

Relasi dan Sifat-sifatnya

1. Diketahui himpunan $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$. Buatlah relasi dalam bentuk pasangan terurut yang memenuhi:

- (a) $R_1 = \{(a, b) \mid a \geq b; a \in A, b \in B\}$.
- (b) $R_2 = \{(a, b) \mid a + 1 \geq b; a \in A, b \in B\}$.

Penyelesaian:

Untuk R_1 :

$$A = \{3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 5, 6\}.$$

- Untuk $a = 3$: syarat $a \geq b$ berarti $3 \geq b$. Dari B hanya $b = 2$ yang memenuhi. Maka $(3, 2) \in R_1$.
- Untuk $a = 4$: syarat $4 \geq b$. Dari B , $b = 2$ dan $b = 4$ memenuhi. Maka $(4, 2)$ dan $(4, 4) \in R_1$.

Jadi

$$R_1 = \{(3, 2), (4, 2), (4, 4)\}.$$

Untuk R_2 :

$$R_2 = \{(a, b) \mid a + 1 \geq b; a \in A, b \in B\}.$$

- Untuk $a = 3$: $a + 1 = 4$, sehingga $b \leq 4$. Dari B : $b = 2, 4$. Maka $(3, 2)$ dan $(3, 4) \in R_2$.
- Untuk $a = 4$: $a + 1 = 5$, sehingga $b \leq 5$. Dari B : $b = 2, 4, 5$. Maka $(4, 2)$, $(4, 4)$, dan $(4, 5) \in R_2$.

Jadi

$$R_2 = \{(3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 5)\}.$$

2. Diketahui \mathbb{Z} (himpunan bilangan bulat) dan relasi

$$aRb \iff b = 3a, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}.$$

Tentukan domain $D(R)$ dan range $R(R)$.

Penyelesaian:

Relasi dapat ditulis sebagai

$$R = \{(a, 3a) \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

- Domain $D(R)$ adalah semua elemen pertama dari setiap pasangan: untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ ada $b = 3a \in \mathbb{Z}$, sehingga

$$D(R) = \mathbb{Z}.$$

- Range $R(R)$ adalah semua elemen kedua dari setiap pasangan: semua berbentuk $3a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$, yaitu kelipatan tiga,

$$R(R) = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Diketahui graf berarah dengan himpunan simpul

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

dan panah seperti pada gambar (2 mengarah ke 1 dan 3, 1 ke 4 dan 5, 5 ke 3, 3 ke 4).

- (a) Buatlah relasi dalam bentuk pasangan terurut.

Dari arah panah didapat pasangan:

$$R = \{(2, 1), (1, 4), (2, 3), (1, 5), (5, 3), (3, 4)\}.$$

- (b) Periksa apakah relasi R bersifat refleksif, simetris, dan transitif.

Refleksif:

Refleksif pada S berarti $(x, x) \in R$ untuk semua $x \in S$. Dari graf tidak ada loop pada setiap simpul, sehingga tidak ada $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$ di dalam R . Jadi R bukan refleksif.

Simetris:

Simetris berarti jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$. Karena $(2, 1) \in R$ tetapi $(1, 2) \notin R$, maka R tidak simetris.

Transitif:

Transitif berarti jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$. Perhatikan bahwa $(2, 1) \in R$ dan $(1, 4) \in R$, sehingga jika R transitif harusnya $(2, 4) \in R$. Namun $(2, 4) \notin R$. Maka R tidak transitif.