Anas Azhar (056413438)

Soal 1

Untuk nilai-nilai a berapakah sistem berikut ini tidak memiliki jawaban, memiliki jawabn tunggal, dan memiliki jawaban banyak:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_3 &= 2, \\ (a^2 - 4)x_3 &= a - 2. \end{aligned}$$

[Poin 20]

Solusi :

Penyelesaian dengan pendekatan Matriks Bentuk $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ a - 2 \end{bmatrix}.$$

Matriks koefisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Karena matriks ini berbentuk segitiga bawah, determinannya adalah

$$\det(A) = 1 \times 0 \times (a^2 - 4) = 0.$$

Artinya matriks A *singular*, sehingga sistem tidak dapat memiliki satu solusi unik.
Untuk menentukan apakah sistem masih konsisten, periksa

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{bmatrix}$$

Dari baris kedua, diperoleh $x_3 = 2$. Substitusi ke baris ketiga:

$$(a^2 - 4) \cdot 2 = a - 2 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0.$$

Persamaan ini memenuhi $a = 2$ atau $a = -\frac{3}{2}$.

Kasus 1: $a \neq 2$ **dan** $a \neq -\frac{3}{2}$

Baris ketiga menyebabkan pertentangan sehingga

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}([A|B]) = 3.$$

Sistem tidak konsisten $\Rightarrow$ **tidak memiliki solusi**.

Kasus 2: $a = 2$ **atau** $a = -\frac{3}{2}$

Baris ketiga menjadi nol seluruhnya, maka

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A|B]) = 2 < 3.$$

Sistem konsisten tetapi tak unik, sehingga memiliki **tak hingga banyak solusi**. Dari dua baris pertama:

$$x_3 = 2, \quad x_1 + x_2 = 2.$$

Kesimpulan

$$\begin{cases} \text{Tidak ada solusi} & \text{jika } a \neq 2, -\dfrac{3}{2}, \\ \text{Banyak solusi} & \text{jika } a = 2 \text{ atau } a = -\dfrac{3}{2}, \\ \text{Tidak ada solusi tunggal karena } \det(A) = 0. \end{cases}$$

Soal 2

Diketahui sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0, \\ 3x - y + 5z &= 0, \\ 4x + y + (k^2 - 14)z &= 0. \end{aligned}$$

Sistem memiliki jawaban tak hingga banyak. Tentukan nilai k. [Poin 20]

Solusi :

Sistem homogen ini akan memiliki jawaban tak hingga banyak apabila matriks koefisiennya singular, yaitu $\det(A) = 0$.
Matriks koefisien:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & k^2 - 14 \end{bmatrix}.$$

Dengan operasi baris elementer ubah A menjadi matriks segitiga atas.

$$\begin{aligned} B_2 &\leftarrow B_2 - 3B_1, \\ B_3 &\leftarrow B_3 - 4B_1, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & -7 & k^2-2 \end{bmatrix}.$$

Kemudian

$$B_3 \leftarrow B_3 - B_2$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & k^2-16 \end{bmatrix},$$

yang merupakan matriks segitiga atas. Maka

$$\det(A) = \det(U) = 1 \cdot (-7) \cdot (k^2 - 16) = -7(k^2 - 16) = -7(k-4)(k+4).$$

Agar sistem memiliki jawaban tak hingga banyak,

$$\det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad -7(k-4)(k+4) = 0.$$

Karena $-7 \neq 0$, diperoleh

$$(k-4)(k+4) = 0 \Rightarrow k = 4 \text{ atau } k = -4.$$

Jadi, nilai k yang membuat sistem memiliki jawaban tak hingga banyak adalah

$$\boxed{k = 4 \text{ atau } k = -4.}$$

Soal 3

Misalkan

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tentukan $\det(B)$ dengan menggunakan Operasi Baris Elementer. [Poin 20]

Solusi

Gunakan operasi baris elementer, yaitu $B_i \leftarrow B_i + cB_j$. Nolkan elemen di bawah pivot pertama pada kolom pertama dengan operasi

$$B_2 \leftarrow B_2 + \frac{2}{3}B_1.$$

Maka baris kedua menjadi

$$[-2,\, 3,\, 0] + \tfrac{2}{3}[3,\, -2,\, 0] = [0,\, \tfrac{5}{3}, 0].$$

Sehingga matriks berubah menjadi

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

yang merupakan matriks segitiga atas. Diperoleh determinannya

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Untuk matriks segitiga atas, determinan sama dengan hasil kali elemen-elemen diagonal, sehingga

$$\det(B) = 3 \cdot \frac{5}{3} \cdot 5 = 25.$$

Jadi,

$$\boxed{\det(B) = 25}.$$

Soal 4

Misalkan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right]$$

adalah matriks yang diperluas dari suatu sistem linier. Tentukan nilai a dan b agar sistem tersebut memiliki solusi tunggal. [Poin 20]

Solusi :

Matriks koefisiennya adalah

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det(A)$ dengan operasi baris elementer jenis $B_i \leftarrow B_i + cB_j$.
Pertama,

$$B_2 \leftarrow B_2 - B_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 4-b \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

Kemudian,

$$B_3 \leftarrow B_3 - B_2 \Rightarrow U = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 4-b \\ 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}.$$

Matriks U adalah segitiga atas, sehingga

$$\det(A) = \det(U) = a \cdot a \cdot (b-2) = a^2(b-2).$$

Agar sistem memiliki solusi tunggal, diperlukan

$$\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(b-2) \neq 0,$$

sehingga

$$a \neq 0 \quad \text{dan} \quad b \neq 2.$$

Sistem memiliki solusi tunggal apabila

$$\boxed{a \neq 0 \text{ dan } b \neq 2.}$$

Soal 5

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor. [Poin 20]

Solusi

Lakukan ekspansi menurut kolom kedua karena banyak elemen nol.

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}.$$

Pada kolom kedua, hanya $a_{22} = 1$ yang bukan nol, sehingga

$$\det(A) = a_{22} \cdot C_{22}.$$

Hitung kofaktor C_{22}: hapus baris ke-2 dan kolom ke-2 dari A,

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (1)(-2) = 4 + 2 = 6.$$

Karena $C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (+1)(6) = 6$, maka

$$\det(A) = a_{22}C_{22} = 1 \times 6 = 6.$$

Jadi,

$$\boxed{\det(A) = 6.}$$