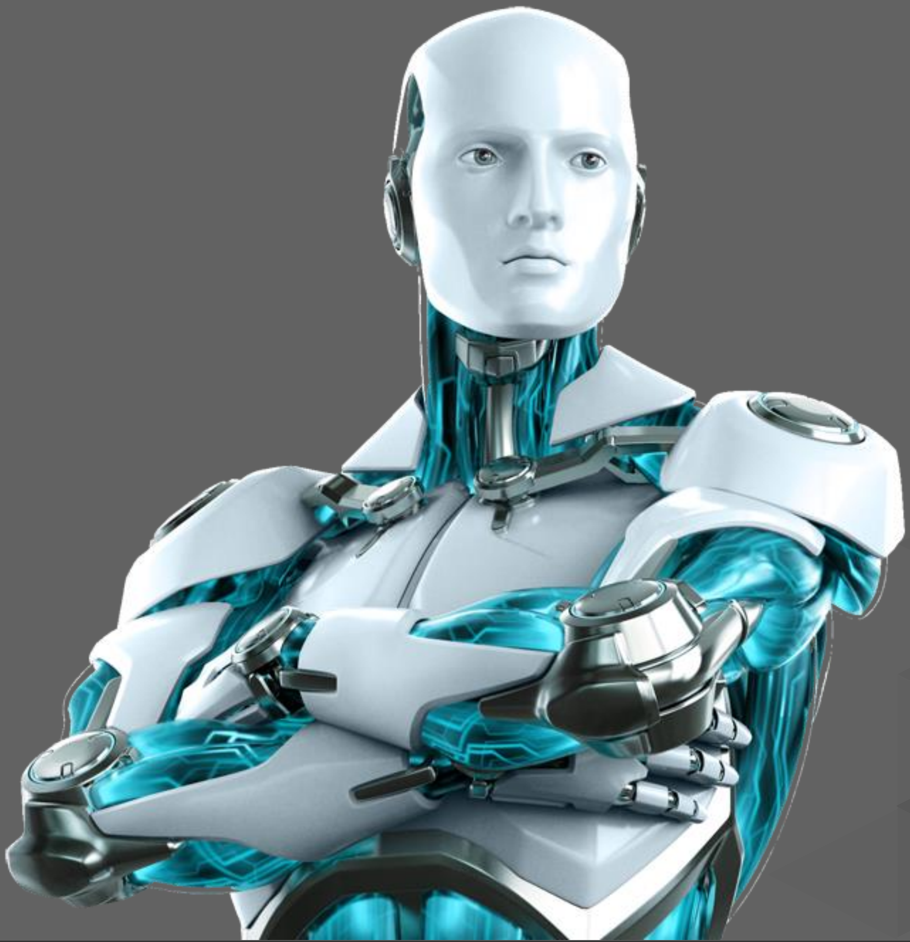
گروه رباتیک ارس

سیستم های کنترل خطی

فصل دوم: تحلیل زمانی سیستم های کنترل

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم حلقه بسته بر اساس نوع سیستم و بهره حلقه در سیستم حلقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.



به چشم انداز

کسب مهارت های لازم

در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل خطی

خوش آمدید

در باره گروه رباتیک ارس

گروه رباتیک ارس از ۱۳۷۶ و با بیش از ۲۷ سال تجربه، خدمات خود را در گسترش آموزش مهندسی و پژوهش در لبه های دانش را در زمینه تحلیل و طراحی سیستم های دینامیکی در کاربرد رباتیک ارائه می دهد. **گروه رباتیک ارس** به خوبی توسط کارشناسان صنعتی، پژوهشگران و شخصیت های علمی دانش آموخته خود و همچنین با سوابق فراوان موفق پروژه های تحقیق و توسعه خود در سراسر کشور و در جوامع علمی بین المللی شناخته می شود. مهمترین پشتوانه این گروه ظرفیت نیروی انسانی وسیع گروه است که تمام سعی و اهتمام خود را به گسترش دانش و فناوری معطوف نموده اند. یکی از مهمترین اهداف گروه استفاده از این پتانسیل ها به منظور گسترش ارتباطات آکادمیک و صنعتی در سطح ملی و بین المللی است. ماموریت گروه رباتیک ارس توسعه پهنه دانش و تعمیق کیفیت آموزش و پژوهش در یک محیط پویا و شاداب است.

عناوین فصل

۱ رفتار زمانی سیستم های کنترل

پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

۲ ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجهش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

۳ ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

۴ تحلیل پایداری سیستم های کنترل

رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

۵ معیار پایداری راث-هرویتز

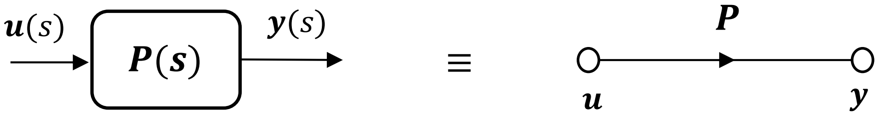
شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم حلقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره حلقه در سیستم حلقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

رفتار زمانی سیستم کنترل

- **شناخت رفتار سیستم از روی پاسخ زمانی**

✓ سیستم های کنترل خطی به صورت زیر نمایش داده می شوند.



✓ رفتار اولیه سیستم را می توان بر اساس پاسخ (معادلات دیفرانسیل) سیستم در حوزه زمان $y(t)$ تعیین نمود.

✓ پاسخ سیستم دارای دو جزء گذرا $y_{tr}(t)$ و ماندگار $y_{ss}(t)$ به صورت زیر است

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$$

❑ که در آن $y_{tr}(t)$ پاسخ همگن (بدون ورودی) معادلات دیفرانسیل، که گذرا است: $\lim_{t\to\infty} y_{tr}(t) = 0$

❑ و $y_{ss}(t)$ پاسخ خصوصی آن در حالی است که $t \to \infty$.

✓ بنابراین پاسخ سیستم هم تابع دینامیک سیستم $P(s)$ و هم تابع ورودی سیستم $u(t)$ است.

- **ورودی های متداول در تحلیل رفتار سیستم**

✓ ورودی ضربه: $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$ که در آن:

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & -\frac{\epsilon}{2} \le t \le \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

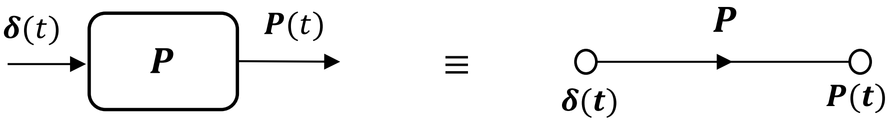
❑ ورودی ضربه در حوزه زمان یک تابع تکین است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\, f(t) dt = f(a)$$

❑ ورودی ضربه در حوزه s یک تابع غیر تکین است:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st} dt = e^{s \cdot 0} = 1$$

❑ با اعمال ورودی ضربه به سیستم و اعمال تبدیل لاپلاس به خروجی تابع تبدیل سیستم به دست می آید.



$$\boldsymbol{P}(s) = \mathcal{L}[P(t)]$$

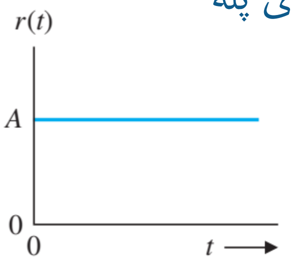
رفتار زمانی سیستم کنترل

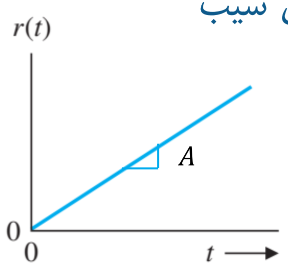
- **ورودی های متداول در تحلیل رفتار سیستم**

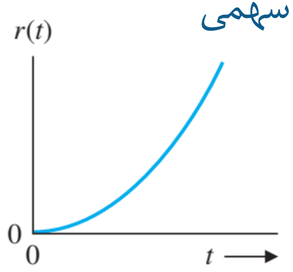
✓ ورودی پله

ورودی شیب

ورودی سهمی





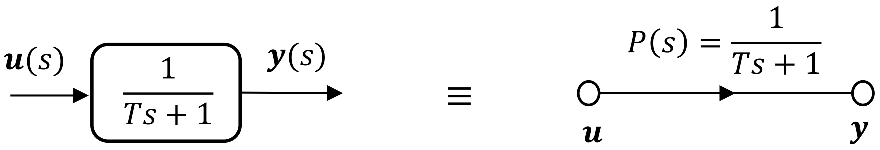


❑ اگر ورودی پله واحد $u_s(t)$ را به صورت زیر نمایش دهیم: $u_s(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

ورودی پله: $r_s(t)=Au_s(t)$ ورودی شیب: $r_r(t)=Atu_s(t)$ ورودی سهمی: $r_p(t)=\frac{1}{2}At^2u_s(t)$

ورودی پله: $\boldsymbol{r}_s(s)=\frac{A}{s}$ ورودی شیب: $\boldsymbol{r}_r(s)=\frac{A}{s^2}$ ورودی سهمی: $\boldsymbol{r}_p(s)=\frac{A}{s^3}$

بدین ترتیب با توجه به اپراتور انتگرال گیری $\frac{1}{s}$ این ورودی ها انتگرال یکدیگرند: $\boldsymbol{r}_r(s)=\frac{1}{s}\boldsymbol{r}_s(s)$ و $\boldsymbol{r}_p(s)=\frac{1}{s}\boldsymbol{r}_r(s)$



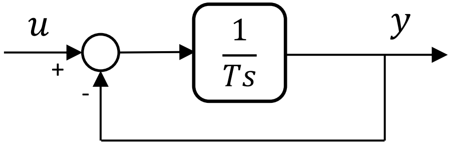
- ## سیستم مرتبه اول

✓ سیستم مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

❑ این سیستم مدل یک مدار ساده RC است که به سیستم پس فاز یا Lag مشهور است

❑ ضریب ثابت T به عنوان ثابت زمانی سیستم یا زمان تاخیر سیستم نامیده می شود.

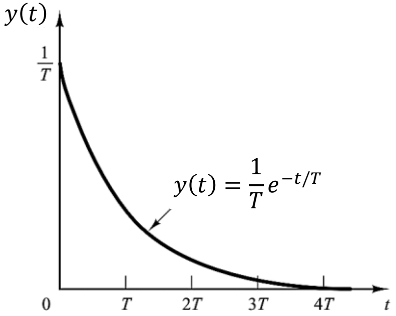
❑ این مدل می تواند یک انتگرال گیر را در حلقه نمایش دهد



✓ پاسخ ضربه واحد سیستم

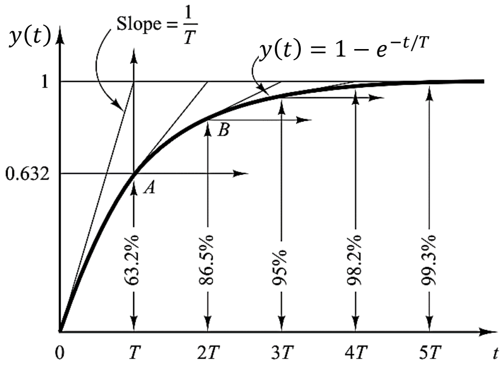
❑ پاسخ ضربه واحد سیستم از وارون تبدیل لاپلاس سیستم به دست می آید:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1}\right] = \frac{1}{T}e^{-t/T} \text{ for } t > 0$$



برگرفته از کتاب Ogata

رفتار زمانی سیستم کنترل



• سیستم مرتبه اول

✓ پاسخ پله واحد سیستم

❑ پاسخ پله سیستم نیز از وارون لاپلاس تابع زیر به دست می آید

$$y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \rightarrow y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

✓ مشخصات پاسخ پله واحد

❑ مقادیر پاسخ در زمان های $T,2T,3T$ برابر است با $y(T) = 1 - e^{-1} = 0.632,\ y(2T) = 0.865,\ y(3T) = 0.95$

- با کوچک شدن ثابت زمانی، همگرایی سریعتر می شود
- با گذشت زمان $3T$ به ۹۵٪ مقدار نهایی خواهیم رسید و با با گذشت زمان $4T$ به ۹۸٪ مقدار نهایی خواهیم رسید

❑ شیب پاسخ در زمان صفر برابر است با

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

❑ شیب پاسخ به صورت پیوسته کاهشی است و در زمان $t \rightarrow \infty$ به صفر می رسد

❑ پاسخ ضربه واحد مشتق پاسخ پله واحد سیستم است.

برگرفته از کتاب Ogata

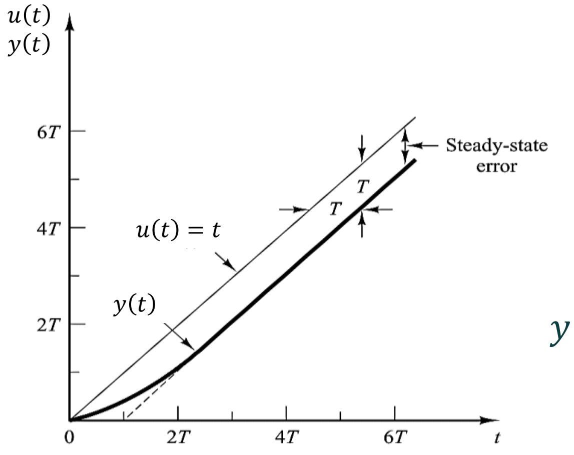
رفتار زمانی سیستم کنترل

• سیستم مرتبه اول

✓ پاسخ شیب واحد سیستم

❑ پاسخ شیب سیستم نیز از وارون لاپلاس تابع زیر به دست می آید

$$y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} - \frac{T^2}{Ts+1} \rightarrow y(t) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \ \text{for}\ t \ \geq 0$$



✓ مشخصات پاسخ شیب واحد

❑ پاسخ سیستم دارای خطای ماندگار است:

$$e(t) = u(t) - y(t) = T\left(1 - e^{-t/T}\right) \rightarrow e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = T$$

• با کوچک شدن ثابت زمانی، خطای ماندگار کوچکتر می شود

❑ پاسخ پله واحد مشتق پاسخ شیب واحد سیستم است.

✓ به همین طریق می توان پاسخ سهمی و ورودی های مرتبه بالاتر را نیز به دست آورد.

برگرفته از کتاب Ogata

رفتار زمانی سیستم کنترل

- **سیستم مرتبه دوم**

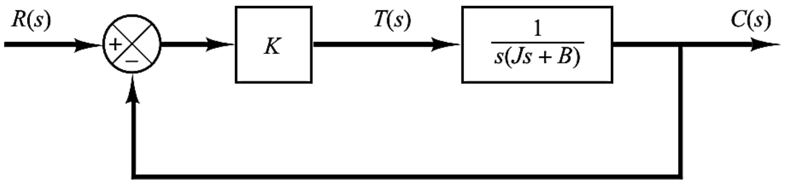
✓ مطابق مثال های بیان شده در فصل قبل حرکت یک بازوی ربات $C(t)$ را در نظر بگیرید که با ممان اینرسی J و ضریب استهلاک ویسکوز B توسط گشتاور یک موتور سرو T کنترل می شود.

$$J\ddot{C} + B\dot{C} = T$$

✓ مدل حلقه باز سیستم

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js+B)}$$

✓ مدل حلقه بسته سیستم با کنترلگر بهره K



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2+Bs+K}$$

❑ با در نظر گرفتن فرکانس طبیعی ω_n و نسبت استهلاک ζ:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n$$

✓ مدل نوعی سیستم مرتبه دوم به دست می آید:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

برگرفته از کتاب Ogata

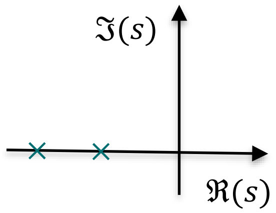
• سیستم مرتبه دوم

✓ معادله مشخصه سیستم:

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0$$

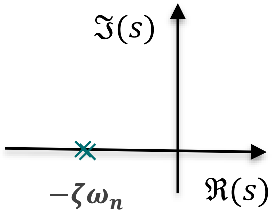
✓ قطب های سیستم (ریشه های معادله مشخصه)، بسته به مقدار ζ می تواند حقیقی یا موهومی باشند

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



❑ اگر $\zeta > 1$: دو قطب حقیقی متمایز (حالت فرا میرایی)

- این سیستم همانند یک سیستم با دو رفتار دینامیکی مرتبه اول تحلیل می شود



❑ اگر $\zeta = 1$: دو قطب حقیقی تکراری (حالت میرایی مرزی)

- همانند حالت قبل رفتار دینامیکی سیستم میرایی است
- میرایی با بیشترین سرعت پاسخ و حالت مرزی بین میرایی کامل و نوسانی

• سیستم مرتبه دوم

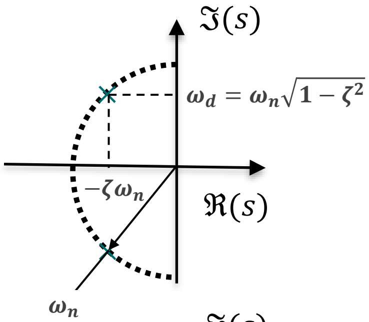
✓ قطب های سیستم

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

❑ اگر $0 < \zeta < 1$: دو قطب مزدوج مختلط (حالت فرو میرایی)

- رفتار سیستم نوسانی ولی با نوسانات میرا شونده است.

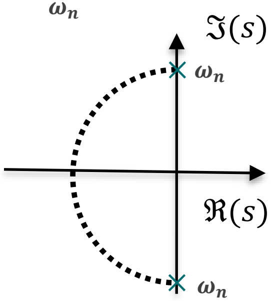
$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$



❑ اگر $\zeta = 0$: دو قطب موهومی (حالت نوسانات دائمی)

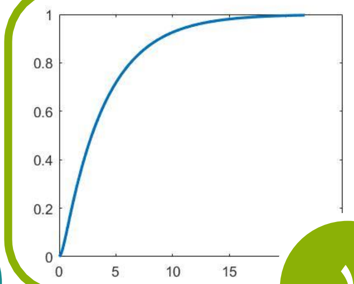
- سیستم دارای نوسانات دائمی است
- حالت مرزی با شرایطی $\zeta > 0$ که نوسانات واگرا می شوند.

$$s = \pm j\omega_n$$



رفتار زمانی سیستم کنترل

- **سیستم مرتبه دوم**

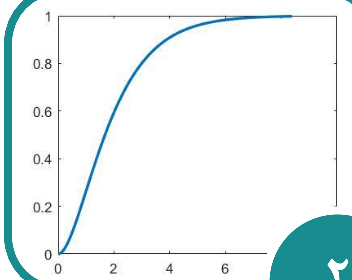


۱

$\zeta > 1$

فرا میرایی

دو ریشه حقیقی متمایز خواهیم داشت و پاسخ نوسانی نبوده و از ترکیب دو ریشه حقیقی به دست می آید

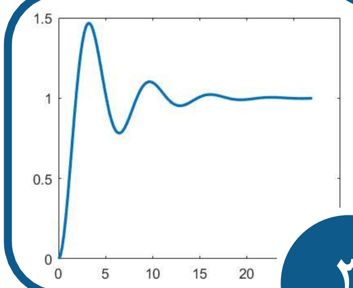


۲

$\zeta = 1$

میرایی مرزی

دو ریشه حقیقی تکراری خواهیم داشت هنوز پاسخ نوسانی نبوده و از تکرار دو ریشه حقیقی به دست می آید

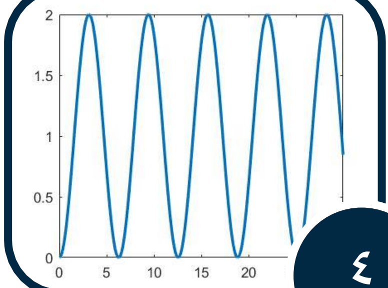


۳

$0 < \zeta < 1$

فرو میرایی

دو ریشه مختلط خواهیم داشت پاسخ نوسانی شده و شدت نوسانات به ζ مربوط می شود.



٤

$\zeta = 0$

نوسانات دائمی

دو ریشه موهومی خواهیم داشت پاسخ نوساناتی با دامنه ثابت خواهد داشت

رفتار زمانی سیستم کنترل

- **پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت فرامیر $\zeta > 1$**

✓ به ازای ورودی پله واحد $R(s) = 1/s$ ؛ خروجی سیستم عبارت است از:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+s_1)(s+s_2)}, \qquad s_{1,2} = \zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \in \mathbb{R}$$

✓ وارون لاپلاس این پاسخ با استفاده از کسر های جزئی عبارت است از:

$$C(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{1}{s_1}e^{-s_1 t} - \frac{1}{s_2}e^{-s_2 t}\right) \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

✓ پاسخ از ترکیب دو عبارت نمایی به دست می آید.

✓ اگر $\zeta \gg 1$ در اینصورت $s_1 \gg s_2$ و ترم نمایی مربوط به s_1 خیلی سریعتر از بین رفته و می تواند در مقایسه با ترم s_2 صرف نظر شود. پاسخ سیستم با سیستم مرتبه اول زیر می تواند تقریب زده شود.

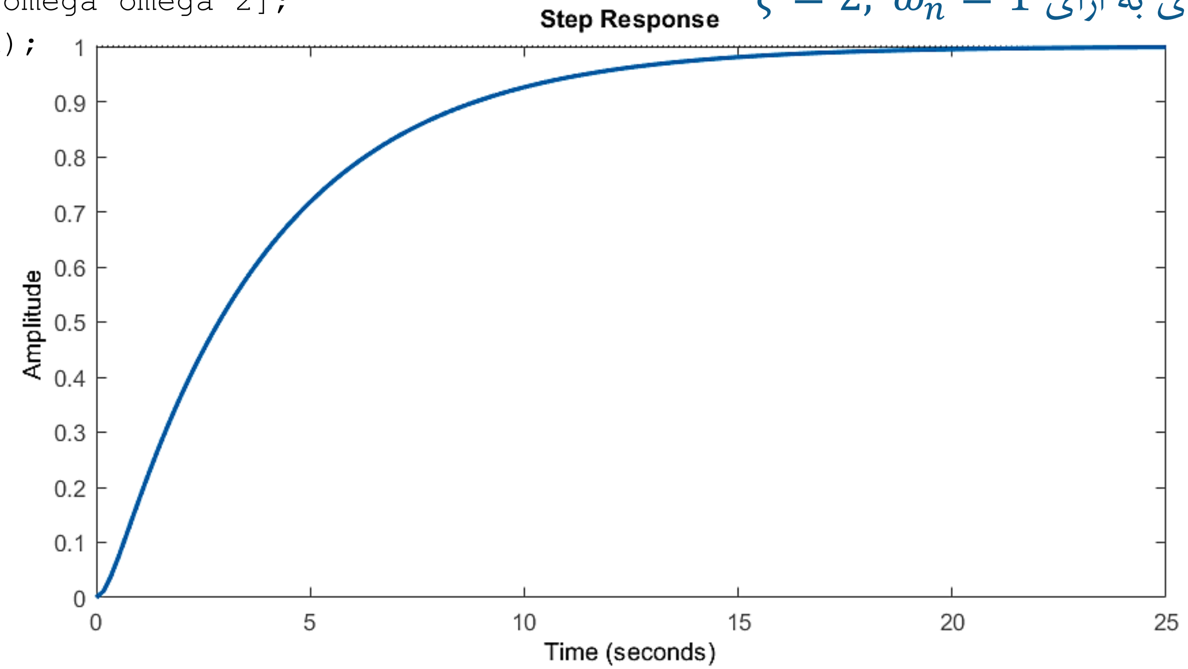
$$C(s) = \frac{s_2}{s(s+s_2)} \quad \rightarrow \quad C(t) = 1 - e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}, \qquad \text{for } t \geq 0$$

برگرفته از کتاب Ogata

رفتار زمانی سیستم کنترل

- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم : حالت فرامیر $\zeta > 1$
  - ✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 2,\ \omega_n = 1$

```
omega=1;zeta=2;
num=1;
den=[1 2*zeta*omega omega^2];
sys=tf(num,den);
Step(sys);
```



حل کامپیوتری

- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت میرایی مرزی $\zeta = 1$
  - ✓ به ازای ورودی پله واحد $R(s) = 1/s$ ؛ خروجی سیستم عبارت است از:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n)^2}$$

  - ✓ وارون لاپلاس این پاسخ با استفاده از کسرهای جزئی عبارت است از:

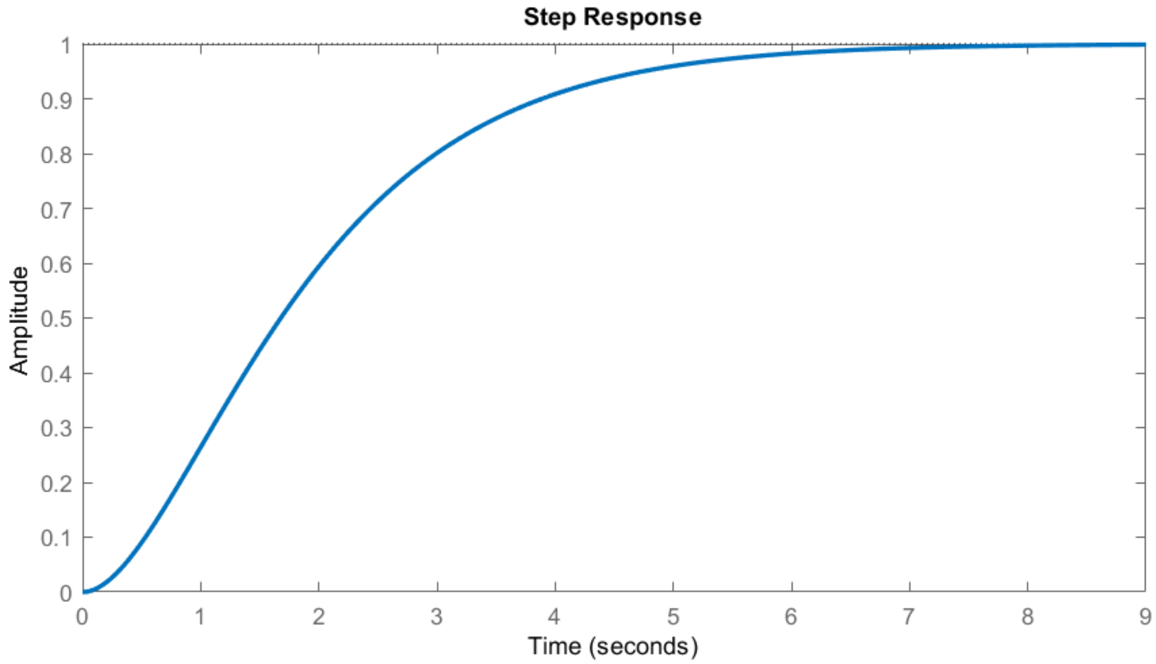
$$C(t) = 1 - (1+\omega_n t)e^{-\omega_n t} \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

  - ✓ پاسخ از ترکیب یک عبارت نمایی و حاصل ضرب آن در زمان به دست می آید.

برگرفته از کتاب Ogata

رفتار زمانی سیستم کنترل

- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت میرایی مرزی $\zeta = 1$
  - ✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 1,\ \omega_n = 1$



حل کامپیوتری

- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت فرومیرایی $0 < \zeta < 1$

حل کامپیوتری

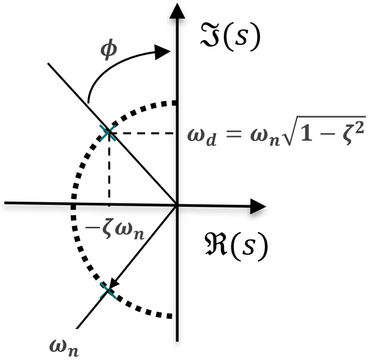
✓ به ازای ورودی پله واحد $R(s) = 1/s$؛ خروجی سیستم عبارت است از:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)}, \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

✓ وارون لاپلاس این پاسخ با استفاده از کسرهای جزئی عبارت است از:

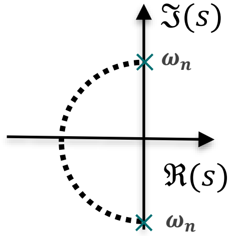
$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \phi) \ \text{ for } \ t \geq 0, \qquad \tan\phi = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

✓ پاسخ نوسانی با یک پوش میرا شونده نمایی است.



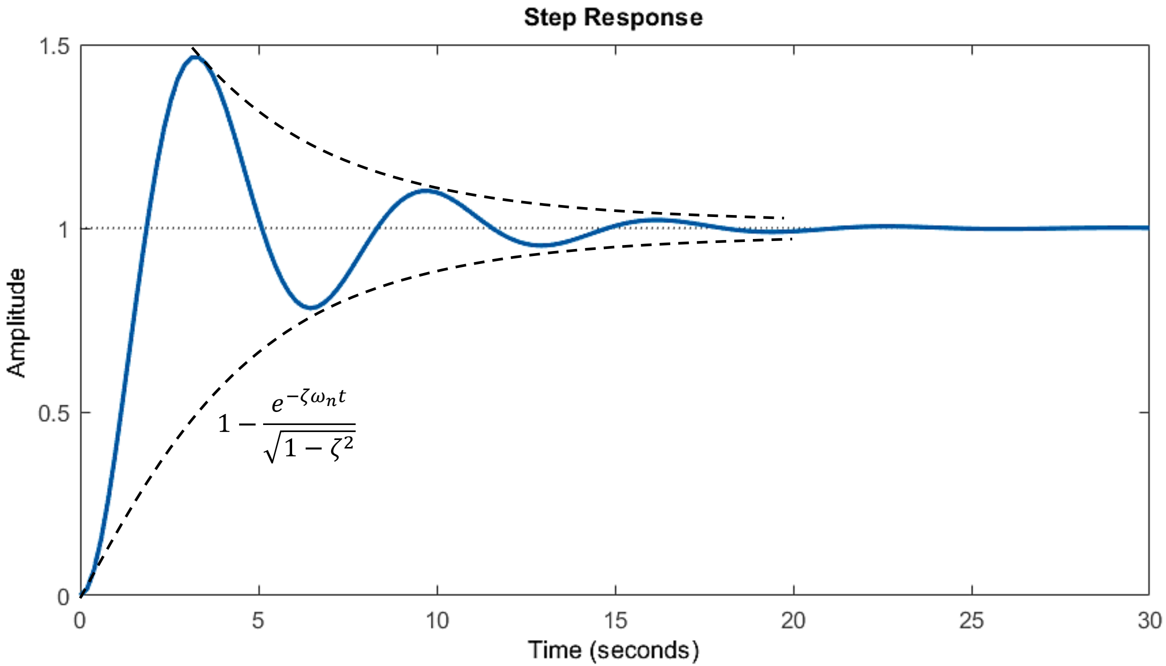
- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت نوسانات دائمی $\zeta = 0$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)} \rightarrow C(t) = 1 - \cos\omega_n t\,, \qquad \text{for} \ \ t \geq 0$$



رفتار زمانی سیستم کنترل

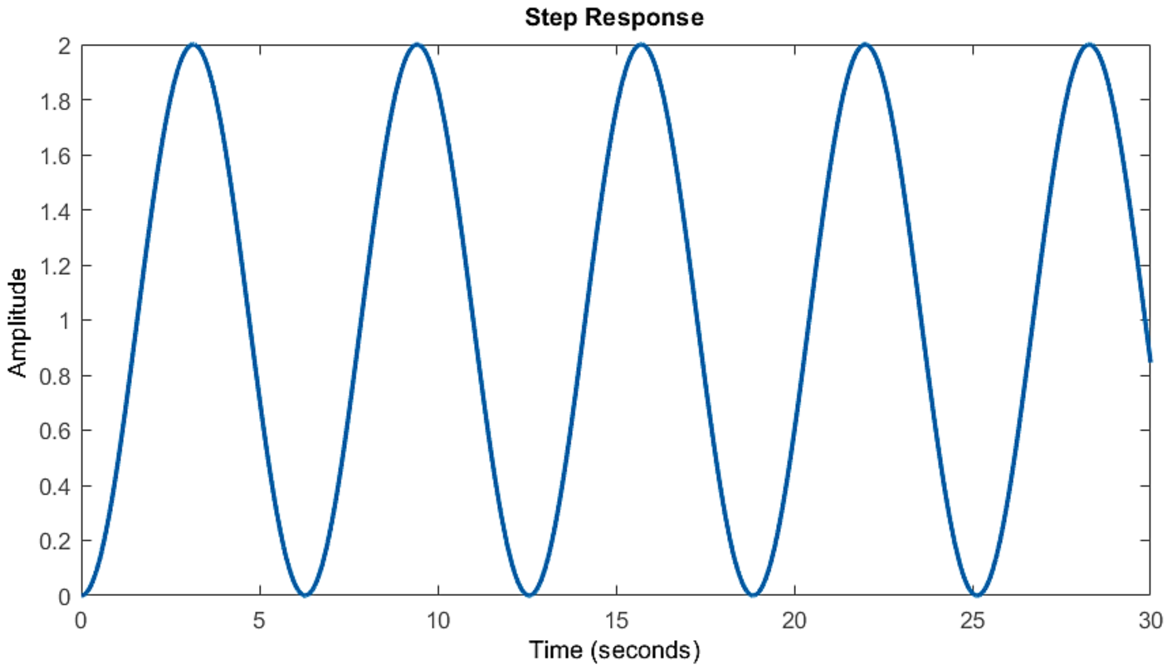
- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت میرایی $0 < \zeta < 1$
  - ✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 0.2357,\ \omega_n = 1$



حل کامپیوتری

رفتار زمانی سیستم کنترل

- پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم: حالت نوسانات دائم $\zeta = 0$
  - ✓ پاسخ عددی به ازای $\zeta = 0,\ \omega_n = 1$



- **پاسخ ضربه سیستم مرتبه دوم**

✓ با مشتق گیری از پاسخ پله می توان در حالت های مختلف پاسخ ضربه سیستم را به دست آورد.

❑ حالت فرا میرایی $\zeta > 1$

$$C(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}\right) \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

❑ حالت میرایی مرزی $\zeta = 1$

$$C(t) = \omega_n^2\, t e^{-\omega_n t} \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

❑ حالت فرو میرایی $0 < \zeta < 1$

$$C(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\, \omega_d t \quad \text{for} \quad t \geq 0,$$

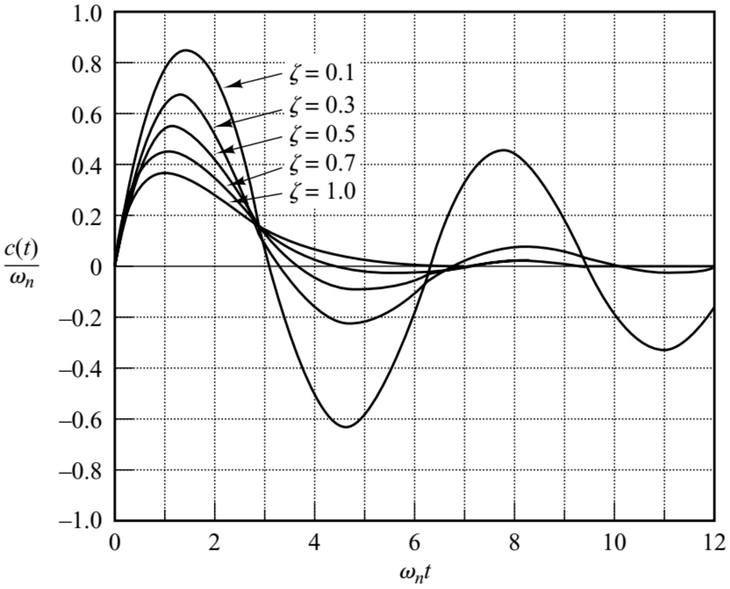
❑ حالت نوسانات دائمی $\zeta = 0$

$$C(t) = \omega_n \sin\, \omega_n t \quad \text{for} \quad t \geq 0,$$

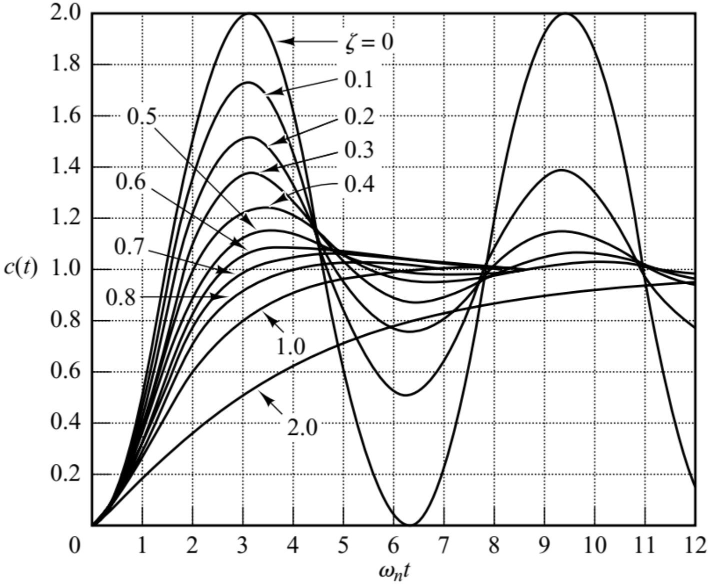
برگرفته از کتاب Ogata

- مقایسه پاسخ سیستم مرتبه دوم فرو تحریک به ازای ζ مختلف

پاسخ ضربه



پاسخ پله



برگرفته از کتاب Ogata

عناوین فصل

۱ رفتار زمانی سیستم های کنترل

پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

۲ ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجهش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

۳ ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

۴ تحلیل پایداری سیستم های کنترل

رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

۵ معیار پایداری راث-هرویتز

شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم حلقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره حلقه در سیستم حلقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا**

✓ بیشینه فراجهش M_p

❑ قله صعود پاسخ در زمان t_p مطابق شکل برابر

$$\% M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100$$

❑ تعیین زمان نقاط اکسترمم تابع در حالت فرومیرایی:

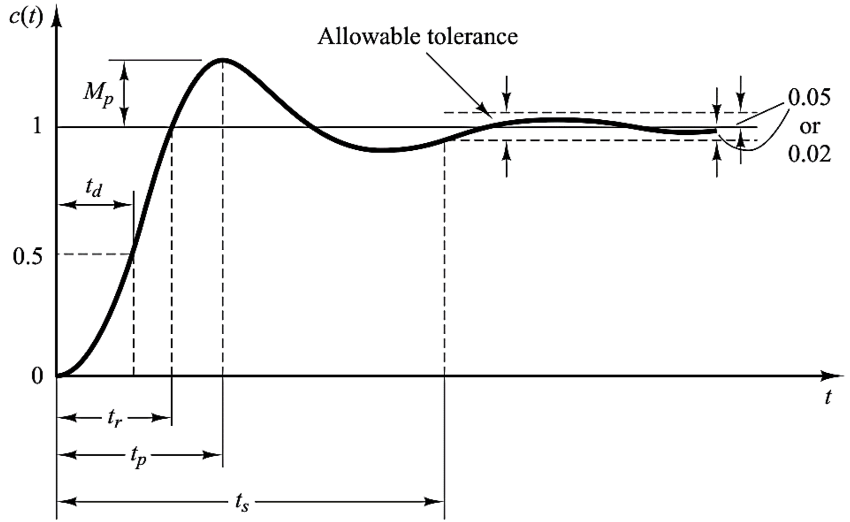
$$\frac{dC}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin \omega_d t_p = 0$$

$$\sin \omega_d t_p = 0 \;\; \rightarrow \;\; \omega_d t_p = \mathrm{n}\pi, \qquad n = 1,2,\ldots$$

❑ بدین ترتیب: $t_{p_n} = \frac{\mathrm{n}\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad n = 1,2,\ldots$

❑ در بیشینه فراجهش $n = 1$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$



برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا**

✓ بیشینه فراجهش M_p

❑ قله صعود پاسخ در زمان t_p مطابق شکل برابر

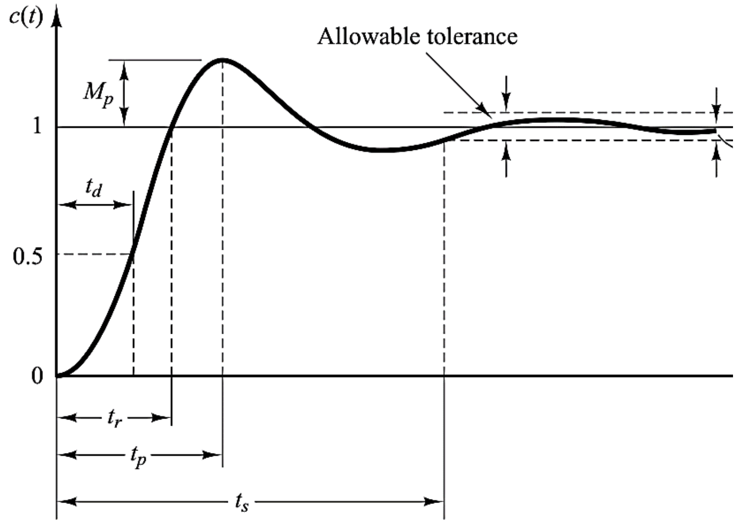
$$\%\, M_p = \frac{C(t_p) - 1}{1} \times 100$$

$$\%\, M_p = \frac{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\pi - \phi) \times 100$$

❑ که در آن: $\cos(\pi - \phi) = \cos\phi = \sqrt{1-\zeta^2}$

❑ در نتیجه فراجهش در سیستم مرتبه دوم تنها تابع ζ است:

$$\boxed{\%\, M_p = 100 e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



برگرفته از کتاب Ogata

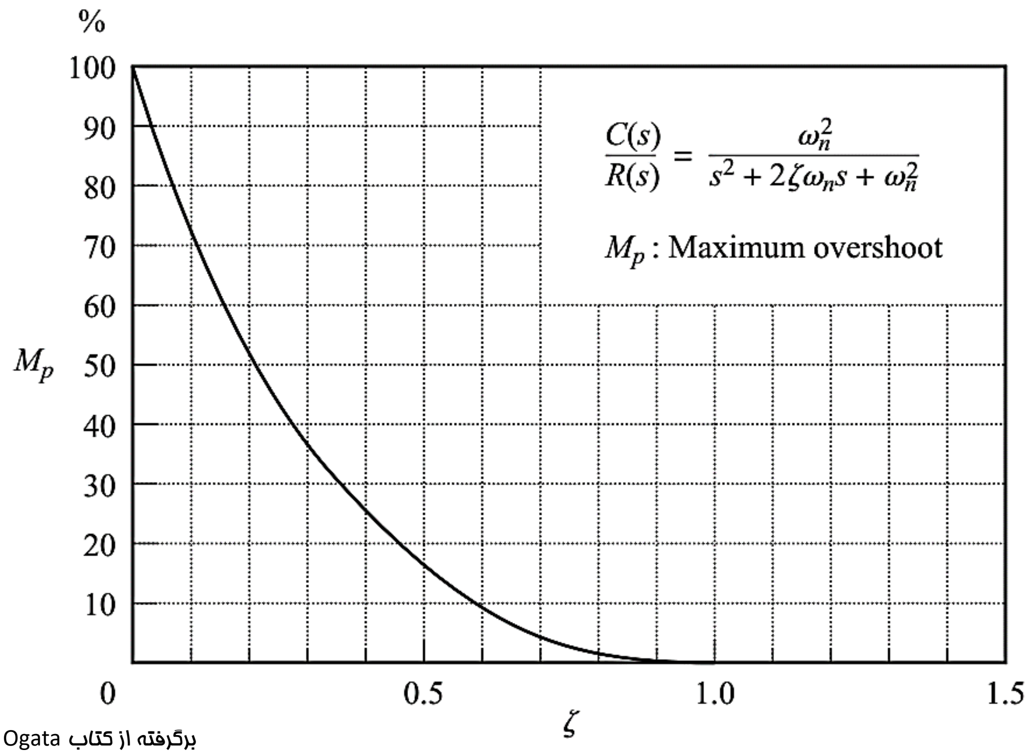
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- ## ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ میزان فراجهش M_p بر حسب ζ

❑ فراجهش مناسب در سیستم های کنترل صنعتی سریع حدود 5% است.

❑ بدین ترتیب ζ_d نزدیک 0.707 انتخاب می شود.



برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

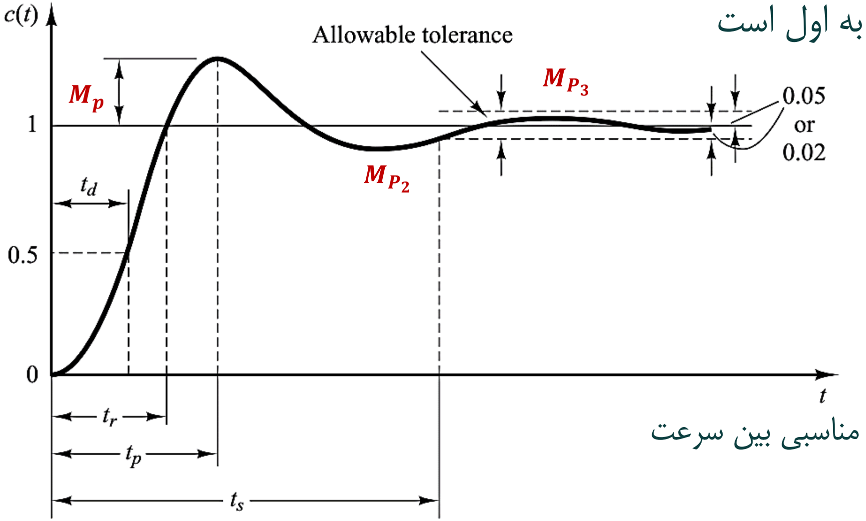
✓ نسبت استهلاک d

❑ نسبت استهلاک d نسبت فراجهش نقطه اکسترمم سوم به اول است

$$d=\frac{M_{p_3}}{M_p}=\frac{e^{-3\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}{e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}=e^{-2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

بدین ترتیب:

$$M_p=\sqrt{d}$$



❑ در سیستم های کنترل نسبت استهلاک $d=\frac{1}{4}$ مصالحه بسیار مناسبی بین سرعت پاسخ و میزان نوسانات در فرآیندهای صنعتی کند ایجاد می کند.

در این حالت

$$d=\frac{1}{4}\rightarrow\zeta_d=0.2155$$

برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

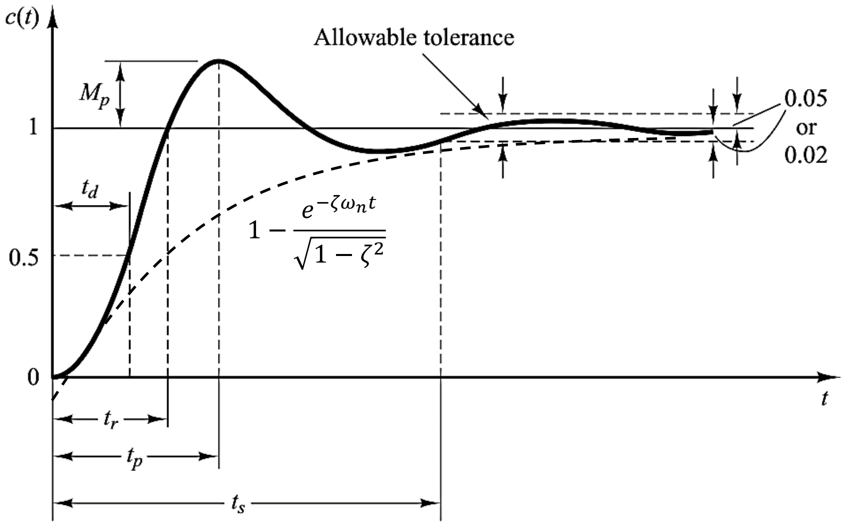
- **ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا**

✓ زمان نشست t_s

❑ زمانی که در آن پاسخ به محدوده ۵٪ (یا ۲٪) مقدار حالت ماندگار خود می رسد

❑ تخمین t_s در سیستم مرتبه دوم فرومیرا:

می توان از پوش پاسخ استفاده نمود



برگرفته از کتاب Ogata

$$C(t_s) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.95$$

$$\omega_n t_s = -\frac{1}{\zeta}\ln\left[0.05\sqrt{1-\zeta^2}\right]$$

تقریب با فرض $0 < \zeta < 0.69$:

$$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n},$$

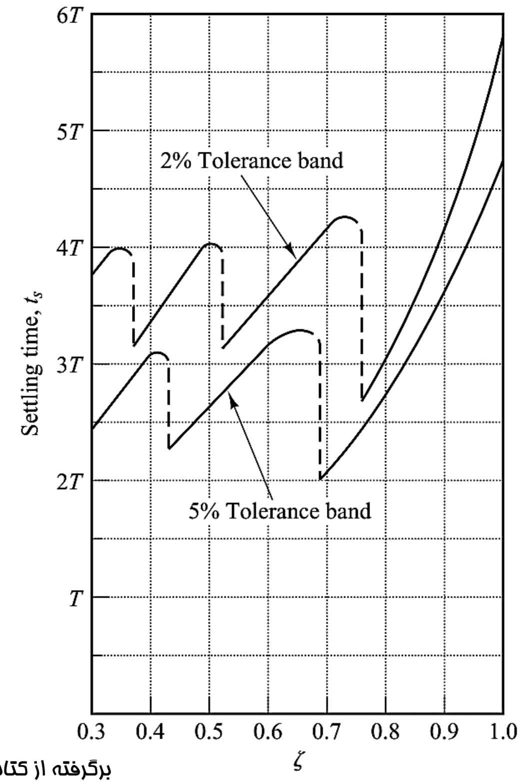
تقریب با فرض $\zeta > 0.69$:

$$t_s = \frac{4.5\zeta}{\omega_n},$$

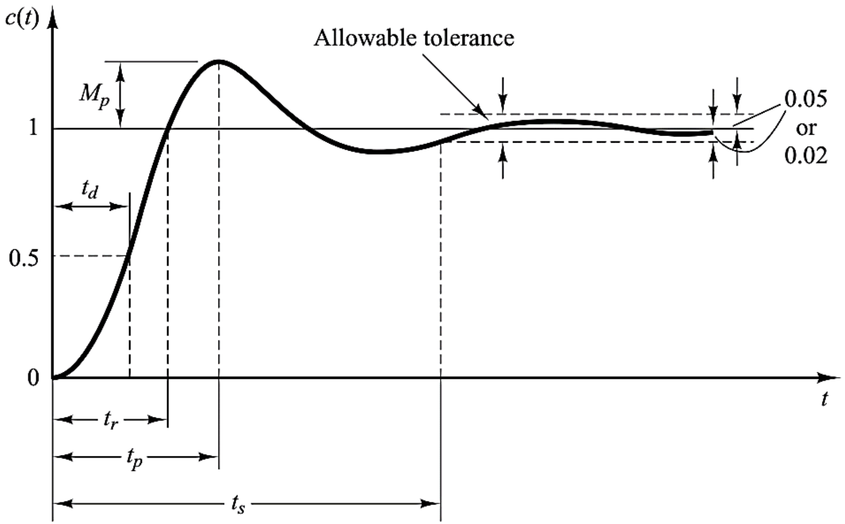
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا**

✓ میزان زمان نشست t_s بر حسب $\zeta, T = 1/\zeta\omega_n$



برگرفته از کتاب Ogata



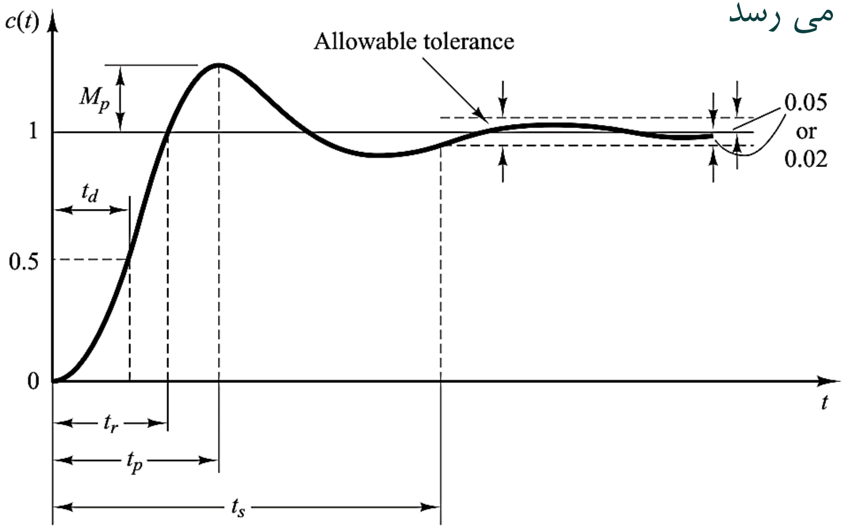
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ زمان تاخیر t_d

❑ زمانی که در آن پاسخ به نیمی از مقدار حالت ماندگار خود می رسد

❑ تخمین t_d در سیستم مرتبه دوم فرومیرا:



برگرفته از کتاب Ogata

تقریب مرتبه اول:
$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n},$$

تقریب مرتبه دوم:
$$t_d = \frac{1.1+0.125\zeta+0.469\zeta^2}{\omega_n},$$

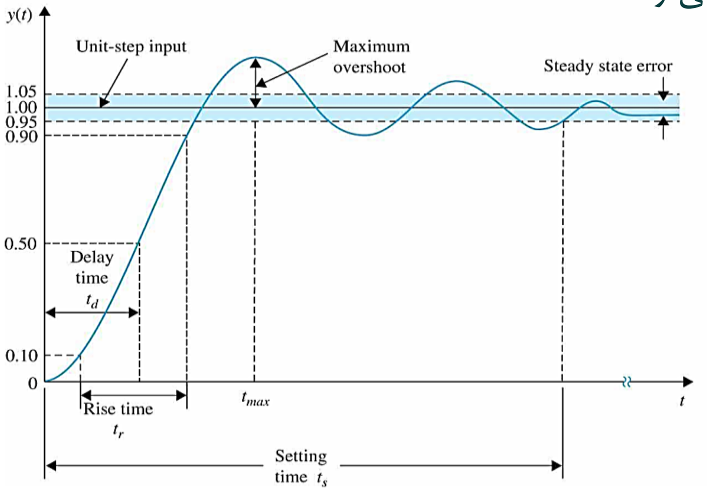
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- ## ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

✓ زمان خیز t_r

❑ زمانی که در آن پاسخ از ۱۰٪ مقدار حالت ماندگار خود به ۹۰٪ آن می رسد

❑ تخمین t_r در سیستم مرتبه دوم فرومیرا:



تقریب مرتبه اول:
$$t_r = \frac{0.8+2.5\zeta}{\omega_n},$$

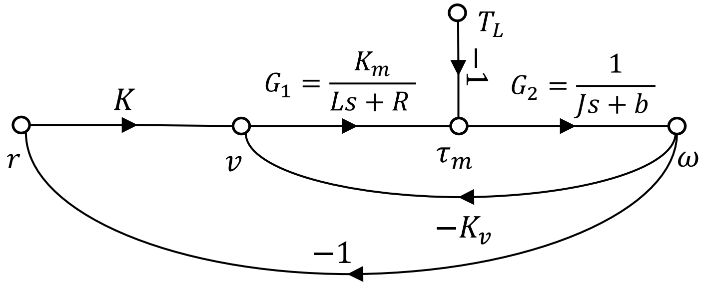
تقریب مرتبه دوم:
$$t_r = \frac{1-0.4167\zeta+2.917\zeta^2}{\omega_n},$$

برگرفته از کتاب Kuo

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا**

✓ مثال ۱: سیستم حلقه بسته با فیدبک بهره K را برای کنترل سرعت موتور DC مغناطیس دائم در نظر بگیرید.



❑ تابع تبدیل حلقه بسته سیستم:

$$L(s) = \frac{KK_m}{(Ls+R)(Js+b)+K_vK_m} \rightarrow \frac{\omega(s)}{r(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{A\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$$

که در آن $A\omega_n^2 = KK_m/LJ$ $\quad \omega_n^2 = \frac{1}{LJ}(Rb+K_vK_m+KK_m) = P_1+P_2K, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{J}+\frac{R}{L}, = P_3$

- همچنین مقادیر نوعی پارامترهای یک موتور DC را در نظر بگیرید:

$$L = 0.05\ H, \quad R = 1\ \Omega, \quad K_m = K_v = 0.05\ \frac{Nm}{A}, \quad J = 10^{-5}\ Kgm^2, \quad b = 10^{-2}$$

- در نتیجه $\zeta = \frac{P_3}{2\sqrt{P_1+P_2K}}$، $\omega_n = \sqrt{P_1+P_2K}$ که در آن $P_1 = 2.5\times 10^4,\ P_2 = 10^5,\ P_3 = 1020$

بدین ترتیب ω_n با مجذور K نسبت مستقیم و ζ با مجذور K نسبت وارون دارد.

- برای مقدار مطلوب ζ می توان بهره کنترلگر را از رابطه زیر به دست آورد: $K = ((P_3/2\zeta)^2 - P_1)/P_2$

برگرفته از کتاب کنترل مدرن

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

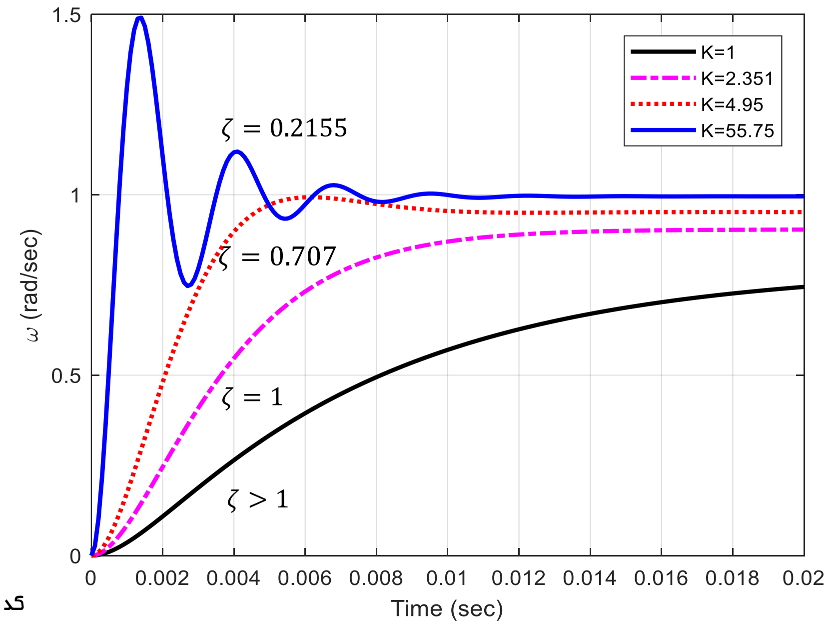
• ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا

حل کامپیوتری

✓ ادامه مثال ۱: بدین ترتیب تابع تبدیل حلقه بسته سیستم را با استفاده از کامپیوتر به دست می آوریم

```
%    DC motor parameters
L=0.05; R=1; Km=0.05; Kv=0.05; J=1e-5; b=1e-2;
P1=(R*b+Kv*Km)/(L*J); P2=Km/L/J; P3=b/J+R/L;
zeta_d=[1; 0.707; 0.2155];
K_d=((P3/2./zeta_d).^2-P1)/P2;
t=0:10^-4:0.02;
K=[1; K_d];  % System gains
 for i=1:4
    omega2=P1+P2*K(i);
    omega=sqrt(omega2)
    zeta=P3/(2*omega)
    num=K(i)*Km/(L*J);
    den=[1 2*zeta*omega omega2];
    sys=tf(num,den);
    x(:,i)=step(sys,t);
end
```

کد LCS2_Dcmotor_TR.m

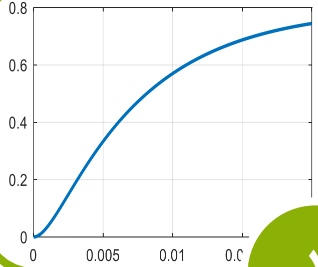


ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیارهای رفتار گذرا**

✓ ادامه مثال ۱: با طراحی مناسب بهره کنترل کننده K می توان رفتارهای مختلفی را در سیستم مشاهده کرد.

۱

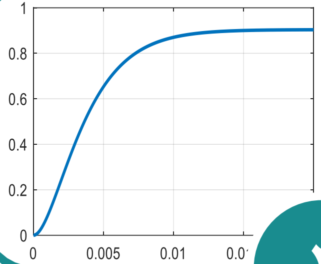


$K = 1 \,, \zeta > 1$

فرا میرایی

دو ریشه حقیقی متمایز خواهیم داشت. پاسخ غیر نوسانی ولی کند است.

۲

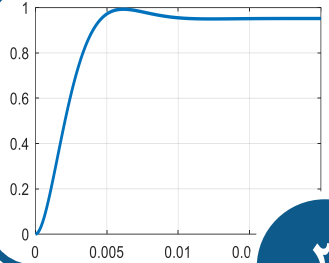


$K = 2.35, \zeta = 1$

میرایی مرزی

این پاسخ سریعترین حالت بدون نوسان را ایجاد می کند.

۳

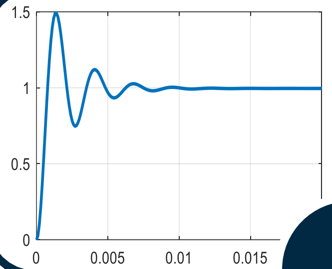


$K = 4.95, \zeta = 0.707$

فرو میرایی

این طراحی برای سیستم های کنترلی بسیار مناسب است. فراجهش حداقل و سرعت مناسب.

٤



$K = 55.7, \zeta = 0.2155$

$\boldsymbol{d = 1/4}$

این طراحی برای فرآیند های کند سرعت پاسخ را افزایش می دهد در حالی که نوسانات بیشتری داریم.

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **سیستم های مرتبه بالاتر از دو**

✓ سیستم های کنترل خطی معمولا دارای مرتبه بالاتر از دو بوده ولی چون عِلّی هستند، سره خواهند بود:

$$M(s)=\frac{c(s)}{r(s)}=\frac{K(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0},n\geq m$$

✓ که در حالت کلی سیستم می تواند شامل قطب های حقیقی و مختلط باشد:

$$M(s)=\frac{c(s)}{r(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_j)}$$

✓ با استفاده از روش دستی (یا دستور `residue` در Matlab) می توان آنها را به صورت کسرهای جزئی تفکیک نمود. خروجی سیستم به ازای ورودی پله واحد عبارت است از:

$$c(s)=\frac{A}{s}+\sum_{j=1}^{q}\frac{A_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{r}\frac{B_ks+C_k}{s^2+2\zeta_k\omega_ks+\omega_k^2},\qquad q+2r=n$$

برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- ## سیستم های مرتبه بالاتر از دو

✓ بدین ترتیب پاسخ زمانی سیستم از مجموع کسرهای جزئی آن تشکیل می شود

$$c(t) = A + \sum_{j=1}^{q} A_j e^{-p_i t} + \sum_{k=1}^{r} D_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k)\,, \qquad \text{for } t \geq 0$$

✓ اگر تمامی قطب ها در نیم صفحه باز سمت چپ OLHP قرار داشته باشند $\Re(p_i) < 0$ آنگاه پاسخ ها همگی میرا بوده و خروجی کراندار مانده و $c(\infty) = A$. چنین سیستمی پایدار نامیده می شود.

✓ با توجه به وجود ترم های نمایی در کلیه اجزای پاسخ، قطب هایی که از محور $j\omega$ فاصله داشته باشند سریعتر میرا می شوند.

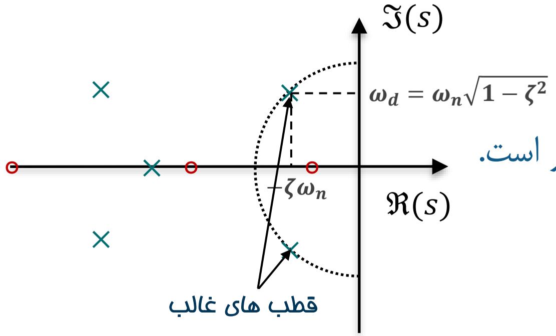
✓ صفرهای تابع تبدیل سیستم، در رفتار نمایی یا نوسانی سیستم تاثیر مستقیم ندارند،

ولی اندازه مانده ها A_j, D_j و به تبع آن دامنه و علامت ترم ها را تعیین می کنند.

✓ قطب های غالب، ترم هایی هستند که به محور $j\omega$ نزدیکتر بوده و اندازه مانده ها در آنها بزرگتر است.

✓ رفتار اصلی سیستم را قطب های غالب تعیین می کنند.

✓ از این رو است که تحلیل سیستم های مرتبه دوم حائز اهمیت است.

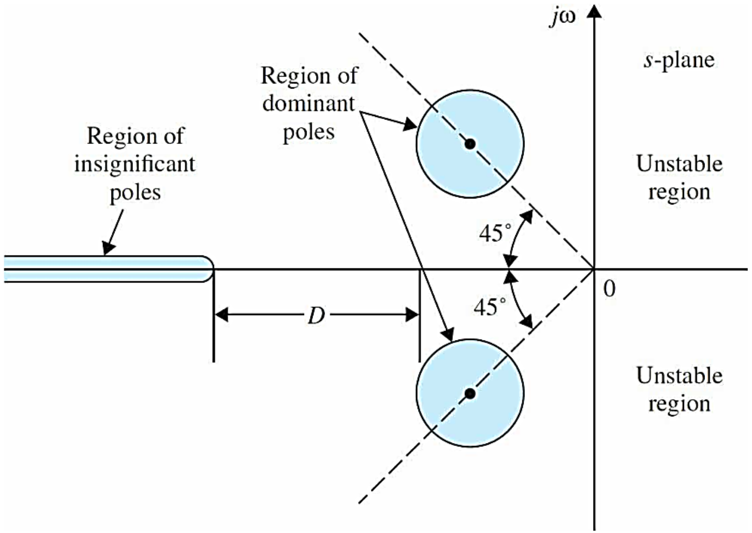


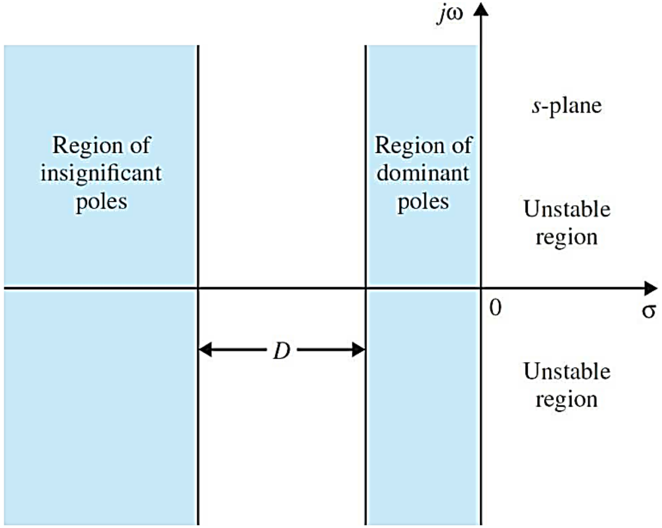
برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- ## سیستم های مرتبه بالاتر از دو

  ✓ قطب های غالب: اگر در سیستمی صفری در سمت راست محور $j\omega$ وجود نداشته باشد، آنگاه اگر یک قطب و یا یک زوج قطب در منطقه نشان داده شده در شکل در نزدیکی محور $j\omega$ قرار گیرند قطب غالب نامیده شده و رفتار سیستم را تعیین می کنند.





برگرفته از کتاب Kuo

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

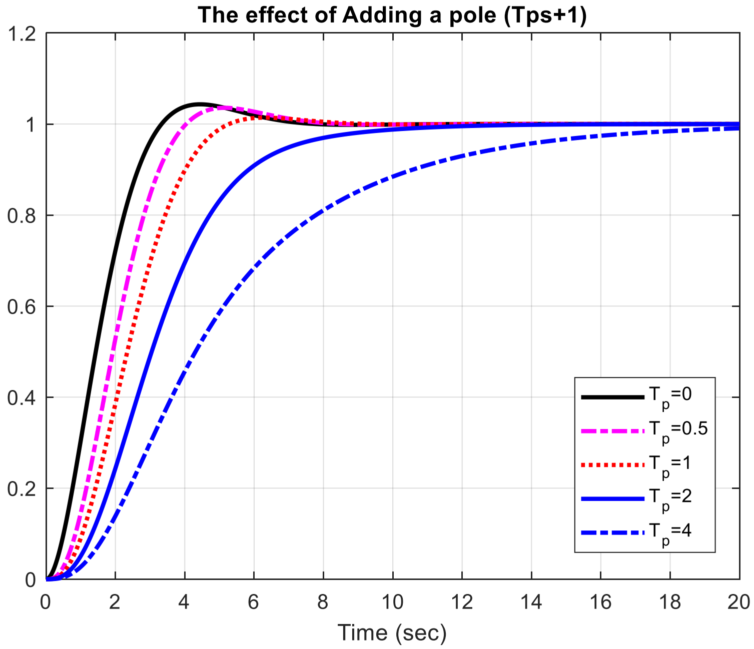
- ## سیستم های مرتبه بالاتر از دو

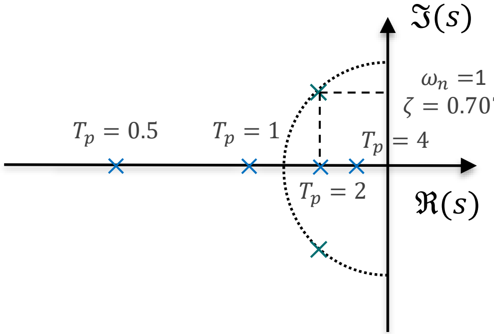
✓ اضافه کردن قطب حقیقی غالب به سیستم مرتبه دو

❑ یک قطب حقیقی نزدیک به محور $j\omega$ با ثابت زمانی T_p به سیستم مرتبه دو اضافه کنید:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + T_p s)}$$

❑ با بزرگ شدن T_p قطب حقیقی به محور $j\omega$ نزدیک تر شده و اثر آن افزایش می یابد.





حل کامپیوتری

برگرفته از کتاب Kuo

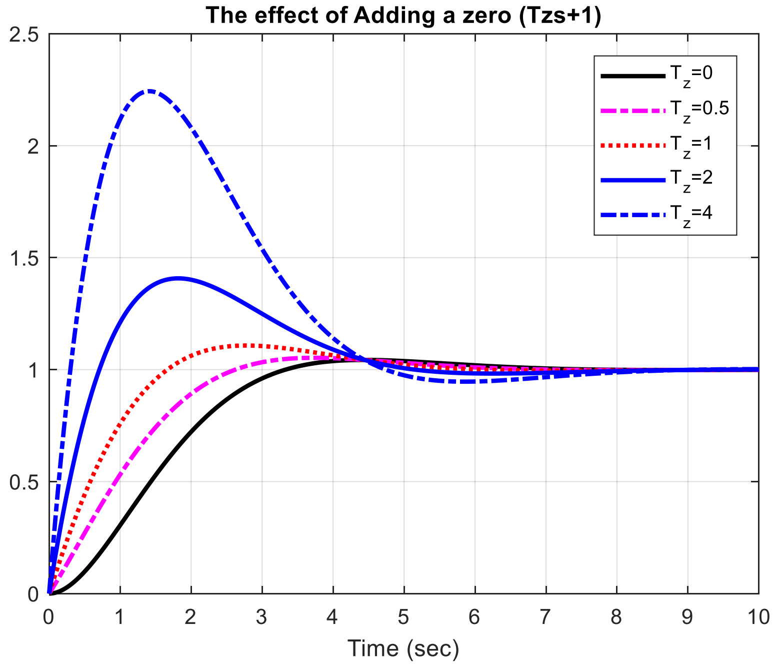
کد LCS2_pz_effect.m

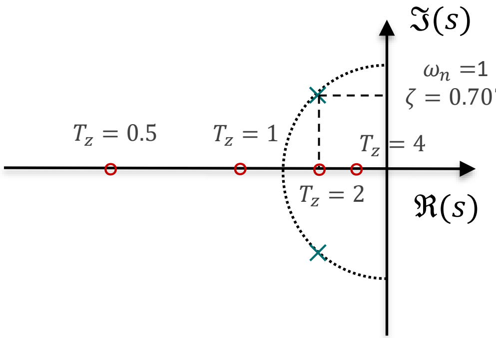
ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **سیستم های مرتبه بالاتر از دو**
  - ✓ اضافه کردن صفر حقیقی غالب به سیستم مرتبه دو
    - ❑ یک صفر حقیقی نزدیک به محور $j\omega$ با ثابت زمانی T_z به سیستم مرتبه دو اضافه کنید:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1+T_z s)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} = M_1(s) + T_z(sM_1(s))$$

    - ❑ تعبیر آن اضافه شدن مشتق پاسخ زمانی سیستم بدون صفر با ضریب T_z به آن است.
    - ❑ با بزرگ شدن T_z صفر حقیقی به محور $j\omega$ نزدیک تر شده و اثر آن افزایش شدید فراجهش سیستم است.





برگرفته از کتاب Kuo

کد LCS2_pz_effect.m

حل کامپیوتری

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

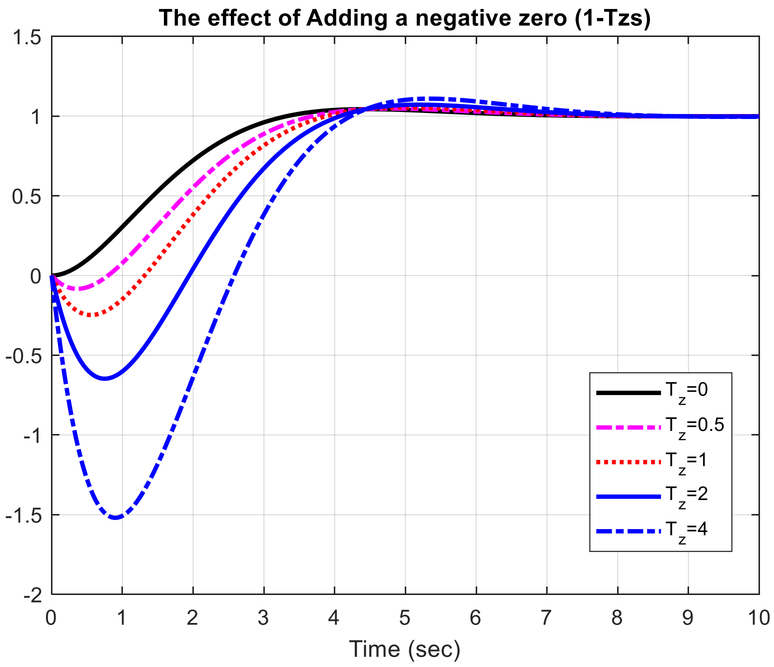
- **سیستم های مرتبه بالاتر از دو**

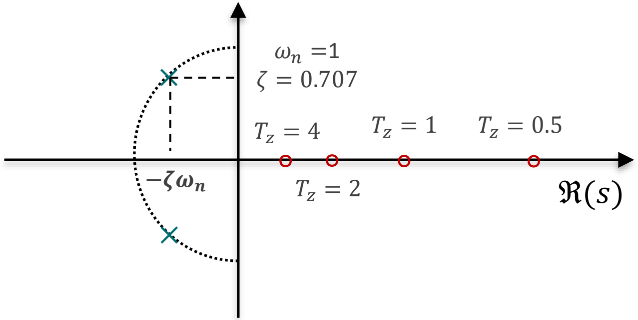
✓ اضافه کردن صفر حقیقی مثبت به سیستم مرتبه دو (سیستم غیر کمینه فاز)

❑ یک صفر حقیقی مثبت نزدیک به محور $j\omega$ با ثابت زمانی T_z به سیستم مرتبه دو اضافه کنید:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2(1 - T_z s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

❑ پاسخ سیستم دارای فروجهش می شود و با بزرگ شدن T_z صفر حقیقی به محور $j\omega$ نزدیک تر شده و اثر آن افزایش می یابد.





حل کامپیوتری

برگرفته از کتاب Kuo

کد LCS2_pz_effect.m

عناوین فصل

۱ رفتار زمانی سیستم های کنترل

پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

۲ ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجهش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

۳ ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

۴ تحلیل پایداری سیستم های کنترل

رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

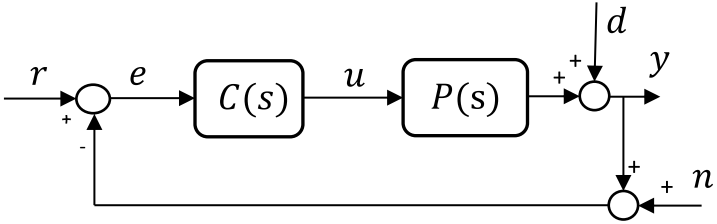
۵ معیار پایداری راث-هرویتز

شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم حلقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره حلقه در سیستم حلقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار**
  - ✓ سیستم حلقه بسته مقابل را در نظر بگیرید



- ❑ تعریف: تابع تبدیل بهره حلقه $L(s) = C(s)P(s)$
- ❑ تبدیل لاپلاس خروجی حلقه بسته سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$y = CP(r - n - y) + d$$

$$y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} r(s) + \frac{1}{1 + L(s)} d(s) - \frac{L(s)}{1 + L(s)} n(s),$$

- ❑ تابع تبدیل حلقه بسته خطای سیستم به سه ورودی آن عبارت است از:

$$e = r - y - n$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s) - \frac{1}{1 + L(s)} d(s) - \frac{1}{1 + L(s)} n(s),$$

- ❑ این همان اعجاز فیدبک است که رابطه ورودی های مختلف سیستم حلقه بسته به خطای ردیابی یکسان است:

$$\frac{1}{1 + L(s)}$$

برگرفته از کتاب Ogata

- **ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار**

✓ حال خطای ماندگار به ورودی مرجع پله واحد $r(s)=\frac{1}{s}$ را تحلیل کنید.

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} s\,e(s)=\lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s}$$

❑ در نتیجه نه تنها برای ورودی مرجع پله واحد که برای ورودی اغتشاش یا نویز پله واحد نیز خطای ماندگار عبارت است از:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}$$

✓ ثابت خطای موقعیت K_p را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K_p=\lim_{s\to 0} L(s)=L(0)$$

✓ در این صورت خطای ماندگار به ورودی پله واحد برابر است با:

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

برگرفته از کتاب Ogata

- **ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار**

✓ به همین ترتیب خطای ماندگار به ورودی مرجع شیب واحد $r(s) = \frac{1}{s^2}$ را تحلیل کنید.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\, e(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

❑ در نتیجه نه تنها برای ورودی مرجع شیب که برای ورودی اغتشاش یا نویز شیب واحد نیز خطای ماندگار عبارت است از:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sL(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sL(s)}$$

✓ ثابت خطای سرعت K_v را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s)$$

✓ در این صورت خطای ماندگار به ورودی شیب واحد برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

برگرفته از کتاب Ogata

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار**

✓ به طریق مشابه خطای ماندگار به ورودی مرجع سهمی واحد $r(s) = \frac{1}{s^3}$ را تحلیل کنید.

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\, e(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + L(s)} \cdot \frac{1}{s^3}$$

❑ در نتیجه نه تنها برای ورودی مرجع سهمی واحد که برای ورودی اغتشاش یا نویز سهمی واحد نیز خطای ماندگار عبارت است از:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$$

✓ ثابت خطای سرعت K_v را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 L(s)$$

✓ در این صورت خطای ماندگار به ورودی سهمی واحد برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

برگرفته از کتاب Ogata

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ تعریف تیپ سیستم

❑ سیستمی تیپ صفر نامیده می شود اگر ثابت موقعیت آن کراندار و ثابت سرعت آن صفر شود

- سیستمی که هیچ قطبی بر روی مبدا نداشته باشد:

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_{z_1}s+1)(T_{z_2}s+1)\cdots(T_{z_m}s+1)}{(T_{p_1}s+1)(T_{p_2}s+1)\cdots(T_{p_n}s+1)} = K$$

❑ سیستمی تیپ یک نامیده می شود اگر ثابت سرعت آن کراندار و ثابت شتاب آن صفر شود

- سیستمی که تنها یک قطب بر روی مبدا داشته باشد:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s \frac{K_v (T_{z_1}s+1)(T_{z_2}s+1)\cdots(T_{z_m}s+1)}{s(T_{p_1}s+1)(T_{p_2}s+1)\cdots(T_{p_n}s+1)} = K_v$$

❑ سیستمی تیپ دو نامیده می شود اگر ثابت شتاب آن کراندار و ثابت های مرتبه بالاتر صفر شود

- سیستمی که تنها دو قطب بر روی مبدا داشته باشد:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{K_a(T_{z_1}s+1)(T_{z_2}s+1)\cdots(T_{z_m}s+1)}{s^2(T_{p_1}s+1)(T_{p_2}s+1)\cdots(T_{p_n}s+1)} = K_a$$

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

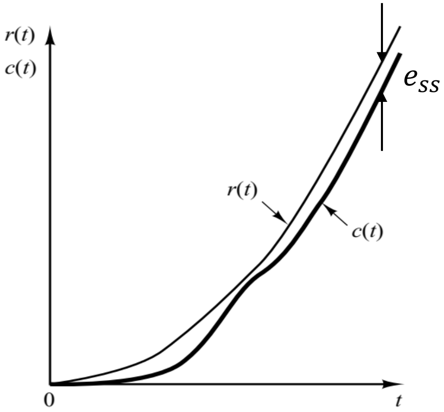
✓ خطای ماندگار سیستم حلقه بسته به ورودی های مختلف بر حسب تیپ سیستم

نوع سیستم	خطای ماندگار به ورودی پله واحد	خطای ماندگار به ورودی شیب واحد	خطای ماندگار به ورودی سهمی واحد
تیپ صفر	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
تیپ یک	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
تیپ دو	0	0	$\frac{1}{K_a}$

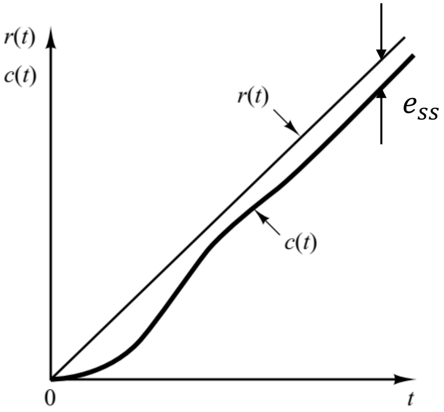
✓ اگر بخواهید خطای ماندگار به ورودی پله حتما صفر باشد لازم است حداقل یک انتگرال گیر در بهره حلقه $L(s)$ وجود داشته باشد

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

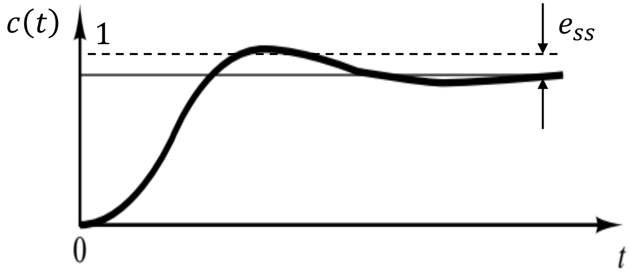
✓ پاسخ سیستم های تیپ صفر، یک و دو به ورودی های پله، شیب و سهمی واحد



پاسخ ورودی سهمی واحد
به سیستم تیپ دو



پاسخ ورودی شیب واحد
به سیستم تیپ یک



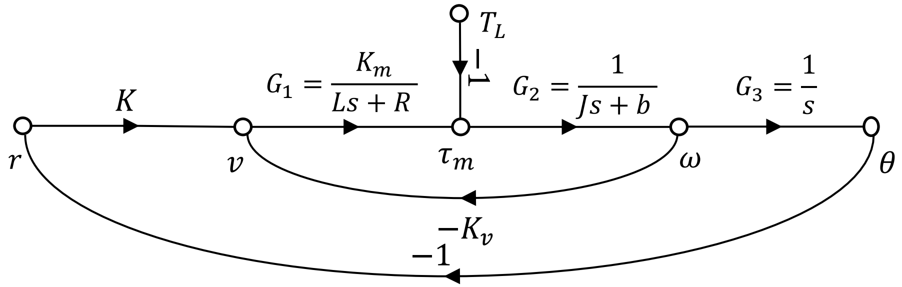
پاسخ ورودی پله واحد
به سیستم تیپ صفر

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

- **ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار**

✓ مثال ۲: کنترل موقعیت موتور DC

را با کنترلگر بهره K در نظر بگیرید:



حل دستی

❑ تابع تبدیل حلقه باز سرعت موتور در فصل قبل به دست آمده است

بهره حلقه به ازای ورودی مرجع r عبارت است از

$$L(s) = K\frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{KK_m}{s((Ls+R)(Js+b)+K_vK_m)},$$

❑ با ساده سازی، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم به ورودی های مرجع r و اغتشاش T_L عبارت است از:

$$M_1(s) = \frac{\theta(s)}{r(s)} = \frac{K_m}{s(Ls+R)(Js+b)+K_vK_ms+KK_m}, \quad M_2(s) = \frac{\theta(s)}{T_L(s)} = \frac{-(Ls+R)}{s(Ls+R)(Js+b)+K_vK_ms+KK_m}$$

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

حل دستی

✓ ادامه مثال ۲: ثابت موقعیت، سرعت و شتاب سیستم را نسبت به ورودی مرجع به دست می آوریم:

$$K_p = \lim_{s\to 0} L(s) = L(0) = \infty,\quad K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \frac{KK_m}{Rb+K_vK_m},\quad K_a = \lim_{s\to 0} s^2L(s) = 0$$

❑ در نتیجه خطای ماندگار به ورودی مرجع پله واحد برابر صفر است $e_{ss} = 0$

❑ خطای ماندگار به ورودی مرجع شیب واحد برابر است با: $e_{ss} = \frac{Rb+K_vK_m}{KK_m} = \frac{1}{4K}$

❑ و خطای ماندگار به ورودی مرجع سهمی واحد بی نهایت است $e_{ss} = \infty$

✓ حال موقعیت ماندگار موتور به ورودی اغتشاش پله واحد $T_L = 1/s$ را بررسی می کنیم.

$$\theta_{ss} = \lim_{s\to 0} sM_2(s)\cdot\frac{1}{s} = M_2(0) = \frac{-R}{KK_m} = \frac{-20}{K}$$

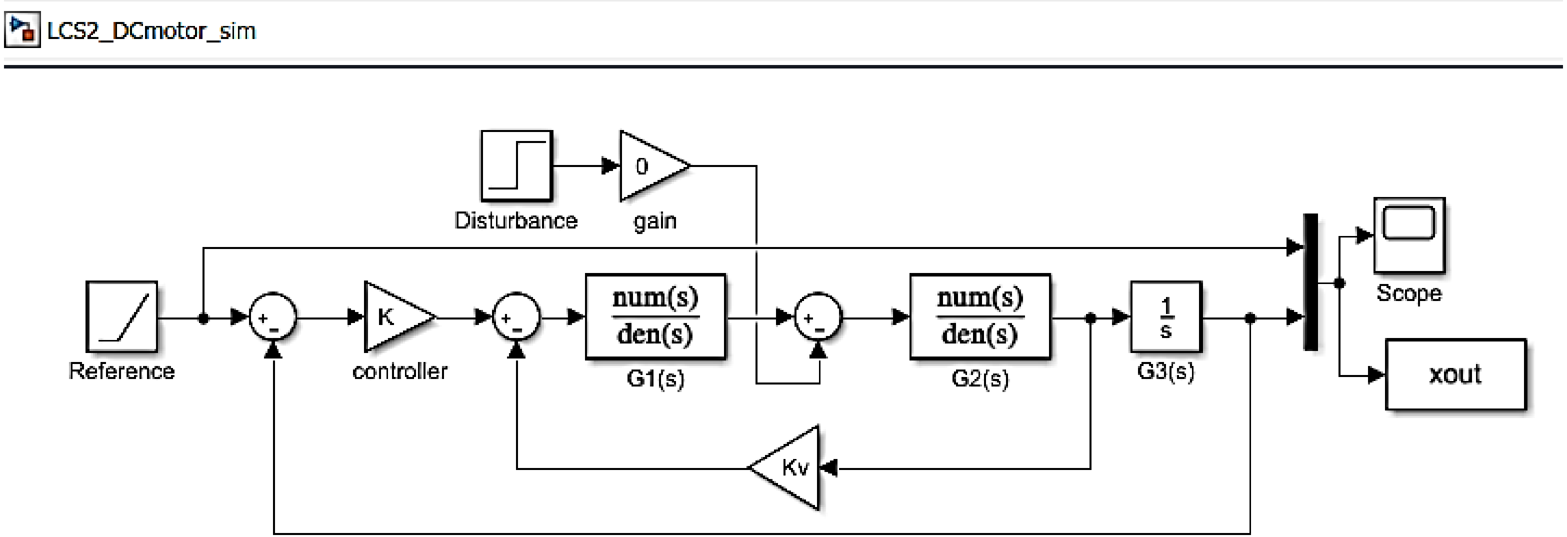
❑ علیرغم اینکه سیستم تیپ یک است، برای ورودی اغتشاشی که میرا نشود، خطای ماندگار در موقعیت خروجی ایجاد می شود.

❑ برای رفع این مشکل از کنترلگر PI دارای انتگرال گیر استفاده کنید: $K \to K + \frac{K_i}{s} \;\Rightarrow \theta_{ss} = 0$

حل کامپیوتری

- **ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار**

✓ ادامه مثال ۲: مدل سیستم را در Simulink ایجاد کنید:



• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

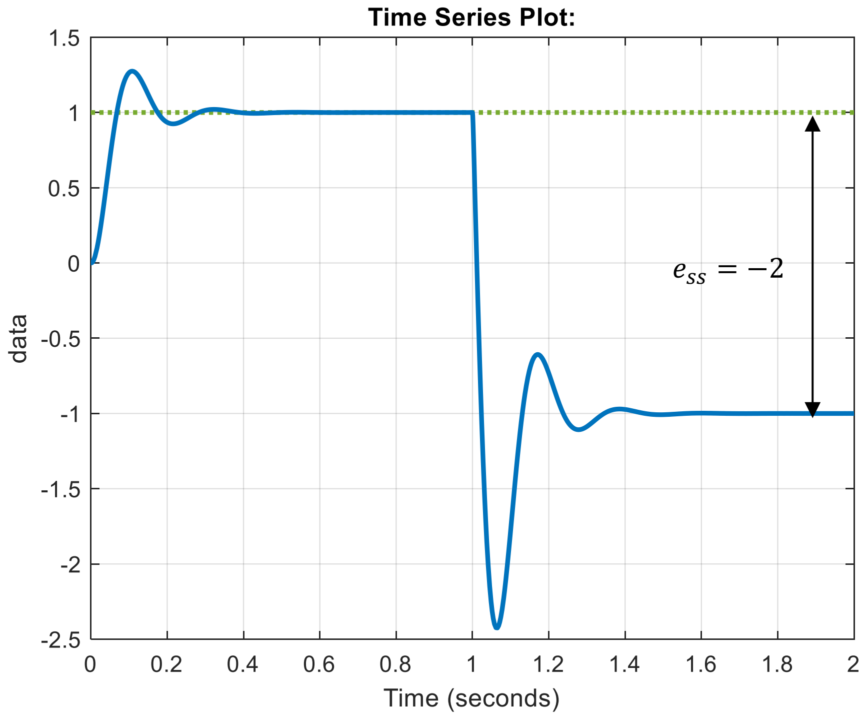
✓ ادامه مثال ۲:

❑ به ازای پارامتر های سیستم و $K = 10$، پاسخ سیستم به ورودی پله واحد، با اعمال اغتشاش پله واحد در زمان یک ثانیه را شبیه سازی کنید.

❑ خطای ماندگار به ورودی پله برابر صفر است

❑ خطای ماندگار به ورودی اغتشاش پله واحد برابر ۲− است.

$$\theta_{ss} = \frac{-20}{K} = -2$$



حل کامپیوتری

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

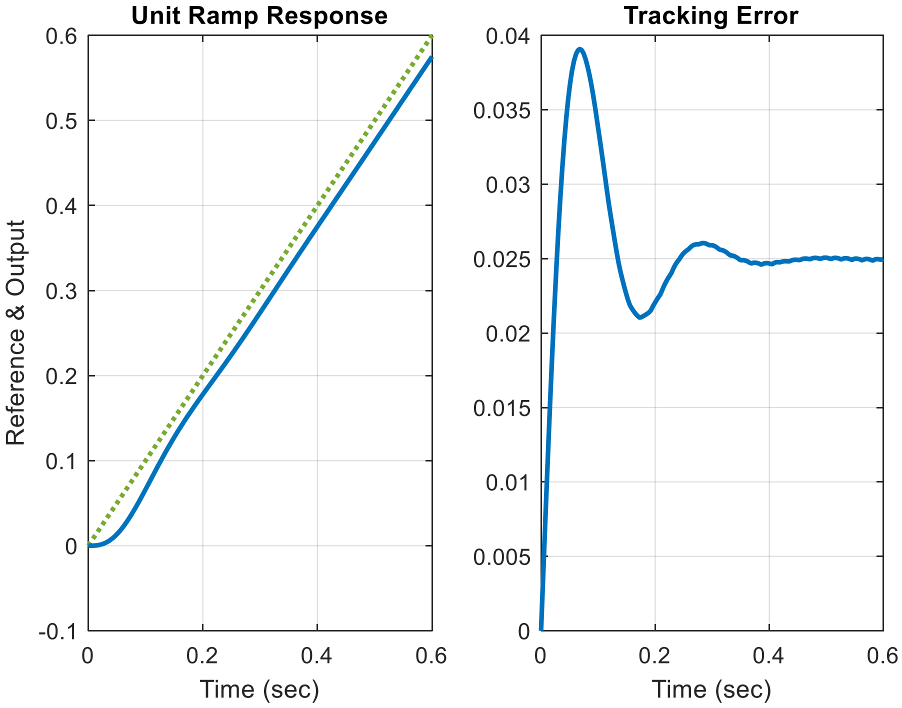
• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ ادامه مثال ۲:

❑ به ازای پارامتر های سیستم و $K = 10$، پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد، بدون حضور اغتشاش را شبیه سازی کنید.

❑ خطای ماندگار به ورودی شیب واحد برابر 0.025 است

$$e_{ss} = \frac{1}{4K} = 0.025$$



حل کامپیوتری

ویژگی های رفتار دینامیکی سیستم های کنترل

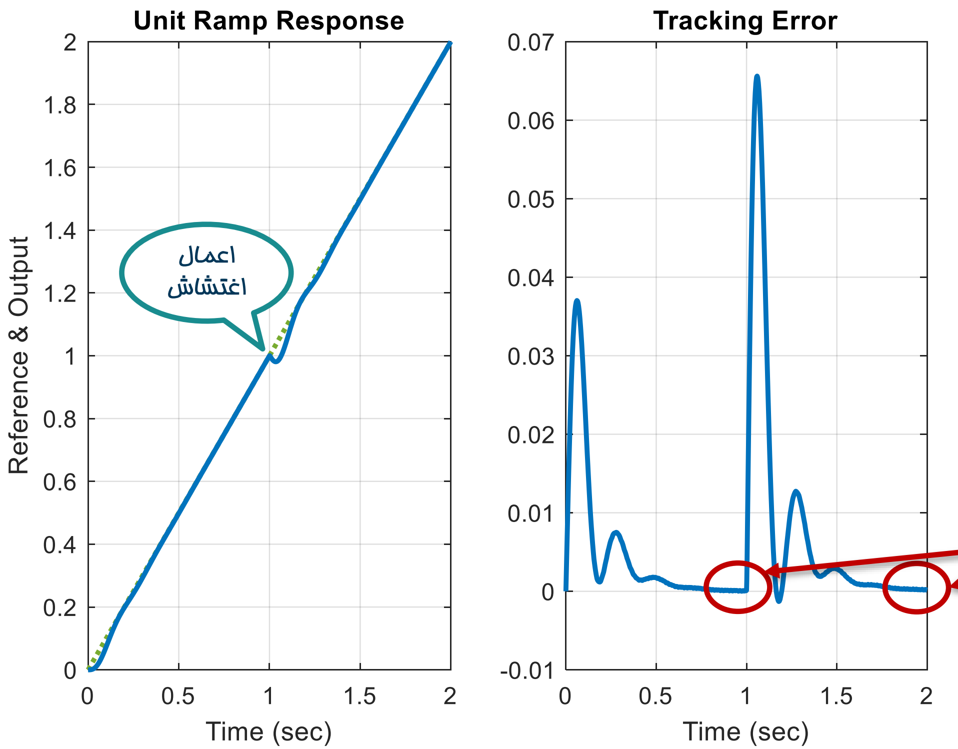
• ویژگی ها و معیار های حالت ماندگار

✓ ادامه مثال ۲:

❑ به منظور حذف اغتشاش از کنترلگر PI استفاده کنید، که در آن و $K(s) = 10(1 + 5/s)$، پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد، با حضور اغتشاش را شبیه سازی کنید.

❑ خطای ماندگار به ورودی شیب واحد و اغتشاش پله در زمان یک ثانیه هر دو صفر می شود.

❑ چگونگی طراحی بهره کنترلگر در فصول دیگر بیان می شود



حل کامپیوتری

عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجهش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پله، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم حلقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره حلقه در سیستم حلقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- **رفتار ناپایدار در سیستمهای کنترل خطی**
  - ✓ حالت کلی تابع تبدیل یک سیستم کنترل خطی:

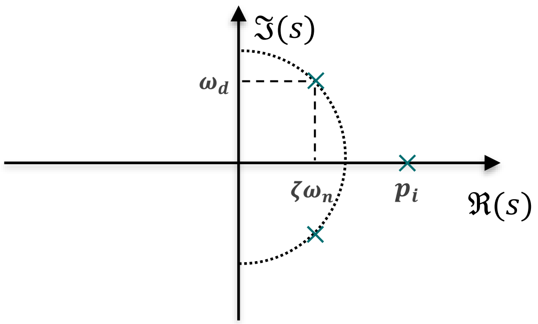
$$M(s)=\frac{c(s)}{r(s)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

❑ و پاسخ آن به ورودی پله واحد:

$$c(t)=A+\sum_{j=1}^{q}A_j e^{-p_i t}+\sum_{k=1}^{r}D_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\cos(\omega_k t+\phi_k)\,,\qquad \text{for } t\geq 0$$

❑ اگر قطب های سیستم همگی در نیم صفحه سمت چپ LHP نباشند

بخش نمایی مرتبط با آن قطب ها نسبت به زمان واگرا خواهد شد.

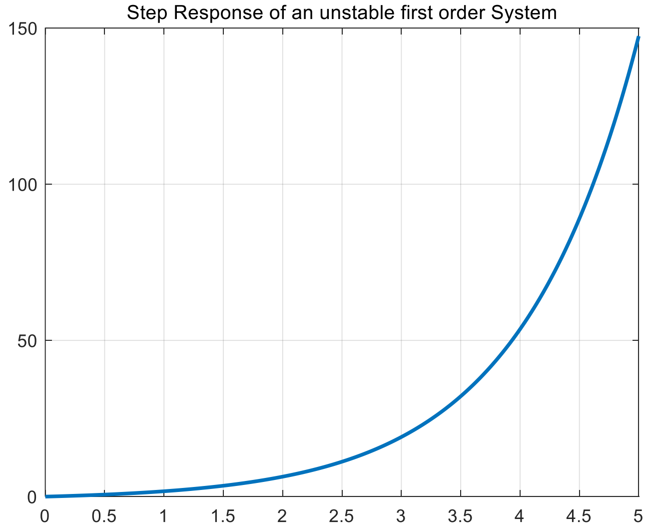


❑ اگر پاسخ یک سیستم به ورودی کراندار، واگرا شود، آن سیستم ناپایدار نامیده می شود.

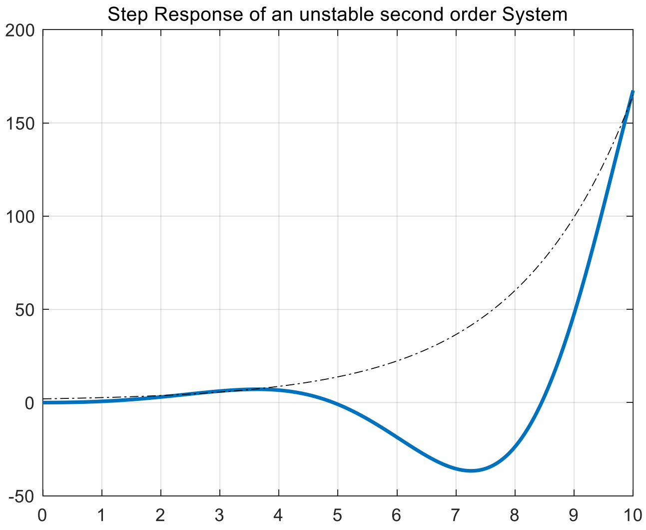
تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- رفتار ناپایدار در سیستم های کنترل خطی

پاسخ واگرا شونده یک سیستم مرتبه اول



پاسخ واگرا شونده یک سیستم مرتبه دوم

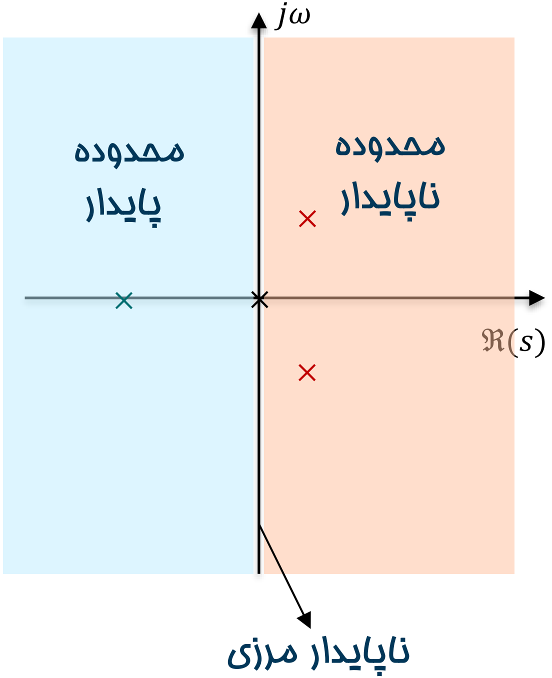


- ## تعریف و شرایط پایداری در سیستم های کنترل خطی

✓ پایداری : سیستمی پایدار BIBO است اگر به ازای ورودی کراندار BI پاسخ خروجی سیستم کراندار BO باقی بماند.

❑ در سیستم های کنترل خطی، پایداری BIBO در حالتی که همه قطب های سیستم در نیم صفحه باز سمت چپ OLHP قرار گیرند محقق می شود. در این حالت:

$$\lim_{t\to\infty} y_{tr}(t) = 0$$



❑ اگر یک یا چند قطب بر روی محور $j\omega$ قرار گیرند، سیستم ناپایدار مرزی است. در این حالت سیستم یا دارای نوسانات دائمی است و یا پاسخ گذرای آن به مقدار کراندار ثابت میل می کند.

❑ اگر یک یا چند قطب سیستم در نیم صفحه باز سمت راست ORHP قرار گیرند، یا یک جفت قطب تکراری بر روی محور $j\omega$ داشته باشیم، سیستم ناپایدار است. در این حالت سیستم یا دارای نوسانات واگرا شونده است و یا پاسخ گذرای آن واگرا می شود.

- **تعریف و شرایط پایداری در سیستم های کنترل خطی**

مثال ۱: شرایط و وضعیت پایداری سیستم های زیر را بررسی کنید.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته	شرایط و وضعیت پایداری سیستم
$M(s)=\dfrac{20(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$	سیستم پایدار BIBO یا پایدار مجانبی است چون همه قطب های سیستم در نیم صفحه باز سمت چپ OLHP قرار دارند.
$M(s)=\dfrac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+4s+1)}$	سیستم ناپایدار است چون یک قطب حقیقی مثبت در $s=1$ دارد
$M(s)=\dfrac{20(s-1)}{(s+1)(s^2+4)}$	سیستم ناپایدار مرزی است چرا که یک زوج قطب مزدوج موهومی در $s=\pm j2$ دارد.
$M(s)=\dfrac{20(s-1)}{(s+1)(s^2+4)^2}$	سیستم ناپایدار است چون یک زوج قطب تکراری موهومی در $s=\pm j2$ دارد.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- ## روش های تعیین شرایط پایداری در سیستم های کنترل خطی

✓ روش های عددی برای سیستم های با پارامترهای معین:

❑ تعیین ریشه های معادله مشخصه با استفاده از دستور `roots(den)` یا `pole(sys)` در نرم افزار Matlab

❑ رسم محل قطب ها و صفر های سیستم با دستور `pzplot(sys)`

✓ روش های تحلیلی برای سیستم های با پارامترهای نامعین:

❑ معیار پایداری راث–هرویتز:

- تعیین تعداد قطب های ناپایدار یا ناپایدار مرزی سیستم حلقه بسته بدون حل عددی معادله مشخصه (در ادامه)

❑ رسم مکان هندسی ریشه ها:

- تعیین هندسی محل قطب های سیستم حلقه بسته با کنترلگر بهره ثابت به ازای $-\infty < K < \infty$ با استفاده از محل قطب ها و صفر های سیستم حلقه باز (فصل سوم)

❑ معیار پایداری نایکویست:

- تعیین تعداد قطب های ناپایدار سیستم حلقه بسته با رسم پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز (فصل چهارم)

عناوین فصل

رفتار زمانی سیستم های کنترل

۱ پاسخ زمانی سیستم، ورودی های متداول، رفتار سیستم مرتبه اول و دوم، بررسی کمی حالت های فرامیرا، میرایی مرزی، فرو میرا و نوسانات دائمی در سیستم های مرتبه دو.

ویژگی های حالت گذرای رفتار زمانی

۲ معرفی معیار های رفتار گذرا، بیشینه فراجهش، نسبت استهلاک، زمان نشست، زمان تاخیر، زمان خیز، رفتار گذرای موتور DC به ازای بهره کنترلگر متفاوت، سیستم های مرتبه بالاتر

ویژگی های رفتار ماندگار سیستم های کنترل

۳ خطای ماندگار در حوزه لاپلاس، ثابت خطای موقعیت، سرعت و شتاب، خطای ماندگار به ورودی پیه، شیب یا سهمی، تعریف تیپ سیستم، شبیه سازی و تحلیل خطای ماندگار موتور DC به ورودی مرجع و اغتشاش

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

۴ رفتار ناپایدار، تعریف و شرایط پایداری، روش های تحلیل پایداری، معرفی مکان هندسی ریشه ها و معیار نایکویست.

معیار پایداری راث-هرویتز

۵ شرط لازم پایداری، جدول راث و شرایط کافی، حالت های ویژه، تحلیل پایداری سیستم های مختلف با پارامترهای معین، تعمیم محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر

در این فصل با روش های تحلیل پاسخ زمانی سیستم های کنترل آشنا می شویم. ابتدا ورودی های متداول و رفتار عمومی سیستم های مرتبه اول و دوم را بررسی خواهیم کرد، سپس معیارهای تعیین شرایط گذرا را معرفی نموده و بر اساس آن رفتار سیستم های مرتبه دوم و مراتب بالاتر را بررسی می کنیم. در ادامه، رفتار ماندگار سیستم را در حوزه لاپلاس بررسی نموده، و میزان خطای ماندگار سیستم حلقه بسته بر اساس تیپ سیستم و بهره حلقه در سیستم حلقه باز را تعیین می کنیم. در پایان با تعریف پایداری و معرفی روشهای تحلیل پایداری، شرایط لازم و کافی پایداری بر اساس معیار پایداری راث-هرویتز به صورت مبسوط بیان خواهد شد.

- معیار پایداری راث-هرویتز (Routh-Hurwitz)

✓ در این روش محل قرار گیری قطب های سیستم در یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی تعیین می شود.

✓ فرض کنید معادله مشخصه سیستم حلقه بسته با چند جمله ای زیر داده شده باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$.

$$\Delta(s) = F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

✓ شرط لازم (و نه کافی) برای اینکه همه ریشه های این چند جمله متعلق به OLHP باشند:

❑ تمامی ضرایب چند جمله ای هم علامت باشند.

❑ هیچ یک از ضرایب چند جمله ای صفر نباشد.

- این شرایط را به راحتی می توانید قبل از تعیین شرایط کافی بررسی کنید.
- این شرایط از جبر چند جمله ای ها به دست آمده است که در آن

$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\Sigma$ همه قطب ها, $\frac{a_{n-2}}{a_n} = +\Sigma$ حاصل ضرب دو به دوی قطب ها, ..., $\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \Sigma$ حاصل ضرب همه قطب ها.

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- **معیار پایداری راث-هرویتز**

✓ شرایط کافی: تشکیل جدول راث: مطابق جدول زیر برای حالت $n = 6$ برای سیستم جدول راث را تشکیل دهید.

$$\Delta(s) = F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$A = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & a_3 \\ a_6 & a_4 \end{vmatrix}}{a_5}$	$B = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & a_1 \\ a_6 & a_2 \end{vmatrix}}{a_5}$	$a_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & 0 \\ a_6 & a_0 \end{vmatrix}}{a_5}$	0
s^3	$C = \dfrac{\begin{vmatrix} A & B \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix}}{A}$	$D = \dfrac{\begin{vmatrix} A & a_0 \\ a_5 & a_1 \end{vmatrix}}{A}$	0	0
s^2	$E = \dfrac{\begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}}{C}$	a_0	0	0
s^1	$F = \dfrac{\begin{vmatrix} E & a_0 \\ C & D \end{vmatrix}}{E}$	0	0	0
s^0	a_0	0	0	0

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ معیار پایداری: ستون اول جدول راث را در نظر بگیرید

- ❑ اگر علامت همگی عناصر ستون اول یکسان باشند، آنگاه کلیه قطب های سیستم پایدارند.
- ❑ به تعداد تغییر علامت عناصر ستون اول جدول راث، قطب های ناپایدار خواهیم داشت.

✓ مثال ۱: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = (s-2)(s+1)(s-3)$$
$$= s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$$

- ❑ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید
- ❑ دو تغییر علامت داریم، پس دو قطب ناپایدار.

$F(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$		
s^3	1	1
s^2	-4	6
s^1	$\dfrac{\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 2.5$	0
s^0	6	0

برگرفته از کتاب Kuo

• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ مثال ۲: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

❑ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

❑ دو تغییر علامت داریم، پس دو قطب ناپایدار.

$\Delta(s) = F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$			
s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = -7$	10	0
s^1	$\dfrac{\begin{vmatrix} -7 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{-7} = 6.43$	0	0
s^0	10	0	0

برگرفته از کتاب Kuo

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- ## معیار پایداری راث-هرویتز

✓ جدول راث: حالت های ویژه

❑ اگر یکی از عناصر ستون اول جدول راث صفر شود، ادامه محاسبات موجب اختلال می شود.

❑ دو حالت در این مورد وجود دارد

- حالت اول: تنها عنصر اول صفر شده و سایر عناصر سطر مربوطه غیر صفر باشد
- حالت دوم: همه عناصر یک سطر صفر شوند

❑ در حالت اول

- عنصر صفر را با $\epsilon > 0$ جایگزین نموده و سپس $\epsilon \to 0$ میل می دهیم.

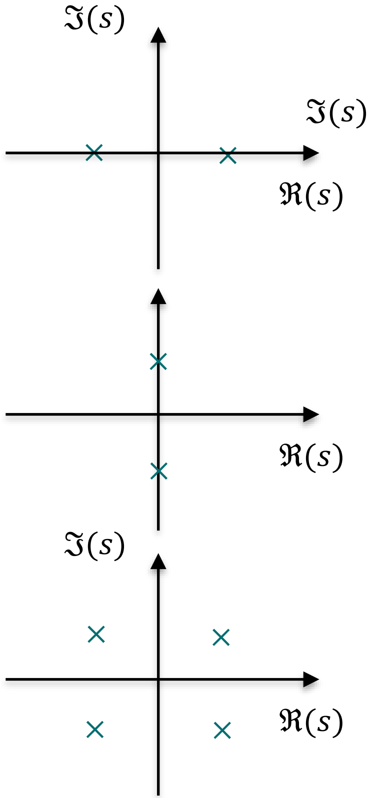
✓ مثال ۳: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

❑ دو تغییر علامت داریم، پس دو قطب ناپایدار.

$F(s) = s^3 + 0s^2 - 3s + 2 = 0$		
s^3	1	-3
s^2	$0 \to \epsilon$	2
s^1	$\lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{-3\epsilon - 2}{\epsilon} = -\infty$	0
s^0	2	0

برگرفته از کتاب Kuo



• معیار پایداری راث-هرویتز

✓ جدول راث: حالت های ویژه

- ❑ حالت دوم: همه عناصر یک سطر صفر شوند. در این حالت
  - یا دو قطب حقیقی مختلط متقارن نسبت به مبدا خواهیم داشت
  - یا دو قطب مزدوج موهومی بر روی محور $j\omega$ خواهیم داشت.
  - یا چهار قطب مزدوج مختلط متقارن نسبت به مبدا خواهیم داشت.
- ❑ در همه حالت ها یک معادله کمکی با استفاده از سطر بالایی می سازیم.
- ❑ سپس از این معادله کمکی مشتق گرفته و جایگزین عناصر صفر می کنیم.
- ❑ با حل معادله کمکی می توان کلیه قطب های مرتبط را تعیین نمود.

- **معیار پایداری راث-هرویتز**
  - ✓ جدول راث: حالت های ویژه
  - ✓ مثال ۴: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = (s-1)^2(s+2)(s+1)$$
$$= s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

❑ جدول راث را تا سطر s^1 تشکیل می دهیم. عناصر این سطر همگی صفر می شود!

❑ معادله کمکی را با استفاده از سطر s^2 تشکیل می دهیم.

قطب های سیستم اند $A(s) = -2s^2 + 2 = 0 \ \rightarrow s = \pm 1$

❑ سطر جایگزین: $\dfrac{dA(s)}{ds} = -4s + 0$

❑ ستون اول دو تغییر علامت دارد، پس دو قطب ناپایدار داریم.

$\Delta(s) = F(s) = s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$

s^4	1	-3	2
s^3	1	-1	0
s^2	$\dfrac{-3+1}{1} = -2$	2	0
s^1	$\dfrac{2-2}{-2} = 0$	0	0

$\Delta(s) = F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$

s^4	1	-3	2
s^3	1	-1	0
s^2	-2	2	0
s^1	-4	0	0
s^0	2	0	0

برگرفته از کتاب Kuo

معیار پایداری راث-هرویتز

✓ مثال ۵: معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$F(s) = (s \pm 2)^2 (s \pm j)(s^2 + s + 1)$$
$$= s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

❑ جدول راث را تا سطر s^3 تشکیل می دهیم.

عناصر این سطر همگی صفر می شود!

❑ معادله کمکی را با استفاده از سطر s^4 تشکیل می دهیم.

قطب های سیستم $A(s) = s^4 - 3s^2 - 4 = (s^2 - 4)(s^2 + 1) = 0$

❑ سطر جایگزین: $\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 - 6s$

❑ ستون اول یک تغییر علامت دارد، پس یک قطب ناپایدار داریم.

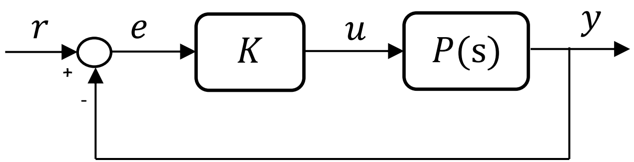
❑ با استفاده از حل معادله کمکی: دو قطب نیز بر روی محور $j\omega$ داریم

$F(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$

s^6	1	-2	-7	-4
s^5	1	-3	-4	0
s^4	$\frac{-2+3}{1} = 1$	$\frac{-7+4}{1} = -3$	-4	0
s^3	$0 \rightarrow 4$	$0 \rightarrow -6$	0	0
s^2	$\frac{-12+6}{4} = -1.5$	-4	0	0
s^1	$\frac{9+16}{-1.5} = -16.6$	0	0	0
s^0	-4	0	0	0

برگرفته از کتاب Kuo

- معیار پایداری راث-هرویتز
  - ✓ تعیین محدوده پایداری به ازای بهره کنترلگر K
    - ❑ اگر معادله مشخصه سیستم دارای ضرایب معین باشد می توان از روش های عددی استفاده نمود
  - ✓ سیستم حلقه بسته با بهره کنترلگر نامشخص K را در نظر بگیرید



  - ✓ مثال ۶: موتور DC مثال قبل را در این حالت در نظر بگیرید:

$$L(s) = KP(s) = \frac{KK_m}{s((Ls+R)(Js+b)+K_vK_m)}$$

- ❑ به ازای پارامترهای موتور

$$L(s) = \frac{10^5 K}{s^3 + 1020s^2 + 1.25\times 10^5 s}$$

- ❑ بدین ترتیب معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با

$$\Delta(s) = F(s) = s^3 + 1020s^2 + 1.25\times 10^5 s + 10^5 K$$

برگرفته از کتاب Kuo

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- **معیار پایداری راث-هرویتز**

✓ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

❑ برای اینکه سیستم پایدار باشد بایستی علامت همگی عناصر ستون اول یکسان باشد:

$$\begin{cases} 1275 - K > 0 \\ 10^5 K > 0 \end{cases} \rightarrow \; 0 < K < 1275$$

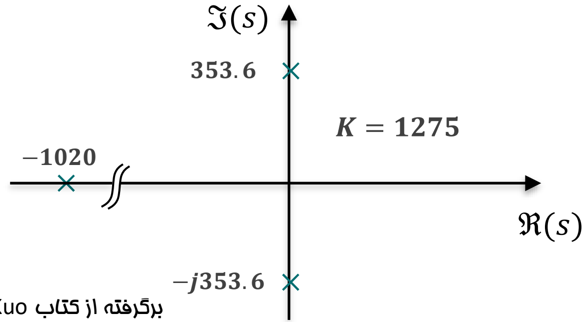
❑ حالت مرزی را در نظر بگیرید: $K = 1275$

❑ در این حالت سطر سوم همگی صفر خواهد شد و معادله کمکی برابر است با $A(s) = 1020(s^2 + 1.25 \times 10^5) = 0$

در این حالت دو قطب موهومی و نوسانات دائمی با فرکانس زیر خواهیم داشت $s = \pm j353.6$ قطب دیگر سیستم حلقه بسته در فاصله ای دور از مبدا و در $s = -1020$ قرار دارد

$$F(s) = s^3 + 1020s^2 + 1.25 \times 10^5 s + 10^5 K$$

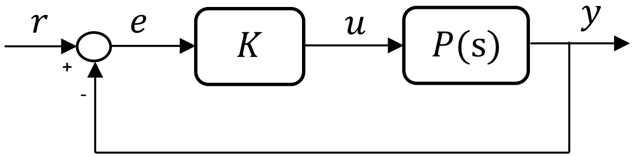
s^3	1	1.25×10^5
s^2	1020	$10^5 K$
s^1	$\dfrac{1.275 \times 10^8 - 10^5 K}{1020} = \dfrac{1275 - K}{1020}$	0
s^0	$10^5 K$	0



برگرفته از کتاب Kuo

- **معیار پایداری راث-هرویتز**

✓ مثال ۷: سیستم حلقه بسته با سیستم زیر را در نظر بگیرید



$$L(s) = KP(s) = \frac{K\,s(3s+1)}{s^3+2s+4}$$

❑ بدین ترتیب معادله مشخصه سیستم برابر است با

$$\Delta(s) = F(s) = s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4$$

✓ جدول راث را تشکیل دهید و ستون اول آنرا بررسی کنید

$$F(s) = s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4$$

s^3	1	$K+2$
s^2	$3K$	4
s^1	$\frac{3K(K+2)-4}{3K}$	0
s^0	4	0

برگرفته از کتاب Kuo

❑ برای اینکه سیستم پایدار باشد بایستی علامت همگی عناصر ستون اول یکسان باشد:

$$3K > 0 \rightarrow K > 0 \quad \text{AND}$$

$$3K^2 + 6K - 4 = 3(K+2.528)(K-0.528) > 0$$

$$\rightarrow K < -2.528 \quad \text{OR} \quad K > 0.528$$

❑ در نتیجه سیستم حلقه بسته به ازای $K > 0.528$ پایدار است

برگرفته از پیوند

Edward John Routh

(20 January 1831 – 7 June 1907)

was an English mathematician, noted as the outstanding coach of students preparing for the Mathematical Tripos examination of the University of Cambridge in its heyday in the middle of the nineteenth century. He also did much to systematise the mathematical theory of mechanics and created several ideas critical to the development of modern control systems theory.

In addition to his intensive work in teaching and writing, which had a persistent effect on the presentation of mathematical physics, he also contributed original research such as the Routh–Hurwitz theorem.

Central tenets of modern control systems theory relied upon the Routh stability criterion (though nowadays due to modern computers it is not as important), an application of Sturm's theorem to evaluate Cauchy indices through the use of the Euclidean algorithm.

برگرفته از پیوند

Adolf Hurwitz

(26 March 1859 – 18 November 1919)

was a German mathematician who worked on algebra, analysis, geometry and number theory. He was one of the early students of the Riemann surface theory, and used it to prove many of the foundational results on algebraic curves; for instance Hurwitz's automorphisms theorem. This work anticipates a number of later theories, such as the general theory of algebraic correspondences, Hecke operators, and Lefschetz fixed-point theorem. He also had deep interests in number theory. He studied the maximal order theory (as it now would be) for the quaternions, defining the Hurwitz quaternions that are now named for him. In the field of control systems and dynamical systems theory he derived the Routh–Hurwitz stability criterion for determining whether a linear system is stable in 1895, independently of Edward John Routh who had derived it earlier by a different method.

ADVANCED ROBOTICS & AUTOMATED SYSTEMS

بیوگرافی دکتر حمید رضا تقی راد

حمید رضا تقی راد مدرک کارشناسی خود را در مهندسی مکانیک از دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۶۸ و کارشناسی ارشد خود را در مهندسی مکانیک (مکاترونیک) در سال ۱۳۷۲ و دکترای خود را در مهندسی برق- کنترل و رباتیک در سال ۱۳۷۶ از دانشگاه مک گیل کانادا دریافت کرده است. او در حال حاضر معاون بین الملل دانشگاه، استاد تمام و مدیر گروه رباتیک ارس در دپارتمان کنترل و سیستم، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. ایشان دارای عضویت ارشد انجمن IEEE، عضو هیات تحریریه ژورنال بین المللی رباتیک: تئوری و کاربرد و ژورنال بین المللی سیستم های پیشرفته رباتیک می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی کاربرد کنترل مقاوم و غیر خطی بر روی سیستم های رباتیک بوده و زمینه های مختلف رباتیک شامل ربات های موازی و کابلی، ربات های خودران، ربات ها جراحی و سامانه های هپتیک آموزش جراحی چشم در حیطه تخصص ایشان قرار دارد. تالیفات ایشان شامل پنج کتاب و بیش از ۲۵۰ مقاله در کنفرانس ها و ژورنال های معتبر بین المللی است.

حمید رضا تقی راد
استاد

سیستم های کنترل خطی

برای مطالعه بیشتر و مشاهده فیلم های ضبط شده کلاس مجازی
به این سایت مراجعه نمایید

متشکرم