s1:float, pp:float, q:float) -> float:
- return pp + ((s1-pp)/q)

Program untuk plotting stress polygon (cont.)

```
•     def zobackogram(sv:float, pp:float, ax=None, mu=0.6, color='k', **kwargs):  
•         """construct stress polygon (zoback-o-gram) for a constant depth  
•         """  
•         Args:  
•             sv (float): vertical/overburden stress  
•             pp (float): pore pressure  
•             mu (float, optional): friction coefficient. Defaults to 0.6.  
•             """  
•             q = get_q(mu)  
•             s1 = get_s1(sv, pp, q)  
•             s3 = get_s3(sv, pp, q)  
•  
•             # params = {'color':'k'}  
•             if ax is None:  
•                 f, ax = plt.subplots()  
•  
•             # sh=sH line  
•             ax.plot((s3, s1), (s3, s1), color=color, **kwargs)  
•             # normal fault constraint  
•             ax.plot((s3, s3), (s3, sv), color=color, **kwargs)  
•             # normal - strike-slip limit  
•             ax.plot((s3, sv), (sv, sv), color=color, **kwargs)  
•             # strike-slip fault constraint  
•             ax.plot((s3, sv), (sv, s1), color=color, **kwargs)  
•             # strike-slip - reverse limit  
•             ax.plot((sv, sv), (sv, s1), color=color, **kwargs)  
•             # reverse fault limit  
•             ax.plot((sv, s1), (s1, s1), color=color, **kwargs)
```

Program untuk plotting stress polygon (cont.)

- `import matplotlib.pyplot as plt`
-
- `Sv = 11000`
- `Pp = 4400`
- `zobackogram(Sv, Pp)`
- `plt.show()`



04 – Stress di lubang bor

Ernst Gustav Kirsch



- September 13, 1841 – January 8, 1901
- Professor of mathematics and mechanics, University of Technology in Chemnitz, Germany

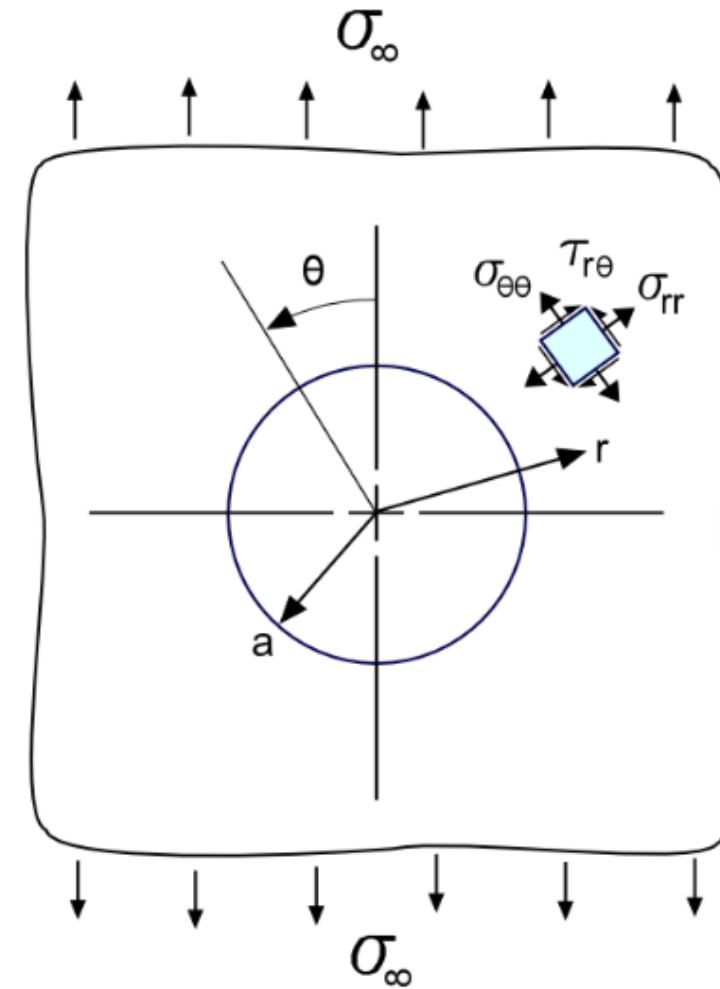
Kirsch's Solution (1898) – Uniaxial Tension

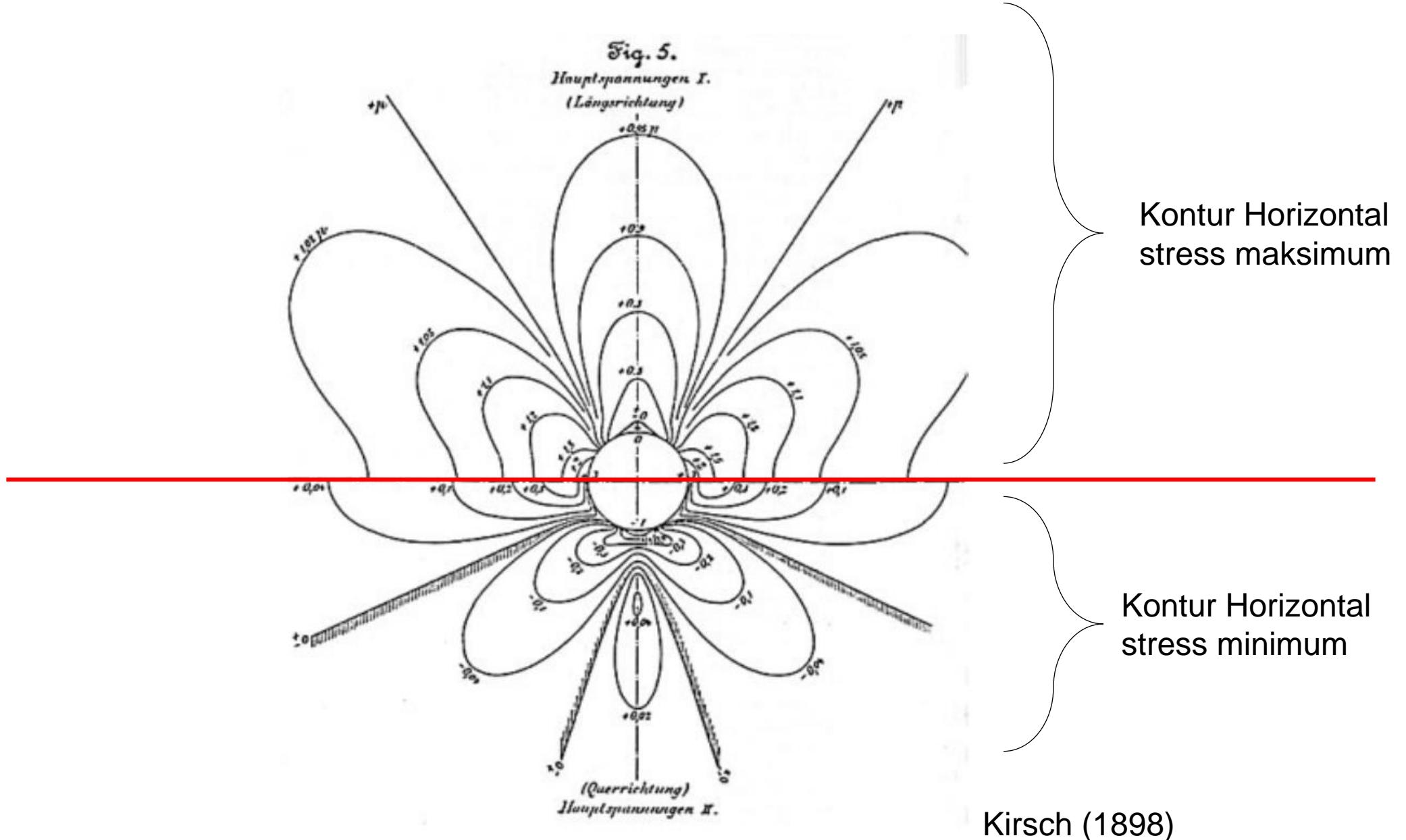
- Solusi untuk plat dengan lubang jika diaplikasikan tensile stress secara **uniaksial**.
- Sudut theta dihitung dari arah uniaxial stress
- Dalam mekanika benda padat pada umumnya, tensile stress bertanda positif

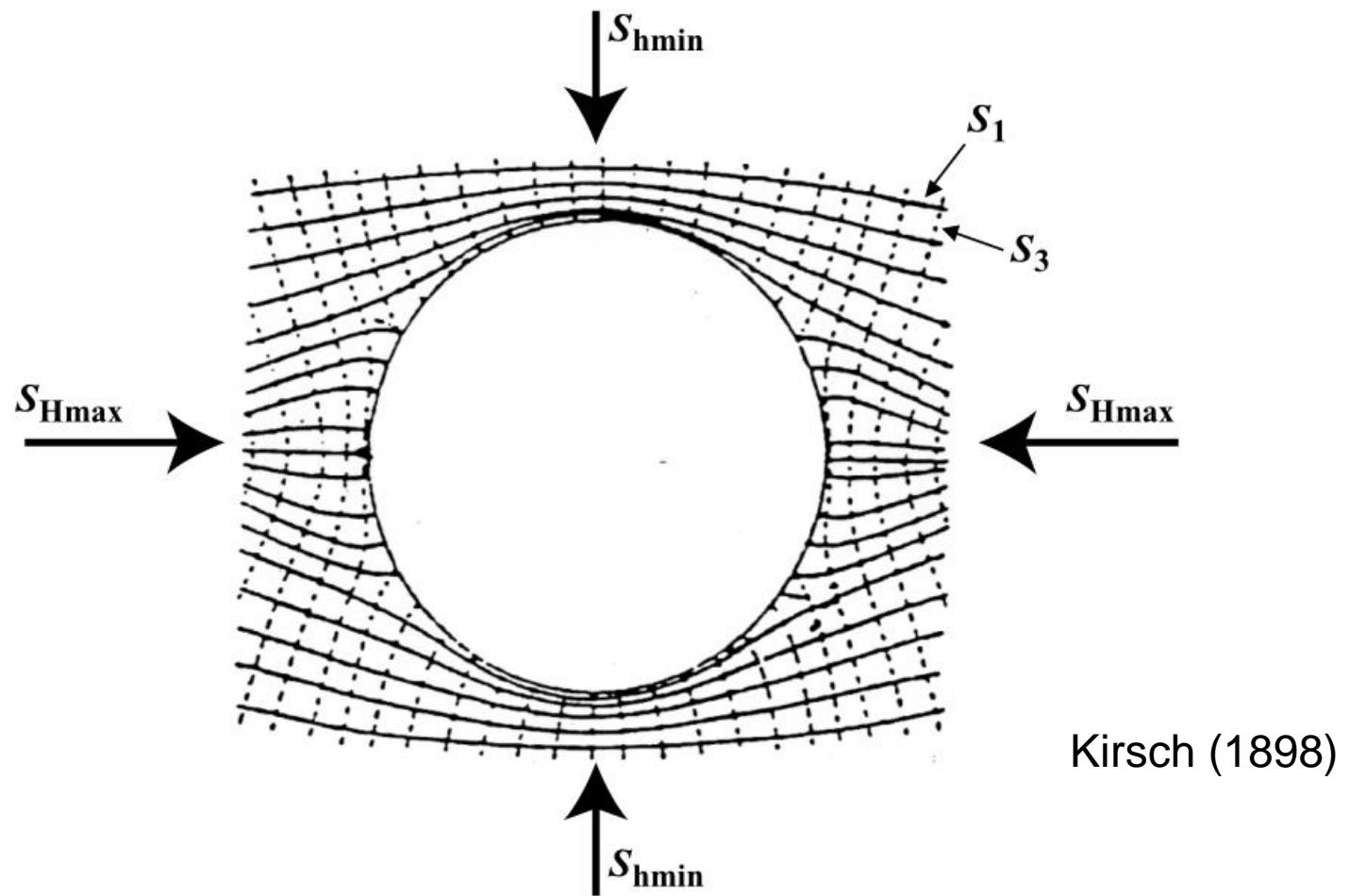
$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta$$







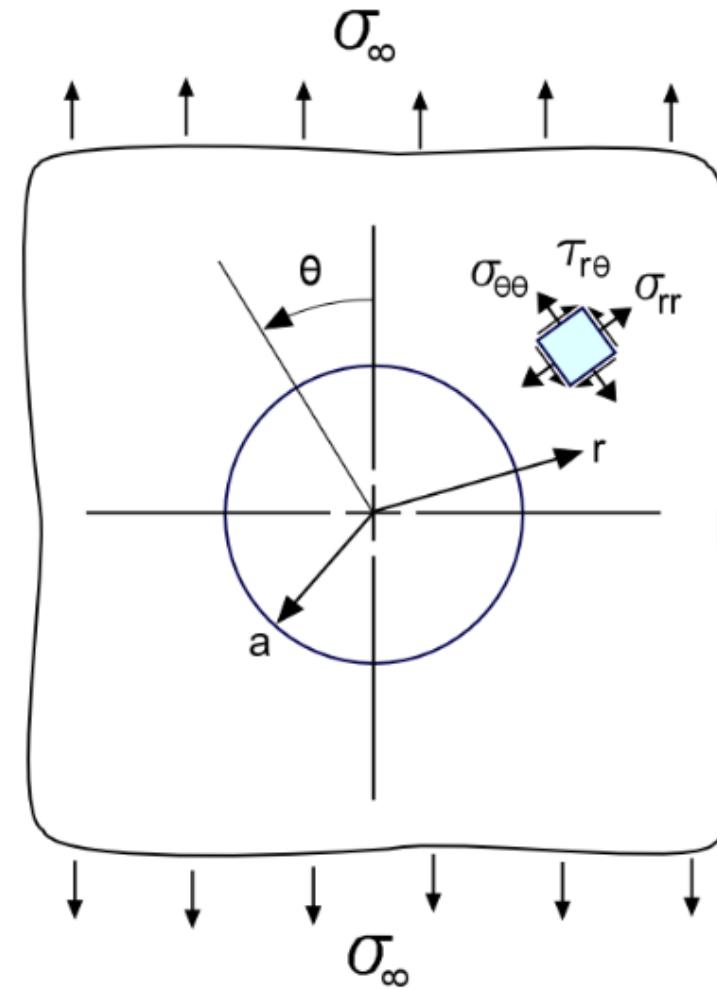
Kirsch's Solution (1898) – Uniaxial Tension saat $r = \text{infinity}$

- At $r = \text{infinity}$

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta$$



Kirsch's Solution (1898) – Uniaxial Tension saat $r = \text{infinity}$

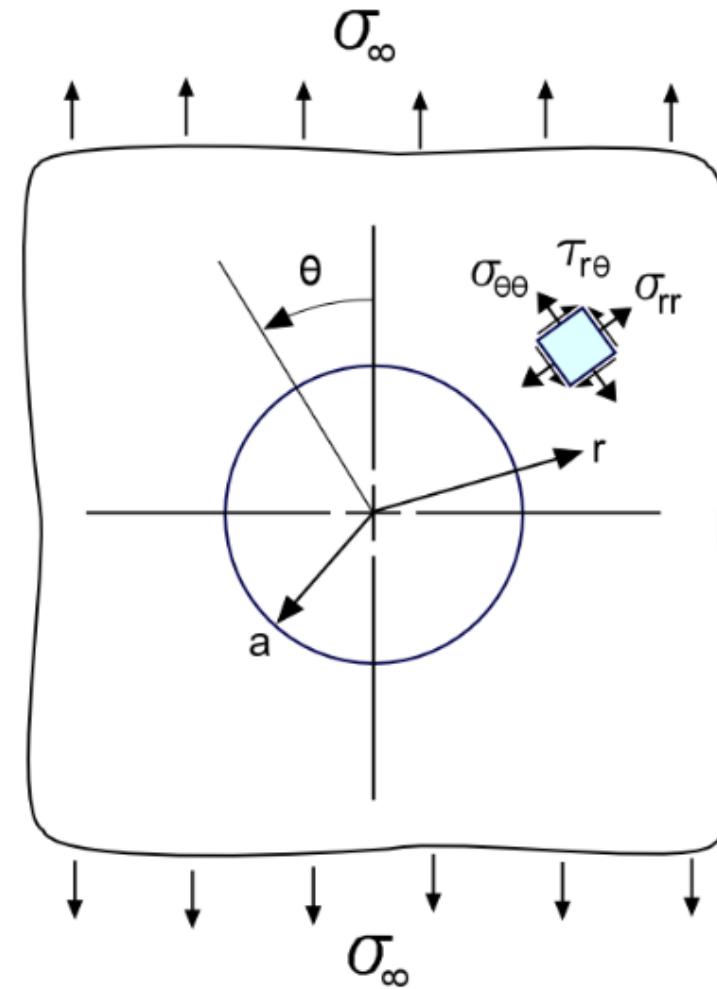
- At $r = \text{infinity}$

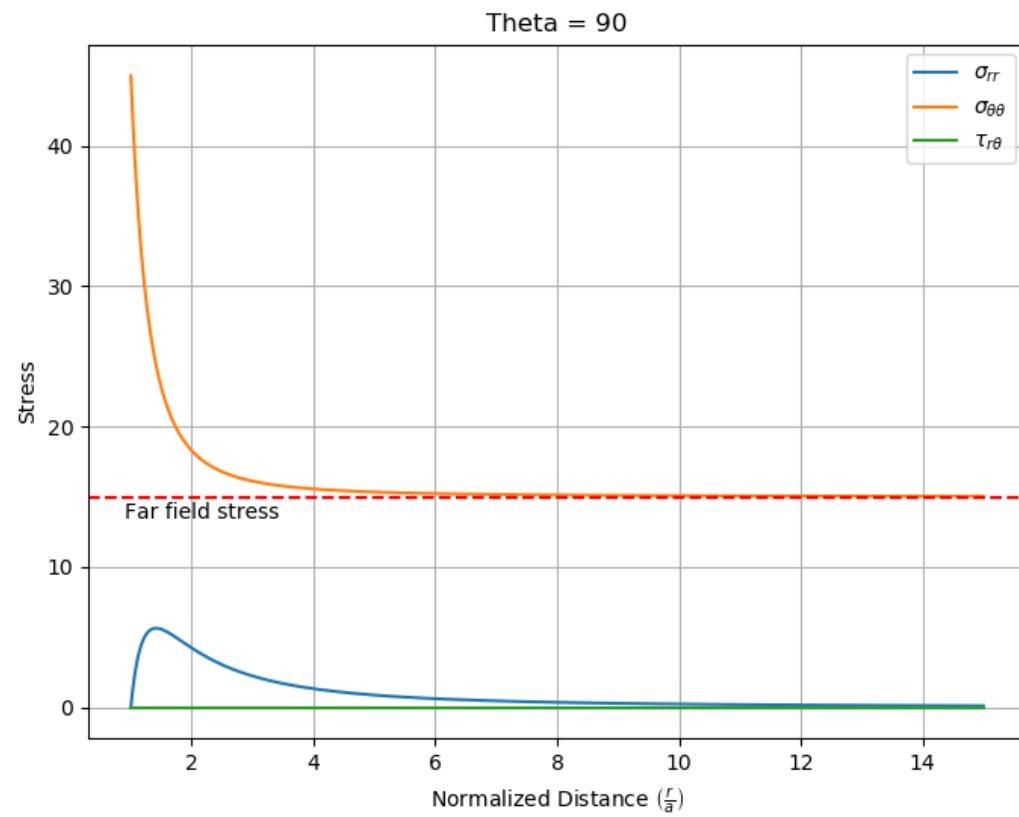
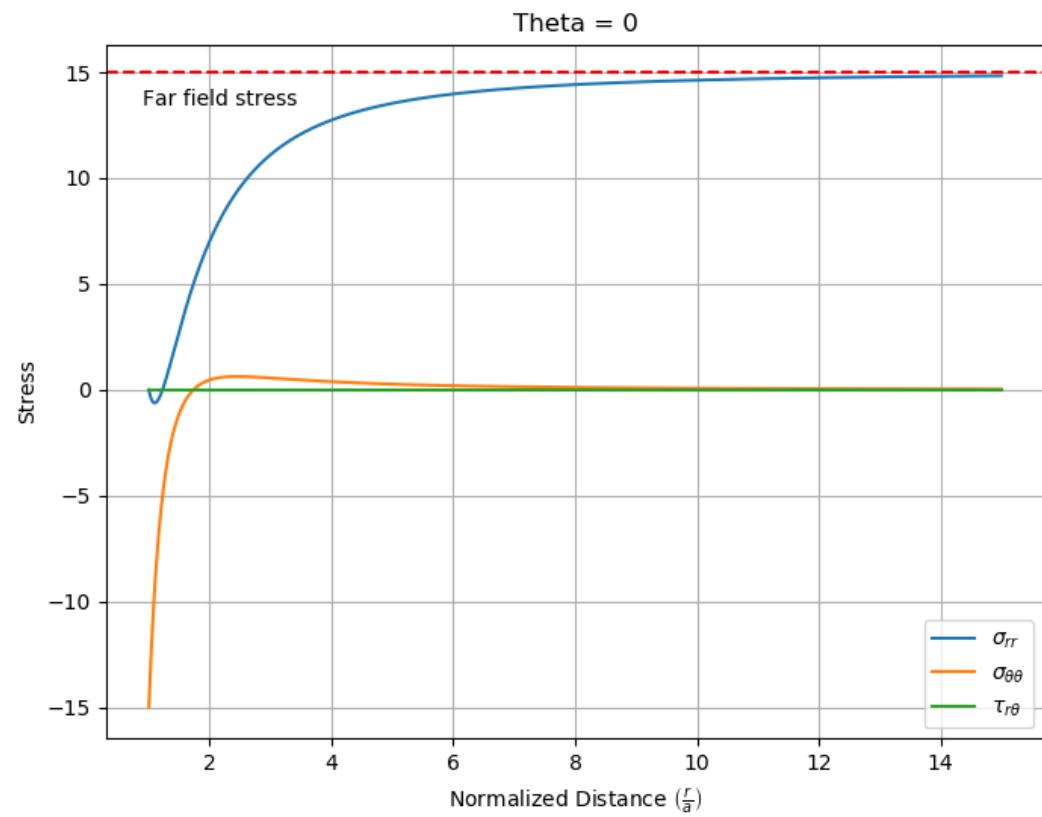
$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_\infty}{2} + \frac{\sigma_\infty}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} - \frac{\sigma_\infty}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \sin 2\theta$$

- Radial stress sama dengan far field stress di sudut 0 and 180
- Hoop stress sama dengan farfield stress saat sudut = +- 90
- Shear stress ada akibat transformasi koordinat dari koordinat farfield (persegi) ke nearfield (silindrikal)





Saat $r = a$ (tepat di dinding lubang)

- Saat $r = a$, (r/a) bernilai satu, sehingga

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \overset{=0}{=} 0 \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \overset{=0}{=} 0 \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \overset{=2}{=} 2 \right) - \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \overset{=4}{=} 4 \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \overset{=0}{=} 0 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta$$

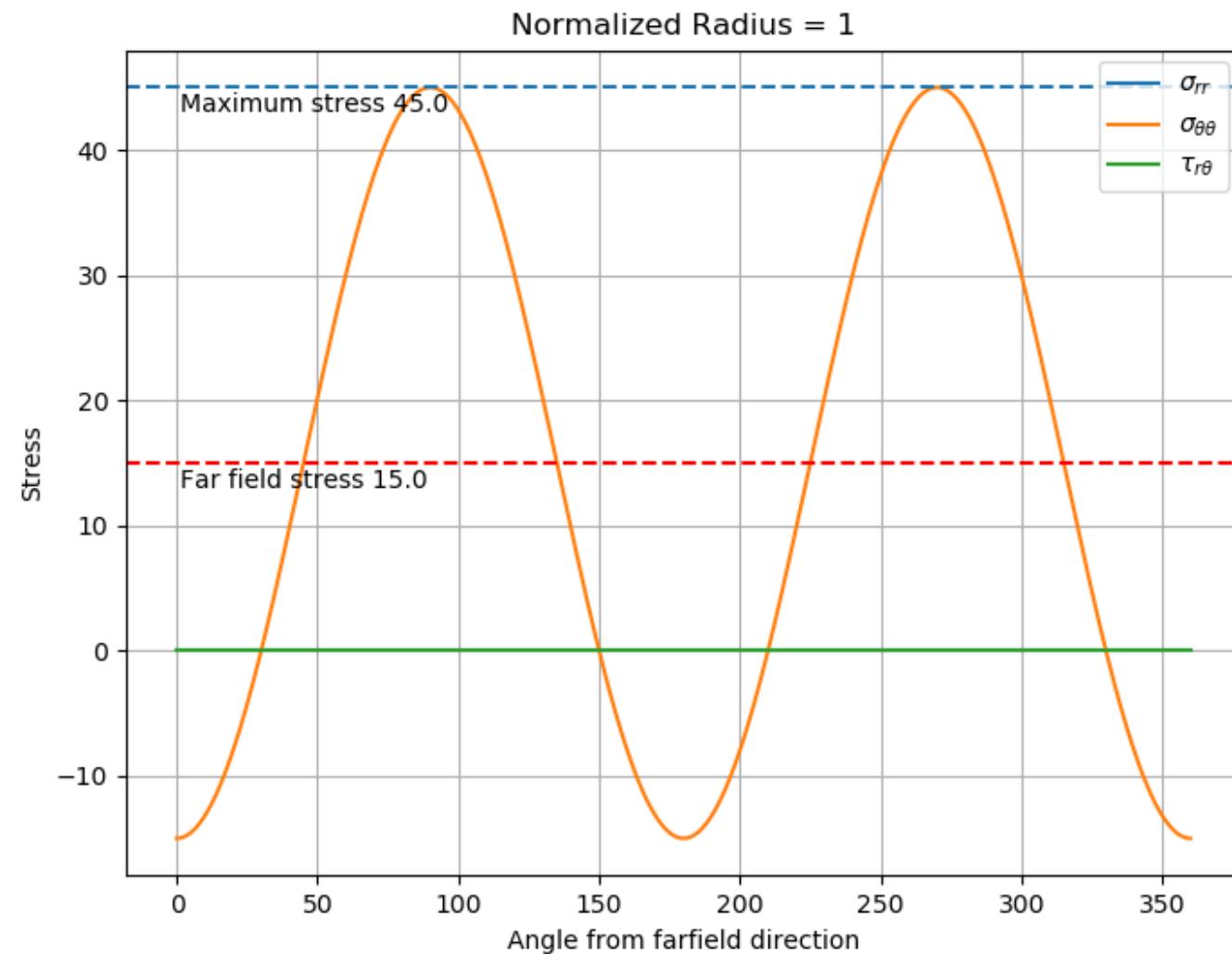
Saat $r = a$ (tepat di dinding lubang)

- Radial stress dan shear stress bernilai nol karena lubang merupakan batas material padat dengan udara (free surface) sehingga tidak dapat menahan shear stress.
- Hoop stress di $\theta = 0$ sama dengan – farfield stress (kompresif).
- Namun saat di $\theta \approx 90^\circ$, hoop stress sama dengan $3 \times$ farfield stress.
- Rasio ini disebut sebagai rasio konsentrasi stress atau stress anisotropy.

$$\sigma_{rr} = 0$$

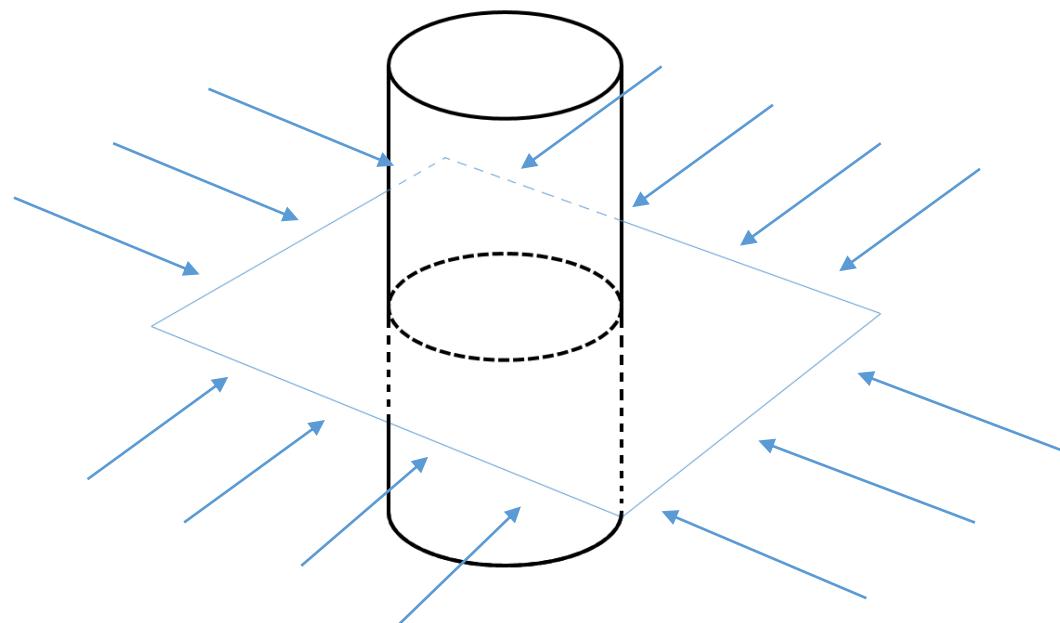
$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_\infty (1 - 2\cos\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$



Infinite plate with cavity to vertical well

- Lubang bor vertikal sangat memudahkan perhitungan karena salah satu principal stress kita sejajar dengan arah longitudinal lubang bor (S_v) dengan 2 principal stress lainnya berarah kurang lebih horizontal.
- Karena salah satu principal stressnya sejajar dengan arah lubang bor, kita bisa lakukan analisis plane stress pada satu bidang infinitesimal di satu kedalaman di lubang bor tersebut



Kirsch Solution for vertical borehole

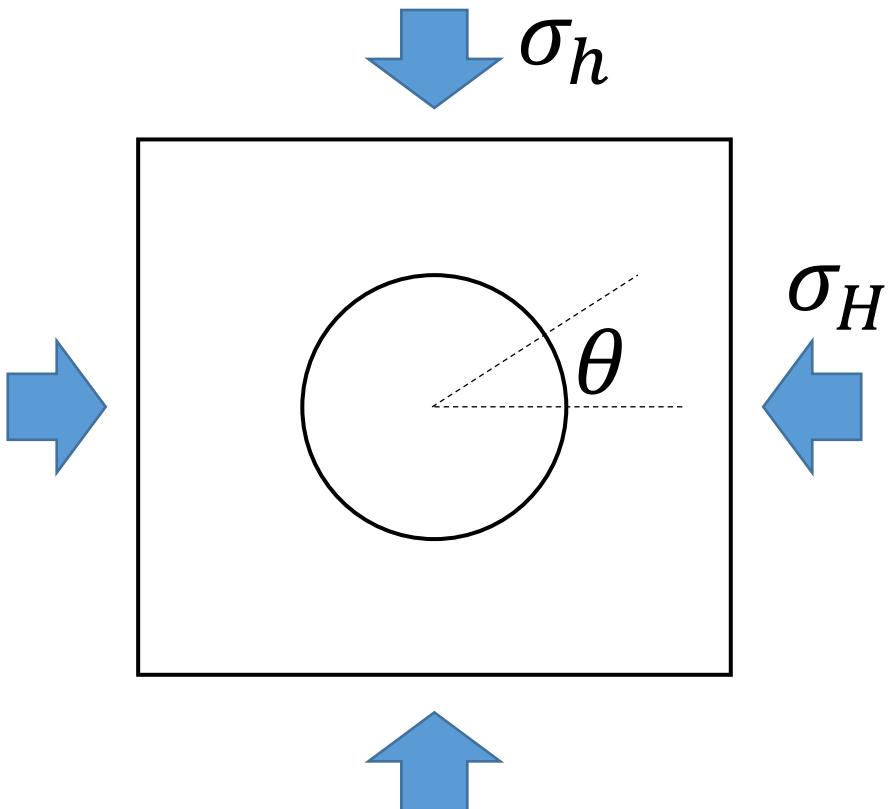
Original Kirsch's solution :

- Solusi kirsch asli tidak memperhitungkan tekanan di dalam cavity
- Hanya uniaxial dan tension

Kondisi di lubang bor :

- Dalam pemboran kita menggunakan lumpur pemboran untuk mengkompensasi stress dari formasi, sehingga tekanan di dalam lubang tidak nol
- Kita punya 3 principal stress di bawah permukaan (S_H , S_h , S_v)
- Arah farfield stress selalu kompresi di bawah permukaan

General 2D compression

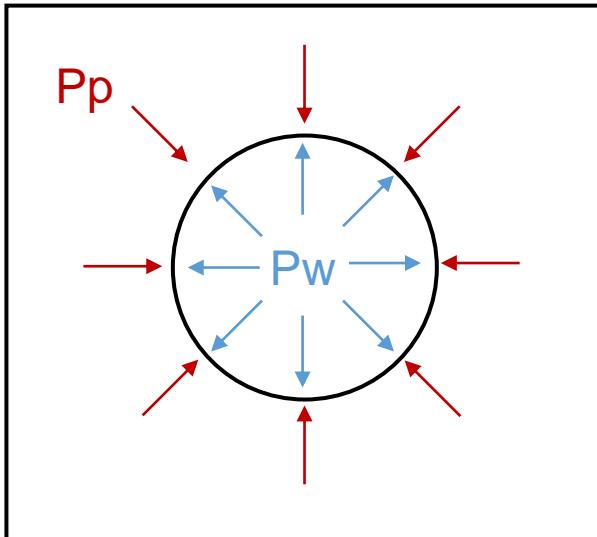


$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

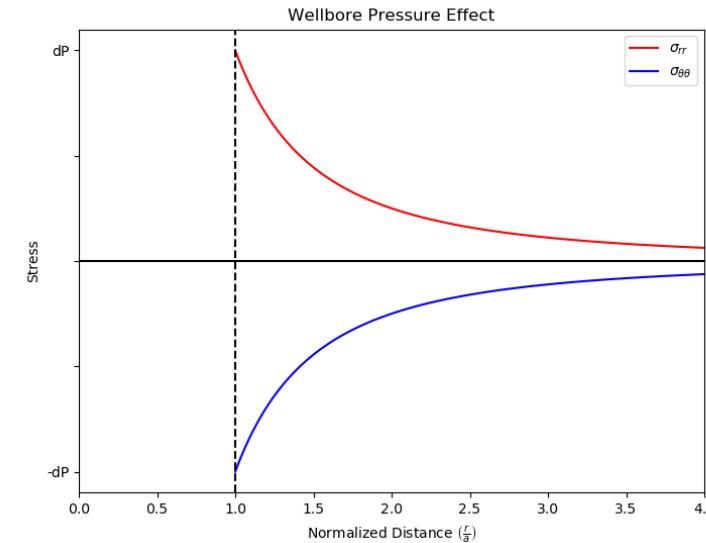
$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta$$

Efek Pore pressure dan Mud Pressure



$$\sigma_{rr} = (P_w - P_p) \left(\frac{a}{r} \right)^2$$

$$\sigma_{\theta\theta} = - (P_w - P_p) \left(\frac{a}{r} \right)^2$$



- Di sini kita lihat bahwa perbedaan tekanan terhadap radial dan hoop stress meluruh terhadap jarak radial.
- Hal ini hanya bisa terjadi jika dinding bor impermeabel.
- Oleh karena itu, persamaan ini mengasumsikan pembentukan *mud-cake* yang sempurna

Complete Kirsch's solution for vertical well

$$\sigma_{rr} = (P_w - P_p) \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) + \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

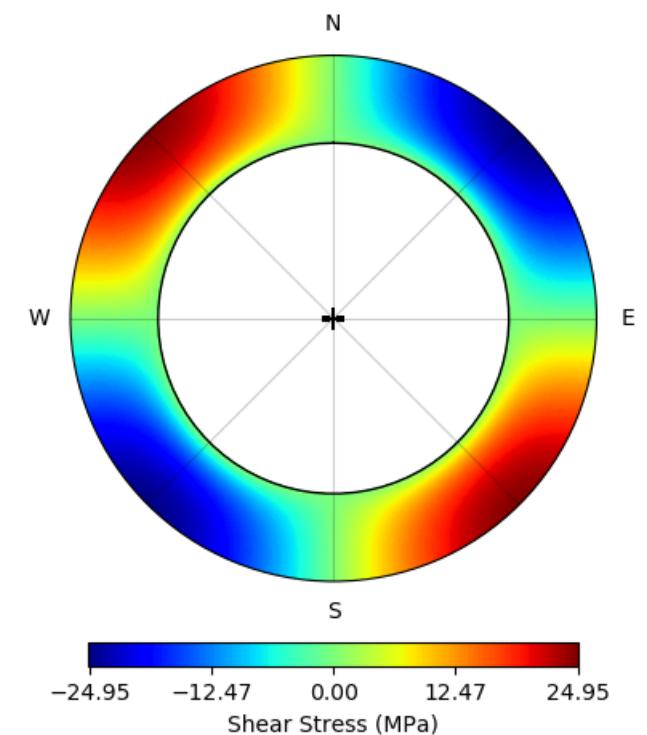
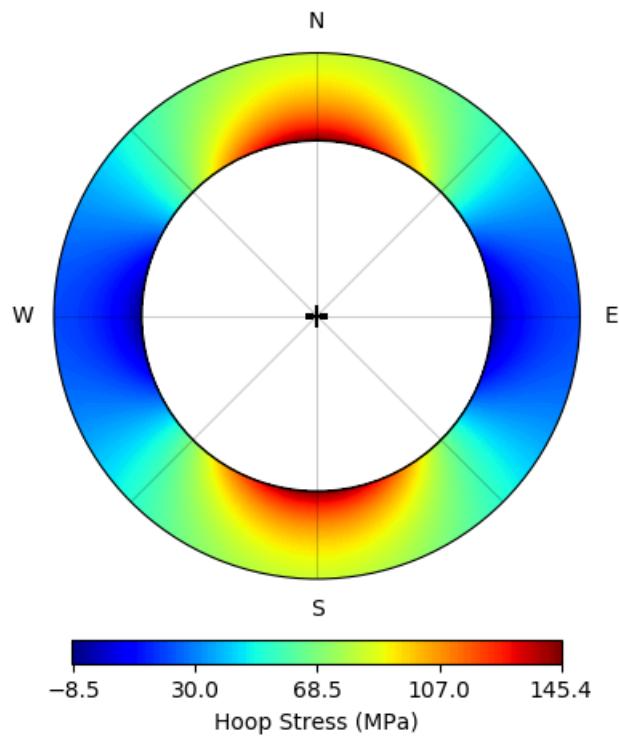
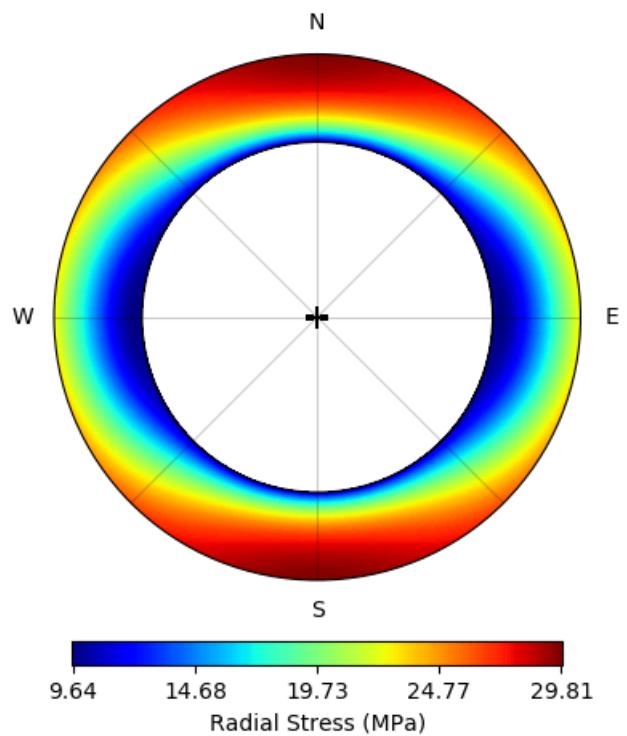
$$\sigma_{\theta\theta} = - (P_w - P_p) \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) - \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_H - \sigma_h}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right) \sin 2\theta$$

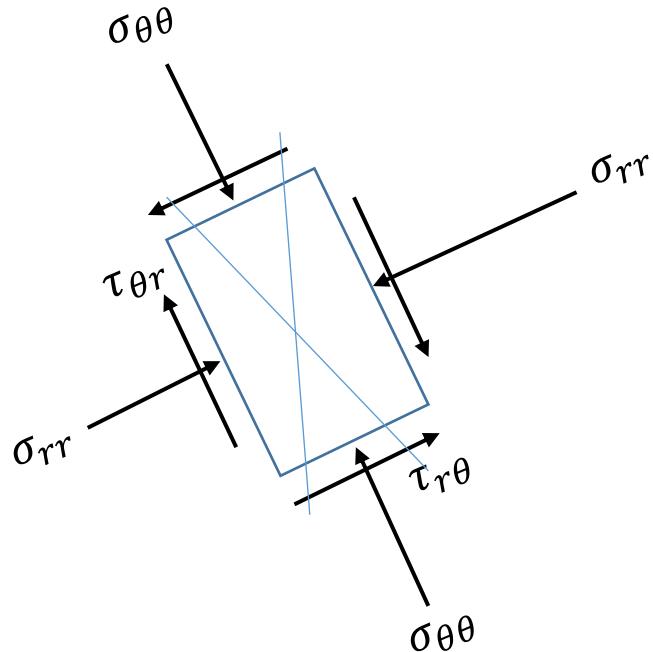
$$\sigma_{zz} = \sigma_v - 2\nu(\sigma_H - \sigma_h) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos 2\theta$$

Contoh

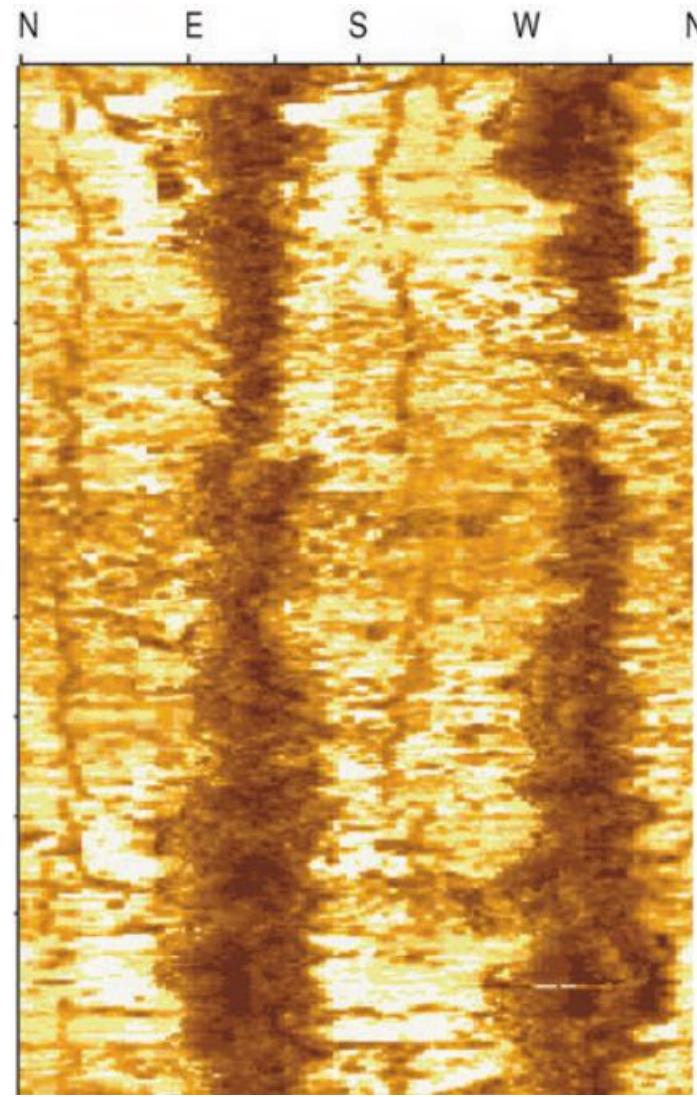
```
azi = 90 # azimuth SH  
SH = 90  
Sh = 51.5  
Sv = 88.2  
Pp = 31.5 # pore pressure  
Pw = 41.5 # wellbore pressure  
SdT = 0 # Thermal stress  
v = 0.25 # Poisson's ratio
```



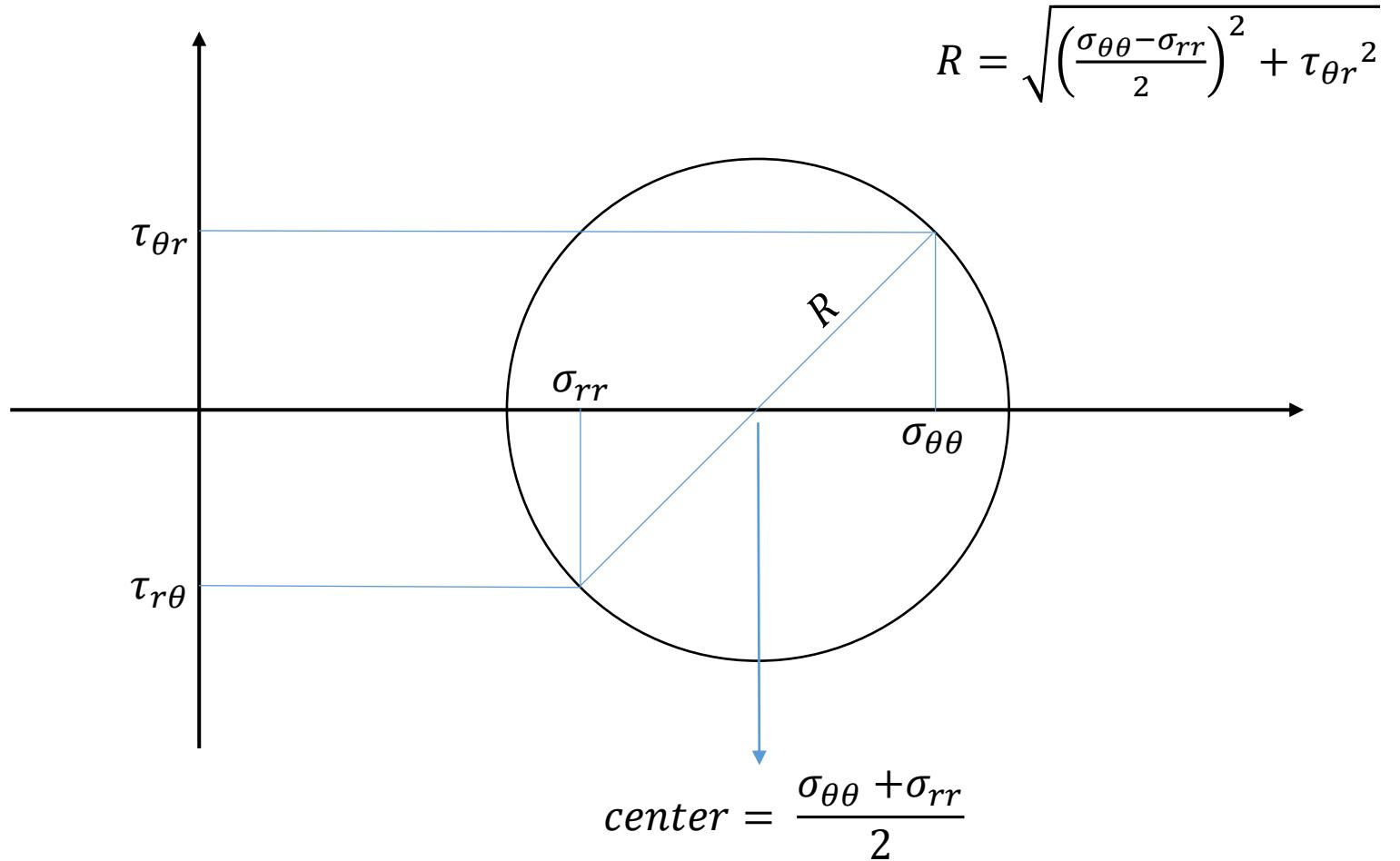
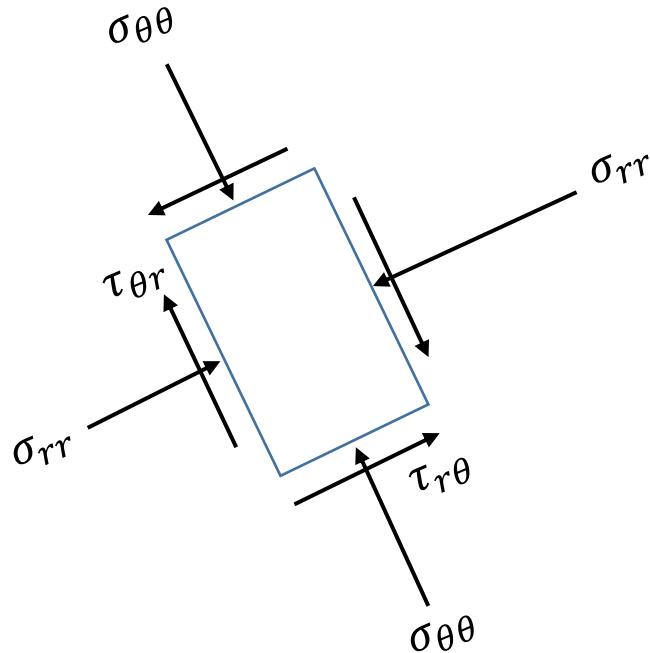
Breakout



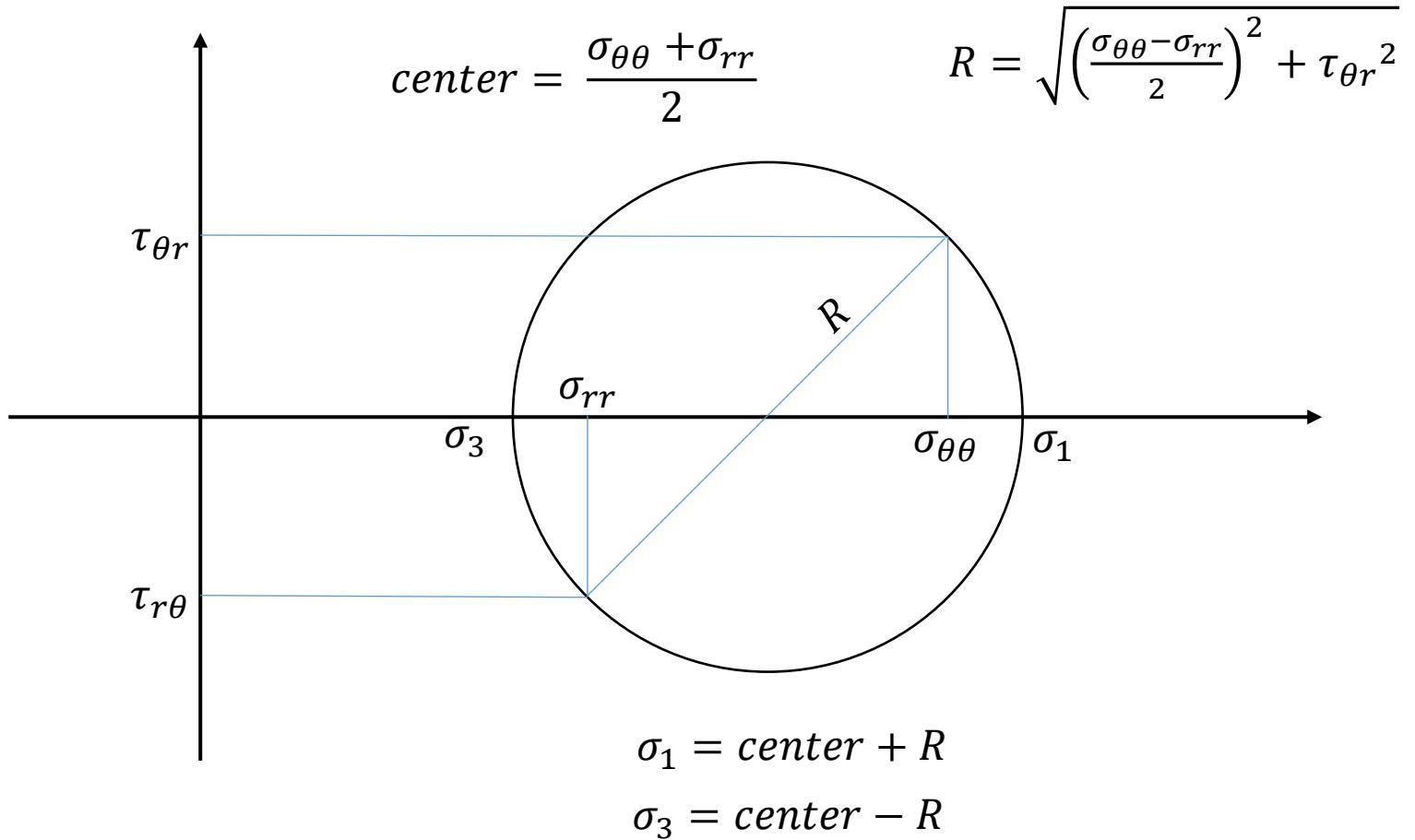
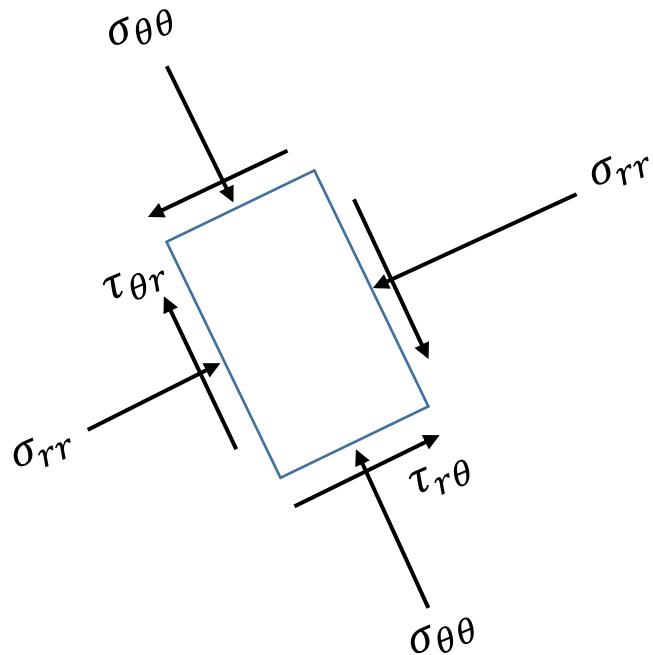
- Breakout (shear Failure) terjadi saat anisotropi stress (σ_1/σ_3) melebihi shear strength batuan tersebut.
- Di dinding lubang bor, hal ini terjadi di 90 dan 270 derajat dari azimuth SHmax



Shear Failure berdasarkan kriteria Mohr-Coulomb



Shear Failure berdasarkan kriteria Mohr-Coulomb



Shear Failure berdasarkan kriteria Mohr-Coulomb

- Untuk memodelkan shear failure, kita harus mengasumsikan dua parameter linearized Mohr-Coulomb, yaitu $q = f(\mu)$, dan UCS
- Untuk simplicitas kita dapat memodelkan UCS dan μ saja, karena data UCS batuan cukup banyak tersedia, dan μ berkisar antara 0.6-0.8 (Byerlee's law)
- Kita dapat menyelesaikan persamaan linearized Mohr Coulomb dengan 2 parameter model tersebut

$$q = \left(\sqrt{\mu^2 + 1} + \mu \right)^2$$

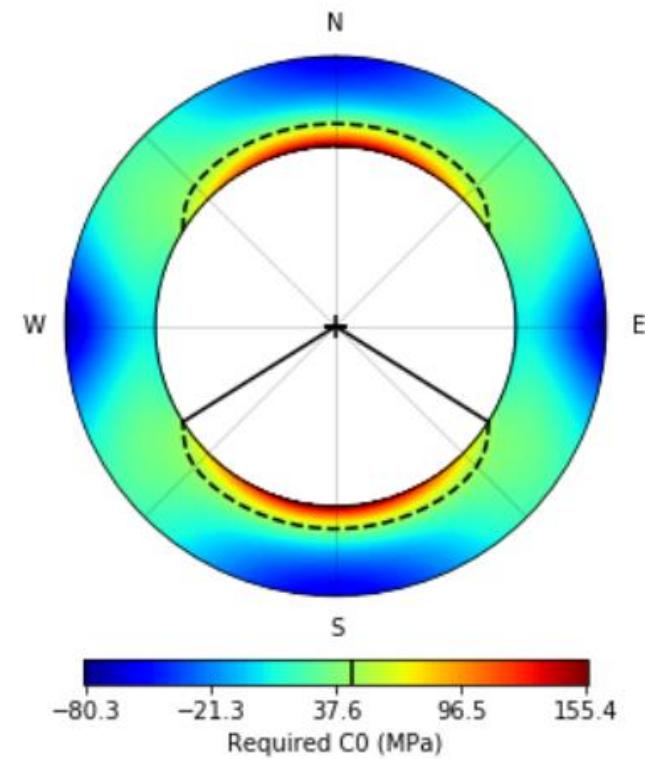
$$\sigma_1 = UCS + q\sigma_3$$

Required UCS plot

- Untuk setiap piksel, kita bisa menghitung nilai UCS dengan cara mengurangkan sigma1 dengan sigma3
- Hasilnya adalah plot disamping yang bisa diinterpretasikan sebagai kekuatan batuan yang dibutuhkan di satu titik agar tidak terjadi shear failure.

*Co = UCS

Breakout starts at 32.105 degree from SH azimuth
Breakout Width : 115.789 degree
Dashed line at 45.0 MPa



Shear Failure berdasarkan kriteria Mohr-Coulomb

- Jadi untuk di setiap titik / piksel di plot stress di sekitar lubang bor, kita punya nilai normal dan shear stress.
- Jika nilai $\sigma_1 \cdot q - \sigma_3$ di titik tersebut lebih kecil daripada UCS model/tebakan kita, kita anggap titik tersebut mengalami shear failure
- Sigma 1 tidak selamanya hoop stress, dan sigma tau dan radial tidak selamanya ada di principal axis (hanya tepat di dinding bor sigma tau dan sigma radial berada di sumbu principal)

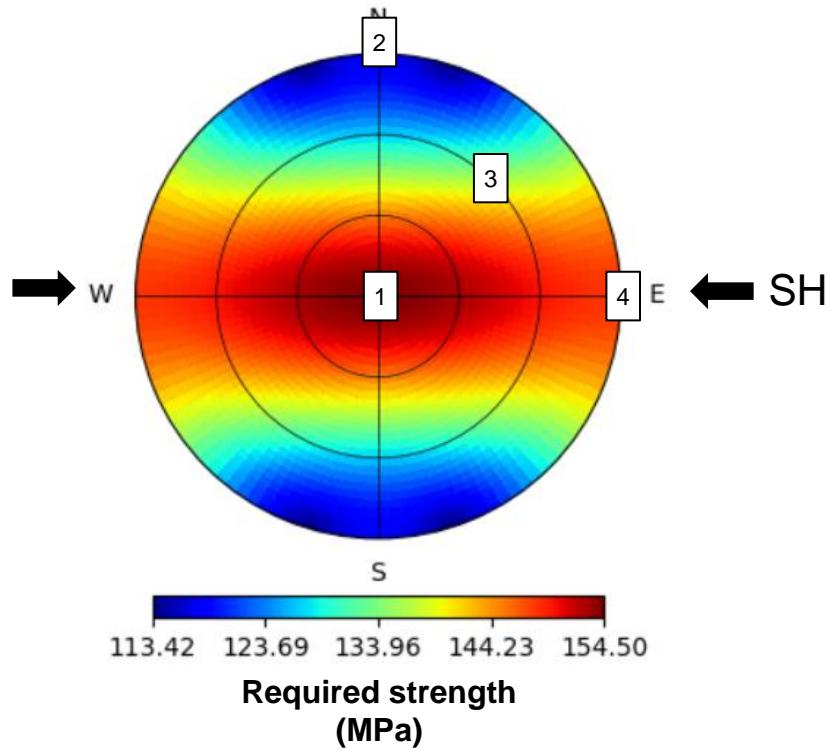
Required Mud Pressure

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} = -(P_W - P_p) + 3 \sigma_{Hmax} - \sigma_{hmin} \\ \sigma_3 = \sigma_{rr} = (P_W - P_p) \end{cases}$$

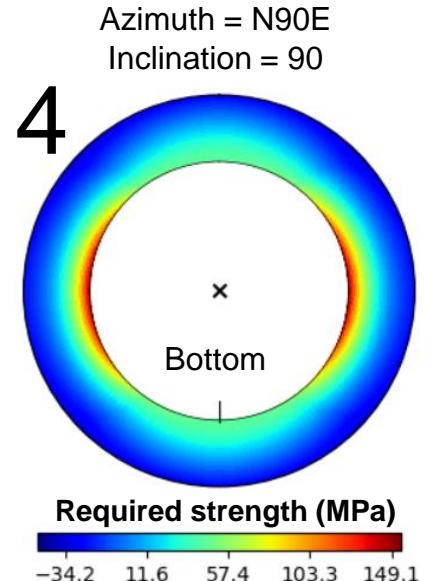
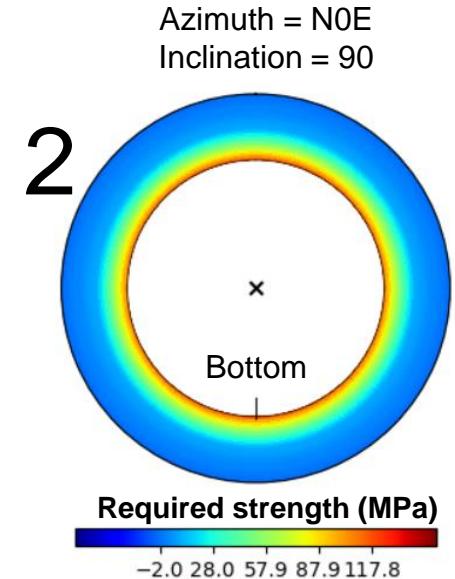
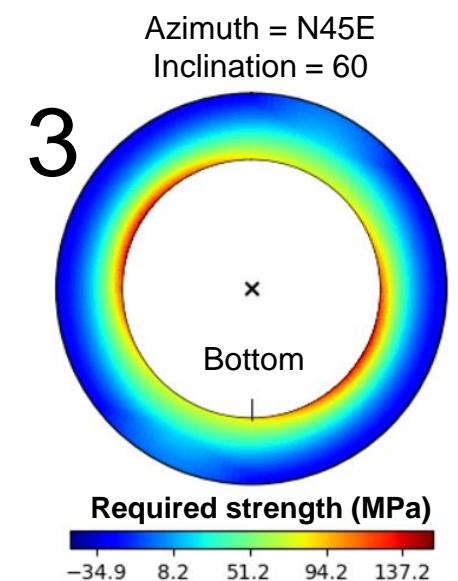
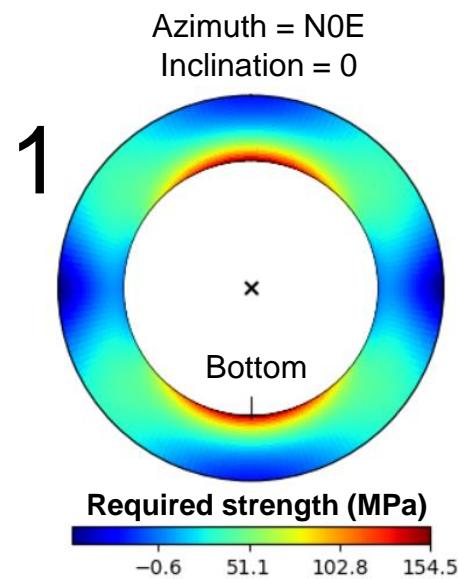
$$[-(P_W - P_p) + 3 \sigma_{Hmax} - \sigma_{hmin}] = UCS + q [P_W - P_p]$$

$$P_{Wshear} = P_p + \frac{3\sigma_{Hmax} - \sigma_{hmin} - UCS}{1 + q}$$

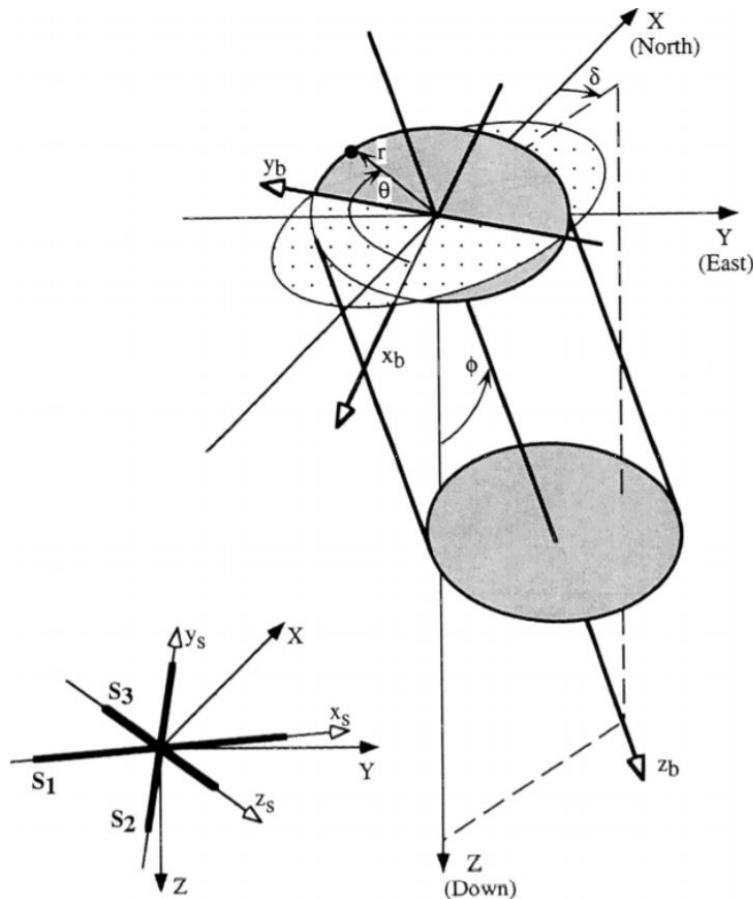
Deviated Hole



$S_v = 88.2 \text{ MPa}$, $SH = 90 \text{ MPa}$
 $Sh = 51.5 \text{ MPa}$, SH azimuth =
N90E
 $P_p = 32 \text{ Mpa}$, $P_w = 32 \text{ Mpa}$



Deviated Hole



$$R_{GW} = \begin{bmatrix} -\cos\delta\cos\phi & -\sin\delta\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\delta & -\cos\delta & 0 \\ \cos\delta\sin\phi & \sin\delta\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$S_W = R_{GW} S_G R_{GW}^T$$

Stresses at borehole wall for deviated hole

$$\sigma_{zz} = \sigma_{33} - 2\nu(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\theta - 4\nu\sigma_{12}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22} - 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\theta - 4\sigma_{12}\sin 2\theta - \Delta P$$

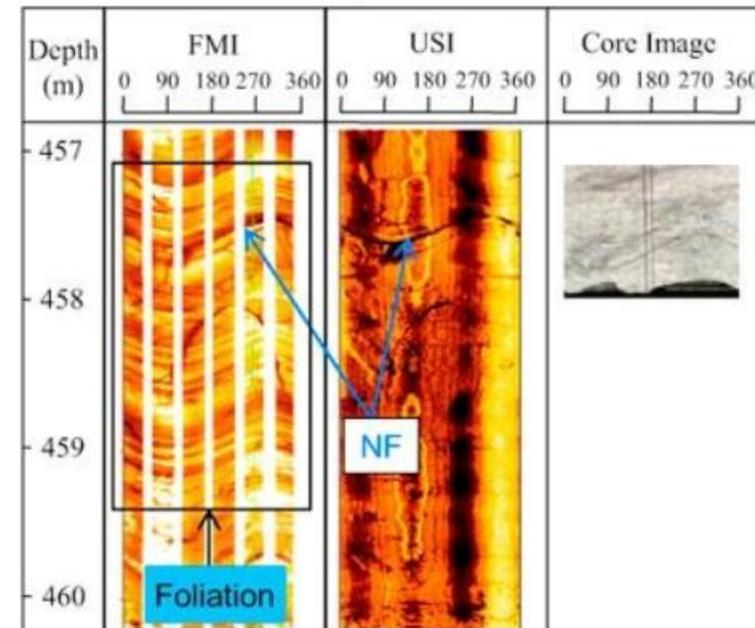
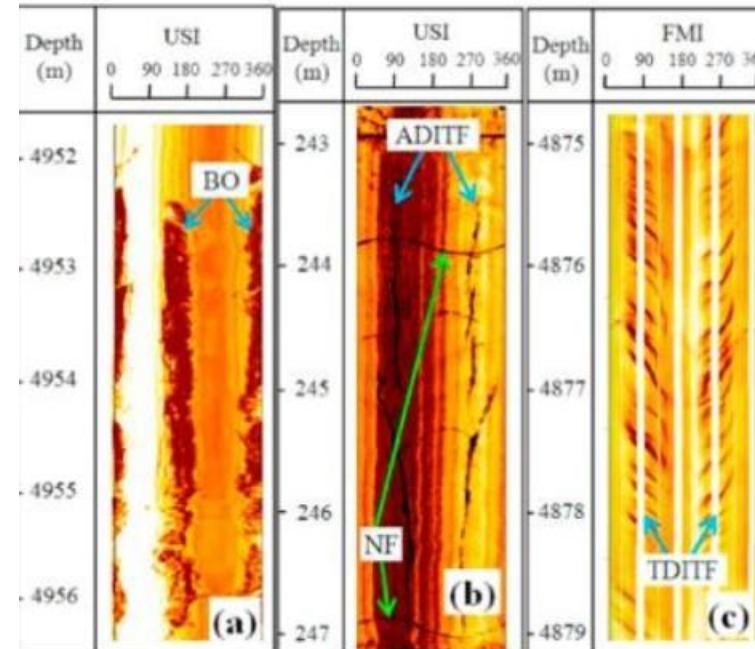
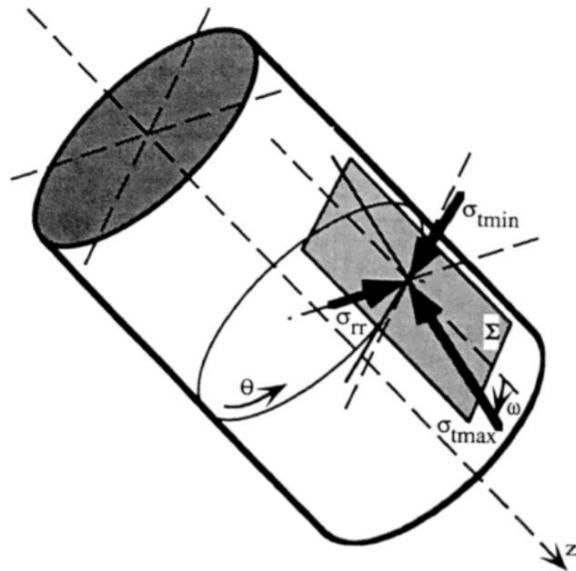
$$\tau_{\theta z} = 2(\sigma_{23}\cos\theta - \sigma_{13}\sin\theta)$$

$$\sigma_{rr} = \Delta P$$

$$\sigma_{tmax} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta} + \sqrt{(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{\theta z}^2} \right)$$

$$\sigma_{tmax} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta} - \sqrt{(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{\theta z}^2} \right)$$

Extras



Referensi

- Gercek, Hasan. (2016). The past revisited: The giants behind the elastic solutions for stresses around underground openings. 409-413. 10.1201/9781315388502-70.
- Kirsch, G. (1898). Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre, Zeitschrift des Verlins Deutscher Ingenieure.
- Zoback, M. (2007). Reservoir Geomechanics. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511586477
- <https://www.fracturemechanics.org/hole.html>
- <https://dnicolasespinoza.github.io/node43.html>