گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل خطی

فصل چهارم: تحلیل فرکانسی سیستم های خطی

در این فصل تحلیل پایداری سیستم های خطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می کنیم. بدین منظور با تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های خطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تحلیل پایداری سیستم های خطی با استفاده از آنالیز توابع مختلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های خطی در این چهارچوب، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکوست سیستم حلقه بسته با بهره واحد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.

به چشم انداز

کسب مهارت های لازم

در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی

خوش آمدید

در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۴ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. **گروه رباتیک ارس** به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

۲ نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

۳ نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

۴ انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

در این فصل تحلیل پایداری سیستم های خطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می کنیم. بدین منظور با تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های خطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تحلیل پایداری سیستم های خطی با استفاده از آنالیز توابع مختلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های خطی در این چهارچوب، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکوست سیستم حلقه بسته با بهره واحد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.

- **چرا تحلیل فرکانسی؟**

  ✓ تبدیل فوریه و لاپلاس تغییر نگاه از حوزه زمان به فرکانس.

  ✓ محل قطب ها در سیستم حلقه بسته، پایداری سیستم را مشخص می کند.

  ✓ محل قطب ها (و صفرهای سیستم) در حوزه فرکانس رفتار گذرا و دائمی سیستم را مشخص می کنند.

  ✓ تحلیل و طراحی در سیستم های کنترل خطی اساسا در حوزه فرکانس انجام می شود.

  ❑ انتخاب نوع کنترلگر و بهره های آن با نگاه فرکانسی تعیین شود

  ❑ پایداری مطلق و نسبی در حوزه فرکانس تعریف می شود

  ❑ پاسخ زمانی سیستم با استفاده از تحلیل لاپلاس تعیین می شود

  ❑ رفتار سیستم در حوزه زمان بررسی و نتایج آن در حوزه فرکانس مورد استفاده قرار می گیرد.

• پاسخ فرکانسی

✓ تبدیل لاپلاس در سیستم های خطی رابطه مستقیمی با پاسخ فرکانسی سیستم دارد

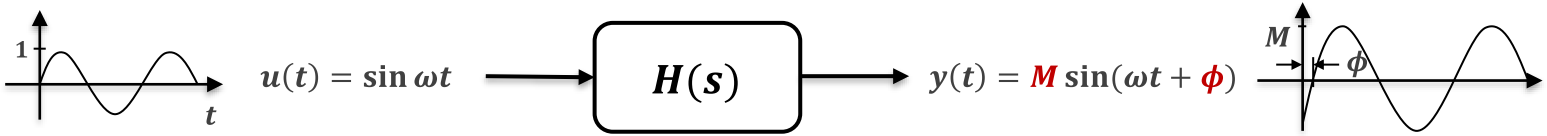
✓ تعریف پاسخ فرکانسی:

پاسخ دائمی یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان LTI به ورودی سینوسی

✓ پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی به ورودی سینوسی یا تابع سینوسی با همان فرکانس ورودی ولی با دامنه M و اختلاف فاز ϕ خواهد بود.

- پاسخ فرکانسی

✓ در نمایش تابع تبدیل:



✓ اگر $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم در حوزه زمان باشد، آنگاه

$$H(s) = \mathcal{L}\big(h(t)\big)$$

✓ در هر فرکانس معین ω:

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\big(h(t)\big)$$

✓ $H(j\omega)$ دارای مقداری موهومی است که می تواند به صورت قطبی با اندازه و زاویه معرفی شود:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{\measuredangle H(j\omega)} = Me^{j\phi}$$

✓ که در آن M همان بهره دامنه و ϕ همان فاز خروجی سینوسی است.

• پاسخ فرکانسی

✓ مثال ۱: پاسخ فرکانسی سیستم زیر را برای فرکانس های $\omega = 0.1, 1, 10, 100$ به دست آورید:

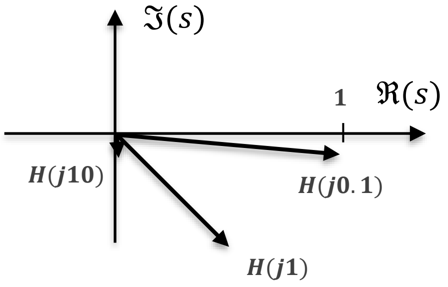
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

❑ پاسخ:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$$

❑ در فرکانس های مختلف مقدار مختلط $H(j\omega)$ عبارت است از:

Frequency	$H(j\omega)$	$M = \lvert H(j\omega) \rvert$	$\phi = \measuredangle H(j\omega)$
0.1	$0.9901 - j0.0990$	0.9950	-5.71°
1	$0.5000 - j0.5000$	0.7071	-45.00°
10	$0.0099 - j0.0990$	0.0995	-84.29°
100	$0.0001 - j0.0100$	0.0100	-89.43°



عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

۲ نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

۳ نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

۴ انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

در این فصل تحلیل پایداری سیستم های خطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می کنیم. بدین منظور با تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های خطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تحلیل پایداری سیستم های خطی با استفاده از آنالیز توابع مختلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های خطی در این چهارچوب، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکوست سیستم حلقه بسته با بهره واحد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• نمودار بودی (Bode)

✓ ترسیم $H(j\omega)$ در دو نمودار مجزای اندازه (به صورت لگاریتمی) و زاویه بر حسب فرکانس (با مقیاس لگاریتمی)

✓ نمودار اندازه:

$$L = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$ بر حسب دسی بل (dB)

✓ نمودار زاویه:

$$\phi = \measuredangle H(j\omega)$$ بر حسب درجه

• قضیه بودی (۱۹۴۵)

✓ اگر چه هندریک بودی به خاطر نمودار بودی در بین دانشجویان مهندسی شناخته شده است، ولی دستاورد اصلی وی تعیین تقریبی نمودار زاویه بر حسب نرخ تغییرات نمودار اندازه است اگر در مقیاس لگاریتمی رسم شود.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

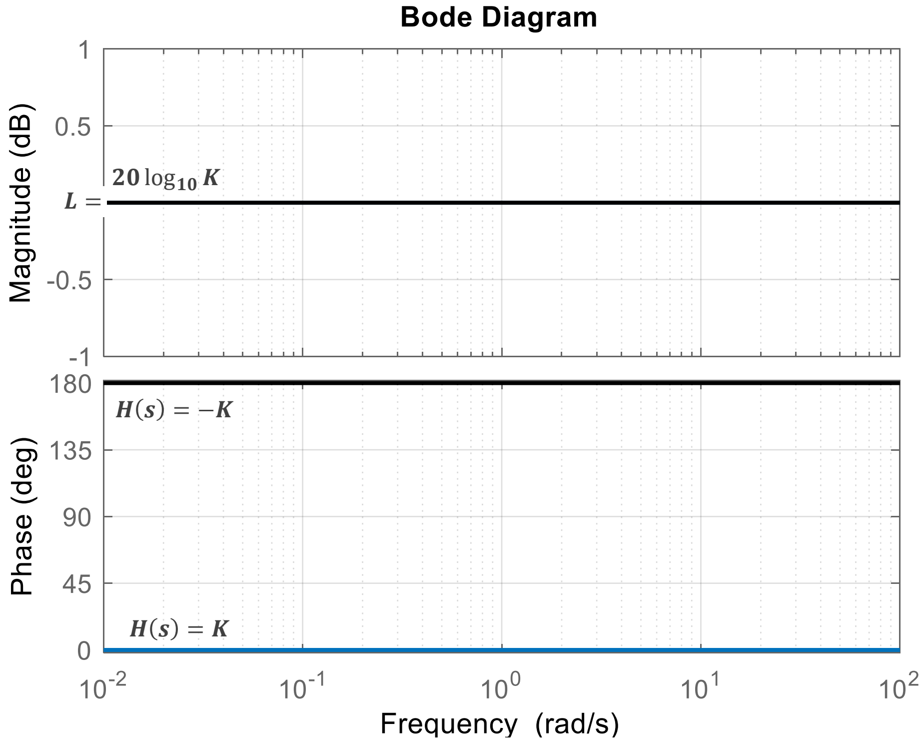
- **نمودار بودی (Bode)**

✓ مقیاس دسی بل را مرور کنیم:

$\lvert H(j\omega)\rvert = 1 \quad \rightarrow \quad L = 20\log_{10} 1 = 0\ dB$		بدون تغییر در اندازه
$\lvert H(j\omega)\rvert = 10 \quad \rightarrow \quad L = 20\log_{10} 10 = 20\ dB$		تقویت کننده
$\lvert H(j\omega)\rvert = 10^4 \quad \rightarrow \quad L = 20\log_{10} 10^4 = 80\ dB$		تقویت کننده
$\lvert H(j\omega)\rvert = 0.1 \quad \rightarrow \quad L = 20\log_{10} 0.1 = -20\ dB$		تضعیف کننده
$\lvert H(j\omega)\rvert = 10^{-3} \quad \rightarrow \quad L = 20\log_{10} 10^{-3} = -60\ dB$		تضعیف کننده

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- نمودار بودی (Bode)



✓ بهره ثابت مثبت

$$H(s) = K = Ke^{j0}$$

بهره در همه فرکانس ها مقداری ثابت و زاویه برابر صفر است

✓ بهره ثابت منفی

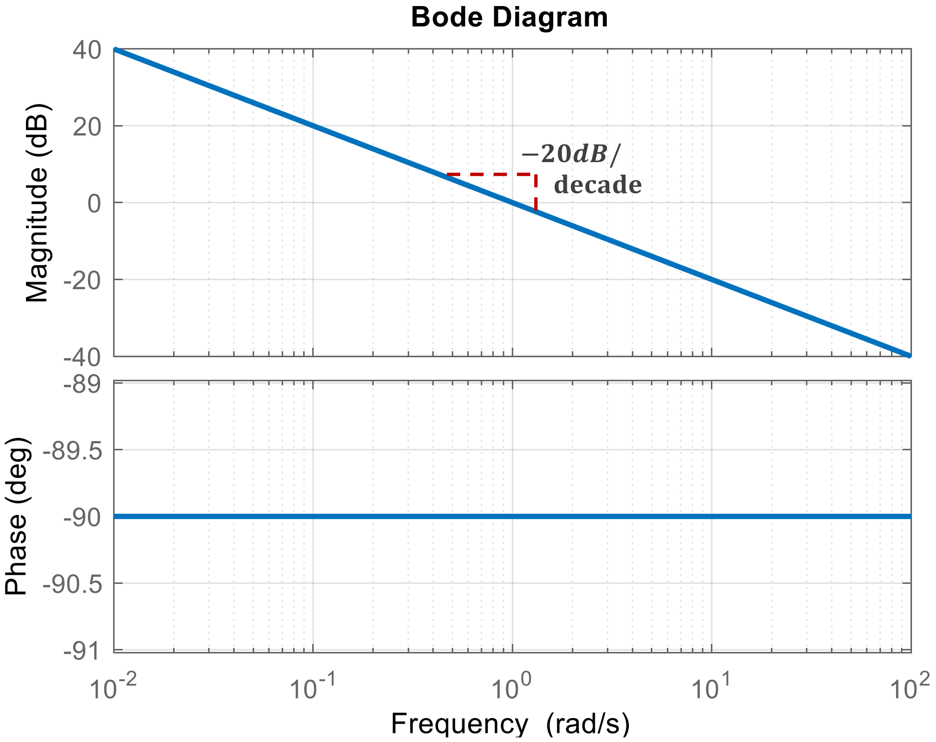
$$H(s) = -K = Ke^{j180^\circ}$$

بهره در همه فرکانس ها مقداری ثابت و زاویه برابر ۱۸۰ درجه است

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**

✓ سیستم انتگرالگیر:



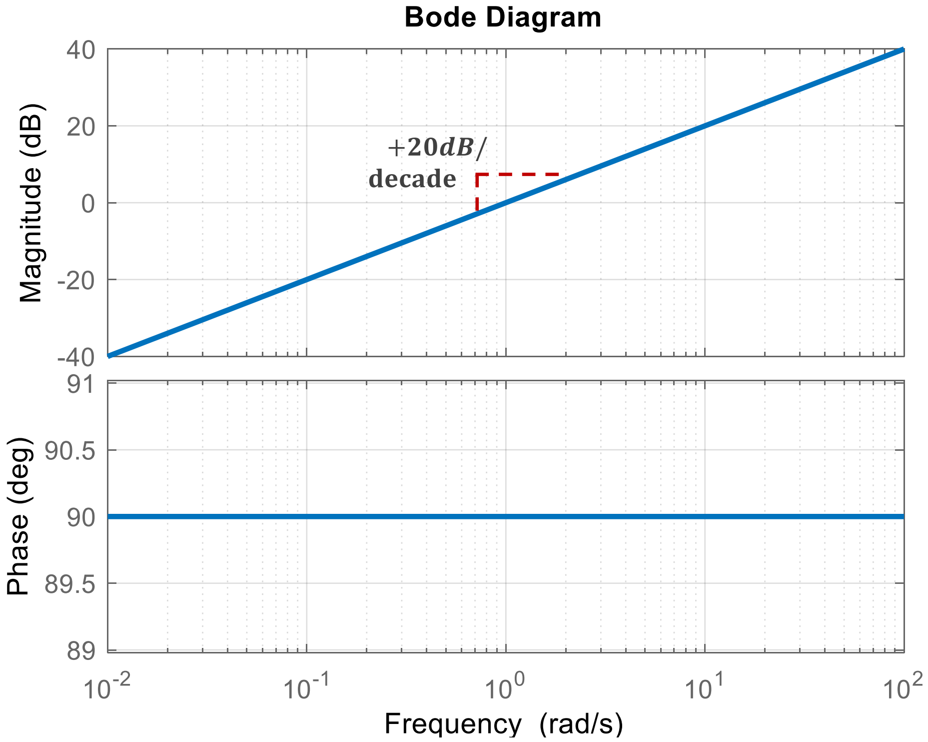
$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$L = -20\log_{10}(\omega)$$

$$\measuredangle H(j\omega) = -90^{\circ}$$

بهره در فرکانس صفر بی نهایت است و در فرکانس بالا نزدیک صفر نمودار بهره یک خط با شیب -20dB/decade در نمودار لگاریتمی است. فاز در همه فرکانس ها برابر ۹۰− درجه است.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی



- **نمودار بودی (Bode)**

✓ سیستم مشتق گیر:

$$H(s) = s$$

$$L = +20\log_{10}(\omega)$$

$$\measuredangle H(j\omega) = +90^{\circ}$$

مقدار بهره در فرکانس صفر، صفر است و در فرکانس بالا بی نهایت است. نمودار بهره یک خط با شیب +20dB/decade در نمودار لگاریتمی است. فاز در همه فرکانس ها برابر +۹۰ درجه است.

- **نمودار بودی (Bode)**
  - ✓ سیستم مرتبه اول Lag :

$$H(s)=\frac{1}{1+\tau s}, \qquad H(j\omega)=\frac{1}{1+j(\tau\omega)} \rightarrow |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

$$L=20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}=-20\log_{10}\sqrt{1+(\tau\omega)^2}, \qquad L=-10\log_{10}(1+(\tau\omega)^2)$$

- ❑ بدین ترتیب:

For $\omega \ll 1/\tau$ or $\omega\tau \ll 1 \rightarrow L \cong 0\ dB$

For $\omega = 1/\tau$ or $\omega\tau = 1 \rightarrow L = -10\log_{10}(2) = -3\ dB\ (0.7)$

For $\omega \gg 1/\tau$ or $\omega\tau \gg 1 \rightarrow L \cong -10\log(\omega\tau)^2 = -20\log\omega\tau$

این یک خط با شیب -20dB/decade در نمودار لگاریتمی است.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- ## نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه اول Lag :

$$L = -10\log_{10}(1+(\tau\omega)^2)$$

این یک خط با شیب -20dB/decade در فرکانس های بالا است.

$$\measuredangle H(j\omega) = 0 - \tan^{-1}(\tau\omega)$$

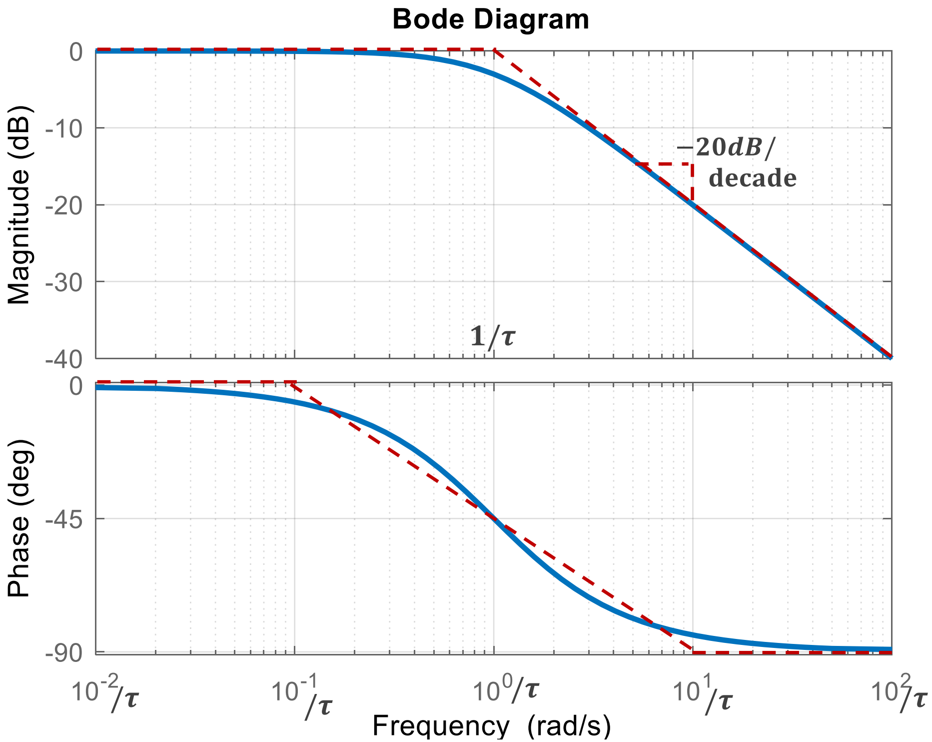
For $\omega \ll 1/\tau \rightarrow \measuredangle H(j\omega) = 0^\circ$

For $\omega = 1/\tau \rightarrow \measuredangle H(j\omega) = -45^\circ$

For $\omega \gg 1/\tau \rightarrow \measuredangle H(j\omega) = -90^\circ$

سیستم مرتبه اول Lag ۹۰ درجه تاخیر فاز (پس فاز) ایجاد می کند.

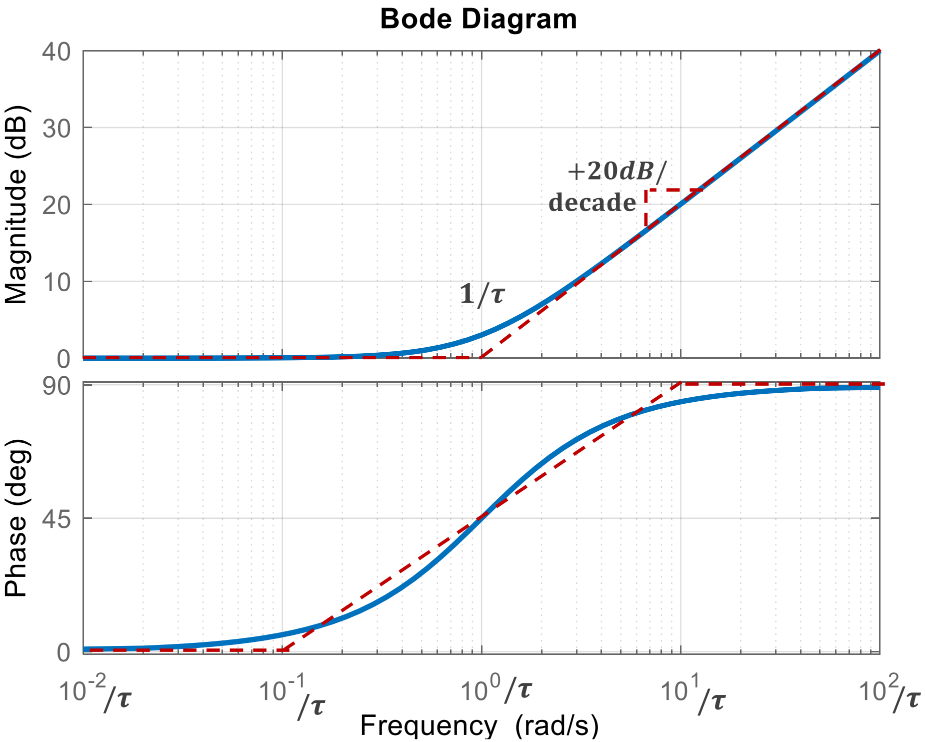
شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم مرتبه اول PD :



$$H(s) = 1 + \tau s$$

$$L = +10\log_{10}(1 + (\tau\omega)^2) = -\bar{L}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = +\tan^{-1}(\tau\omega) = -\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$

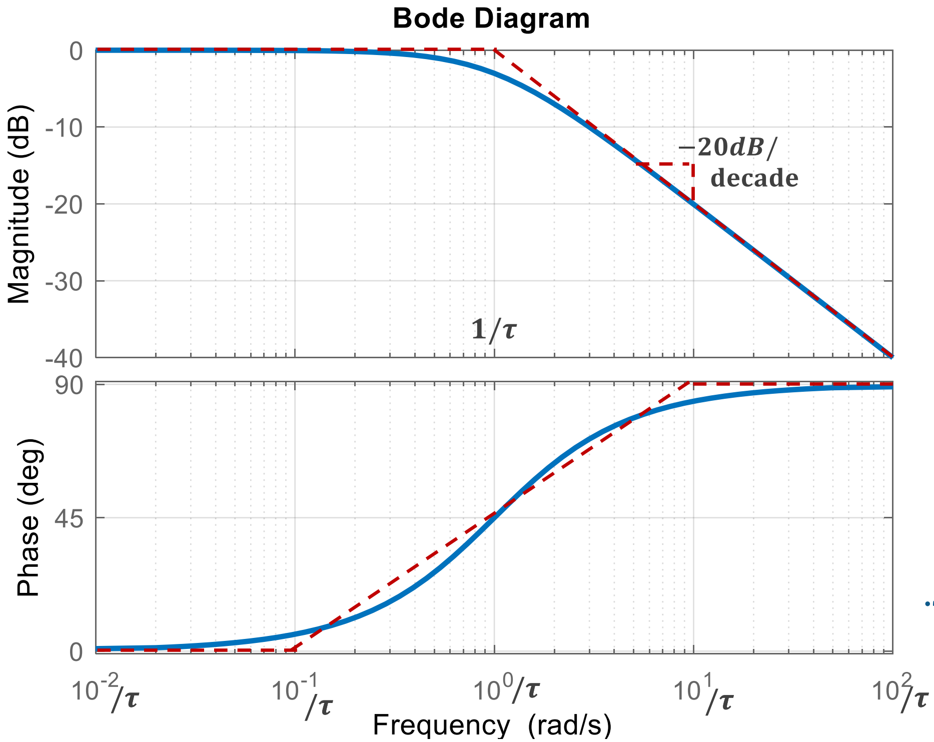
بهره و زاویه مشابه Lag است، امّا با بهره و فاز مثبت (پیش فاز)

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**

✓ سیستم Lag ناپایدار :



$$H(s) = \frac{1}{1 - \tau s}$$

$$L = \bar{L}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه در مقایسه با Lag پایدار $\bar{L}$ تغییر نمی کند ولی فاز مثبت می شود.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

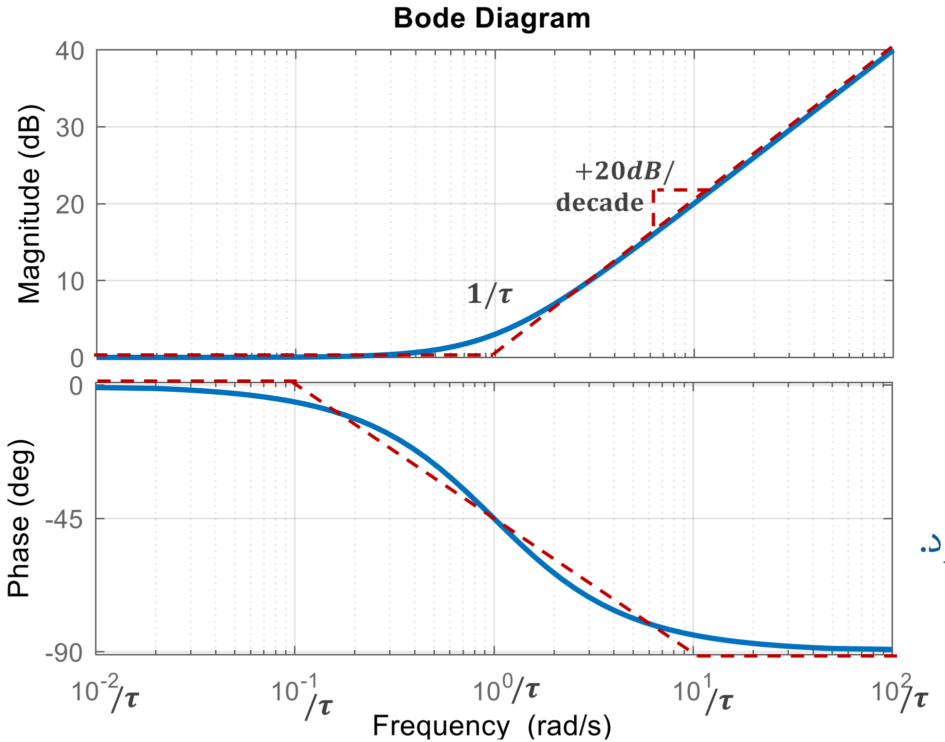
- نمودار بودی (Bode)

✓ سیستم PD با صفر غیرکمینه فاز:

$$H(s) = 1 - \tau s$$

$$L = \bar{L}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$



اندازه نسبت به PD معمول $\bar{L}$ تغییر نمی کند ولی فاز منفی می شود.

بدین علت است که با این صفر غیرکمینه فاز گفته می شود.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**

✓ سیستم مرتبه دوم پایدار:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau + 1}, \qquad \tau = 1/\omega_n$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{[1-(\tau\omega)^2] + j(2\zeta\tau\omega)} \qquad \forall\omega$$

$$L = -10\log_{10}[(2\zeta\omega)^2 + (1-(\tau\omega)^2)^2] \cong \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \tau\omega \ll 1 \\ -10\log_{10}(\tau\omega)^4 = -40\log(\tau\omega) & \text{for} \quad \tau\omega \gg 1 \end{cases}$$

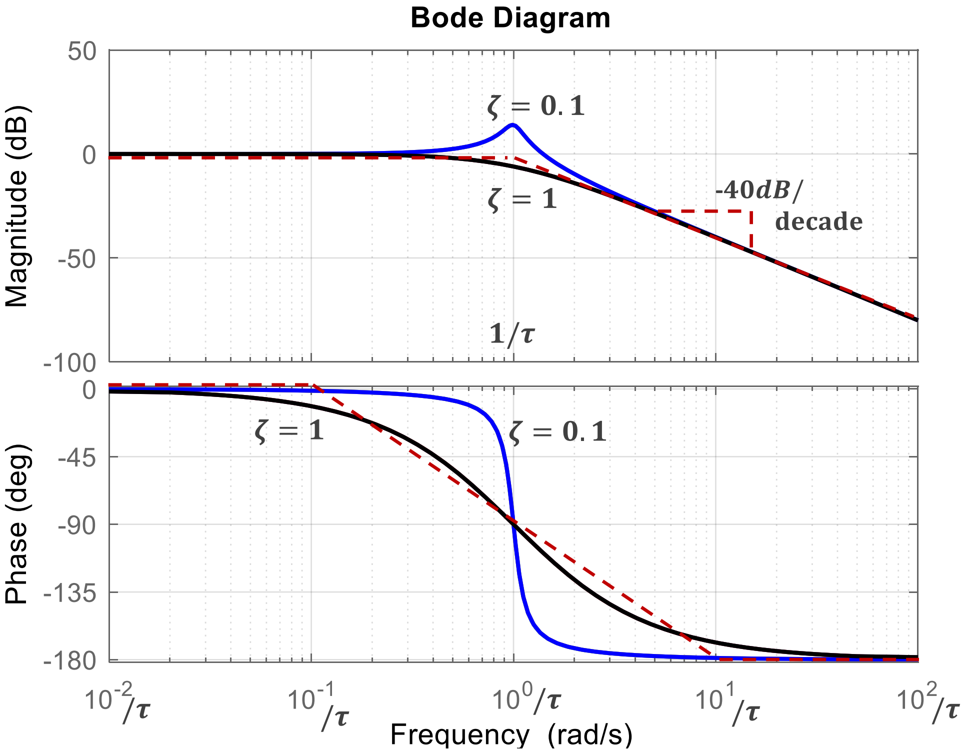
❑ این یک خط با شیب -40dB/decade در نمودار لگاریتمی است.

❑ مقدار L در فرکانس $\omega = 1/\tau$ به ازای $\zeta = 1$ برابر $-6dB = (0.5)$ است.

$$\measuredangle H(j\omega) = -10\tan^{-1}\frac{2\zeta\tau\omega}{1-(\tau\omega)^2} \cong \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \tau\omega < 0.1 \\ -180^\circ & \text{for} \quad \tau\omega \gg 10 \end{cases}$$

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی** (Bode)



✓ سیستم مرتبه دوم پایدار:

$$H(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau + 1}$$

$$L = 2 \times \bar{L}$$
$$\measuredangle H(j\omega) = 2\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه و فاز تقریبی دو برابر یک Lag مرتبه یک $\bar{L}$ است.

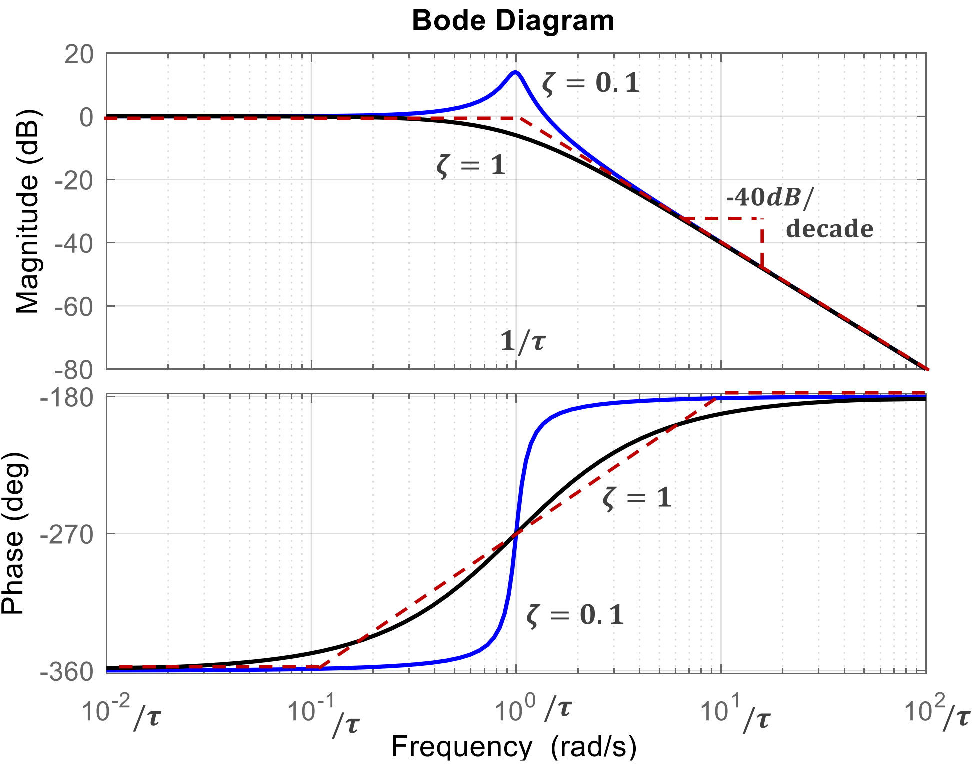
شیب نمودار اندازه در فرکانس های بالا -40dB/decade است و تاخیر فاز ۱۸۰− درجه است که به ζ بستگی ندارد اما مقدار واقعی نمودار به ζ بستگی دارد.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی** (Bode)

✓ سیستم مرتبه دوم ناپایدار:



$$H(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 - 2\zeta\tau + 1}$$

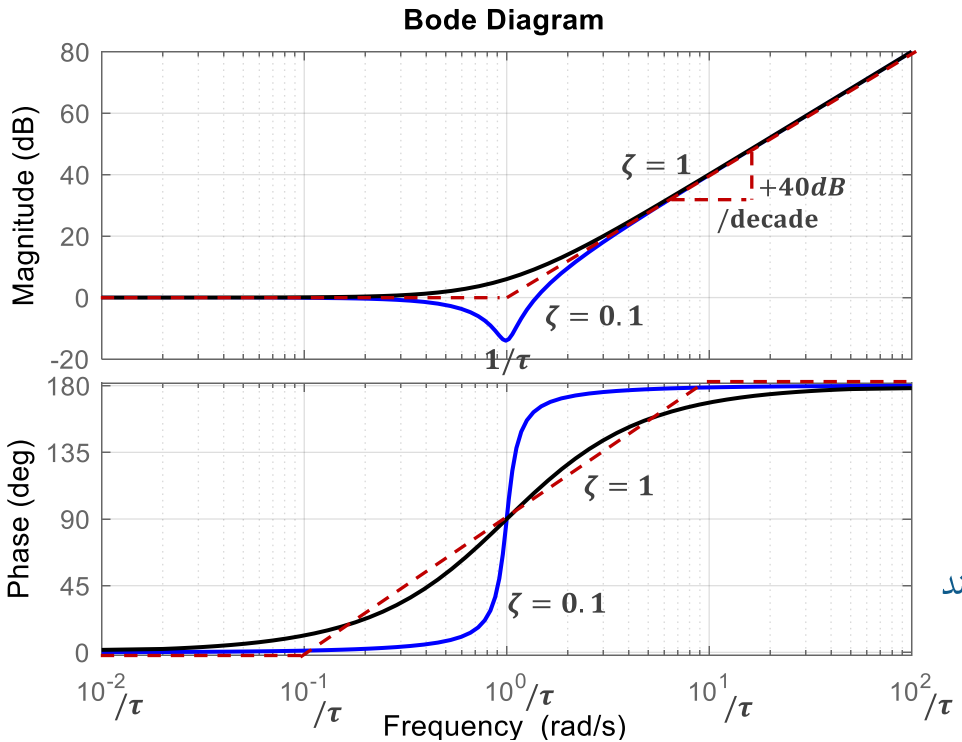
$$L = -\bar{L}$$
$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه نسبت به سیستم مرتبه دوم پایدار $\bar{L}$ تغییری نمی کند و تنها فاز مثبت می شود

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**
  - ✓ سیستم با دو صفر کمینه فاز:



$$H(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau + 1$$

$$L = -\bar{L}$$

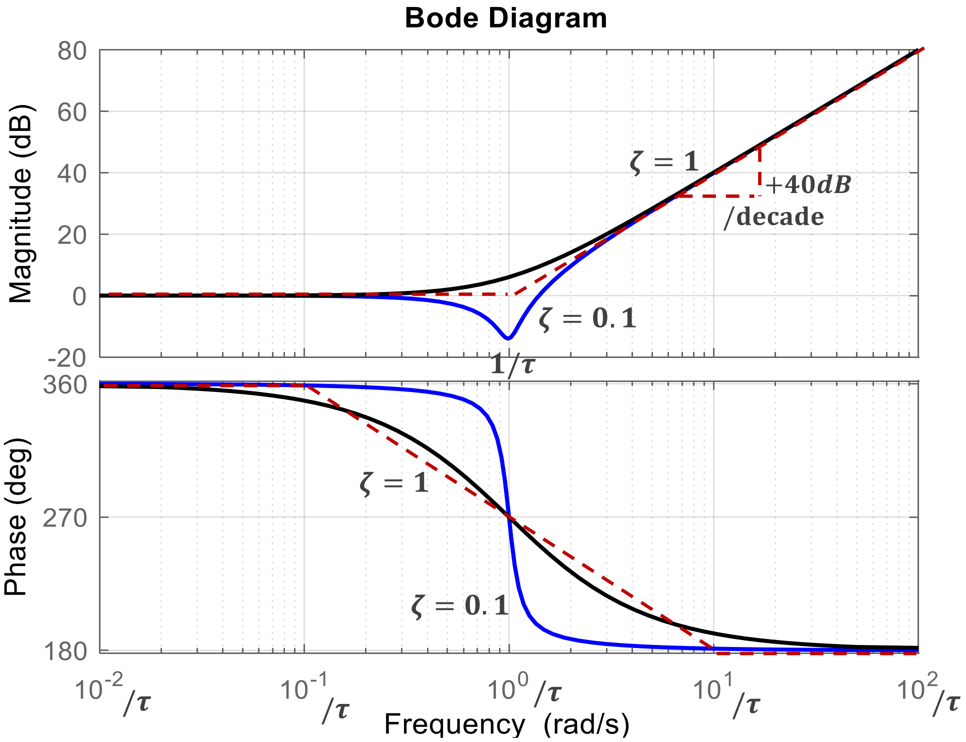
$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه و فاز نسبت به سیستم مرتبه دوم پایدار $\bar{L}$ تغییر علامت می دهند

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی** (Bode)
  - ✓ سیستم با دو صفر غیرکمینه فاز:



$$H(s) = \tau^2 s^2 - 2\zeta\tau + 1$$

$$L = \bar{L}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle \bar{H}(j\omega)$$

اندازه در مقایسه با سیستم با دو صفر کمینه فاز $\bar{L}$ تغییری نمی کند و تنها فاز آن منفی (غیرکمینه فاز) می شود.

شکل تقریبی را با خط نقطه چین قرمز رنگ به خاطر بسپارید.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**
  - ✓ سیستم های مرتبه بالاتر
    - ❑ ویژگی لگاریتمی نمودار بودی سبب می شود نمودار سیستم های مرتبه بالاتر را بتوان از نمودار های پایه ارائه شده به دست آورد.
    - ❑ تابع تبدیل جامع یک سیستم را بر حسب قطب و صفر های مرتبه اول و دوم و انتگرالگیرهای تکرار شونده در نظر بگیرید

$$H(s)=\frac{K(1+\tau_1 s)^r\cdots(1+2\zeta\tau_2 s+\tau_2^2 s^2)^\ell}{s^m\cdot(1+\tau_3 s)^k\cdots(1+2\zeta\tau_4 s+\tau^4 s^2)^p}$$

- ❑ با استفاده از ویژگی لگاریتمی بهره سیستم از مجموع ترم های صورت منهای مجموع ترم های مخرج به دست می آید.

$$\begin{aligned}L=&\,20\log_{10}K+r(20\log_{10}|1+j\tau_1\omega|)+\cdots+\ell(20\log_{10}|[1+(\tau_2\omega)^2]+j2\zeta\tau_2\omega|)\\&-m(20\log_{10}|j\omega|)-k(20\log_{10}|1+\tau_3\omega|)-\cdots-p(20\log_{10}|[1+(\tau_4\omega)^2]+j2\zeta\tau_4\omega|)\end{aligned}$$

- ❑ به صورت مشابه زاویه را ازمجموع زاویه ترم های صورت منهای مجموع زاویه ترم های مخرج به دست آورید.

$$\measuredangle H(j\omega)=r\tan^{-1}(\tau_1\omega)+\cdots+\ell\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\tau_2\omega}{1-(\tau_2\omega)^2}\right)-m\frac{\pi}{2}-k\tan^{-1}(\tau_3\omega)-\cdots-p\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\tau_4\omega}{1-(\tau_4\omega)^2}\right)$$

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**

✓ سیستم های مرتبه بالاتر

❑ ابتدا نمودار تقریبی اجزا را در اندازه و فاز رسم نموده و سپس آنها را با هم به راحتی جمع کنید.

✓ مثال ۱: نمودار بودی کنترلگر Lead و Lag

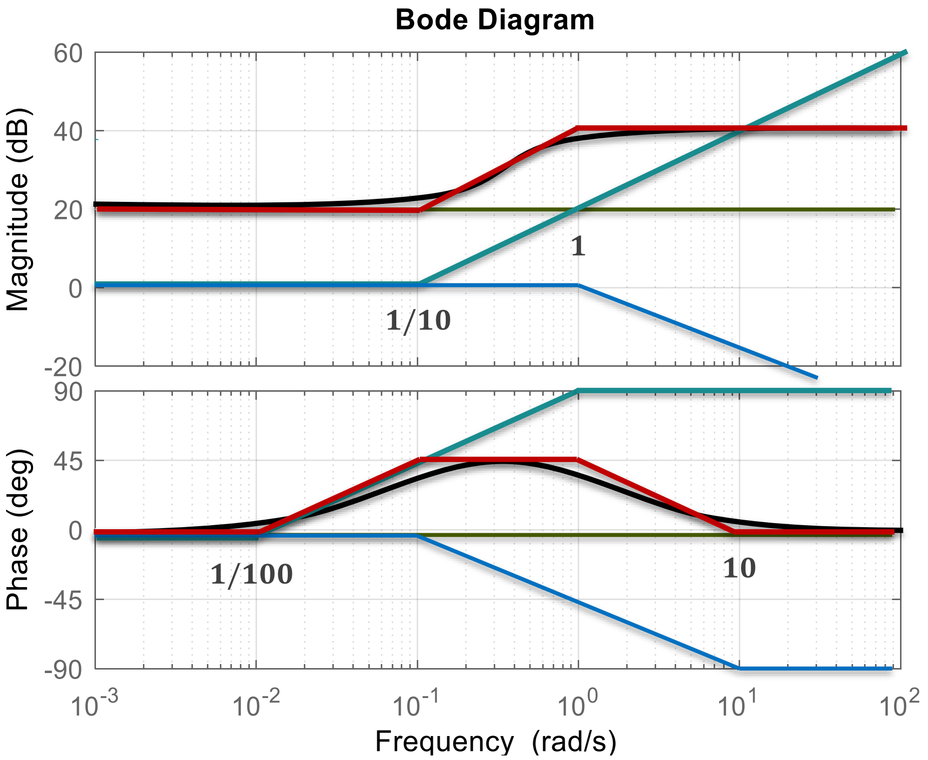
❑ قبلا این دو کنترلگر معرفی شده اند:

$$C(s) = K\frac{\tau_z s + 1}{\tau_p s + 1}$$

❑ که در کنترل کننده Lead صفر به مبدا نزدیکتر است $\tau_z > \tau_p$

❑ و در کنترل کننده Lag قطب بسیار به مبدا نزدیکتر است $\tau_p > \tau_z \gg 1$

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی



• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

❑ کنترلگر Lead زیر را در نظر بگیرید

$$C(s) = 10\frac{10s+1}{s+1}$$

$C_1(s) = 10 \rightarrow L = 20dB, \measuredangle = 0^{\circ}$

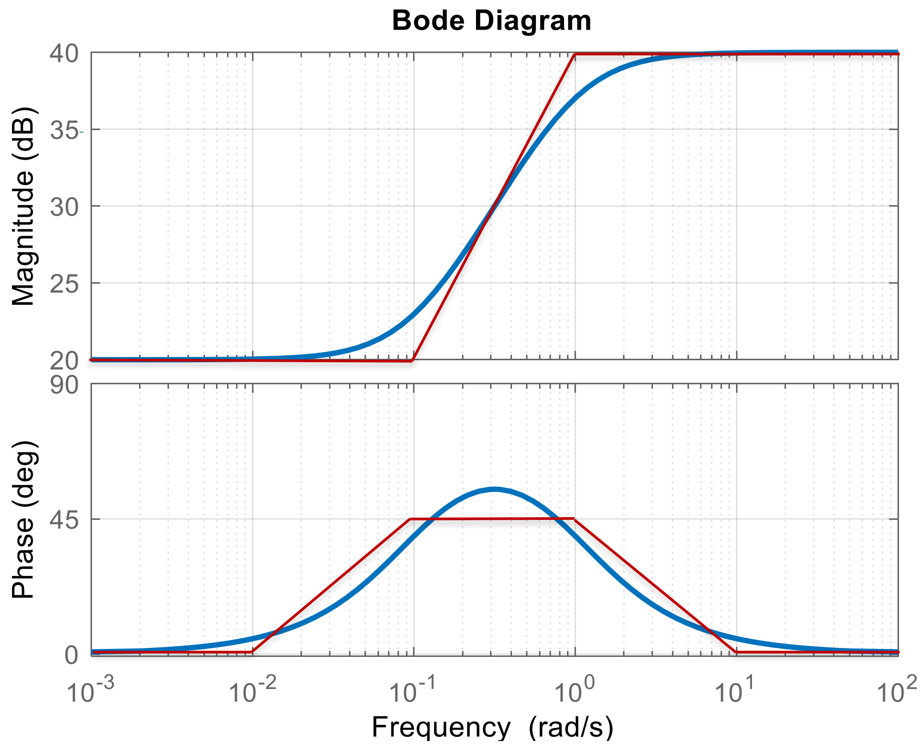
$C(s) = 10s + 1 \rightarrow$ Lead with $\tau = 10$

$C(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow$ Lag with $\tau = 1$

$C(s) = 10\frac{10s+1}{s+1}$

حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی



• نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

❑ کنترلگر Lead زیر را در نظر بگیرید

$$C(s) = 10\frac{10s+1}{s+1}$$

```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=10*[10 1];
den=[1 1];
sys=tf(num,den);
bode(sys)
set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)
```

حل کامپیوتری

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- ## نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

❑ کنترلگر Lag زیر را در نظر بگیرید

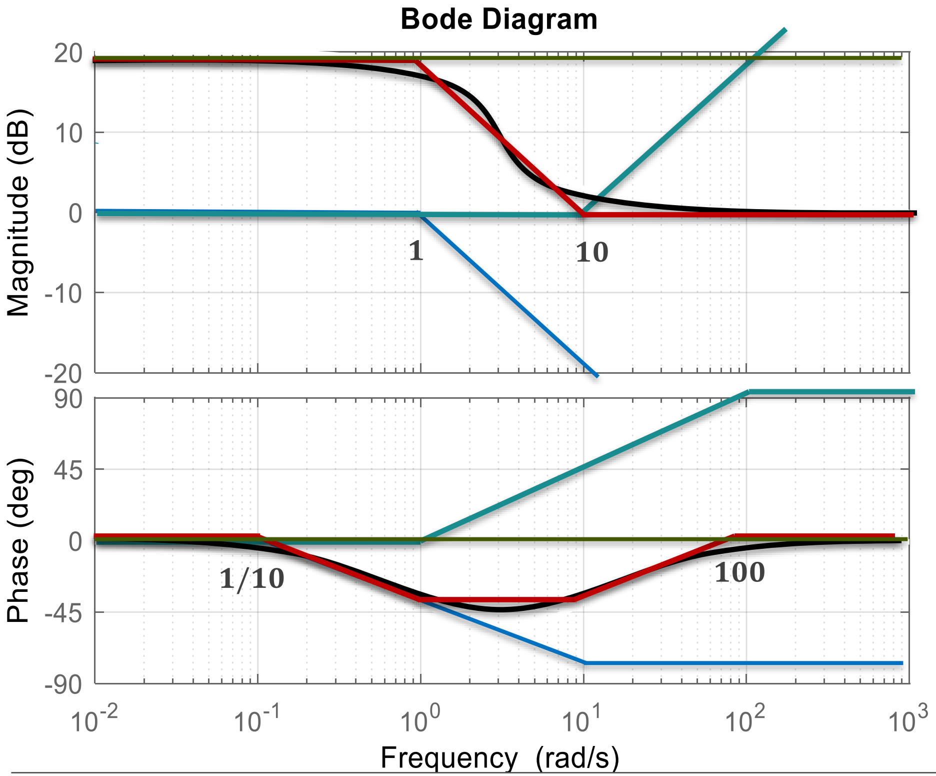
$$C(s) = 10\frac{0.1s+1}{s+1}$$

$$C_1(s) = 10 \rightarrow L = 20dB, \measuredangle = 0^{\circ}$$

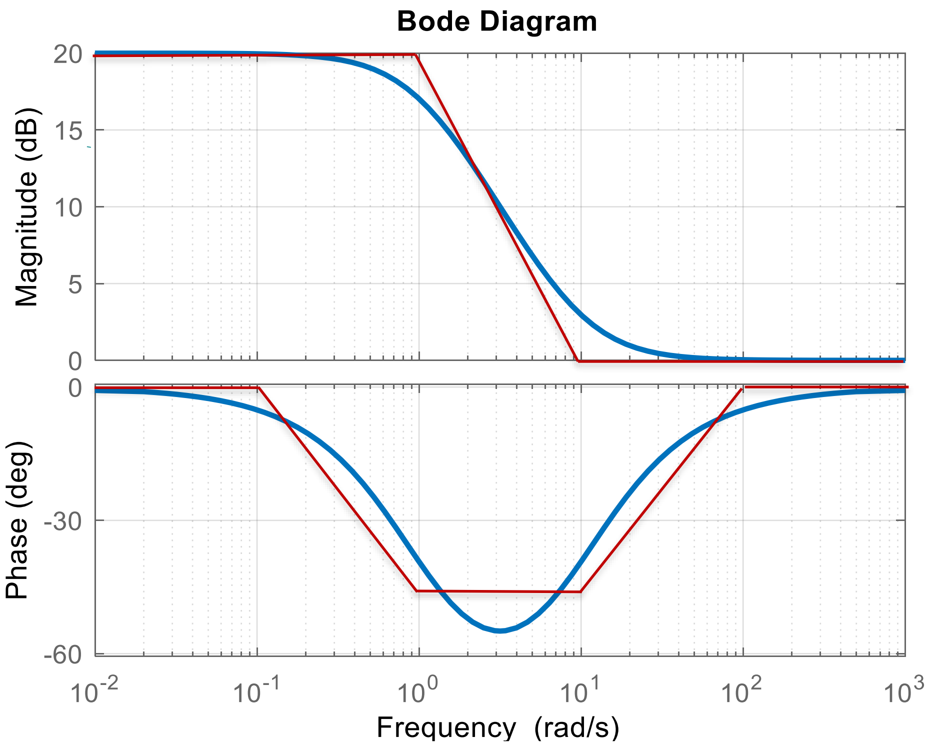
$$C(s) = 0.1s+1 \rightarrow \text{Lead with } \tau = 0.1$$

$$C(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \text{Lag with } \tau = 1$$

$$C(s) = 10\frac{10s+1}{s+1}$$



حل دستی



- نمودار بودی (Bode)

✓ ادامه مثال ۱:

❑ کنترلگر Lag زیر را در نظر بگیرید

$$C(s) = 10\frac{0.1s + 1}{s + 1}$$

```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=10*[0.1 1];
den=[1 1];
sys=tf(num,den);
bode(sys)
set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)
```

حل کامپیوتری

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**
  - ✓ مثال ۲:
    - ❑ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s) = \frac{1 - 0.1s}{s^2 + s + 1}$$

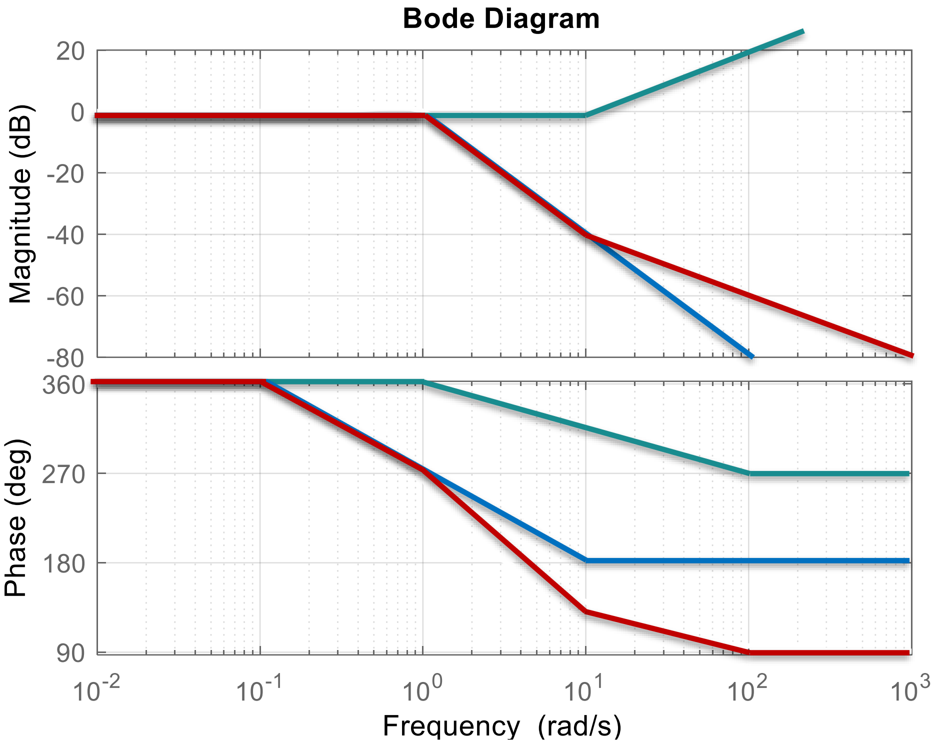
$C_1(s) = 1 - 0.1s \rightarrow$

NMP PD with $\tau = 0.1$

$C_2(s) = s^2 + s + 1 \rightarrow$

stable 2nd order with $\tau = 1$

$C(s) = \frac{1-0.1s}{s^2+s+1}$



حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- **نمودار بودی (Bode)**

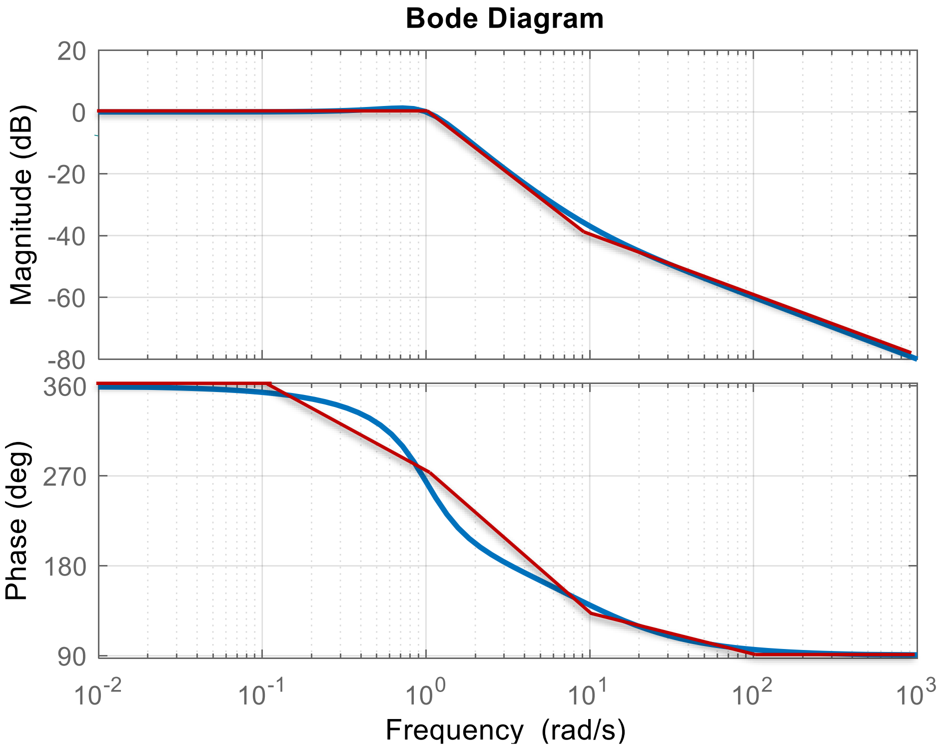
✓ ادامه مثال ۲:

❑ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

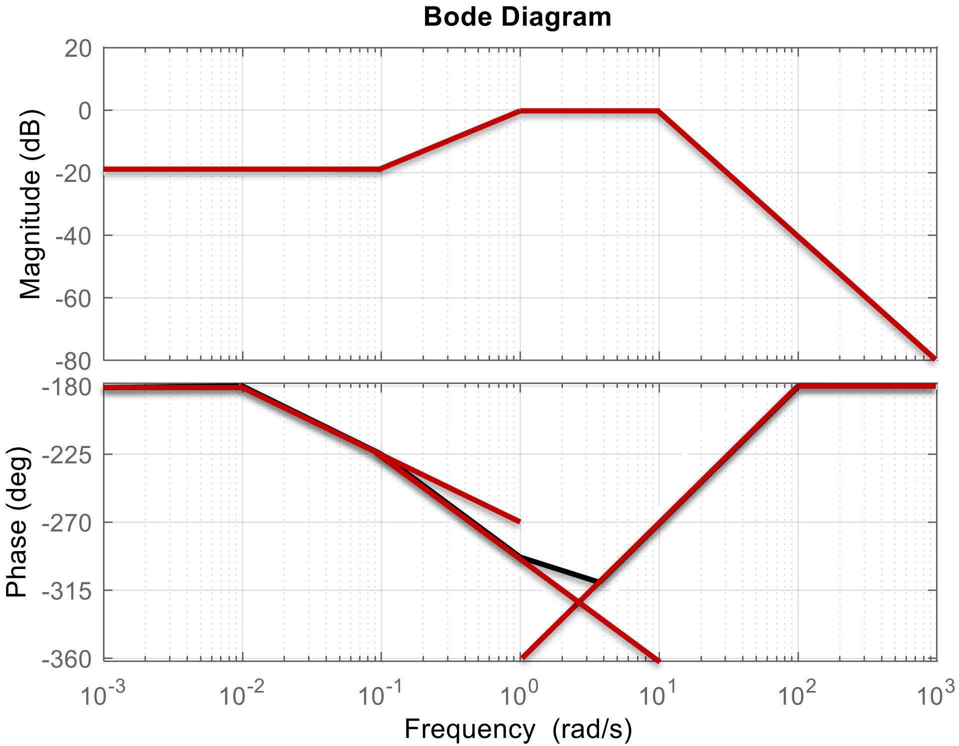
$$C(s) = \frac{1 - 0.1s}{s^2 + s + 1}$$

```
%   Example 1
clear all, clc, clf
num=[-0.1 1];
den=[1 1 1];
sys=tf(num,den);
bode(sys)
set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)
```

حل کامپیوتری



تحلیل فرکانسی با نمودار بودی



- **نمودار بودی (Bode)**
  - ✓ مثال ۳: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s)=\frac{100(s-0.1)}{(s+1)(s^2-10s+100)}$$

$$=\frac{100(-0.1)}{100}\frac{(1-10s)}{(1+s)\left(\left(\frac{s}{0.1}\right)^2-\frac{1}{0.1}s+1\right)}$$

$$C_1(s)=-0.1\rightarrow L=-20dB,\qquad \measuredangle=-180^{\circ}$$

$$C_2(s)=1-10s\ \rightarrow\ \text{NMP PD with }\tau=10$$

$$C_3(s)=(1+s)\rightarrow \text{Lag with }\tau=1$$

$$C_3(s)=\left(\frac{s}{0.1}\right)^2-\frac{1}{0.1}s+1\rightarrow \text{Unsatble 2nd order}$$

$$\text{with }\ \tau=0.1,\ \zeta=1/2$$

حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

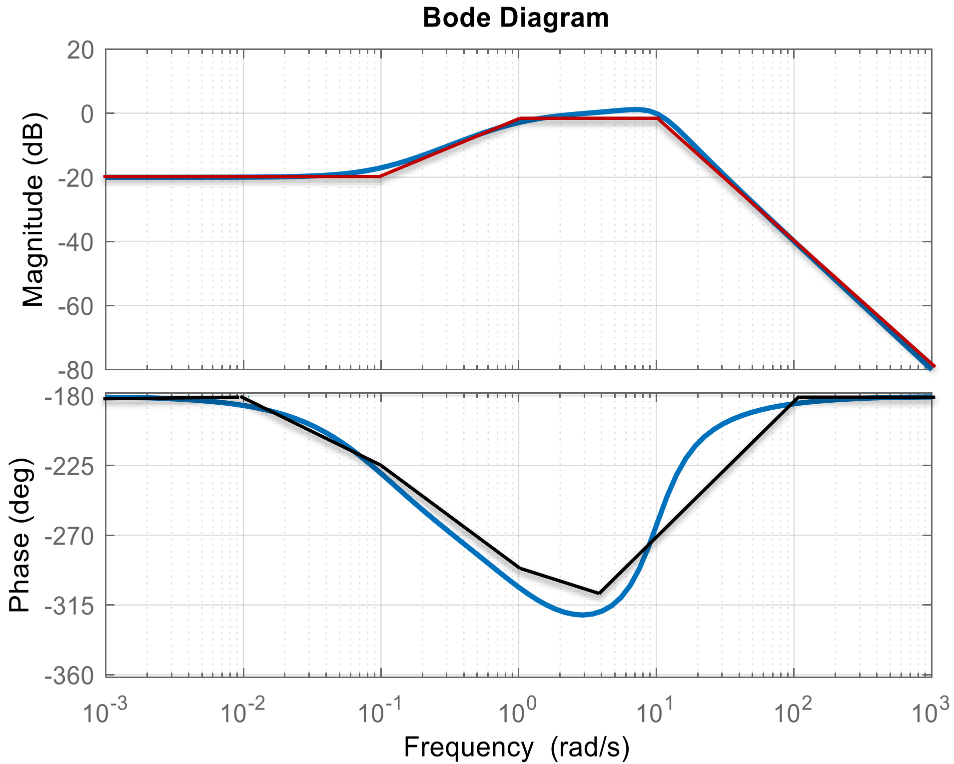
- **نمودار بودی (Bode)**

✓ ادامه مثال ۳:

❑ سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$C(s)=\frac{100(s-0.1)}{(s+1)(s^2-10s+100)}$$

```
%   Example 3
clear all, clc, clf
num=100*[1 -0.1];
den=conv([1 1],[1 -10 100]);
sys=tf(num,den);
bode(sys)
set(findall(figure(1),'type','line'),'line
width',2)
```



حل کامپیوتری

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• سیستم های غیر کمینه فاز

✓ در تعریف سیستم های غیر کمینه فاز اختلاف نظر جزئی وجود دارد

- ❑ بسیاری از مراجع وجود صفر در ORHP را برای غیر کمینه فاز بودن، کافی می دانند Dorf, Franklin, Nise, …
- ❑ برخی دیگر سیستمی که صفر یا قطب در ORHP داشته باشد را غیر کمینه فاز می نامند Kuo, Ogata, …
- ❑ تعریف جامع آن سیستمی است که خودش و وارون آن علی و پایدار باشد (Kailath).
  - در این تعریف اکیدا سره بودن تابع تبدیل نیز مهم است.

اگر سیستمی دارای صفری در نیم صفحه باز سمت راست ORHP باشد به آن حتما غیر کمینه فاز اطلاق می شود.

- ❑ در این موضوع اتفاق نظر است و غیر کمینه فاز بودن آن در نمودار بودی آن مشهود است.
- ❑ در این نوع سیستم ها اگر تعداد صفرهای غیرکمینه فاز فرد باشد فروجهش در پاسخ دیده می شود.
- ❑ سیستم هایی که تاخیر دار باشند نیز هر دو خصوصیت فوق را دارند و به آنها نیز (در برخی مراجع) غیر کمینه فاز گفته می شود.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

- ## سیستم های غیر کمینه فاز

✓ سیستمی غیرکمینه فاز است که نمودار بودی آن در مقایسه با سیستم های مشابه خود دارای کمینه فاز نباشد:

✓ تجزیه سیستم غیر کمینه فاز به سیستم های تمام گذر و سیستم کمینه فاز

❑ هر سیستم غیر کمینه فاز را می توان به دو جزء تمام گذر و کمینه فاز تجزیه نمود:

- سیستم های تمام گذر دارای بهره واحد و فاز غیر صفر می باشند.

✓ مثال های زیر را در نظر بگیرید

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s+2} = \underbrace{\frac{s-1}{s+1}}_{G_{ap}} \cdot \underbrace{\frac{s+1}{s+2}}_{G_{mp}}$$

$$G_2(s) = \frac{s^2-2s+1}{s(s+s+2)} = \underbrace{\frac{s^2-2s+1}{s^2+2s+1}}_{G_{ap}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s+s+2)}}_{G_{mp}}$$

$$G_3(s) = \frac{e^{-0.1s}}{s+3} = \underbrace{e^{-0.1s}}_{G_{ap}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{G_{mp}}$$

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

• سیستم های غیر کمینه فاز

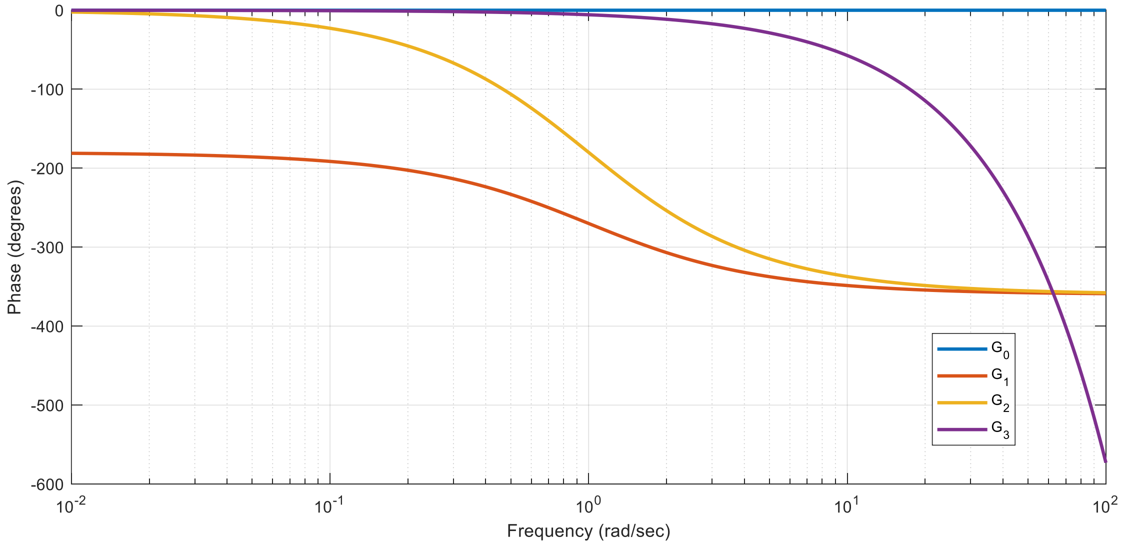
- ✓ نمودار اندازه همه توابع تمام گذر برابر یک یا $0db$ است
- ✓ نمودار فاز بخش های تمام گذر را با هم مقایسه کنید: بخش کمینه فاز دارای اندازه فاز کمتری است.

$$G_0(s) = 1$$

$$G_{ap_1}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$G_{ap_2}(s) = \frac{s^2-2s+1}{s^2+2s+1}$$

$$G_{ap_3}(s) = e^{-0.1s}$$



زندگی نامه دانشمندان

Hendrik Wade Bode

(December 24, 1905 – June 21, 1982)

was an American engineer, researcher, inventor, author and scientist, of Dutch ancestry. As a pioneer of modern control theory and electronic telecommunications he revolutionized both the content and methodology of his chosen fields of research. His synergy with Claude Shannon, the father of information theory, laid the foundations for the technological convergence of the information age. He made important contributions to the design, guidance and control of anti-aircraft systems during World War II. He helped develop the automatic artillery weapons that defended London from the V-1 flying bombs during WWII. After the war, Bode along with his wartime rival Wernher von Braun developer of the V1, and, later, the father of the US space program, served as members of the National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), the predecessor of NASA. During the Cold War, he contributed to the design and control of missiles and anti-ballistic missiles.

He also made important contributions to control systems theory and mathematical tools for the analysis of stability of linear systems, inventing Bode plots, gain margin and phase margin. Bode was one of the great engineering philosophers of his era. Long respected in academic circles worldwide, he is also widely known to modern engineering students mainly for developing the asymptotic magnitude and phase plot that bears his name, the Bode plot. His research contributions in particular were not only multidimensional but also far reaching, extending as far as the US space program.

برگرفته از پیوند

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

۲ نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

۳ نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

۴ انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

در این فصل تحلیل پایداری سیستم های خطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می کنیم. بدین منظور با تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های خطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تحلیل پایداری سیستم های خطی با استفاده از آنالیز توابع مختلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های خطی در این چهارچوب، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکوست سیستم حلقه بسته با بهره واحد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

- ## نمودار نایکویست

✓ در نمودار بودی، نیاز به ترسیم دو نمودار برای نمایش مقادیر مختلط $H(j\omega)$ وجود دارد.

✓ نمودار نایکویست فرم قطبی نمایش $H(j\omega)$ است.

❑ ترسیم اندازه و فاز $H(j\omega)$، به ازای فرکانس های مثبت و منفی در صفحه S و به فرم قطبی

✓ ترسیم نمودار نایکویست

❑ ابتدا نمودار تقریبی بودی سیستم را به ازای فرکانس های مثبت رسم کنید.

❑ محل تلاقی نمودار را با محور حقیقی به دست آورید.

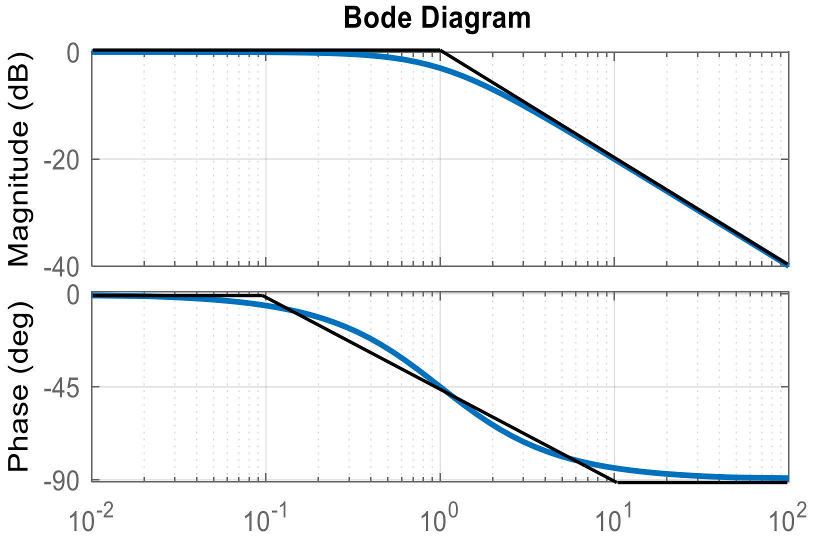
❑ با استفاده از نمودار بودی نمودار قطبی را برای فرکانس های مثبت ترسیم کنید.

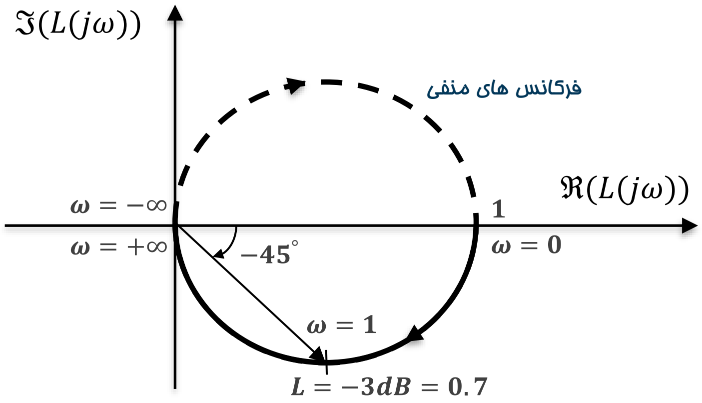
❑ قرینه نمودار را نسبت به محور حقیقی را با خط چین رسم نموده (بخش فرکانس های منفی نمودار نایکویست)

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

- ## ترسیم نمودار نایکویست

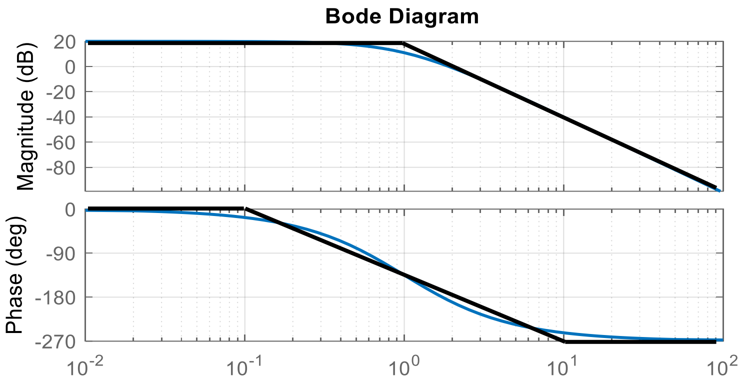
✓ مثال ۱: سیستم Lag مرتبه اول $L(s)=\frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید.

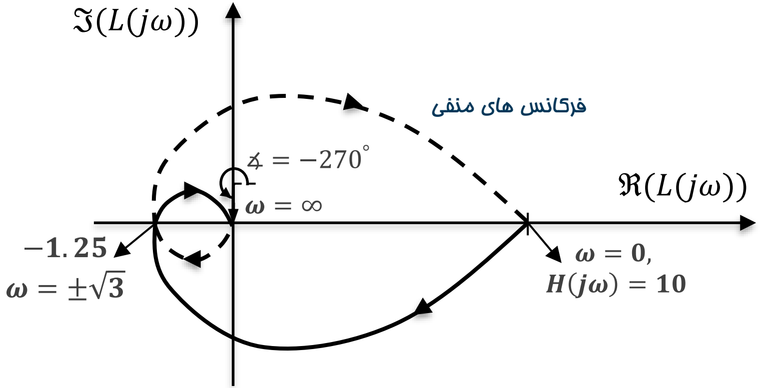




حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست





• ترسیم نمودار نایکویست

✓ مثال ۲: $L(s) = \dfrac{10}{(s+1)^3}$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم

تعیین پاسخ فرکانسی:

$$L(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10}{(1-3\omega^2) - j(\omega^3 - 3\omega)}$$

محل تلاقی با محور حقیقی:

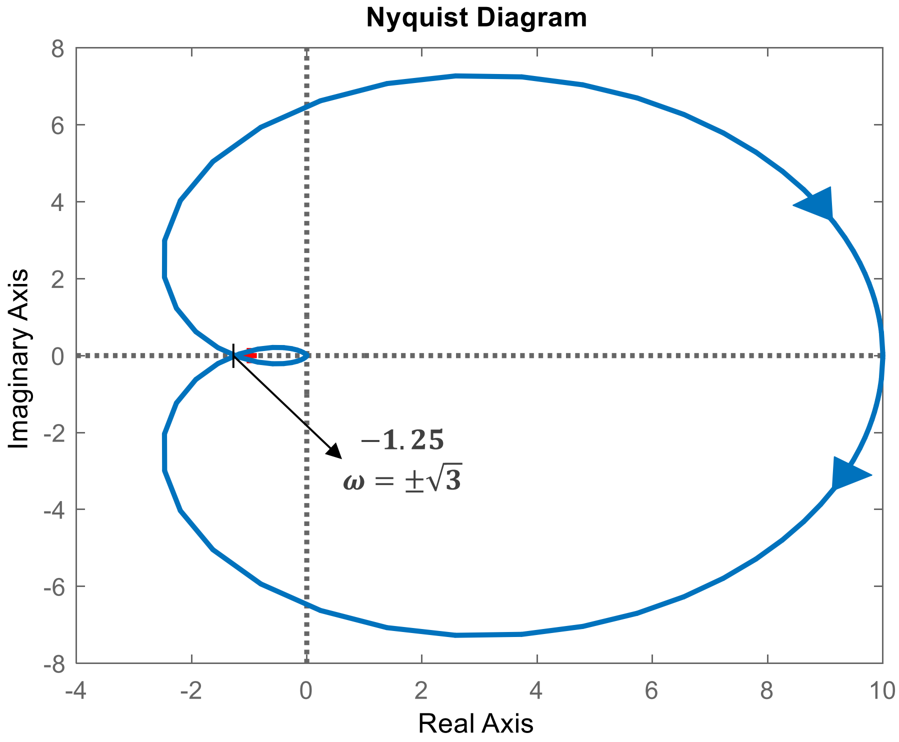
$$\Im(L(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega^3 - 3\omega = 0 \rightarrow \omega = 0, \omega = \pm\sqrt{3}$$

For $\omega = 0 \rightarrow H(j\omega) = 10$

For $\omega = \pm\sqrt{3} \rightarrow H(j\omega) = -10/8 = -1.25$

حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست



• ترسیم نمودار نایکویست

✓ ادامه مثال ۲:

$$L(s) = \frac{10}{(s+1)^3}$$

```
%   Example 2
clear all, clc, clf
num=10;
den=[1  3  3  1];
sys=tf(num,den);
nyquist(sys)
set(findall(figure(1),'type','line'),'
linewidth',2)
```

حل کامپیوتری

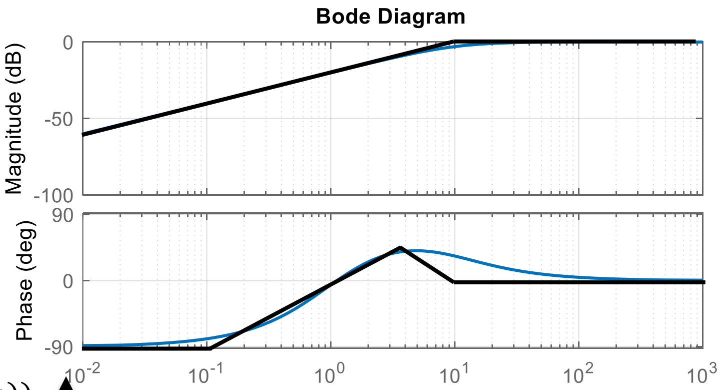
تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

- ترسیم نمودار نایکویست

✓ مثال ۳:

$$L(s)=\frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم



تعیین پاسخ فرکانسی:

$$L(j\omega)=\frac{-j\omega(j\omega+1)}{(-j\omega+1)(j\omega+10)}=\cdots$$

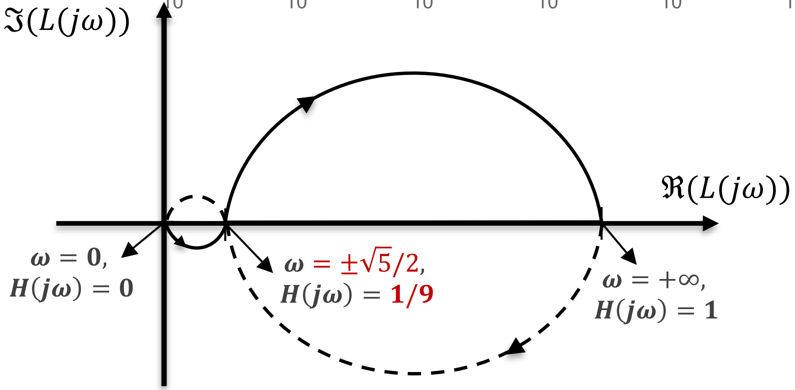
$$=\frac{-[(1-\omega^2)\omega^2-20\omega^2]-j[2\omega^3+10\omega(1-\omega^2)]}{(\omega^2+1)(\omega^2+100)}$$

محل تلاقی با محور حقیقی:

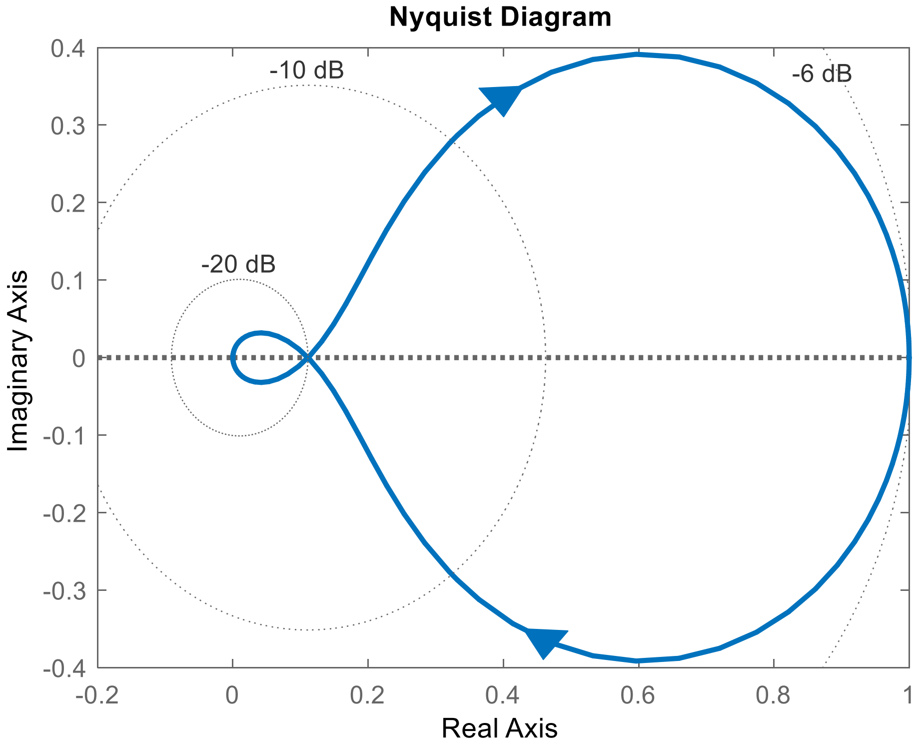
$$\Im(L(j\omega))=0\rightarrow 2\omega(\omega^2+5(1-\omega^2))=0\ \rightarrow \omega=0,\omega=\pm\sqrt{5}/2$$

For $\omega=0\rightarrow H(j\omega)=0$

For $\omega=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\rightarrow H(j\omega)=\cdots=1/9$



حل دستی



- ترسیم نمودار نایکویست

✓ ادامه مثال ۳:

$$L(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

```
%   Example 3
clear all, clc, clf
num=[-1 1 0];
den=conv([-1 1],[1 10]);
sys=tf(num,den);
nyquist(sys), grid
set(findall(figure(1),'type','line'),'
linewidth',2)
```

حل کامپیوتری

Harry Nyquist

(Feb. 7, 1889 – April 4, 1976)

was a Swedish physicist and electronic engineer who made important contributions to communication theory. As an engineer at Bell Laboratories, Nyquist did important work on thermal noise ("Johnson–Nyquist noise"), the stability of feedback amplifiers, telegraphy, facsimile, television, and other important communications problems. With Herbert E. Ives, he helped to develop AT&T's first facsimile machines that were made public in 1924. In 1932, he published a classic paper on stability of feedback amplifiers. The Nyquist stability criterion can now be found in all textbooks on feedback control theory.

His early theoretical work on determining the bandwidth requirements for transmitting information laid the foundations for later advances by Claude Shannon, which led to the development of information theory. In particular, Nyquist determined that the number of independent pulses that could be put through a telegraph channel per unit time is limited to twice the bandwidth of the channel, and published his results in the papers *Certain factors affecting telegraph speed* (1924) and *Certain topics in Telegraph Transmission Theory* (1928). This rule is essentially a dual of what is now known as the Nyquist–Shannon sampling theorem. Terms named for Harry Nyquist: Nyquist rate, Nyquist frequency, Nyquist filter, Nyquist plot, Nyquist ISI criterion, Nyquist stability criterion.

برگرفته از پیوند

عناوین فصل

مقدمه

۱ چرا تحلیل فرکانسی، تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، تابع تبدیل سیستم های خطی و پاسخ فرکانسی.

تحلیل فرکانسی با نمودار بودی

۲ نمودار بودی، قضیه بودی، چگونگی ترسیم تقریبی نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول پایدار، ناپایدار و غیر کمینه فاز، سیستم های مرتبه دوم، سیستم های مرتبه بالاتر، روش های حل دستی و کامپیوتری.

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

۳ نمودار نایکویست، ترسیم نمودار نایکویست از نمودار بودی، سیستم های مرتبه اول، دوم و مرتبه بالاتر.

معیار پایداری نایکویست

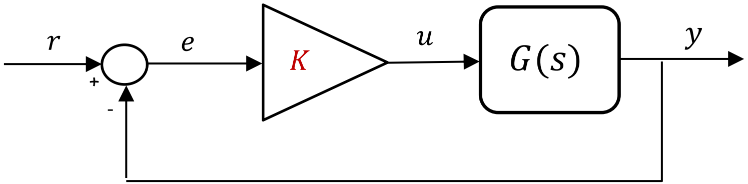
۴ انگیزه، نگاشت همدیس، اصل آرگومان Cauchy، کانتور نایکویست، فرمول بندی تحلیل پایداری، معیار پایداری نایکویست در حالت ساده و در حضور کنترلگر بهره ثابت، معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$، مثال های کاربردی، شمارش تعداد چرخش N، تعیین محدوده پایداری با استفاده از نمودار بودی

در این فصل تحلیل پایداری سیستم های خطی را با استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم بررسی می کنیم. بدین منظور با تعریف پاسخ فرکانسی سیستم های خطی، نمودار بودی و روش های ترسیم تقریبی آن را بیان نموده و سپس نمودار نایکویست سیستم های خطی را از روی نمودار بودی ترسیم می کنیم. تحلیل پایداری سیستم های خطی با استفاده از آنالیز توابع مختلط و اصل آرگومان Cauchy صورت می پذیرد. با فرمول بندی مناسب موضوع پایداری سیستم های خطی در این چهارچوب، کانتور نایکویست و معیار پایداری نایکوست سیستم حلقه بسته با بهره واحد و کنترلگر بهره ثابت بیان می شود. در نهایت حالت جامع معیار پایداری نایکویست در حضور صفر و قطب های موهومی مورد مطالعه قرار گرفته و مثال های کاربردی متعددی با روش های دستی و کامپیوتری مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.

معیار پایداری نایکویست

- **انگیزه**

✓ در روش مکان هندسی ریشه ها مکان قطب های سیستم حلقه بسته (ریشه های $1 + KG(s)$) را با استفاده از ویژگی های سیستم حلقه باز $G(s)$ به دست آوردیم.



✓ آیا می توان پایداری سیستم حلقه بسته (ریشه های $1 + KG(s)$) را با مشخصات فرکانسی سیستم حلقه باز $G(j\omega)$ به دست آورد؟

❑ این کار با استفاده از توابع مختلط و مطالعه پاسخ فرکانسی به عنوان نگاشت همدیس (Conformal Map) قابل انجام است.

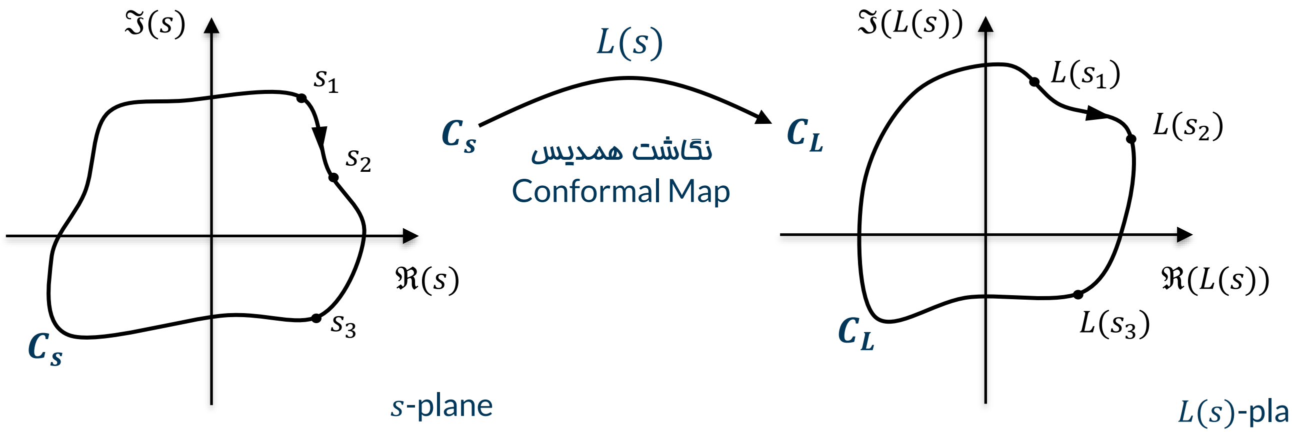
❑ بدین منظور پیشینه ریاضی و اصل آرگومان Cauchy را بررسی می کنیم.

معیار پایداری نایکویست

• نگاشت همدیس

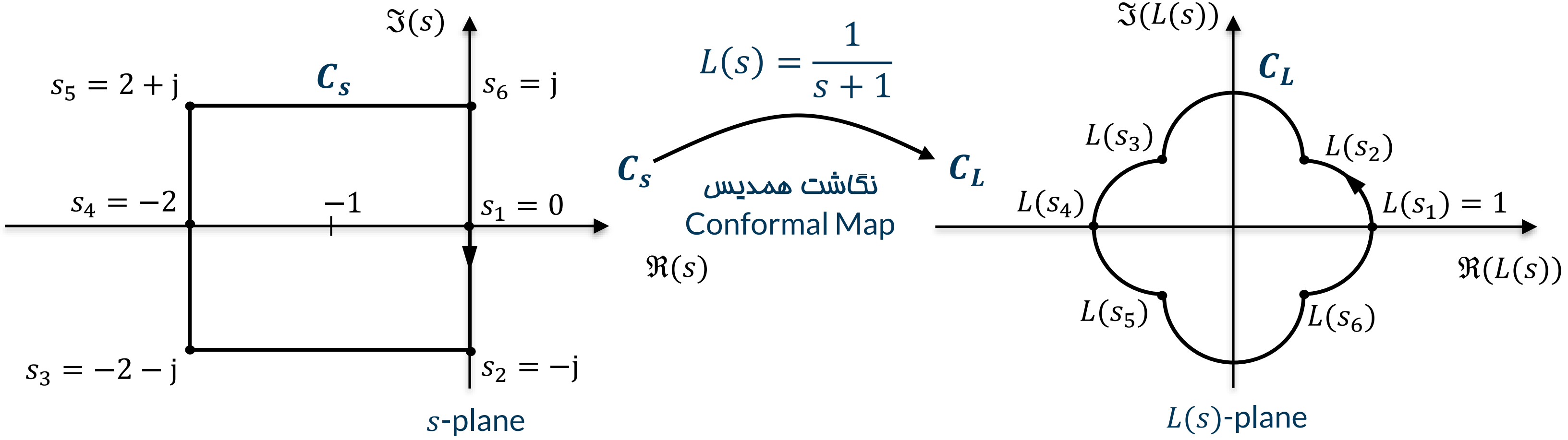
✓ در توابع مختلط نگاشت همدیس تابعی است که زاویه ها را حفظ می کند.

❑ نگاشت $L(s)$ را در نظر بگیرید که توسط آن یک کانتور بسته $C_s(s)$ در صفحه مختلط s را به کانتور بسته $C_L(s)$ در صفحه مختلط $L(s)$ به شکل زیر نگاشت می کند:



- ## نگاشت همدیس

✓ نگاشت $L(s)=\frac{1}{s+1}$ و کانتور C_s را یک مربع مطابق شکل در نظر بگیرید، که قطب $s=-1$ را در بر می گیرد. کانتور C_L را به دست آورید و زاویه های قائمه مربع را ببینید چگونه نگاشت می شوند.



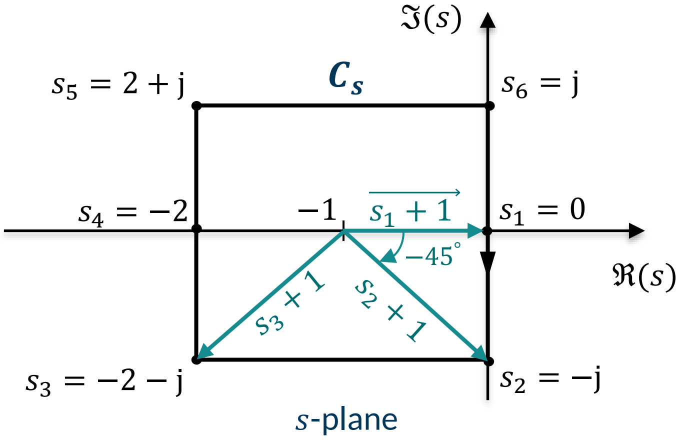
معیار پایداری نایکویست

- ## نگاشت همدیس

✓ از ترسیم بردار $\overrightarrow{s+1}$ (برداری که از نقطه ۱− به نقطه s ترسیم می شود) و مقادیر اندازه و زاویه آن بهره ببرید:

$$|L(s)| = \left|\frac{1}{s+1}\right| = (\text{طول بردار } s+1)^{-1}$$

$$\measuredangle L(s) = \measuredangle \frac{1}{s+1} = -(\text{زاویه بردار } s+1)$$



For $s_1 \rightarrow |L(s_1)| = \frac{1}{1} = 1, \quad \measuredangle L(s_1) = 0^\circ$

For $s_2 \rightarrow |L(s_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \measuredangle L(s_2) = 45^\circ$

For $s_3 \rightarrow |L(s_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \measuredangle L(s_3) = 135^\circ$

For $s_4 \rightarrow |L(s_4)| = \frac{1}{1} = 1, \quad \measuredangle L(s_4) = 180^\circ$

For $s_5 \rightarrow |L(s_5)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \measuredangle L(s_5) = -135^\circ$

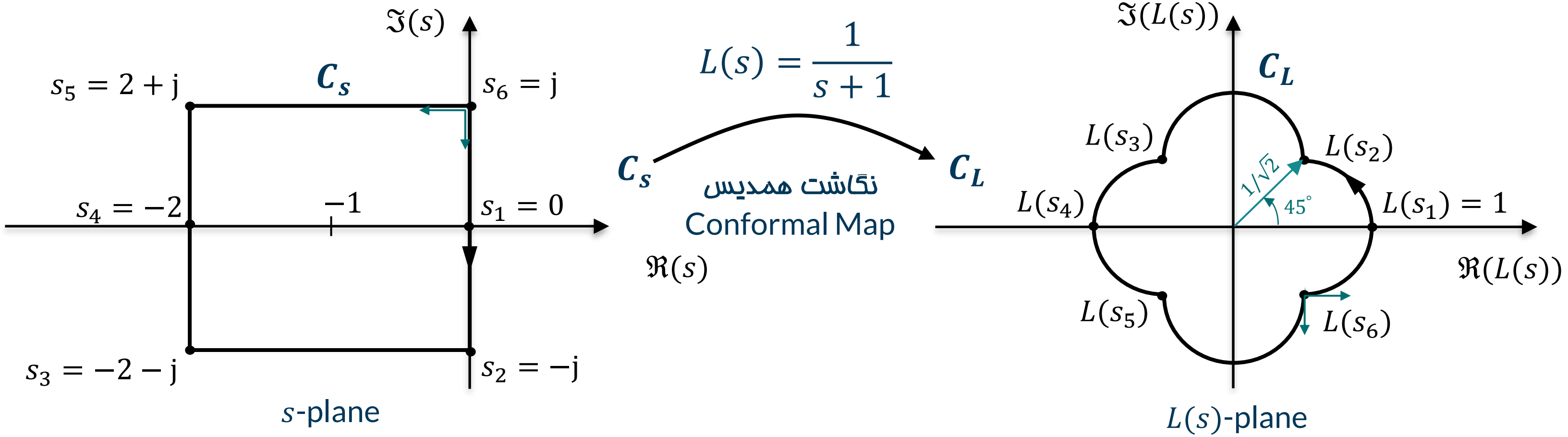
For $s_6 \rightarrow |L(s_6)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7, \quad \measuredangle L(s_6) = -45^\circ$

معیار پایداری نایکویست

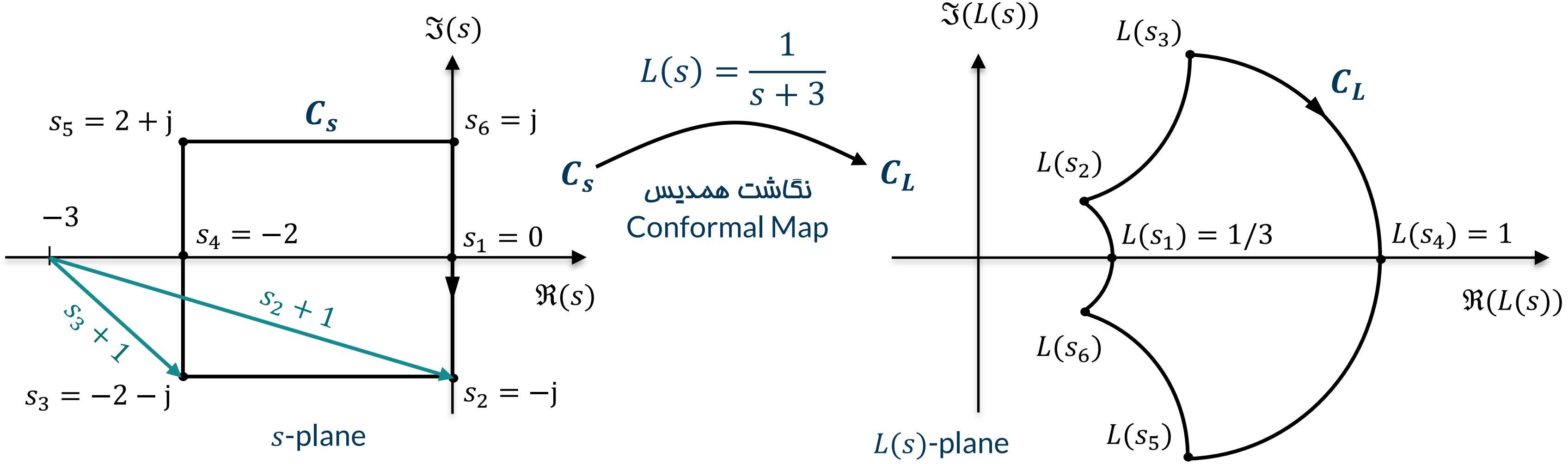
- ## نگاشت همدیس

✓ نگاشت همدیس زوایای قائمه را حفظ می کند

✓ چون C_s قطب $s=-1$ را در بر می گیرد C_L مبدا را یک بار به صورت پادساعتگرد دور می زند!



- **نگاشت همدیس**



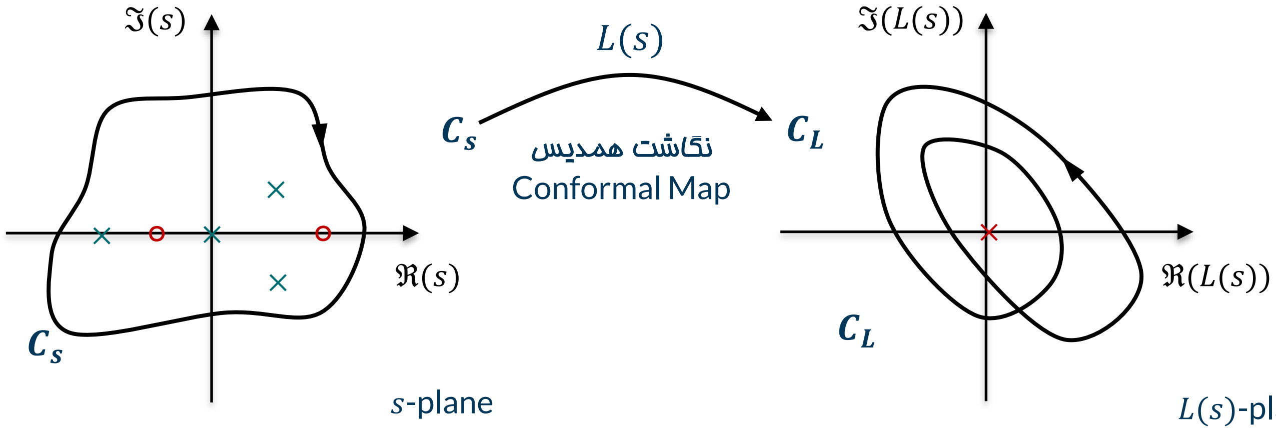
حال نگاشت $L(s) = \frac{1}{s+3}$ و کانتور C_s را در نظر بگیرید که قطب $s = -3$ را در بر نمی گیرد. نگاشت همدیس زوایای قائمه را حفظ می کند اما چون C_s قطب $s = -3$ را در بر نمی گیرد C_L مبدا را دور نمی زند!

معیار پایداری نایکویست

- ## اصل آرگومان Cauchy

فرض کنید تابع $L(s)$ در صفحه مختلط s دارای تعداد محدودی قطب باشد. یک کانتور همبند بسته $C_s(s)$ دلخواه در صفحه مختلط s-plane را در نظر بگیرید که ساعتگرد بوده و از روی هیچ یک از قطب ها و صفرهای تابع $L(s)$ عبور نکند. آنگاه نگاشت این کانتور توسط تابع $L(s)$، که $C_L(s)$ نامیده می شود، مبدا صفحه مختلط $L(s)$-plane را به تعداد $N = Z - P$ بار دور خواهد زد.

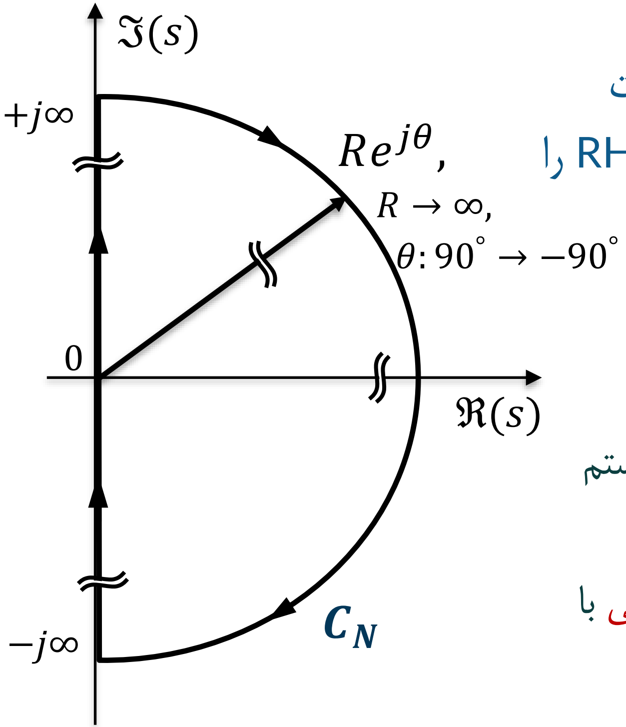
که در آن Z تعداد صفرها و P تعداد قطب های محاط شده در کانتور $C_s(s)$ است. اگر $N > 0$ دور زدن های کانتور $C_L(s)$ ساعتگرد و اگر $N < 0$ دور زدن های کانتور $C_L(s)$ پادساعتگرد و اگر $N = 0$ کانتور $C_L(s)$ مبدا را دور نخواهد زد.



معیار پایداری نایکویست

• کانتور نایکویست C_N

✓ برای استفاده از اصل آرگومان در تحلیل پایداری، هری نایکویست کانتوری را معرفی کرده است که کل نیم صفحه سمت راست RHP را شامل شود.



✓ کانتور نایکویست: از محور $j\omega$ به علاوه نیم دایره $Re^{j\theta}$

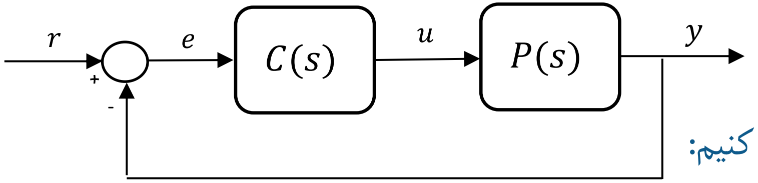
❑ هم کل نیم صفحه سمت راست RHP پوشش داده شده است.

❑ بخش محور موهومی $j\omega: \omega \in (-\infty, +\infty)$ پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز را تولید می کند: $L(j\omega)$.

❑ بخش نیم دایره موهومی $Re^{j\theta}, R \to \infty$ در حد و سیستم های علّی با بزرگ شدن شعاع نیم دایره به نقطه مبدا همگرا می شود.

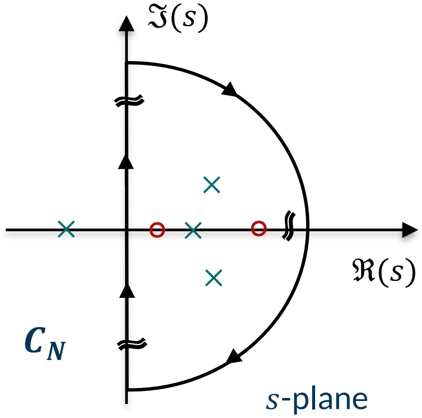
معیار پایداری نایکویست

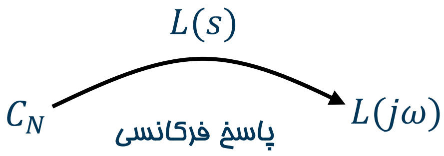
- **فرمول بندی تحلیل پایداری**
  - ✓ "تعداد ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $1 + L(s)$ را در نیم صفحه سمت راست تعیین کنید"

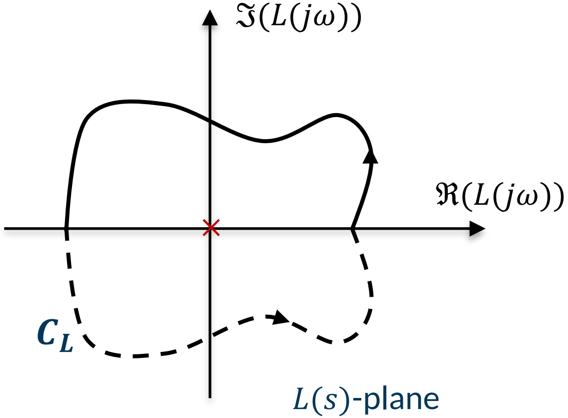


$$L(s) = C(s)P(s)$$

  - ✓ اگر از اصل آرگومان کوشی و کانتور نایکوسیت به عنوان $C_s(s)$ استفاده کنیم:

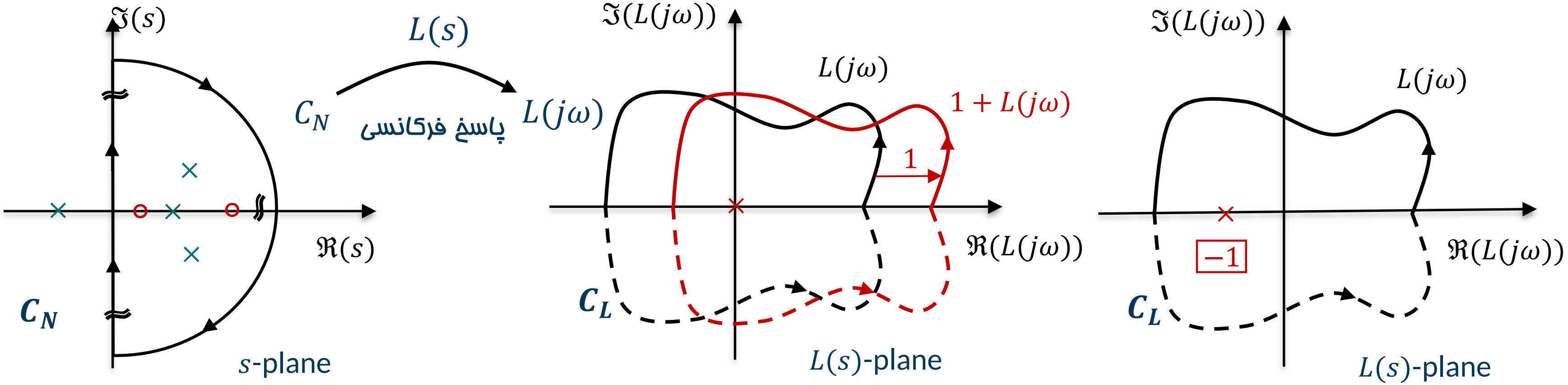






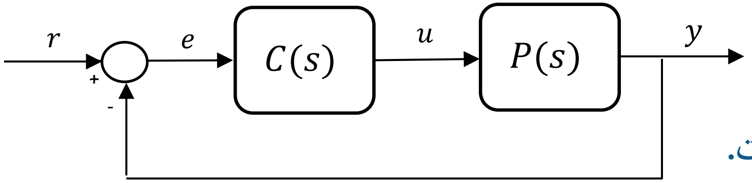
معیار پایداری نایکویست

- **فرمول بندی تحلیل پایداری**
  - ✓ "تعداد ریشه های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $1+L(s)$ را در نیم صفحه سمت راست تعیین کنید"
  - ✓ بر اساس اصل آرگومان ویژگی$L(j\omega)$ تحلیل می شود اما تحلیل سیستم حلقه بسته $1+L(j\omega)$ مورد نظر است.
  - ✓ اما ترسیم $1+L(j\omega)$ تنها با شیفت پاسخ فرکانسی به اندازه یک واحد به سمت راست به دست می آید. (نمودار قرمز رنگ)
  - ✓ به جای رسم نمودار جدید دور زدن پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز $L(j\omega)$ را حول نقطه $\boxed{-1}$ شمارش و تحلیل می کنیم.



معیار پایداری نایکویست

- **جمع بندی معیار پایداری نایکویست در حالت ساده**



✓ سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید که در آن

$P =$ تعداد قطب های ناپایدار بهره حلقه $L(s) = C(s)P(s)$ است.

❑ در این حالت ساده فرض کنید که $L(s)$ هیچ قطبی بر روی محور $j\omega$ ندارد.

✓ نمودار نایکویست $L(j\omega)$ را به ازای فرکانس های مثبت و منفی ترسیم کنید.

$N =$ تعداد دور زدن ساعتگرد نقطه $\boxed{-1}$ توسط نمودار نایکویست $L(j\omega)$

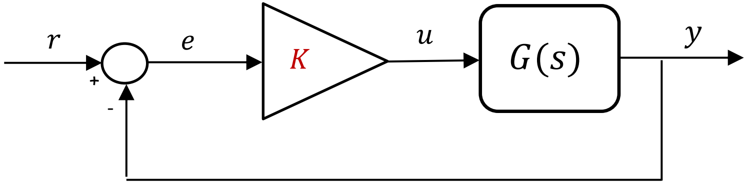
❑ (N می تواند مثبت (ساعتگرد) یا منفی (پادساعتگرد) باشد.

$Z =$ تعداد قطب های سیستم حلقه بسته $M(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ که برابر است با تعداد صفرهای $1 + L(s)$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$Z = N + P$$

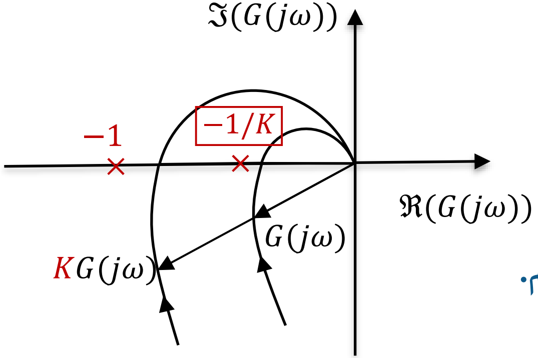
معیار پایداری نایکویست

- **فرمول بندی تحلیل پایداری**
  - ✓ اگر کنترلگر دارای یک پارامتر طراحی K باشد.
    - ❑ ممکن است کنترلگر تناسبی با بهره K داشته باشیم.
    - ❑ یا کنترلگر پیچیده تری داریم که بهره K آن مورد طراحی می خواهد قرار گیرد: $L(s) = C(s)P(s) = KG(s)$



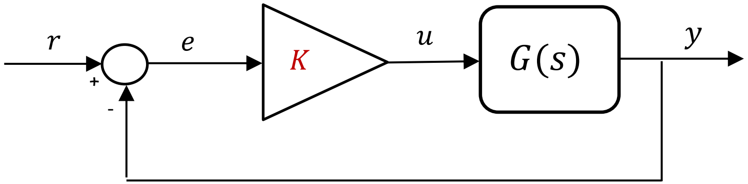
  - ✓ تاثیر بهره مثبت K بر روی پاسخ فرکانسی
    - ❑ نمودار پاسخ فرکانسی به اندازه K در امتداد شعاع بزرگ (یا کوچک) می شود.
  - ✓ پس به جای رسم نمودار جدید دور زدن پاسخ فرکانسی

$L(j\omega)$ را حول نقطه $\boxed{-1/K}$ شمارش و تحلیل می کنیم.



معیار پایداری نایکویست

- **تعمیم معیار پایداری نایکویست در حضور بهره K**



✓ سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید که در آن

$P =$ تعداد قطب های ناپایدار $G(s)$ است.

❑ (در این حالت نیز فرض کنید که $G(s)$ هیچ قطبی بر روی محور $j\omega$ ندارد.)

✓ نمودار نایکویست $G(j\omega)$ را به ازای فرکانس های مثبت و منفی ترسیم کنید.

$N =$ تعداد دور زدن **ساعتگرد** نقطه $\boxed{-1/K}$ توسط نمودار نایکویست $G(j\omega)$

❑ (N می تواند مثبت (ساعتگرد) یا منفی (پادساعتگرد) باشد.)

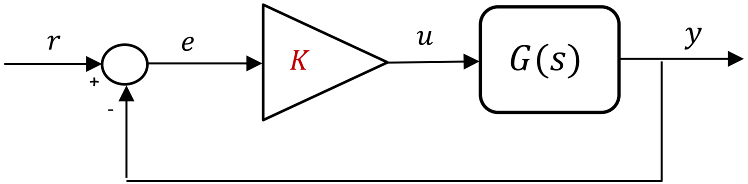
$Z =$ تعداد قطب های سیستم حلقه بسته $M(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ که برابر است با تعداد صفرهای $1 + KG(s)$ از

رابطه زیر به دست می آید.

$$Z = N + P$$

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

- ## معیار پایداری نایکویست



✓ مثال ۱: سیستم حلقه بسته مقابل را با $G(s) = \frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید.

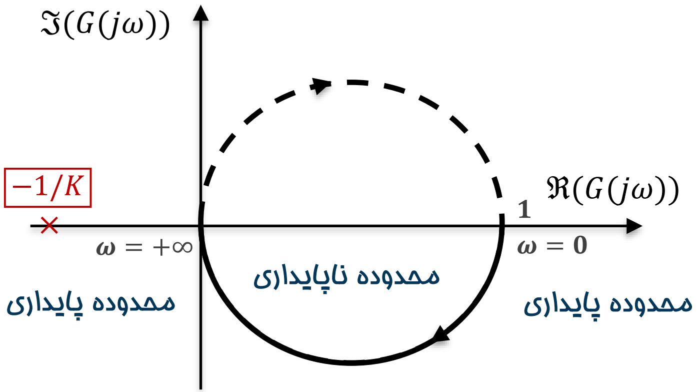
نمودار نایکوسیت را ترسیم کنید.

تابع تبدیل سیستم داری قطب ناپایدار نیست: $P = 0$

به ازای $0 < -\frac{1}{K}$ و همچنین $-\frac{1}{K} > 1$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را دور نمی زند : $N = 0$

در بازه $K > -1$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

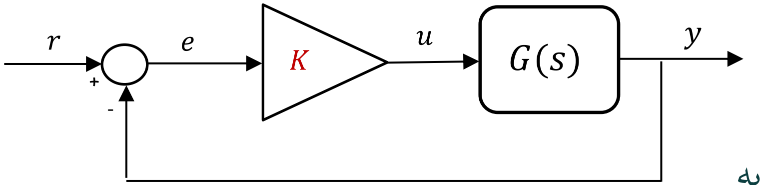
$Z = N + P = 0$



حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

- ## معیار پایداری نایکویست



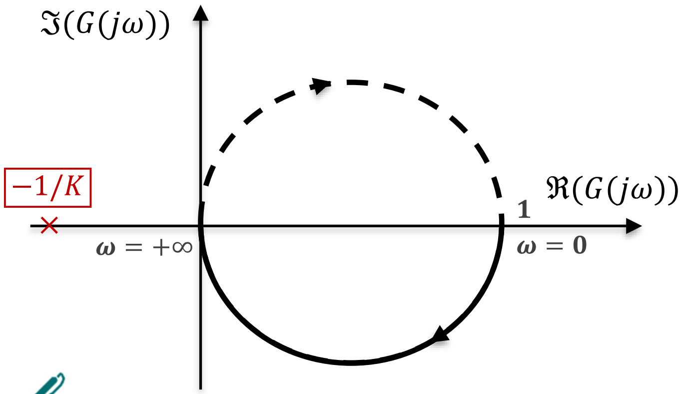
✓ ادامه مثال ۱: $G(s) = \frac{1}{s+1}$

به ازای $0 < -1/K < 1$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت ساعت گرد دور می زند : $N = 1$

در بازه $K < -1$ سیستم حلقه بسته دارای یک قطب ناپایدار خواهد بود.

$Z = N + P = 1$

محدوده پایداری $K > -1$



✓ راستی آزمایی پاسخ با معیار پایداری راث:

$$\Delta(s) = s + (K+1) = 0 \rightarrow K + 1 > 0$$

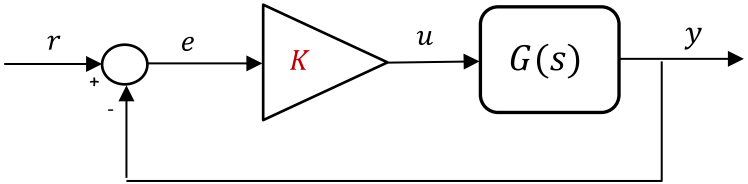
محدوده پایداری $K > -1$

حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست

✓ مثال ۲: سیستم حلقه بسته مقابل را با $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^3}$ را در نظر بگیرید.



نمودار نایکوسیت را ترسیم کنید.

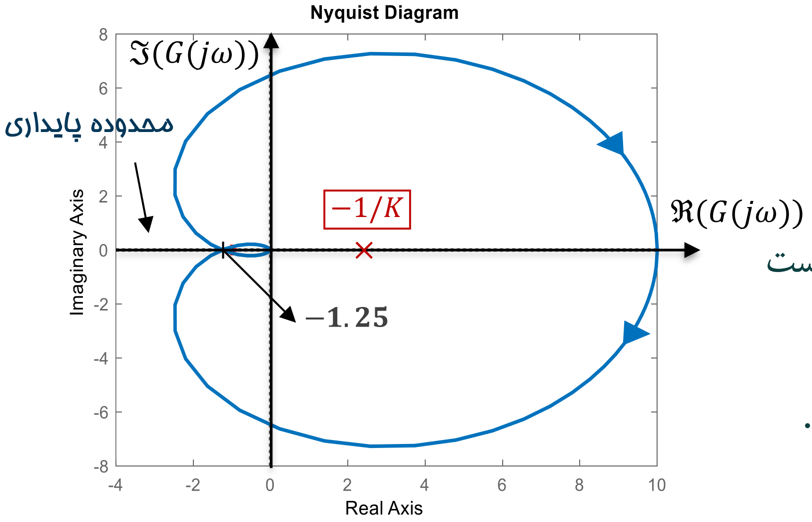
تابع تبدیل سیستم داری قطب ناپایدار نیست: $P = 0$

به ازای $-1.25 < -\frac{1}{K}$ و همچنین $-\frac{1}{K} > 10$ نمودار نایکوست

نقطه $-1/K$ را دور نمی زند : $N = 0$

پس در بازه $-0.1 < K < 0.8$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

$Z = N + P = 0$

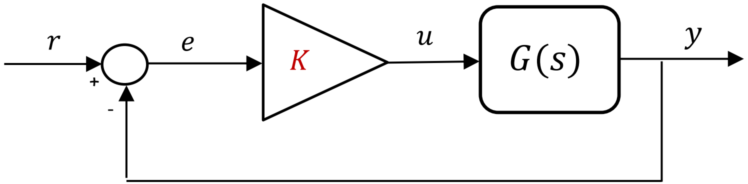


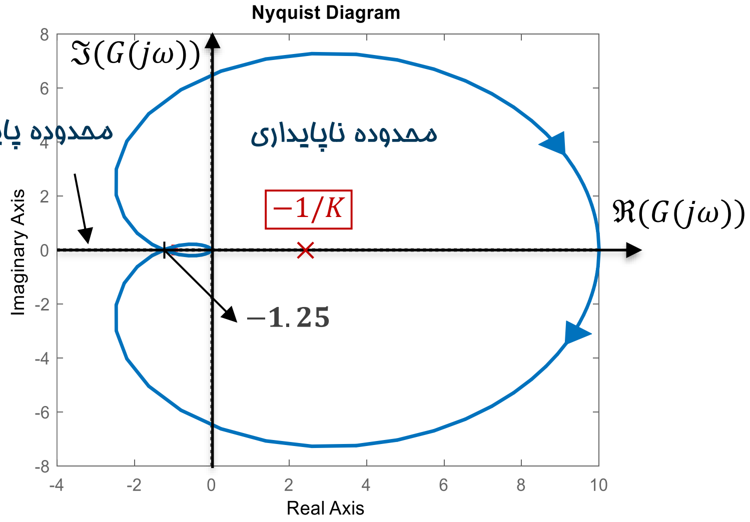
حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست

✓ ادامه مثال ۲: $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^3}$





به ازای $-1.25 < -1/K < 0$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را دو بار به صورت ساعت گرد دور می زند: $N = 2$

در بازه $0.8 < K < \infty$ سیستم حلقه بسته دارای دو قطب ناپایدار خواهد بود. $Z = N + P = 2$

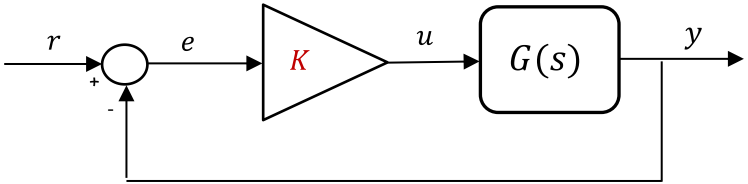
به ازای $0 < -1/K < 10$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت ساعت گرد دور می زند: $N = 1$

در بازه $-\infty < K < -0.1$ سیستم حلقه بسته دارای یک قطب ناپایدار خواهد بود. $Z = N + P = 1$

محدوده پایداری $-0.1 < K < 0.8$

حل دستی

• معیار پایداری نایکویست



✓ مثال ۳:

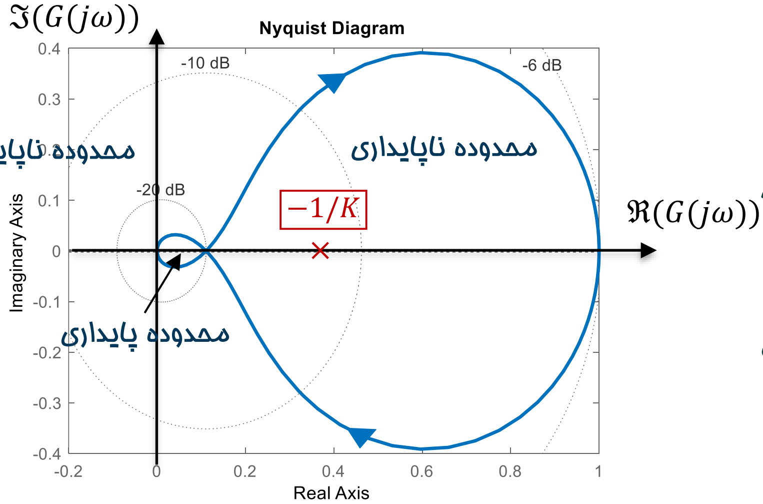
$$G(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

نمودار نایکوسیت را ترسیم کنید.

تابع تبدیل سیستم داری یک قطب ناپایدار است: $P = 1$

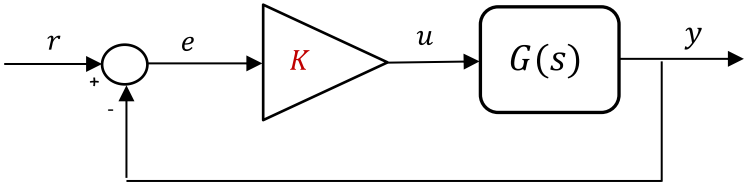
به ازای $0 < -\frac{1}{K}$ و همچنین $-\frac{1}{K} > 1$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را دور نمی زند: $N = 0$

پس در بازه $-1 < K < 0$ سیستم حلقه بسته دارای یک قطب ناپایدار است. $Z = N + P = 1$



حل دستی

معیار پایداری نایکویست



✓ ادامه مثال ۳:

$$G(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$

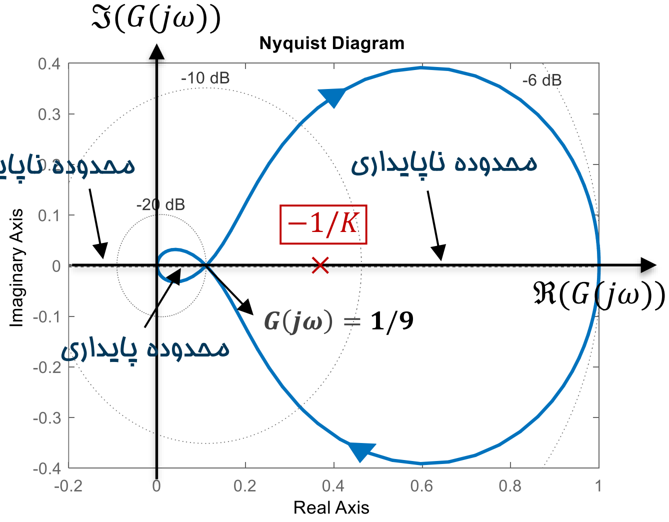
به ازای $0 < -1/K < 1/9$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت پادساعتگرد دور می زند : $N = -1$

در بازه $-\infty < K < -9$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

$Z = -1 + 1 = 0$

به ازای $1 < -1/K < \infty$ نمودار نایکوست نقطه $-1/K$ را یک بار به صورت ساعتگرد دور می زند : $N = 1$

در بازه $0 < K < -1$ سیستم حلقه بسته دارای دو قطب ناپایدار خواهد بود. $Z = 1 + 1 = 2$



محدوده پایداری $-\infty < K < -9$

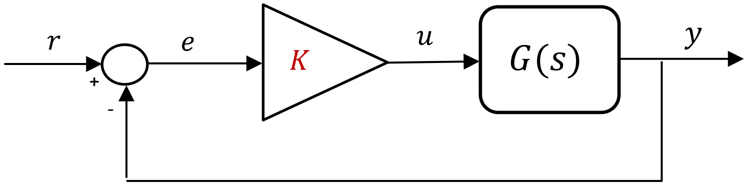
حل دستی

تحلیل فرکانسی با نمودار نایکویست

• معیار پایداری نایکویست

✓ ادامه مثال ۳:

$$G(s) = \frac{-s(s+1)}{(-s+1)(s+10)}$$



راستی آزمایی با معیار پایداری راث–هرویتز

❑ معادله مشخصه را به دست آورید:

$$\Delta(s) = -K\big(s(s+1)\big) + (-s^2 - 9s + 10) = 0$$

$$\Delta(s) = (K+1)s^2 + (K+9)s - 10 = 0$$

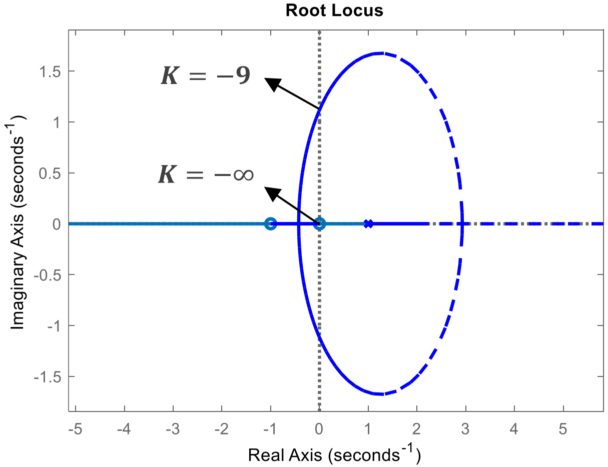
❑ شرایط پایداری:

$$K+1<0 \;\&\; K+9<0 \;\rightarrow K<-1 \;\&\; K<-9$$

محدوده پایداری $-\infty < K < -9$

حل دستی

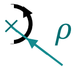
راستی آزمایی با مکان هندسی ریشه ها



- **معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$**

✓ اگر صفر یا قطبی بر روی محور $j\omega$ داشته باشیم، کانتور نایکویست بایستی به صورتی تغییر کند که از روی آنها عبور نکند.

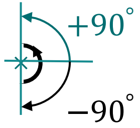
❑ یک نیم دایره کوچک پادساعتگرد به شعاع $\rho \to 0$ در نزدیکی صفر ها و قطب های روی محور $j\omega$ در نظر می گیریم



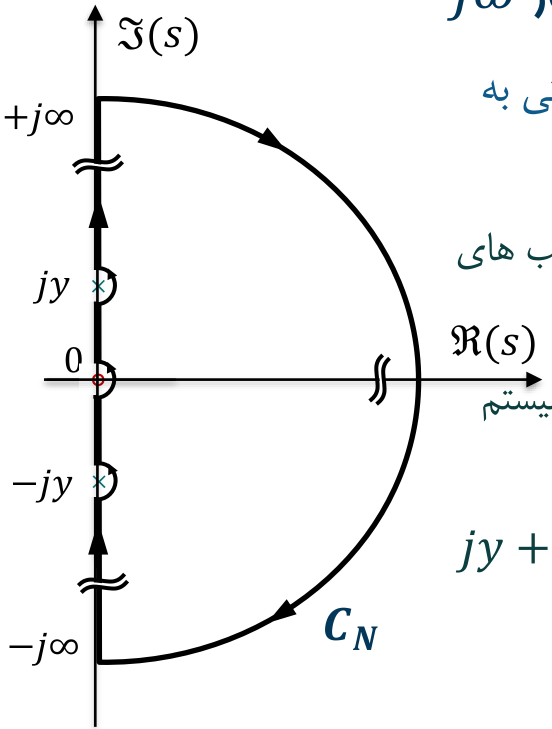
❑ علیرغم کوچک بودن این نیم دایره تاثیر بسیار مهم بر روی پاسخ فرکانسی سیستم خواهد داشت.

❑ معادله این نیم دایره را حول قطب $s = jy$ به دست آورید:

$$jy + \rho e^{j\theta}$$

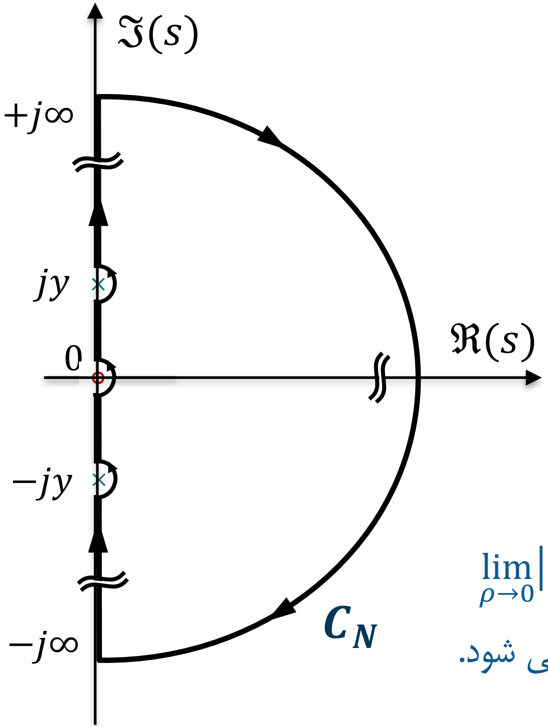


- که در آن θ از زاویه -90° تا زاویه $+90^\circ$ تغییر می کند.



معیار پایداری نایکویست

- **معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$**



✓ تاثیر نیم دایره کوچک $\rho e^{j\theta}$ در مجاورت قطب موهومی $s = jy$

✓ فرض کنید قطب موهومی $s = jy$ با تکرار m در سیستم حضور داشته باشد:

$$L(s) = \frac{1}{(s - jy)^m} L_1(s)$$

❑ که در آن $L_1(s)$ دیگر قطبی در $s = jy$ ندارد.

✓ نگاشت همدیس نیم دایره $jy + \rho e^{j\theta}$ توسط سیستم $L(s)$ را تعیین کنید:

jy ρ

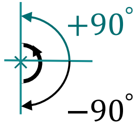
$$L(s) = \frac{1}{(\rho e^{j\theta})^m} L_1(jy + \rho e^{j\theta})$$

✓ اندازه نگاشت در حد:

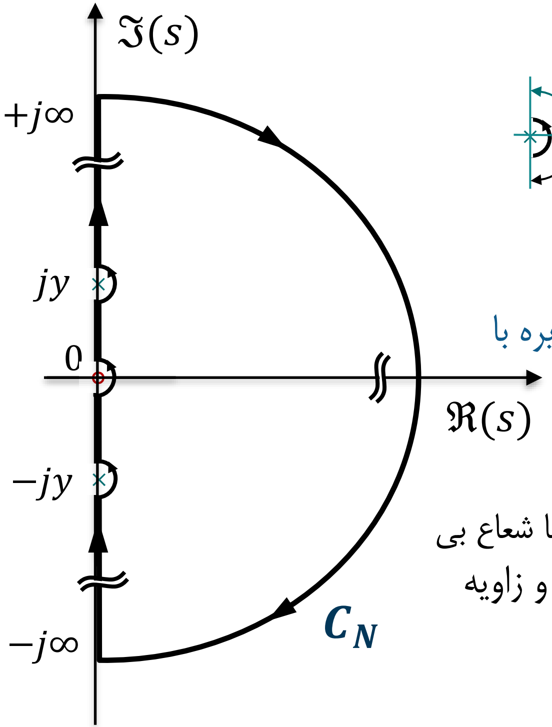
$$\lim_{\rho \to 0} \left| L(jy + \rho e^{j\theta}) \right| = \lim_{\rho \to 0} \frac{|L_1(jy)|}{\rho^m} = \infty$$

✓ این بدان معناست که این نیم دایره کوچک به یک نمودار با **شعاع بی نهایت** نگاشت می شود.

- معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$
  - ✓ تاثیر نیم دایره کوچک $\rho e^{j\theta}$ در مجاورت قطب موهومی $s = jy$



$$L(s) = \frac{1}{(\rho e^{j\theta})^m} L_1(jy + \rho e^{j\theta})$$



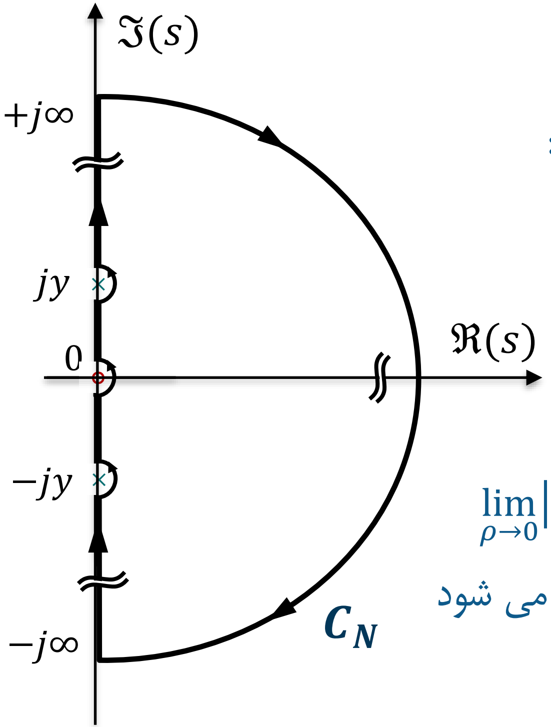
  - ✓ زاویه نگاشت در حد برابر زاویه ترم $\frac{1}{(\rho e^{j\theta})^m}$ است که برابر است با $e^{-jm\theta}$
  - ✓ این بدان معناست که اگر $m = 1$ باشد این نیم دایره کوچک ساعتگرد به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت پادساعت گرد نگاشت می شود.
  - ✓ اگر $m = 2$ باشد به یک دایره با شعاع بی نهایت پادساعت گرد نگاشت می شود و ...

در نتیجه یک نیم دایره کوچک در نزدیکی قطب موهومی $s = jy$ به یک کمان دایرهای با شعاع بی نهایت نگاشت می شود که از نقطه $L_1(jy^-)$ شروع شده و به $L_1(jy^+)$ منتهی می شود و زاویه چرخش در این کمان برابر است با

$$m \times 180^\circ + \measuredangle L(jy^+) - \measuredangle L(jy^-)$$

معیار پایداری نایکویست

- معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب بر روی محور $j\omega$

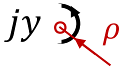


✓ تاثیر نیم دایره کوچک $\rho e^{j\theta}$ در مجاورت صفر موهومی $s = jy$

✓ فرض کنید صفر موهومی $s = jy$ با تکرار m در سیستم حضور داشته باشد:

$$L(s) = (s - jy)^m L_1(s)$$

✓ نگاشت همدیس نیم دایره $jy + \rho e^{j\theta}$ توسط سیستم $L(s)$ را تعیین کنید:



$$L(s) = \left(\rho e^{j\theta}\right)^m L_1\left(jy + \rho e^{j\theta}\right)$$

✓ اندازه نگاشت در حد:

$$\lim_{\rho\to 0}\left|L\left(jy + \rho e^{j\theta}\right)\right| = \lim_{\rho\to 0}\rho^m |L_1(jy)| = 0$$

✓ این بدان معناست که این نیم دایره کوچک به نگاشت نقطه $s = jy$ همگرا می شود و تاثیری در نمودار نایکویست نخواهد داشت.

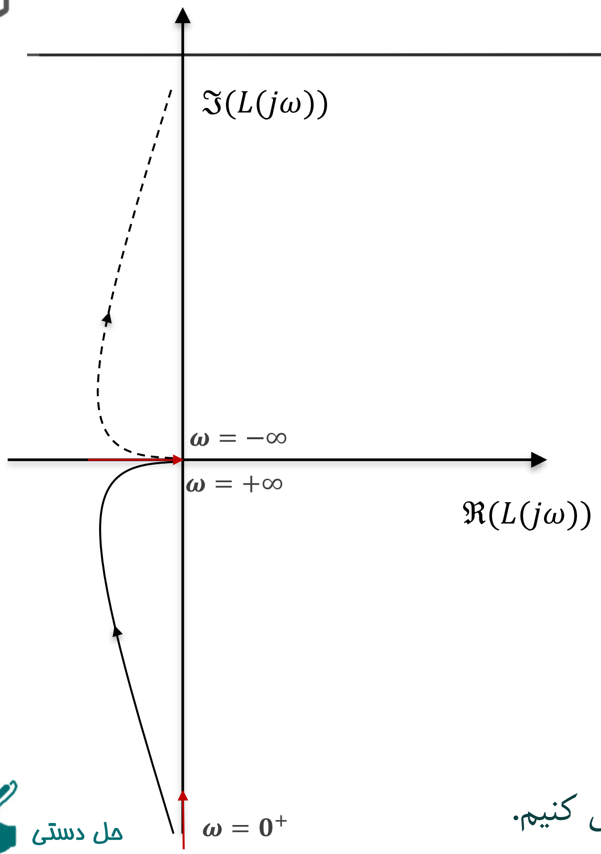
معیار پایداری نایکویست

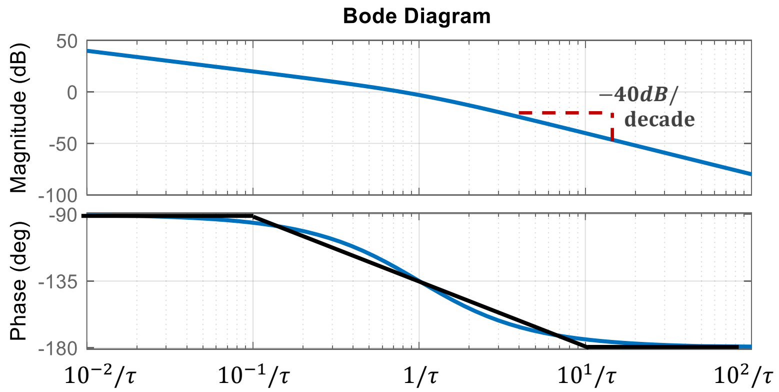
- معیار پایداری نایکوست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$

✓ مثال ۴:

$$L(s) = \frac{K}{s(\tau s+1)}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.





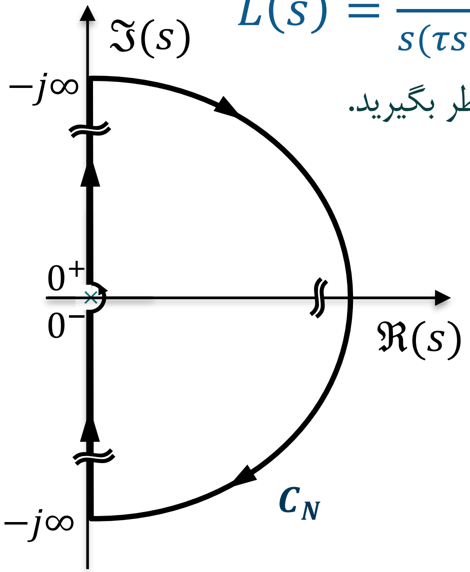
بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب در مبدا نمودار نایکوست را رسم می کنیم.

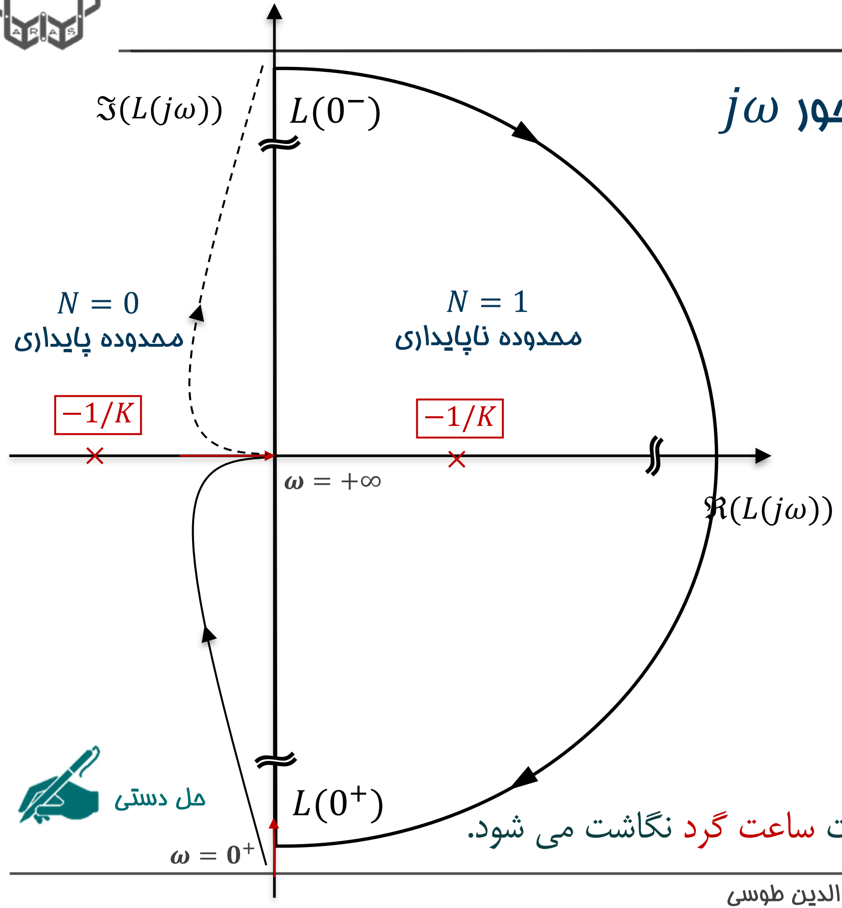
حل دستی

- **معیار پایداری نایکوست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$**

  ✓ ادامه مثال ۴: $L(s) = \dfrac{K}{s(\tau s+1)}$

  کانتور نایکویست را در نظر بگیرید.





حل دستی

نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.

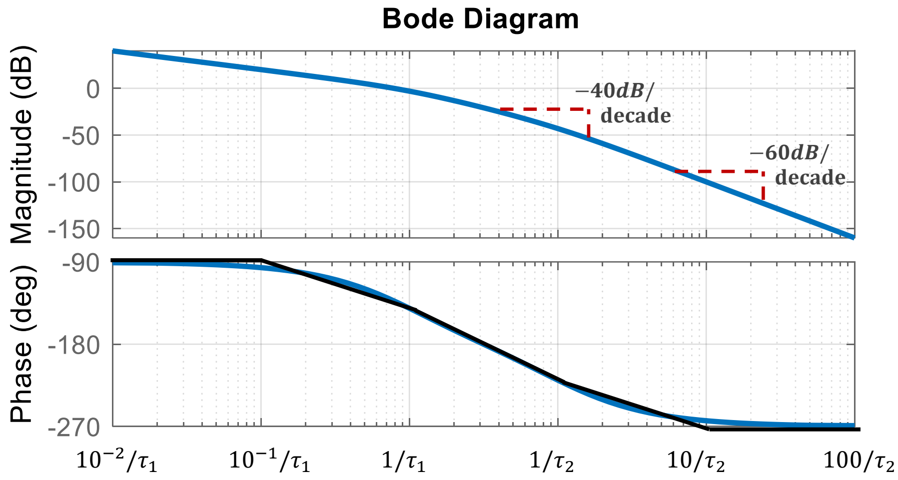
معیار پایداری نایکویست

- معیار پایداری نایکوست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$

✓ مثال ۵: $L(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.

نمودار بودی زاویه ۱۸۰− را قطع می کند پس نقطه تقاطع با محور حقیقی را به دست می آوریم:



$$L(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\tau_1\omega+1)(j\tau_2\omega+1)}$$

$$\Im(L(j\omega))=\frac{-\frac{K}{\omega}(1-\tau_1\tau_2\omega)}{1+\omega^2(\tau_1^2+\tau_2^2)+\omega_4(\tau_1^2\tau_2^2)}=0\rightarrow\omega^2$$
$$=1/\tau_1\tau_2$$

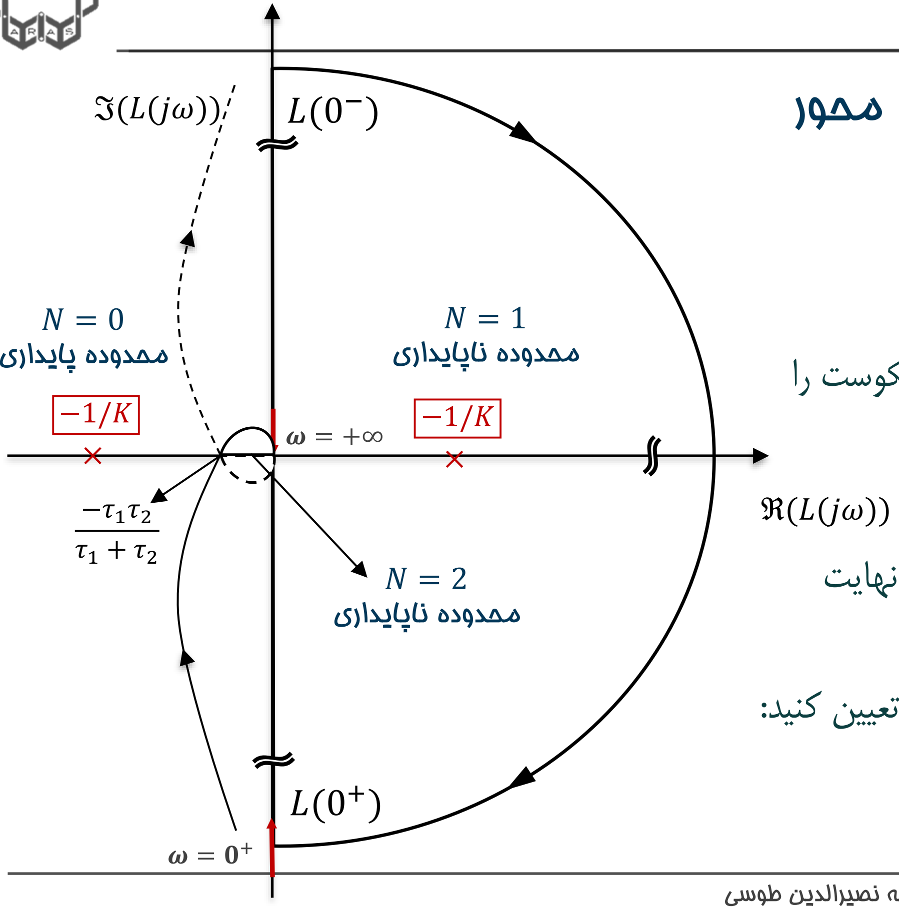
$$\Re(L(j\omega))=\frac{-K}{(\omega^4(\tau_1+\tau_2)^2+\omega^2(1-\omega^2\tau_1\tau_2)^2)^{1/2}}$$

For $\omega^2=1/\tau_1\tau_2$: $\quad\Re\big(L(j\omega)\big)=\cdots=-\frac{K\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$

حل دستی

معیار پایداری نایکویست

- **معیار پایداری نایکوست در حضور قطب بر روی محور $j\omega$**



✓ ادامه مثال ۵:

$$L(s)=\frac{K}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب در مبدا نمودار نایکوست را رسم می کنیم.

کانتور نایکویست را همانند مثال ۴ در نظر بگیرید.

نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.

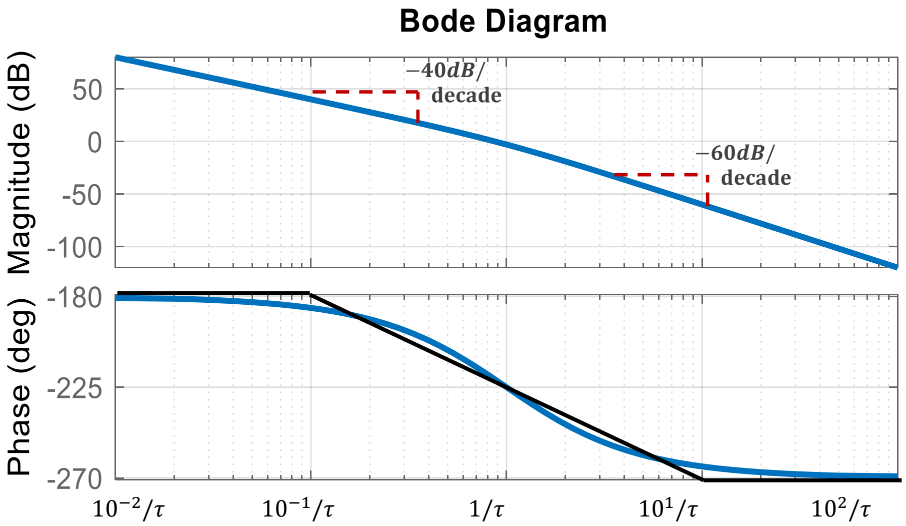
چرخش ها را شمارش کرده و ناحیه پایداری را به صورت زیر تعیین کنید:

$$-\frac{1}{K}<\frac{-\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\rightarrow K>\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}$$

حل دستی

معیار پایداری نایکویست

- **معیار پایداری نایکوست در حضور دو قطب در مبدا**



✓ مثال ۶:

$$L(s) = \frac{K}{s^2(\tau s+1)}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.

نمودار بودی زاویه −۱۸۰ را قطع نمی کند.

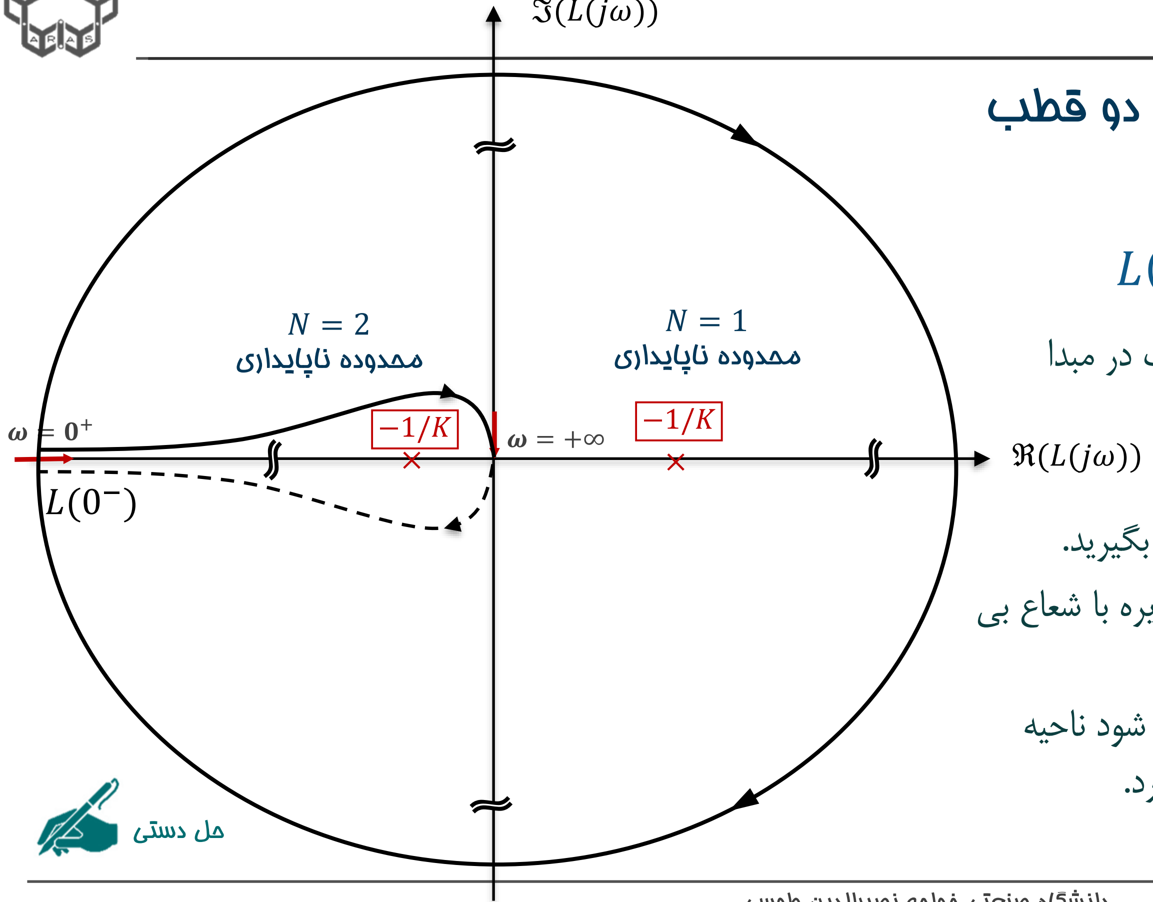
حل دستی

معیار پایداری نایکویست

- ## معیار پایداری نایکوست در حضور دو قطب در مبدا

✓ ادامه مثال ۶: $L(s) = \frac{K}{s^2(\tau s+1)}$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب در مبدا نمودار نایکوست را رسم می کنیم.



کانتور نایکویست را همانند مثال ۴ در نظر بگیرید.

نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد به یک دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.

چرخش ها را شمارش کرده و مشاهده می شود ناحیه پایداری به ازای کنترلگر بهره K وجود ندارد.

حل دستی

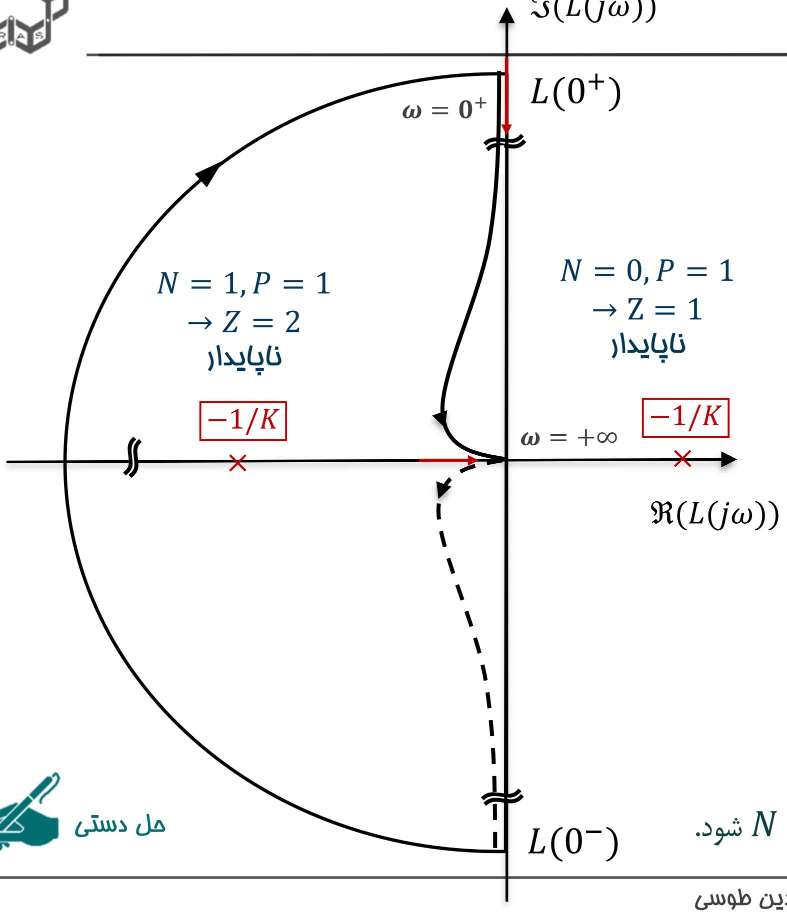
معیار پایداری نایکویست

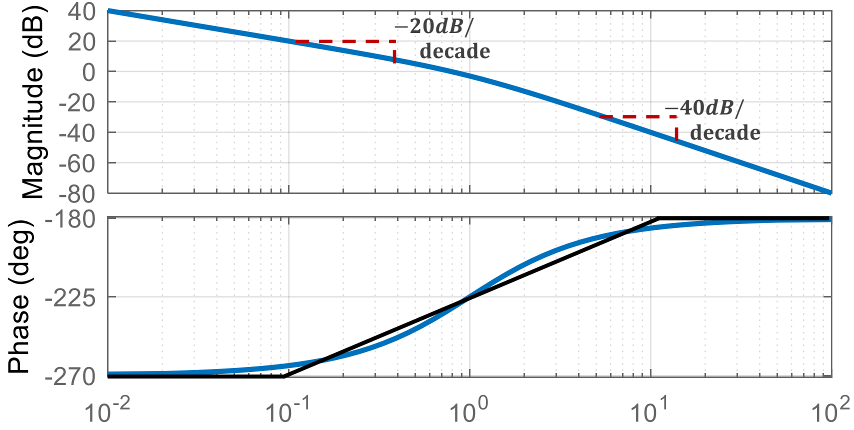
- معیار پایداری نایکوست در حضور قطب در مبدا

✓ مثال ۷:

$$L(s)=\frac{K}{s(s-1)}=\frac{K}{-s(-s+1)}$$

نمودار بودی تقریبی را رسم می کنیم.





نیم دایره کوچک به یک نیم دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.

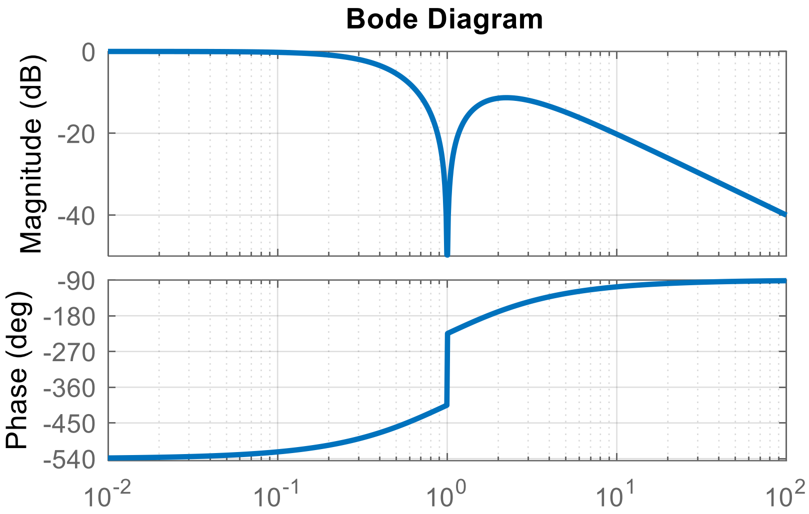
با توجه به اینکه یک قطب ناپایدار در L وجود دارد بایستی برای پایداری $N=-1$ شود.

حل دستی

- **معیار پایداری نایکوست در حضور صفر موهومی**

✓ مثال ۸:

$$L(s)=\frac{K(s^2+1)}{(s-1)^3}$$



نمودار بودی را رسم می کنیم.

افزایش سریع ۱۸۰ درجه ای زاویه در فرکانس $\omega=1$

به علت حضور یک زوج صفر مزدوج موهومی است.

جدول زیر را برای ترسیم نمودار نایکویست تعیین کنید:

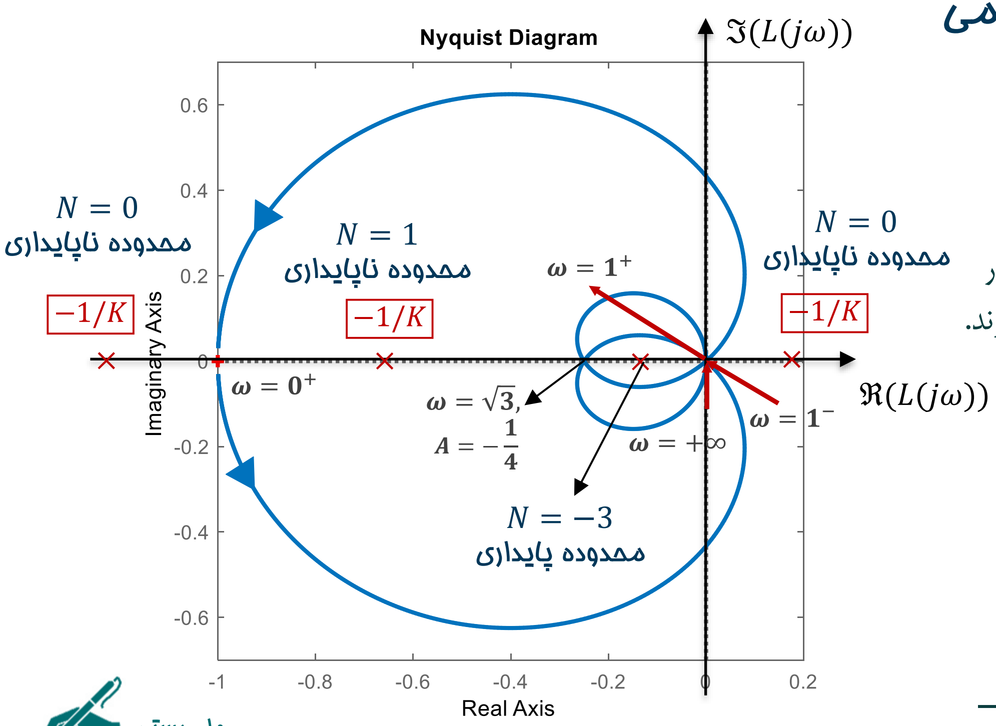
ω	0	1^-	1^+	$+\infty$
$\lvert G(j\omega)\rvert$	1	0	0	0
$\measuredangle G(j\omega)$	$-540^\circ=-180^\circ$	$-405^\circ=-45^\circ$	$-405^\circ+180^\circ=-225^\circ$	-90°

حل دستی

معیار پایداری نایکویست

- ## معیار پایداری نایکوست در حضور صفر موهومی

✓ ادامه مثال ۸:
$$L(s)=\frac{K(s^2+1)}{(s-1)^3}$$



بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک صفر های موهومی نمودار نایکوست را رسم می کنیم. صفر ها در شکل نهایی تاثیری ندارند.

محل برخورد با محور حقیقی را به دست می آوریم.

$$G(j\omega)=\frac{-\omega^2+1}{-j\omega(\omega^2-3)+(3\omega^2-1)}$$
$$\Im(G(j\omega))=0\rightarrow\omega^2=3$$
$$\text{For } \omega^2=3\rightarrow G(j\omega)=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

محدوده پایداری $-\frac{1}{4}<-\frac{1}{K}<0\rightarrow 4<K<+\infty$

حل دستی

معیار پایداری نایکویست

- ## شمارش تعداد چرخش N

✓ در برخی از مسائل نظیر مثال قبل شمارش تعداد چرخش کمی چالش برانگیز است.

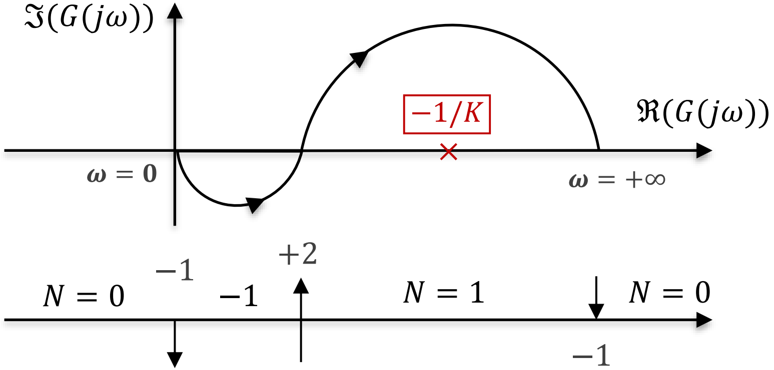
✓ در این نوع مسائل تنها با رسم نمودار نایکویست در فرکانس های مثبت از این روش استفاده کنید.

❑ تعداد نقاط عبور نمودار نایکویست در سمت چپ نقطه $-1/K$ را شمارش کنید

❑ چرخش های ساعت گرد (کاهش فاز) را مثبت + و چرخش های پاد ساعت گرد (افزایش فاز) را منفی − شمارش کنید.

❑ فرکانس های صفر و بی نهایت را یک بار چرخش و غیر آن را دو بار چرخش شمارش کنید.

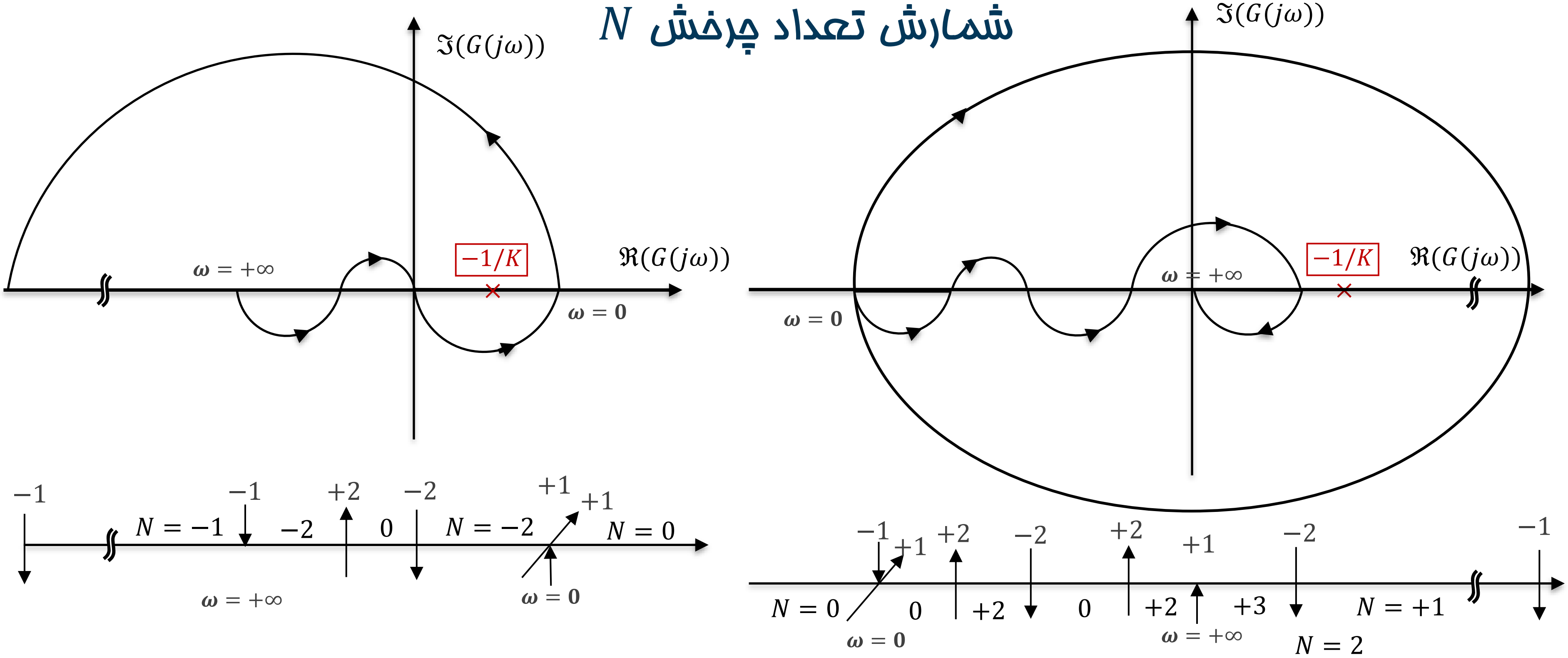
✓ به عنوان مثال:



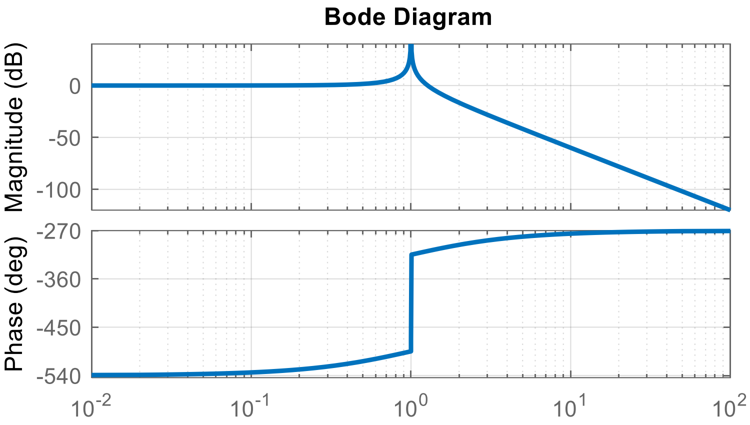
برگرفته از کتاب Belanger

معیار پایداری نایکویست

شمارش تعداد چرخش N



- معیار پایداری نایکوست در حضور قطب موهومی



✓ مثال ۹:

$$L(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+1)}$$

نمودار بودی را رسم می کنیم.

افزایش سریع ۱۸۰ درجه ای زاویه در فرکانس $\omega = 1$ به علت حضور یک زوج قطب مزدوج موهومی است.

جدول زیر را برای ترسیم نمودار نایکویست تعیین کنید:

ω	0	1^-	1^+	$+\infty$
$\lvert G(j\omega)\rvert$	1	∞	∞	0
$\measuredangle G(j\omega)$	-180°	-135°	$+45^\circ$	$+90^\circ$

حل دستی

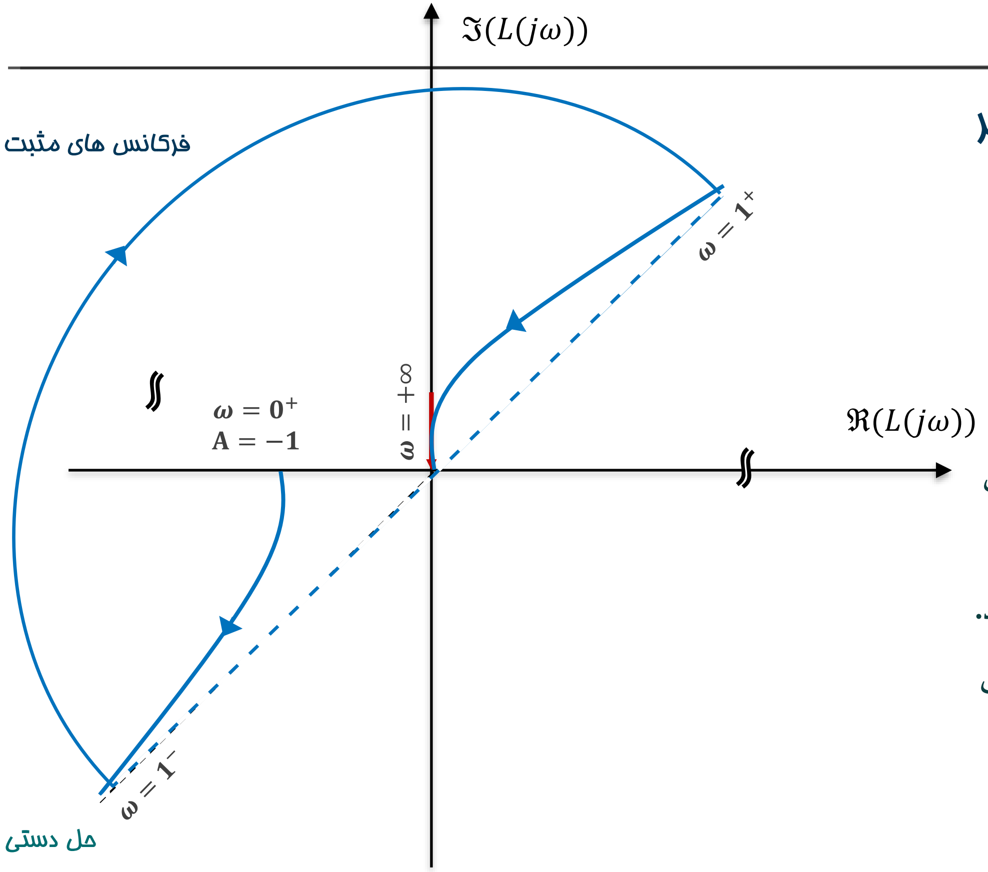
- معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب موهومی

✓ ادامه مثال ۹:

$$L(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+1)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب های موهومی نمودار نایکوست را رسم می کنیم. صفر ها در شکل نهایی تاثیری ندارند.

نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد حول قطب های موهومی به یک دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.



حل دستی

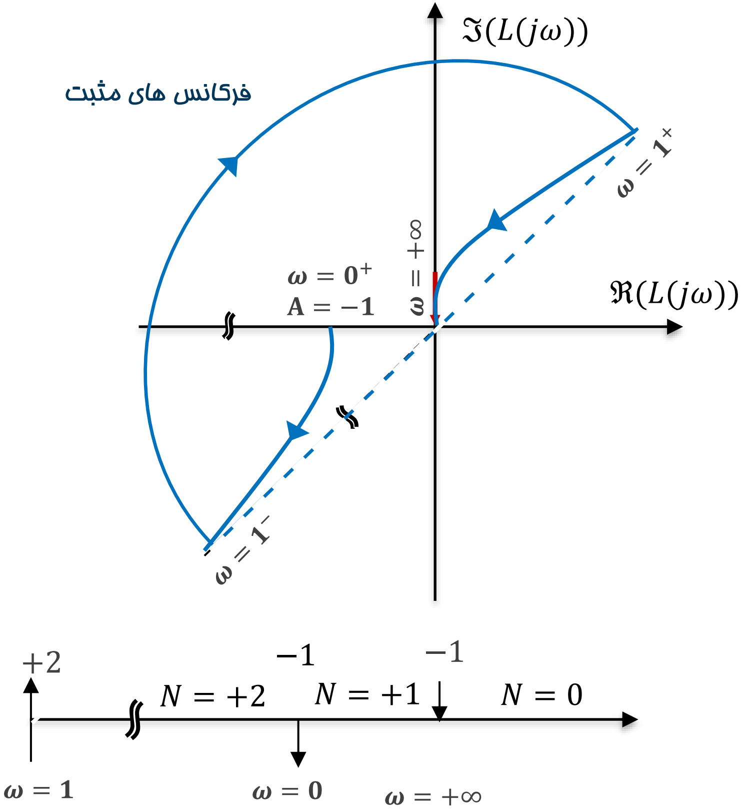
- **معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب موهومی**

✓ ادامه مثال ۹: $L(s) = \frac{K}{(s-1)(s^2+1)}$

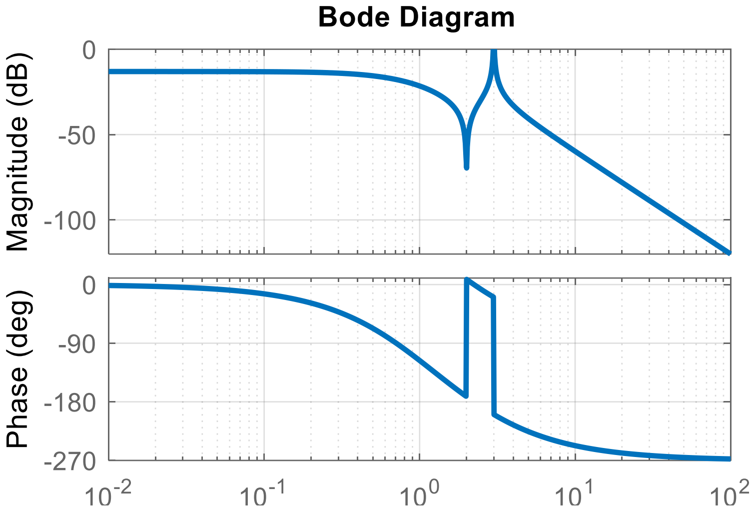
تعداد چرخش ها و نواحی پایداری را با استفاده از روش پیشنهادی بررسی می کنیم.

در این سیستم $P = 1$ و برای پایداری بایستی منطقه ای را بیابیم که در آن $N = -1$ باشد.

همواره ناپایدار خواهد ماند!



• معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب موهومی



✓ مثال ۱۰:

$$L(s)=\frac{K(s^2+4)}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}$$

نمودار بودی را رسم می کنیم.

افزایش سریع ۱۸۰ درجه ای زاویه در فرکانس $\omega=2$ به علت حضور یک زوج صفر مزدوج موهومی و در فرکانس $\omega=3$ به علت یک زوج قطب مزدوج موهومی است.

جدول زیر را برای ترسیم نمودار نایکویست تعیین کنید:

ω	0	2^-	2^+	2.2	3^-	3^-	$+\infty$
$\lvert G(j\omega)\rvert$	$2/9$	0	0	0.015	∞	∞	0
$\measuredangle G(j\omega)$	0°	-170°	$+10$	0°	$\approx -10^\circ$	$\approx -190^\circ$	-270°

حل دستی

معیار پایداری نایکویست

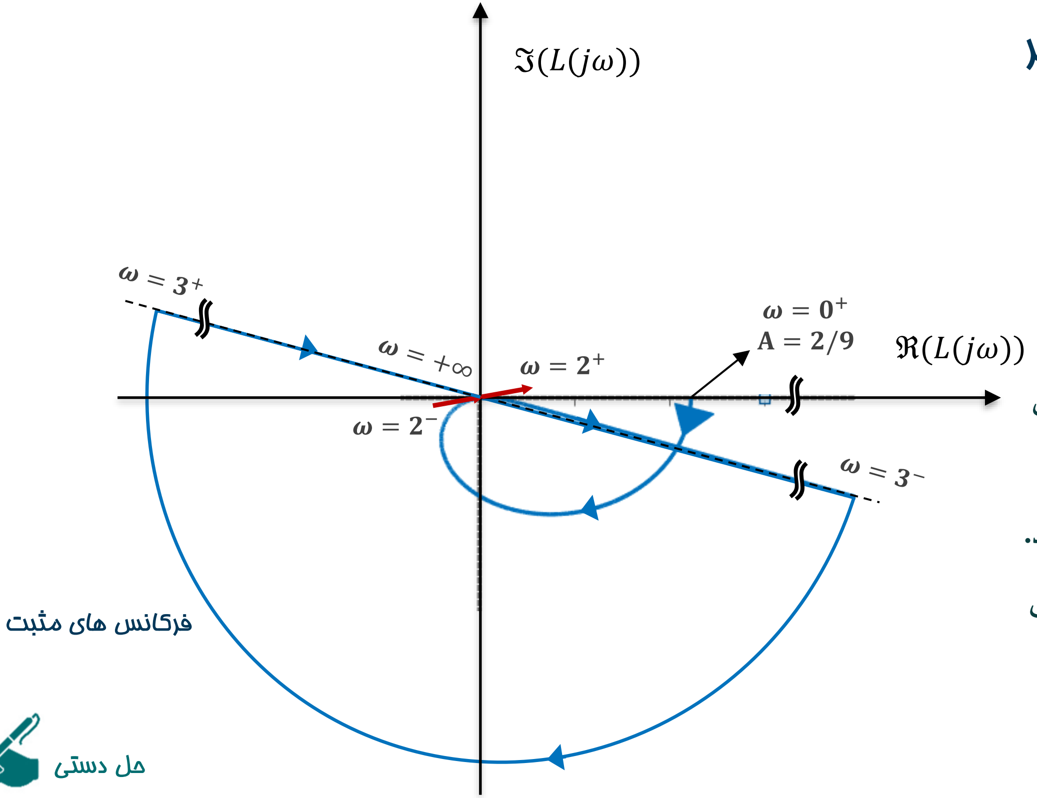
- **معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب موهومی**

✓ ادامه مثال ۱۰:

$$L(s) = \frac{K(s^2+4)}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}$$

بدون در نظر گرفتن نیم دایره نزدیک قطب های موهومی نمودار نایکوست را رسم می کنیم. صفر ها در شکل نهایی تاثیری ندارند.

نیم دایره کوچک پاد ساعت گرد حول قطب های موهومی به یک دایره با شعاع بی نهایت ساعت گرد نگاشت می شود.

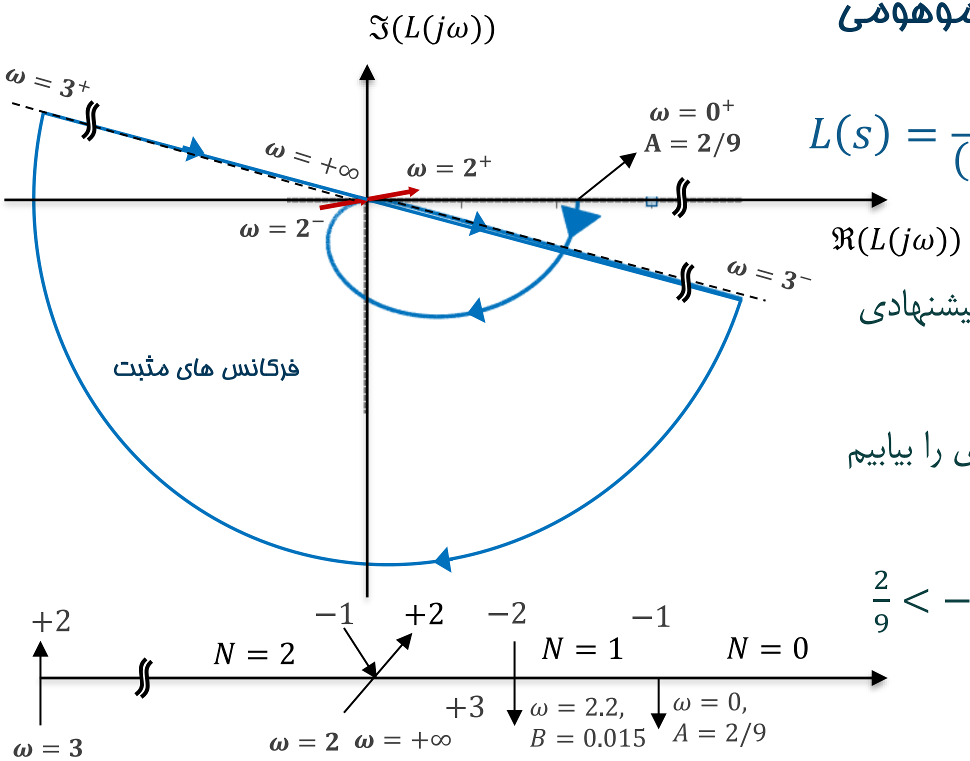


حل دستی

- **معیار پایداری نایکوست در حضور صفر و قطب موهومی**

✓ ادامه مثال ۱۰:

$$L(s) = \frac{K(s^2+4)}{(s+1)^2(s+2)(s^2+9)}$$



تعداد چرخش ها و نواحی پایداری را با استفاده از روش پیشنهادی تعیین می کنیم.

در این سیستم $P = 0$ و برای پایداری بایستی منطقه ای را بیابیم که در آن $N = 0$ باشد.

محدوده پایداری $\quad \frac{2}{9} < -\frac{1}{K} < +\infty \;\rightarrow\; -4.5 < K < 0$

برگرفته از کتاب Belanger

معیار پایداری نایکویست

• تعیین محدوده پایداری با نمودار بودی

✓ با توجه به روش پیشنهادی می توان بدون ترسیم نمودار نایکویست و با استفاده از نمودار بودی و تعیین محل تقاطع با محور حقیقی محدوده پایداری را تعیین نمود:

✓ مثال ۱۲: $L(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)(s+5)}$

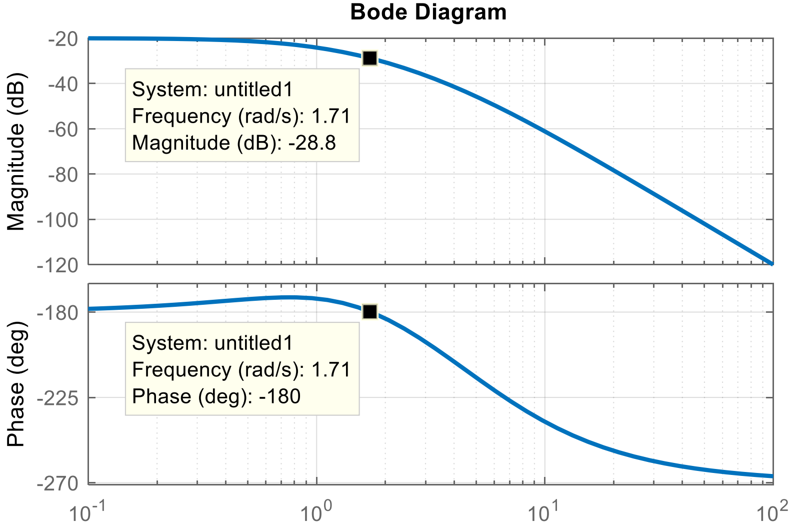
❑ نمودار بودی را ترسیم کنید:

❑ در دو نقطه نمودار فاز -180° را قطع می کند.

در $\omega = 0$: اندازه برابر $-20\ dB$ و فاز افزایشی است.

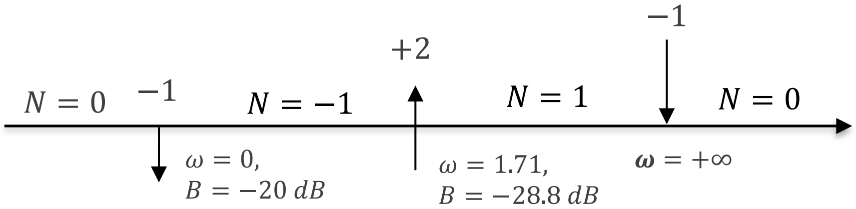
در $\omega = 1.71$: اندازه برابر $-28.8\ dB$ و فاز کاهشی است.

در $\omega = \infty$ به سمت مبدا میل می کند و فاز کاهشی است.



❑ در این سیستم $P = 1$ و برای پایداری بایستی $N = -1$

محدوده پایداری
$$-28.8dB < -\frac{1}{K} < -20\ dB \rightarrow$$
$$10 = 20dB < K < 28.8dB = 27.5$$



برگرفته از کتاب Belanger

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق- کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیسنم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.

حمید رضا تقی راد
استاد

گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل خطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به این سایت مراجعه نمایید

متشکرم