MECCANICA RAZIONALE — TEORIA

CAP. 1

Def: Un PRODOTTO VETTORIALE su $\mathbb{V}^3$ è un'appl. bilin. antisimm. $\times : \mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ t.c. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

ii) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$

Oss: $\forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3 \quad \vec{u} \times \vec{u} = 0$

Prop: Su $(\mathbb{V}^3, \cdot)$ possiamo definire solo due prodotti vett. $\times_1$ e $\times_2$ t.c. scelta $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

$$\hat{e}_1 \times_1 \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \qquad \hat{e}_2 \times_1 \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \qquad \hat{e}_3 \times_1 \hat{e}_1 = \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 \times_2 \hat{e}_2 = -\hat{e}_3 \qquad \hat{e}_2 \times_2 \hat{e}_3 = -\hat{e}_1 \qquad // \qquad -\hat{e}_2$$

Dim:

Lemma: Le rel. $\hat{e}_{i\%3} \times \hat{e}_{i+1\%3} = \pm \hat{e}_{i+2\%3}$ def. solo due appl. bilin. e antisimm.

Dim: Mostriamo che $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \hat{e}_i \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \hat{e}_i$$

$$\vec{u} \times_1 \vec{v} = \left(\sum_i u_i \hat{e}_i\right) \times \left(\sum_j v_j \hat{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} u_i v_j \, \hat{e}_i \times_1 \hat{e}_j =$$

$$= \sum_{i,j}^{3} (u_i v_j - u_j v_i) \, \hat{e}_i \times \hat{e}_j$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \hat{e}_3 + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \hat{e}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \hat{e}_2$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}^2$$

Inoltre $|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 = (u_1^2 + u_2^2 \cdot u_3^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$

$= \sum_{i,j} u_i^2 v_j^2$

Infine calcoliamo $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i v_i\right)^2$$

$$= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$

$\vec{u},\vec{v}$ orto. norm.

$$= u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 +$$

$$+ 2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_2v_2u_3v_3$$

e poiché un termine

$$\begin{vmatrix} u_i & v_j \\ u_j & v_j \end{vmatrix}^2 = (u_iv_j - u_jv_i)^2 =$$

$$= u_i^2v_j^2 + u_j^2v_i^2 - 2u_iv_ju_jv_i$$

Dunque

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2$$

e

$$|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 =$$

$$= \left[\sum_{i,j} u_i^2v_j^2\right] - \left[\sum_i u_i^2v_i^2 - 2\sum_{\{i,j\}\subseteq\{1,2,3\}} u_iv_iu_jv_j\right]$$

$$\Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2 - |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2$$

Per concludere consideriamo $\times : (\mathbb{V}^3)^2 \to \mathbb{V}^3$ bilin. e antisimm. allora $\forall u,v \in \mathbb{V}^3$ si ha

$$\vec{u}\times\vec{v} \in \vec{v}^{\perp}$$

poiché $\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{v}\times\vec{v}\cdot\vec{u}$ ma $\vec{v}\times\vec{v} = 0$

$$\vec{v}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{v} \iff$$

$$2\vec{v}\times\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$$

Ora data $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ base orto.norm. segue

$|\hat{e}_1\times\hat{e}_2| = 1$ e $\hat{e}_1\times\hat{e}_2 \in \hat{e}_1^{\perp}, \hat{e}_2^{\perp}$

$$\Rightarrow \hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_1^{\perp}\cap\hat{e}_2^{\perp} = \mathrm{span}(\hat{e}_3)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \pm\hat{e}_3 \qquad (+),(-)$$

A questo punto se vale $\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_3$ seguono

$\hat{e}_2\times\hat{e}_3 = \hat{e}_1$ da ii) poiché

$$\hat{e}_2\times\hat{e}_3\cdot\hat{e}_1 = \hat{e}_3\times\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2 = \hat{e}_1\times\hat{e}_2\cdot\hat{e}_3$$

$= \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1$

Esercizio: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\underline{\vec{u} \cdot \vec{w}})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u}$$

$$((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{w} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) =$$

$$= (\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})) \cdot \vec{w}$$

$$\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \hat{e}_i =$$

$$= (\vec{u} \times \vec{v}) \times \hat{e}_i \cdot \vec{v} =$$

$$= ((\vec{v} \times \hat{e}_i) \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} =$$

$$= (\hat{e}_i \times \vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} =$$

$$=$$

$$[\dots]$$

DESCRIZIONE DEL MOTO

Dato $t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3$ con $t \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e Σ rif.

$$\vec{x}_P := P - O = \sum x_i \hat{e}_i$$

$$\vec{v}_P := \frac{d}{dt}(P-O)\Big|_\Sigma := \sum \dot{x}_i \hat{e}_i$$

$$\vec{a}_P := \frac{d^2}{dt^2}(P-O)\Big|_\Sigma := \sum \ddot{x}_i \hat{e}_i$$

EQUAZIONI DEL MOTO

Dato un sist. di N pt. e $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ e punti P_i con forza in P_i data da

$$\vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) :$$

$$: \mathbb{V}^{3N} \times \mathbb{V}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}^3$$

In coord. avremo in Σ

$$F_i|_\Sigma : \mathbb{R}^{6N+1} \to \mathbb{R}$$

Equazioni di Newton:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i(\underline{\vec{x}}, \underline{\vec{v}}, t)$$

o anche in coord. in Σ

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(x, \dot{x}, t)$$

o anche come sist. al I-ord.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ m \dot{v}_i = F(x_i, \dot{x}_i, t) \end{cases}$$

RIF. INERZIALI

Sia $\mathcal{G}$ l'insieme di trasf. affini di sp.-tempo di Galileo. Sia $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ lo sp.-tempo di Galileo, fissato Σ possiamo identificarlo con $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e $\mathcal{G} \circlearrowleft \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$O(3) := \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid AA^T = A^T A = I \}$$

$$SO(3) := \{ A \in O(3) \mid \det A = +1 \}$$

Prop: Gli elementi di $SO(3)$ sono mat. di rotazione attorno ad un'asse per l'origine

Dim: $R \in SO(3)$

·) R ha autoval. 1:

$$x \in \mathbb{R}^3 \quad Rx \cdot Rx = x^T R^T R x = x \cdot R^T R x$$

$$= R^T R x \cdot x = x \cdot x$$

$\Rightarrow R$ isometria.

Dunque λ autoval. di $R \Rightarrow |\lambda| = 1$

Vediamo che $\lambda = 1$ è autoval.

$$\det(R - I) = \det(R^T) \cdot \det(R - I)$$

$$= \det(R^T R - R^T)$$

$$= \det(I - R^T)$$

$$= \det(I - R)$$

ma $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) \Rightarrow \det(-A) = -\det(A)$

$\Rightarrow \det(R - I) = -\det(R - I) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(R - I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ autoval.

·) Abbiamo 3 casi ($|\lambda_i| = 1$ e $\lambda_2 \lambda_3 = 1$)

i) $\lambda_2, \lambda_3 = 1$

ii) $\lambda_2, \lambda_3 = -1$

iii) $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Nel primo caso $R = I$, se non lo fosse avremmo che l'autosp. per 1 V_1 ha dim 1 poiché se fosse 2 avremmo $\{x_1, x_2\}$ base orto norm. di V_1 che possiamo completare a $\{x_1, x_2, x_3\}$ base ortonorm. di $\mathbb{R}^3$ ma allora R sarebbe diag. $R = I$

Vediamo R_{ij}:

per $i = 1,2,3$, $j = 1,2$:

$R_{ij} = x_i \cdot R x_j = x_i \cdot x_j$
$= \delta_{ij}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vediamo

$x_j \cdot R x_3 = R^T x_j \cdot x_3 =$
$= x_j \cdot x_3 = 0$

$R x_j = x_j = I x_j = R R^T x_j$

$\Rightarrow x_j = R^T x_j$

Nel secondo caso V_{-1} ha dim. 2 e V_1 ha dim. 1. Dunque R in questa base è

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

che è la rot. di 180° attorno a $\hat{e}_1$.

Nel terzo caso gli autoval. λ_2, λ_3 sono

$$\lambda_2 = \mu + i\nu \quad e \quad \lambda_3 = \mu - i\nu$$

complessi coniug. con autovett.

$$x_2 = a + ib \quad e \quad x_3 = a - ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}^3$ ort. a x_1.

$$\lambda_2 x_2 \cdot x_1 = R x_2 \cdot R x_1 = R^T R\, x_2 \cdot x_1 = x_2 \cdot x_1$$

da cui

$$(\mu + i\nu) \cdot (a + ib) \cdot x_1 = (a + ib) \cdot x_1$$

$$(\mu + i\nu)(a x_1 + i b x_1) = a x_1 + i b x_1$$

$$\mu a x_1 - \nu b x_1 + i \nu a x_1 + i \mu b x_1 =$$

$$= (\mu(a\cdot x_1) - \lambda(b\cdot x_1)) + i(\lambda(a\cdot x_1) + \mu(b\cdot x_1))$$

$$= a x_1 + i(b x_1)$$

da cui

$$\begin{cases} \mu(a\cdot x_1) - \lambda(b\cdot x_1) = a x_1 \\ \lambda(a\cdot x_1) - \mu(b\cdot x_1) = b x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mu-1)(a\cdot x_1) - \lambda(b\cdot x_1) = 0 \\ \lambda(a\cdot x_1) - (\mu-1)\cdot(b\cdot x_1) = 0 \end{cases}$$

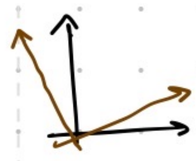
che ha sol. se e solo se $\begin{vmatrix} \mu-1 & -\lambda \\ \lambda & -(\mu-1) \end{vmatrix} \neq 0$

$$\iff (\mu-1)^2 + \lambda^2 \neq 0$$

$$\iff (\mu-1)^2 + \lambda^2 > 0$$

poiché $\lambda \neq 0$. Nella base $\{x_1, b, a\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



con $\cos\theta = \mu$, $\sin\theta = \lambda$.

Def: Ricordiamo che $\mathcal{G}$ è l'insieme di trasf. di $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ che conservano gli interv. tra due eventi, l'orient. e le dist. tra eventi simultanei, siano $(x_1,t_1), (x_2,t_2)$ e $(x_i', t_i') := g((x_i, t_i))$ $i=1,2$

- $|t_1 - t_2| = |t_1' - t_2'|$ — preserva le dist. temp.
- $t_2 > t_1 \Rightarrow t_2' > t_1'$ — la loro orientazione
- $t_1 = t_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = |x_1' - x_2'|$. — e le dist tra ev. simult.

Prop: Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ si scrive come prodotto di trasf. del tipo seguente:

i) $g_1(x,t) = (x + tu, t)$ MOTO UNIF. CON VEL. u.

ii) $g_2(x,t) = (x+y, t+s)$ TRASL. DELL'ORIG.

iii) $g_3(x,t) = (Gx, t)$ ISOM. SPAZIALE

con $x, y, u \in \mathbb{R}^3$, $t, s \in \mathbb{R}$, $G \in O(3)$.

Dim: g_1, g_2, g_3 sono in $\mathcal{G}$.

Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ con

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} + b$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \vec{u} \\ \vec{w}^T & a \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} \vec{y} \\ s \end{bmatrix}$$

$$G \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \vec{u}, \vec{w}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \qquad a, s \in \mathbb{R}$$

l'immagine di Φ sarà

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} G\vec{x} + t\vec{u} + \vec{y} \\ \vec{w}^T \cdot \vec{x} + at + s \end{bmatrix}$$

imponiamo che sia in $\mathcal{G}$ ovvero che (x_1, t_1) e (x_2, t_2) siano t.c.

$$|w^T(x_1 - x_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

$\Rightarrow w = 0$, $|a| = 1$. Invece la dist. di eventi simult. ci dice che $|G(x_1 - x_2)| = |x_1 - x_2|$

$\Rightarrow |Gx| = |x| \iff x^T G^T G x = x^T x \iff$ — Questa vale per $x \cdot \square x$, vogliamo generalizzarla a $x \cdot \square y$.

$\iff x \cdot G^T G x = x \cdot x$. Posta $S = G^T G$ simm.

$x \cdot Sy = \frac{1}{2}\left((x+y) \cdot S(x+y) - x \cdot Sx - y \cdot Sy\right) =$ — Usiamo l'id. del parallelogramma.

$$= \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right) = x \cdot y$$

da cui $I = S = G^T G \Rightarrow G \in O(3)$.

$\square$

Per preservare anche l'orient. dl spazio ci restringiamo a $G \in SO(3)$.

<u>Def</u>: Un rif. si dice INERZIALE se per ogni sist. di rif. di pt. mat. isolato le eq. di Newton scritte in questo rif. sono inv. risp. a trasf. di $\mathcal{G}$.

Forma delle forze

Se $x(t)$ è sol. dl eq. di Newton allora

i) $x(t)$ sol. di $m_i \ddot{x}_i = F(x, \dot{x}, t)$ allora — Indipendenza da t

anche $x(t+s)$ lo è, ovvero

$$m_i \ddot{x}_i(t+s) = F(x(t+s), \dot{x}(t+s), t)$$

cioè F non dipende da t.

$$F = F_i(x, \dot{x})$$

ii) Inv. per trasl. unif. di $\mathbb{E}^3$: — dip. solo da Δx e Δv

$x(t)$ sol. $\Rightarrow x(t) + t\tilde{u} + \tilde{y}$ con $\tilde{u} = (u, \overset{N}{\ldots}, u)$
$\tilde{y} = (y, \underset{N}{\ldots}, y)$

Sia $\tau \in \mathbb{R}$ un tempo arbitrario, appl.

una trasf. g_2 con $y = -x_1(\tau)$, $s = 0$. cioè

$g_2 x_i(t) = x_i(t) - x_1(t)$. Ed applicandola

a $m_i \ddot{x}_i = F$ otteniamo

$$m_i \ddot{x}_i(\tau) = F(0, x_2(\tau) - x_1(\tau), \ldots, 0, \dot{x}_1(\tau), \ldots, t)$$

Applichiamo ora $g_1(x, t) = (x + tu, t)$ con

$u = -\dot{x}_1(\tau) \Rightarrow g_1 x_i(t) = x_i(t) - t\dot{x}_1(\tau)$

la deriv. II rimane inv. mentre

$$\frac{d}{dt}(g_1 x_i(t)) = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_1(\tau)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(g_1 x_i(t)) = \ddot{x}_i(t)$$

$$F_i(x, \dot{x}) = F_i(0, x_2(\tau) - t\dot{x}_1(\tau), \ldots, 0, \dot{x}_2(\tau) - \dot{x}_1(\tau), \ldots, t)$$

$$(x_i - \tau x_1 - (x_1 - \tau x_1))(\tau) =$$
$$= (x_i - x_1)(\tau)$$

da cui

$$F_i(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) = F(0, x_2(\tau) - x_1(\tau),$$

$$\ldots$$
$$x_n(\tau) - x_1(\tau),$$
$$0,\ \dot{x}_2(\tau) - \dot{x}_1(\tau),$$
$$\ldots$$
$$\dot{x}_n(\tau) - \dot{x}_1(\tau),$$
$$\tau)$$

iii) Inv. per $G \in SO(3)$ ci dà — $F, G \in SO(3)$ comm.

$$F_i(G(x_j - x_i), G(v_j - v_i)) =$$
$$= G\, F_i(x_j - x_i, v_j - v_i)$$

SISTEMI MECCANICI

Def: Un sistema mecc. classico è un insieme di N punti P_i, $i = 1, \ldots, N$ con masse m_i su cui agiscono forze $\vec{F}_i$ in Σ e il moto rispetta le eq. di Newton.

2. DINAMICA DI UN PUNTO MAT. LIBERO

QUANTITÀ DINAMICHE PER UN PT. MAT.

Consideriamo un pt. mat. P, m sul ql agisce $\vec{F}$ nel sist. di rif. $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ con $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ risp. a Σ. e x, v, a i vett. in coord. risp. a Σ.

- QUANTITÀ DI MOTO: $\vec{p} := m\vec{v}$
- MOMENTO ANGOLARE RISP. AD UN POLO $Q \in \mathbb{E}^3$: $\vec{M}_Q := (P - Q) \times m\vec{v}$.
- ENERGIA CINETICA: $T := \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$
- MOMENTO DELLA FORZA RISP. AD UN POLO: $\vec{N}_Q := (P - Q) \times \vec{F}$.
- POTENZA: $\Pi := \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v$

Def: Se $F = F(x)$ ammette $U(x)$ t.c. $F(x) = \nabla U(x)$ allora F si dice CONSERVATIVA e $V := -U$ si dice potenziale e $F = -\nabla V$.

•) ENERGIA TOTALE : $E = T + V$.

EQUAZIONI DI BILANCIO

Sia P, m punto mat. su cui agisce F.

Prop: $x(t)$ sol. di eq. di Newton con $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ allora vale

$$\dot{p} = F$$

e $\forall Q \in \mathbb{E}^3$ polo

$$\dot{M}_Q = N_Q - m v_Q \times v$$

con v_Q vel. del polo Q.

Dim:

$$p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{x}$$

$$M_Q = (x - x_Q) \times m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \dot{M}_Q = (\dot{x} - \dot{x}_Q) \times m\dot{x} + (x - x_Q) \times m\ddot{x}$$

$$= \cancel{\dot{x} \times m\dot{x}} - \dot{x}_Q \times m\dot{x} + (x - x_Q) \times m\ddot{x}$$

$$= -\dot{x}_Q \times m\dot{x} + N_Q$$

Prop (th. energia cinetica): Sia $x(t)$ una sol. di eq. di Newton t.c. $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ allora

$$\dot{T} = \Pi$$

Dim:

$$\dot{T} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right) = m\dot{x} \cdot \ddot{x} = \dot{x} \cdot F = \Pi$$

Def: $I(x, t)$ si dice INTEGRALE PRIMO per $\dot{x} = f(x, t)$ se $I(x, t)$ è cost. lungo una sol. $x(t)$ ovvero

$$\frac{d}{dt} I(x(t), t) = 0$$

da cui fissato t_0:

$$I(x(t), t) = I(x(t_0), t_0)$$

Prop: Valgono le seguenti:

i) Se F lungo $e \in \mathbb{R}^3$ è cost. allora $p \cdot e$ è un INT. PRIMO.

ii) Se N_Q per F è cost. lungo $e \in \mathbb{R}^3$ allora $M_Q \cdot e$ è un INT. PRIMO.

$\left(Q \text{ polo fisso} \Rightarrow v_Q = 0 \right)$

Dim:

$$\frac{d}{dt}(p \cdot e) = m\ddot{x} \cdot e = F \cdot e = \text{cost.}$$

$$\frac{d}{dt}(M_Q \cdot e) = \frac{d}{dt}\left(\left((x - x_Q) \times m\ddot{x}\right) \cdot e\right) =$$

$$= \dot{M}_Q \cdot e + \cancel{M_Q \cdot \dot{e}}$$

$$= -m\cancel{\dot{x}_Q} \times \dot{x} \cdot e + (x - x_Q) \times F \cdot e =$$

$$= N_Q \cdot e = \text{cost.}$$

Prop (Conservazione di energia): Se $F = F(x)$ è conservativo con pot. $V(x) \Rightarrow E = T + V$ è un int. primo.

Dim:

$$\dot{T} = \Pi = F \cdot \dot{x} = -\nabla V \cdot \dot{x} = -\dot{V}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

PROBLEMI INTEGRABILI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : U \to \mathbb{R}^n$ campo vett. C^1 su $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Per il th. di Cauchy-Lip. localmente esiste sempre una sol. unica.

Vogliamo studiare quando esiste una sol. $x(t)$ che si possa scrivere in forma implicita

a meno di inv. e quadrature. In questo caso il pb. si dice integrabile secondo Liouville.

EQ. DIFF. A VAR. SEP.

Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Posso risolvere il pb come segue:

$$\Rightarrow t = \int_0^t \frac{\dot{x}(t')}{f(x(t'))} dt' = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(x')} dx'$$

MOTI UNIDIMENSIONALI

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$y(t) := x(T-t)$

$\dot{y}(t) = -\dot{x}(T-t)$

$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(T-t)$

con $F: (\mathbb{R})^3 \to \mathbb{R}$, allora qst si dice moto unidimensionale. In questo caso se F è puramente pos $\Rightarrow$ è conservativa e possiamo def. $V(x)$ con $-V'(x) = F(x)$ e

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -V'(x) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \qquad (*)$$

$m\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$

$m\ddot{y}(t) = -V'(y(t))$

$m\ddot{x}(T-t) = -V'(x(T-t))$

"$m\ddot{x} = -V'(x)$"

<u>Oss</u>: Le sol. di $(*)$ sono inv. per trasl. e rifl. temporali.

<u>Prop</u>: $(*)$ è int. secondo Liouville.

<u>Dim</u>:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

è un int. primo di $(*)$, da cui

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + V(x(t)) = E_0 \qquad (E_0)$$

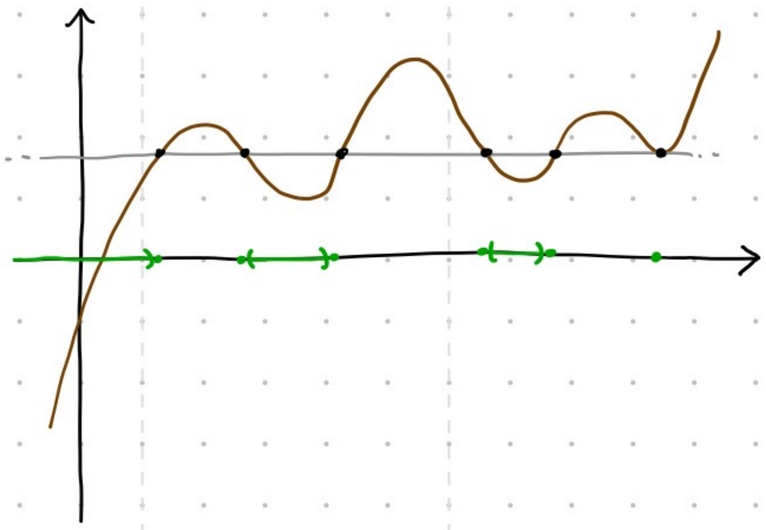
notiamo che se $x(t)$ è una sol. allora

$$E_0 - V(x(t)) \geq 0$$

I valori x tc.

•) $E_0 - V(x) = 0$, $V'(x) \neq 0$ sono detti pt. di inversione

•) $E_0 - V(x) = 0$, $V'(x) = 0$ sono detti pt. di equilibrio

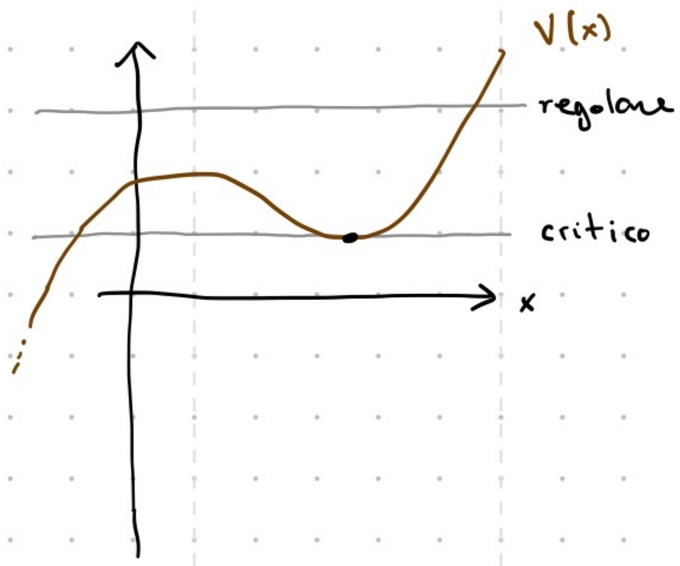


Se esiste un # finito di pt. di inv. allora possiamo trovare un # finito di interv. (anche illimitati) in cui si può svolgere il moto.

Da (E_0) possiamo ricavare

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x(t)) = E_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E_0 - V(x(t)))}{m}}$$



Diciamo che E_0 è critico se in

$$\{(x,v) \mid E(x,v) = E_0\}$$

c'è un pt. critico $(x_c, 0)$ tc. $V'(x_c) = 0$.

Altrimenti E_0 è detto regolare.

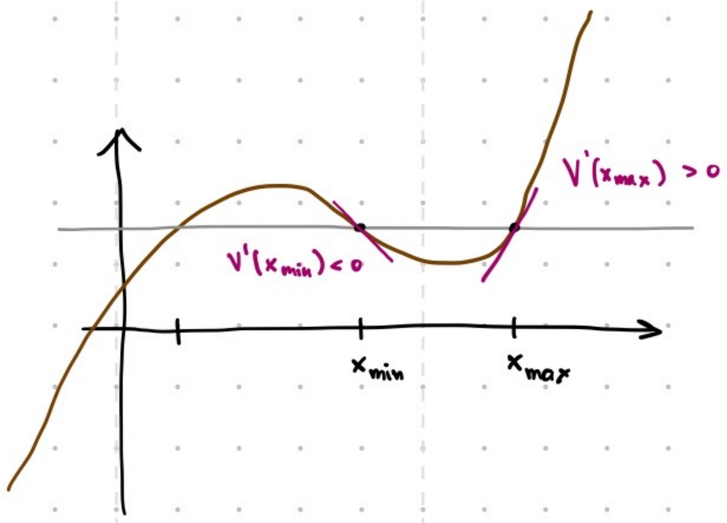
MOTI PER VALORI REGOLARI DI E

Consideriamo due pt. di inv. x_{min}, x_{max} che corrisp. ad un val. reg. E_0.

$$E_0 - V(x_{min}) = E_0 - V(x_{max}) = 0$$

$$E_0 - V(x) > 0 \quad x \in (x_{min}, x_{max})$$

$$V'(x_{min}) < 0 < V'(x_{max})$$



<u>Prop</u>: Se valgono le cond. sopra con $E_0 = E(x_0, v_0)$ e $x(t)$ da luogo ad un moto periodico con per.

$$T = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}}\, dx'$$

<u>Dim</u>: Sia $x(t)$ sol. del pb. di Cauchy con

$x_0 = x_{min}$ e $v_0 = 0$. Consideriamo $E_0 - V(x)$ centrato in x_{min} per $x \in [x_{min}, \bar{x})$ con $\bar{x} \in [x_{min}, x_{max})$

$$E_0 - V(x) = -V'(x_{min})(x - x_{min}) - \frac{1}{2} V''(x_{min})(x - x_{min})^2 + o(|x - x_{min}|^2)$$

Il tempo impiegato dal pt. P per arrivare da $\bar{x}_{min}$ a $\bar{x}$ è dato da

$$\int_{x_{min}}^{\bar{x}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}}\, dx'$$

che è finito poiché

$$\int_{x_{min}}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{|x - x_{min}|}} < +\infty$$

Per $x' \to x_{min}$ in $\sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V'(x_0))}}$ il termine dominante dallo sviluppo è $\sqrt{-V'(x_{min}) \cdot (x - x_{min})}$

$$\frac{1}{\sqrt{t + t^2 + o(t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + t + o(t)}}$$

da cui

$$\int_{x_{min}}^{\bar{x}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x))}}\, dx \sim \int_{x_{min}}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{|x - x_{min}|}}$$

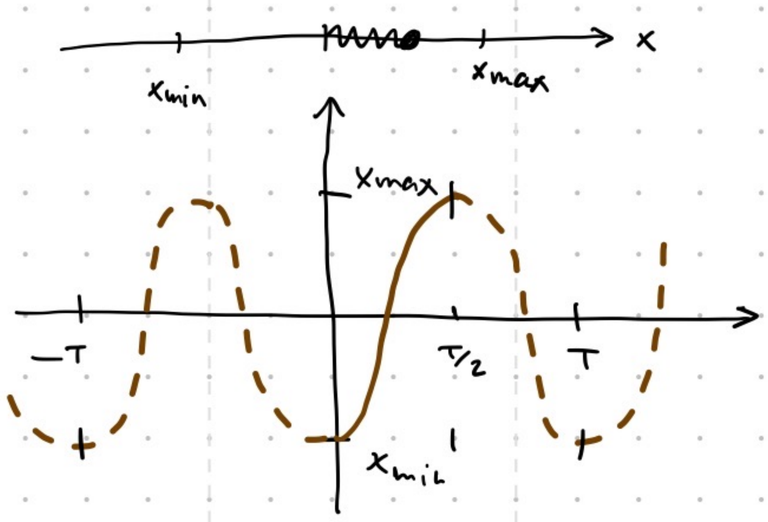
Reminder:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1$$

Analogamente anche il tempo per andare da $\bar{x}$ a x_{max} è finito. Notiamo anche che $y(t) := x(T - t)$ è ancora una sol. con $t \in [\frac{T}{2}, T]$ e ha stessa pos. e vel. in $t = \frac{T}{2}$ dunque per unicità sono la stessa sol., ovvero $x(t)$ è def. su tutto $[0, T]$ inoltre posta $z(t) := x(t - T)$ e poiché

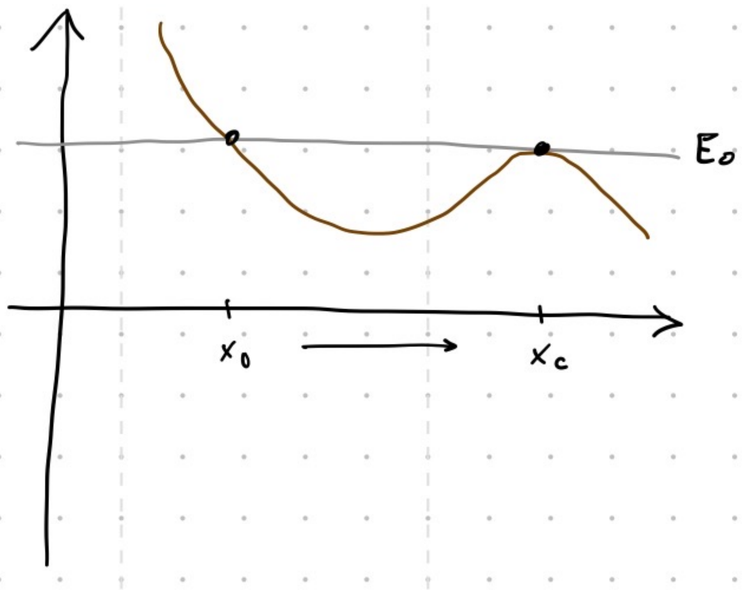
$$x(0) = x(T) \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}(T)$$

otteniamo che $z(t) = x(t)$ per $t = T$ ovvero $x(t)$ è ben def. su $[0, 2T]$, induttivamente segue $x(t)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ e T-periodica.



MOTI PER VALORI CRITICI DI E

Se invece E_0 è critico lo sviluppo di Taylor nel punto critico diventa



$$E_0 - V(x) = -\frac{1}{2} V''(x_c)(x - x_c)^2 + o(|x - x_c|^2)$$

e se studiamo il periodo

$$\int_{x_0}^{x_c} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V'(x))}}\, dx$$

questa volta per $x \to x_c$ abbiamo

$$\sim \int_{x_0}^{x_c} \frac{1}{|x - x_c|}\, dx = +\infty$$

che diverge.

RITRATTO DI FASE

Il ritratto di fase di un moto unidimensionale conservativo è un disegno nel piano (x, v).

Inoltre poiché

$$E(x, v) = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$$

è un integrale primo le traiett. di sol. sono

$$\{(x, v) \mid E(x, v) = E_0\}$$

Prop: Siano $x_1(t)$, $x_2(t)$ due sol. di $\dot{x} = f(x)$ con $f \in C^1$ e $\exists\, t_1, t_2$ t.c. $x(t_1) = x(t_2)$ $\Rightarrow$ x_1 e x_2 coincidono.

Dim: Basta definire $y(t) := x_2(t - t_1 + t_2)$ allora $y(t_1) = x_2(t_2) = x_1(t_1)$ e y ha ancora la stessa traiettoria di x_2. y e x_1 coincidono in t_1, in particolare avranno la stessa traiett. $\Rightarrow$ x_1 e x_2 hanno la stessa traiett. $\square$

3. MOTI CENTRALI

Def: $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ è un campo di forze

centrale se $\exists f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ C^1 tc.

$$F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|} = f(\rho)\hat{e}_\rho$$

Prop: Un campo $F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ è centrale sse

$\forall R \in SO(3)$ $\quad F(Rx) = RF(x)$

Dim:

$\boxed{\Rightarrow}$ Se $F(x)$ è una forza centrale allora

poiché $|Rx| = |x| = \rho$

$$F(Rx) = f(|Rx|)\frac{Rx}{|Rx|} = f(|x|)\frac{Rx}{|x|}$$

$$= R\left(\frac{f(|x|)\cdot x}{|x|}\right) = RF(x).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Invece se $F(Rx) = RF(x)$

·) $F(x) \times x = 0$:

Sia $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, consideriamo R_x tc.

$R_x x = x$ allora dall'hp otteniamo

$$R_x F(x) = F(R_x x) = F(x)$$

ovvero $F(x)$ è un pt. fisso di R_x, ma

R_x lascia fisso solo un asse $\Rightarrow F(x) \parallel x$

$\Rightarrow F(x) \times x = 0$.

·) Vediamo ora che il campo di forze F ha l

simm. sferica: siano x, y tc. $|x| = |y|$ e vediamo

che $F(x)\cdot x = F(y)\cdot y$, sia $R \in SO(3)$ tc. $Rx = y$

$$F(y)\cdot y = F(Rx)\cdot Rx = RF(x)\cdot Rx = F(x)^T R^T R x =$$

$$\underset{R\in SO(3)}{=} F(x)^T x = F(x)\cdot x.$$

$\square$

INTEGRABILITÀ DEI MOTI CENTRALI

Se $F(x) = f(\rho)\hat{e}_\rho$ abbiamo che

$$\dot{M}_0 = -m \underbrace{\cancel{v_0 \times v}}_{=0} + N_0 = N_0 = x \times f(\rho)\,\hat{e}_\rho$$
$$= 0$$

dunque M_0 si conserva. Inoltre F ammette il potenziale $V(x) = \mathcal{V}(\rho(x)) = -\int f(\rho)\,d\rho$ per cui si conserva anche l'energia tot.

Prop: Il sist. di un pt. mat. P, m in un campo di forze centrali è integrabile.

Dim:

·) Se $M_0 = 0$ poiché $mx \times \dot{x} = 0$ esiste un vettore $\hat{e}$ t.c. $x(0) = \rho_0 \hat{e}$ e $\dot{x}(0) = \dot{\rho}_0 \hat{e}$ e se $\rho(t)$ è sol. di $m\ddot{\rho} = f(\rho)$ allora $x(t) := \rho(t)\,\hat{e}$ è sol. di $m\ddot{x} = F(x)$

·) Se $M_0 \neq 0$ allora il moto si svolge su un piano π_0. Introduciamo il rif. $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ t.c. $\hat{e}_3 \parallel M_0$. Il moto si svolgerà dunque su $O\hat{e}_1\hat{e}_2$. Siano ora

$$\hat{e}_\rho := \frac{x}{|x|} = \cos\theta\,\hat{e}_1 + \sin\theta\,\hat{e}_2 \qquad \hat{e}_\theta := \hat{e}_3 \times \hat{e}_\rho = -\sin\theta\,\hat{e}_1 + \cos\theta\,\hat{e}_2$$

e valgono

$$\dot{e}_\rho = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad \dot{e}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_\rho$$

e possiamo scrivere

$$x = \boxed{\rho\,\hat{e}_\rho} \qquad \dot{x} = \boxed{\dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \dot{\theta}\rho\,\hat{e}_\theta}$$

$$\ddot{x} = \ddot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \ddot{\theta}\rho\,\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\dot{\rho}\,\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\rho \cdot -\dot{\theta}\,\hat{e}_\rho =$$

$$= \boxed{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_\rho + (\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})\,\hat{e}_\theta}$$

Sostituendo questa qui sotto otteniamo $m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\rho}) = 0$

proiettando ora $m\ddot{x} = F(x)$ lungo $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta$ otteniamo

$$m\ddot{x} \cdot \hat{e}_\rho = f(\rho) \qquad m\ddot{x} \cdot \hat{e}_\theta = 0$$

la seconda eq. corrisponde alla conserv. di M_0,

infatti

$$M_0 \cdot \hat{e}_3 = (x - x_0) \times m\dot{x}$$

$$= \rho \hat{e}_\rho \times m(\cancel{\dot{\rho}\hat{e}_\rho} + \dot{\theta}\rho\hat{e}_\theta) \cdot \hat{e}_3 = m\rho^2\dot{\theta}$$

che è una quantità cost. poiché

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) = 2m\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + m\rho^2\ddot{\theta}$$

$$= m\rho(2\dot{\theta}\dot{\rho} + \rho\ddot{\theta}) = 0$$

Fissiamo allora $m\rho^2\dot{\theta} = c \neq 0$. Che sostit.

$$m[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + \cancel{(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})\hat{e}_\theta}] \cdot \hat{e}_\rho = f(\rho)$$

$$\iff m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho)$$

$$\iff m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 = f(\rho)$$

$$\iff m\ddot{\rho} = f(\rho) + m\rho\dot{\theta}^2$$

in particolare $\dot{\theta} = \dfrac{c}{m\rho^2}$

$$\Longrightarrow m\ddot{\rho} = f(\rho) + \cancel{m\rho}\frac{c^2}{m^{\cancel{2}}\rho^{\cancel{4}\,3}} = f(\rho) + \frac{c^2}{m\rho^3}$$

Possiamo così definire il pot. efficace come

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

con

$$m\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho}V_{eff}(\rho)$$

Allora l'energia ~~tot.~~ sarà un int. primo

$$\mathcal{E}_{eff}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho)$$

$$E\Big|_{\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}} = \left[\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + V(\rho)\right]\Big|_{\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{2m\rho^2} + V(\rho)$$

$$= \mathcal{E}_{eff}(\rho, \dot{\rho})$$

LEGGE DELLE AREE

Se $M_0 \neq 0$, θ è monotona. Se $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$, ha lo stesso segno di c. Sia $D(\theta;\theta_0)$ lo spicchio tra θ_0 e θ. L'area sarà

$$a(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{\rho(\theta)} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta)\, d\theta$$

e posto $\tilde{a}(t) := a(\theta(t))$ abbiamo

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2m}$$

ovvero la conservazione del momento ang. l corrisponde alla conservazione della velocità areolare.

FORMULA DI BINET

Consideriamo un pt. che si muove nel piano e mettiamoci in coord. polari (ρ,θ) e assumiamo che valga la legge di aree

$$\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \alpha \qquad \left[\frac{m^2}{s}\right] \qquad \rightarrow \dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2}$$

la comp. radiale del moto sarà

$$\ddot{x}\cdot e_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

che viene detta formula di Binet.

Dim:

Ricordiamo che

$$\ddot{x} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)e_\rho + (\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})e_\theta$$

$$\ddot{x}\cdot\hat{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$$

e notiamo che

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{d\theta} = -2\alpha\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(-2\alpha\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\cdot\frac{2\alpha}{\rho^2} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}\cdot e_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\cdot\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \cancel{\rho}\cdot\frac{4\alpha^2}{\rho^{\cancel{4}3}} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

EQ. DIFF. PER LA TRAIETTORIA

Sost. la formula di Binet in $m\ddot{x} \cdot e_\rho = f(\rho)$ otteniamo la seguente eq. diff. per la traiett. in forma polare:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2}{4m\alpha^2} f(\rho)$$

$$-\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{f(\rho)}{m}$$

e ponendo $u = 1/\rho$:

$$u'' = -f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{4m\alpha^2 u^2} - u$$

$$u'' + u = -\frac{1}{4m\alpha^2 u^2} f(1/u)$$

DESCRIZIONE DELLA TRAIETTORIA

Se $m\rho^2\dot{\theta} = c$ e $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) = E$ e assumiamo di essere in un int. $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ in cui la traiettoria è limitata. Valgono le solite condizioni

i) $E - V_{eff}(\rho_{min/max}) = 0$

ii) $E - V_{eff}(\rho) > 0$ in (ρ_{min}, ρ_{max})

iii) $V_{eff}'(\rho_{min}) < 0 < V_{eff}'(\rho_{max})$

Questa verrà usata più avanti quando $u = 1/\rho$ e

$$E = V_{eff}(\rho_{min/max})$$

$$\Rightarrow E(u_{min/max}, 0) = \frac{V_{eff}(1/u)}{4m\alpha^2} = \frac{E}{4m\alpha^2}$$

che sarà il valore dell'energia per il pb. $1/\rho$

ed il periodo sarà

$$T = \sqrt{2m}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}}\, d\rho$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) = E$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(\rho)\right)}$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}}\, d\rho = \int dt = \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow T = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}}\, d\rho$$

Unendo le due cond sopra otteniamo

$$m\rho^2\dot{\theta} = c \qquad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 = E - V_{eff}(\rho)$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2} \qquad \dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)}$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\cdot\frac{c}{m\rho^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = \pm\frac{m\rho^2}{|c|}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}\right)}$$

Inoltre

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \pm \frac{|c|}{m\rho^2} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E - V_{eff})}} = |c| \cdot \sqrt{\frac{1}{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E - V_{eff}}} \cdot \frac{1}{\rho^2}$$

$\leftarrow 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \Delta\theta = |c| \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} d\rho$$

$\leftarrow$ angolo da ρ_{max} a ρ_{max}

$2 \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}}$

$\square$

Prop: La mappa $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ ha le simm.

$$\rho(\Delta\theta - \theta) = \rho(\theta) \qquad \theta \in [0, \Delta\theta]$$

$\leftarrow$ simm. risp. a $\Delta\theta/2$

$$\rho(\theta + \Delta\theta) = \rho(\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

$\leftarrow$ periodicità di $\Delta\theta$

Dim: Assumiamo che $\rho(0)$ sia un punto di inversione, per cui $\rho'(0) = 0$.

Consideriamo la formula di Binet e sost. $u = \frac{1}{\rho}$

$$\ddot{x} \cdot e_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\right] \qquad m\,\ddot{x} \cdot e_\rho = f(\rho)$$

$$\Rightarrow \frac{f(1/u)}{m} = -4\alpha^2 u^2 \left[\frac{d^2}{d\theta^2} u + u\right] = -4\alpha^2 u^2 (u'' + u)$$

$$\Rightarrow f(1/u) = -4m\alpha^2 u^2 (u'' + u)$$

$$\Rightarrow u'' = \underbrace{-\frac{f(1/u)}{4m\alpha^2 u^2} - u}_{g(u)}$$

e siano $u_{min} = 1/\rho_{max}$ e $u_{max} = 1/\rho_{min}$.

Questi risultano essere i pt. di inversione per il livello $\frac{E}{4m\alpha^2}$ per l'energia $\mathcal{E}(u,u')$

Qua usiamo il livello $\frac{E}{4m\alpha^2}$ perché $E - V_{eff}(\rho) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}(u,0) = W(u) = \frac{V_{eff}}{4m\alpha^2} = \frac{E}{4m\alpha^2}$

$$\mathcal{E}(u,u') := \frac{1}{2}u'^2 + W(u) \qquad W(u) := -\int g(u)\,du$$

inoltre poiché $c = 2m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{c}{2m}$

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\cancel{\rho^2} \cdot \frac{c}{m\cancel{\rho^2}} = \frac{c}{2m}$$

$$2m\alpha^2 u^2 = \cancel{2m} \cdot \frac{c^2}{{}_2\cancel{4}m^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$W(u) = -\int\left[-\frac{f(1/u)}{4m\alpha^2 u^2} - u\right]du$$

$$= \frac{1}{4m\alpha^2}\int \frac{f(1/u)}{u^2}\,du + \frac{1}{2}u^2 =$$

$\rho = 1/u \Rightarrow d\rho = -\frac{1}{u^2}du$

$$= \frac{1}{4m\alpha^2}\int f(\rho)\,d\rho + \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{4m\alpha^2}V(1/u) + \frac{1}{2}u^2 = \frac{V(1/u) + 2m\alpha^2u^2}{4m\alpha^2} = \frac{V(1/u) + \frac{c^2}{2m\rho^2}}{4m\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{4m\alpha^2}V_{eff}(1/u) \Rightarrow W'(u) = -\frac{1}{4m\alpha^2 u^2}V'_{eff}(1/u)$$

Essendo punti di inversione u_{min}, u_{max} risolvono

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - W(u) = 0$$

quindi

$$W'(u_{max}) = -\frac{\rho^2_{min}}{4m\alpha^2} V'_{eff}(\rho_{min}) > 0$$

$$W'(u_{min}) = -\frac{\rho^2_{max}}{4m\alpha^2} V'_{eff}(\rho_{max}) < 0$$

e vale

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - W(u) > 0 \qquad \forall u \in (u_{min}, u_{max})$$

come nei capitoli precedenti possiamo usare la teoria su qst tipo di moti, per cui se $u(0) = u_{min}$ allora $u(\theta)$ soddisfa le rel. di periodicità cercate con periodo T_u

$$T_u = 2\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{E}{4m\alpha^2} - \underbrace{W(u)}_{\frac{V_{eff}(u)}{4m\alpha^2}}\right)}}\, du =$$

$$= -2\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\sqrt{4m\alpha^2}}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}\ \underbrace{\rho^2}_{c.v.}}\, d\rho = |c|\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\rho^2\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}}\, d\rho = \Delta\theta$$

$c = 2m\alpha$

$\alpha = \frac{c}{2m}$

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

Consideriamo m_1, m_2, le eq. del moto sono

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 \quad e \quad m_2 \ddot{x}_2 = F_2$$

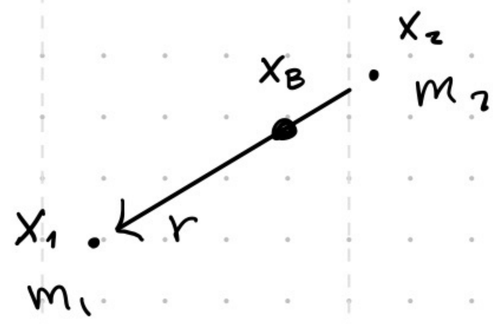
ed assumiamo le seguenti prop.

i) $F_i = F_i(x_1, x_2)$

ii) $F_1 + F_2 = 0$

iii) $F_i \times r = 0$ con $r := x_1 - x_2$

iv) $F_1 = f(\rho)\frac{r}{\rho}$, $\rho = |r|$ ed $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ C^1



Possiamo metterci nel sist. di rif. dato da

$(x_1, x_2) \mapsto (x_B, r)$ con

$$(m_1 + m_2) x_B = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad e \quad r = x_1 - x_2$$

che ci dà la seguente riscrittura dl sist.

$$m \ddot{x}_B = 0 \quad e \quad \mu \ddot{r} = F(r)$$

con μ detta massa ridotta e F def come segue

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad F(r) := F_1(x_1, x_2), \quad m = m_1 + m_2$$

e poi per ricostruire la sol. originale

$$x_1 = x_B + \frac{m_2}{m} r \qquad x_2 = x_B - \frac{m_1}{m} r$$

<u>Oss</u>: La legge di attrazione gravitazionale si ha per

$$F_1(x_1, x_2) = -G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3}(x_1 - x_2) \qquad [G] = \frac{m^3}{s^2 kg}$$

che nel nuovo sist. diventa

$$\mu \ddot{r} = -G m \mu \frac{r}{|r|^3}$$

PROBLEMA DI KEPLERO

<u>Diretto</u>: Dato il campo di forze vorremmo trovare i moti possibili, posti:

$$k := G m M, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2 \qquad [k] = \frac{m^3}{s^2 \cancel{kg}} kg^{\cancel{2}} = \frac{m^3 kg}{s^2}$$

consideriamo il moto centrale dato da

$$\boxed{m\ddot{x} = f(\rho)\frac{x}{\rho}} \quad \text{e} \quad \boxed{f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}}$$

con potenziale $V(x) = -\frac{k}{\rho}$. Sia $c := m\rho^2\dot{\theta} \neq 0$

per la teoria sui moti centrali vale la legge

di aree e proiettando $m\ddot{x}$ lungo $\hat{e}_\rho$:

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\right] = -\frac{k}{\rho^2}$$

con $\alpha = \frac{c}{2m}$. Sia $p := \frac{4m\alpha^2}{k}$ e $u := 1/\rho$

$$[\rho] = \frac{\cancel{kg}\cdot\left(\frac{m^2}{s}\right)^2}{\frac{m^3}{s^2}\cancel{kg}} = \frac{m^4\,\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}\,m^3} = m$$

$$\Rightarrow u'' + u = \frac{1}{p}$$

$$[u] = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con $A \geq 0$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, possiamo introdurre

$e := Ap$

$$[e] = 1$$

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad (*)$$

Con un po' di sost. si ottiene p, e:

$$p = \frac{c^2}{mk}$$

ricaviamo e da $(*)$ usando ρ_{min} e V_{eff}

ρ_{max} può non esistere se l'orbita è un'iperbole mentre ρ_{min} esiste sempre.

$$\rho_{min} = \frac{p}{1 + e\cdot(+1)} = \frac{p}{1+e} = \frac{c^2}{mk(1+e)}$$

$$E - V_{eff}(\rho) = 0 \qquad V_{eff}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\Rightarrow 0 = E - V_{eff}(\rho_{min}) = \dots$$

$$= E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2c^2}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}$$

Abbiamo tre casi:

- $E < 0 \iff e < 1$: ellissi
- $E = 0 \iff e = 1$: parabole
- $E > 0 \iff e > 1$: iperboli

Mettiamoci ora nel caso $E < 0$ e studiamo meglio la forma dell'orbita

Siano a, b le lunghezze dei semi-assi maggiori e minori dell'ellisse, abbiamo

$$p = a(1-e^2) \qquad b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$\alpha = \frac{c}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{ap}$$

$$p = \frac{4m\alpha^2}{k} = \frac{\cancel{4m}\frac{c^2}{\cancel{4m^2}}m}{k} = \frac{c^2}{mk}$$

L'area dell'ellisse sarà

$$\pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2}\frac{|c|}{\sqrt{mk}}$$

Ricordiamo ora che la velocità areale è

$$\alpha = \frac{c}{2m} \quad \longleftarrow \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

che ci permette di ottenere il periodo del moto come segue

$$T = \frac{\pi ab}{\alpha} \Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2 a^3 \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{m}k}}{\frac{\cancel{c^2}}{4\cancel{m^2}}} = \frac{4\pi^2 m}{k}a^3$$

Ovvero il periodo dipende solo dal semiasse maggiore, inoltre

$$p = \frac{c^2}{mk} \Rightarrow c^2 = mk\cdot p = mk\cdot a(1-e^2)$$

da cui otteniamo un'expr. per l'energia

$$E = \mathcal{E}(\rho_{min}, 0) = V_{eff}(\rho_{min}) = -\frac{k}{b} + \frac{c^2}{2ma^2(1-e)^2} =$$

$$= -\frac{k}{a(1-e)}\left[1 - \frac{1}{2}(1+e)\right] = -\frac{k}{2a}$$

[...]

VETTORE DI LAPLACE-LENZ

Consideriamo un moto centrale e def. la seguente quantità

Def: $L := p \times M_0 - mk\frac{x}{\rho}$ con $p := m\dot{x}$.

$p \times M_0 - mk\,\hat{e}_\rho$

Prop: L è un integrale primo del sistema.

Dim:

$$\dot{L} = \dot{p} \times M_0 + \cancel{p \times \underbrace{\dot{M}_0}_{=0}} - mk\left[\frac{\dot{x}}{\rho} - \frac{x}{\rho^2}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x\cdot x}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{x\cdot x} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{x\cdot x}}\cdot \cancel{2}\dot{x}x = \frac{\dot{x}\cdot x}{\rho}$$

$$= m\ddot{x} \times \left[(x - \cancel{x_0}) \times m\dot{x}\right] - \frac{mk\dot{x}}{\rho} + \frac{mkx}{\rho^2}\cdot\frac{\dot{x}\cdot x}{\rho}$$

$$= -\frac{k}{\rho^3}x \times \left[x \times m\dot{x}\right] - \frac{mk\dot{x}}{\rho} + \frac{mk(\dot{x}\cdot x)x}{\rho^3}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$$

$$= \frac{mk}{\rho^3}(x \times \dot{x}) \times x - \frac{mk\dot{x}}{\rho} + \frac{mk(\dot{x}\cdot x)x}{\rho^3}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$$

$$= \frac{mk}{\rho^3}\left[\underbrace{(x\cdot x)}_{\rho^2}\dot{x} - (\dot{x}\cdot x)x\right] - \frac{mk\dot{x}}{\rho} + \frac{mk(\dot{x}\cdot x)x}{\rho^3}$$

$$= \cancel{\frac{mk}{\rho}\dot{x}} - \cancel{\frac{mk}{\rho^3}(\dot{x}\cdot x)x} - \cancel{\frac{mk\dot{x}}{\rho}} + \cancel{\frac{mk(\dot{x}\cdot x)x}{\rho^3}} = 0$$

Calcoliamo ora $|L|^2$:

$$L\cdot L = \left(p\times M_0 - mk\frac{x}{\rho}\right)\cdot\left(p\times M_0 - mk\frac{x}{\rho}\right)$$

$$= |p\times M_0|^2 + m^2k^2 - 2\,p\times M_0\cdot mk\frac{x}{\rho}$$

ed usando

·) $p\times M_0 = p\times(x\times p) = -(x\times p)\times p =$

$= -\left[(x\cdot p)p - (p\cdot p)x\right] =$

$= |p|^2 x - (x\cdot p)\cdot p$

·) $p\times M_0\cdot x = x\times p\cdot M_0 = |M_0|^2 = c^2$

$M_0 = x\times p$

·) $p\times M_0\cdot p\times M_0 = p\times M_0\cdot\left(|p|^2x - (x\cdot p)p\right)$

$= \left(|p|^2x - (x\cdot p)p\right)\times p\cdot M_0 =$

$= \left(|p|^2 x\times p - \cancel{(x\cdot p)p\times p}\right)\cdot M_0 =$

$= \left(|p|^2 x\times p\right)M_0 = |p|^2 p\times M_0\cdot x$

Dunque possiamo scrivere $|L|^2$ in termini di $p \times M_0 \cdot x$:

$$|p \times M_0|^2 + m^2k^2 - 2\, p \times M_0 \cdot mk \frac{x}{\rho} =$$

$$= |p|^2\, p \times M_0 \cdot x - \frac{2mk}{\rho}\, p \times M_0 \cdot x + m^2k^2 =$$

$$= \left(|p|^2 - \frac{2mk}{\rho}\right) p \times M_0 \cdot x + m^2k^2 =$$

Infine notando quanto segue e sost. sopra

1) $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{|p|^2}{2m} \Rightarrow |p|^2 = 2mT$

2) $E = T + V = T - \frac{k}{\rho}$

3) $e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}$

otteniamo

$$= c^2\left(\overset{(1)}{|p|^2} - 2m\frac{k}{\rho}\right) + m^2k^2 = 2mc^2\left(\overset{(2)}{T} - \frac{k}{\rho}\right) + m^2k^2$$

$$= 2mc^2 E + m^2k^2 = m^2k^2\left(\overset{(3)}{\frac{2Ec^2}{mk^2}} + 1\right) = m^2k^2e^2$$

ovvero $|L| = mk \cdot e$ infatti L viene anche detto vettore eccentricità. Inoltre sia ψ l'angolo tra x e L:

$$e \cdot \cos\psi = \frac{L}{mk} \cdot \frac{x}{\rho} = \frac{p \times M_0 \cdot x}{mk\rho} - 1 = \frac{c^2}{mk\rho} - 1 \qquad \leftarrow p = \frac{c^2}{mk}$$

$$\Rightarrow e\cos\psi = \frac{p}{\rho} - 1 \Rightarrow 1 + e\cos\psi = \frac{p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p}{1 + e\cos\psi}$$

[...] dunque L punta verso il pericentro.

PROBLEMA INVERSO

Assumiamo ora di sapere che valgono le leggi di Keplero, consideriamo

i) Orbite ellittiche
ii) α cost.
iii) $a^3 / T^2 = $ cost.

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

e sost. nella formula di Binet:

$$a \cdot e_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]$$

$$= -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\left(-\frac{e\cos\theta}{p} + \frac{1+e\cos\theta}{p}\right)$$

$$= -\frac{4\alpha^2}{p}\cdot\frac{1}{\rho^2}$$

Se ad esempio scegliamo un'orbita ellittica

α, T, a, b rispettano : $\alpha = \frac{\pi a b}{T}$

$$\frac{4\alpha^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\,\frac{1}{b^2} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = \text{cost.}$$

4. SISTEMI DI RIF. IN MOTO RELATIVO

Introduciamo $\vec{\omega}$ vett. vel. angolare.

VELOCITÀ ANGOLARE E FORMULE DI POISSON

Consideriamo $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ e $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ in $\mathbb{E}^3$. Dunque dato $\vec{u} \in \mathbb{V}^3$ possiamo scrivere

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^{3} u_h \hat{e}_h = \sum_{h=1}^{3} u'_h \hat{e}'_h$$

Sia ora $t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3$ una mappa vettoriale, se i coef. sono derivabili definiamo

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}_h \hat{e}_h \qquad \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}'_h \hat{e}'_h$$

<u>Prop</u>: Se le coord. di $\hat{e}'_h$ in Σ sono deriv. nel tempo allora esiste un' unica mappa $t \mapsto \vec{\omega}(t)$ tc.

$$\left.\frac{d\hat{e}'_h}{dt}\right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_h \qquad h = 1,2,3$$

e qst rel. sono dette equazioni di Poisson. Ed il vettore $\vec{\omega}(t)$ si dice vel. ang. di Σ' risp. a Σ al tempo t.

<u>Dim</u>: Sia R la mat. di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ con $R_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$. La matrice R è ortogonale cioè $RR^T = R^T R = I$.
Inoltre le basi sono entrambe levogire $\Rightarrow$
$\Rightarrow \det R = 1$, cioè $R \in SO(3)$. Siano inoltre $e_h \in \mathbb{R}^3$ i vettori della base canonica che rappr. $\hat{e}_h$ in $\mathcal{B}$ e $e'_h \in \mathbb{R}^3$ per $\hat{e}'_h$ in $\mathcal{B}$ allora

$$e'_h = R e_h$$

Il vettore

$$\left.\frac{d\hat{e}_h}{dt}\right|_{\Sigma}$$

è rappr. da $\dot{e}'_h \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$ cioè il vett. delle derivate temp. di comp. di $\hat{e}'_h$. Dalla rel. $R \in SO(3)$

$\Rightarrow \dot{e}_h' = \dot{R} e_h = \dot{R} R^T R e_h = \dot{R} R^T e_h'$

Derivando $RR^T = I$ si può vedere che $\dot{R}R^T$ è anti-simmetrica. Usiamo il seguente risultato

<u>Lemma</u>: Data A antisimm. $\exists! a \in \mathbb{R}^3$ tc.

$$Au = a \times u \quad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

In particolare se $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ allora

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque esiste un unico vettore $\omega \in \mathbb{R}^3$ associato a $\dot{R}R^T$ tc. $\dot{e}_h' = \omega \times e_h'$. — Così costruisco ω in coord.

Il vettore $\vec{\omega} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \hat{e}_h$, rappr. da ω in $\mathcal{B}$.

L'unicità segue per assurdo, se $\exists \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ che soddisfano

$$\left.\frac{d\hat{e}_h'}{dt}\right|_\Sigma = \vec{\omega}_i \times \hat{e}_h'$$

$$\Rightarrow (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \hat{e}_h' = 0 \quad \text{per } h = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$$

<u>Prop</u>: Una formula esplicita per la vel. ang.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{3} \hat{e}_h' \times \left.\frac{d\hat{e}_h'}{dt}\right|_\Sigma$$

<u>Dim</u>: Usando le formule di Poisson otteniamo

$$\left.\frac{d\hat{e}_h'}{dt}\right|_\Sigma = \vec{\omega} \times \hat{e}_h'$$

$$\sum_{h=1}^{3} \hat{e}_h' \times \left.\frac{d\hat{e}_h'}{dt}\right|_\Sigma = \sum_{h=1}^{3} \hat{e}_h' \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_h') =$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

$$= \sum_{h=1}^{3} [\vec{\omega} - \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \hat{e}_h') \hat{e}_h'}_{\vec{\omega} = \sum^{3} (\vec{\omega} \cdot \hat{e}_h') \hat{e}_h'}] = 2\vec{\omega}$$

$$3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

<u>Esempio notevole</u>: Se abbiamo Σ e Σ' sist. in O con Σ' che ruota attorno a $O\hat{e}_3$ di Σ tc. $\hat{e}_1'$ e $\hat{e}_1$ formano un angolo $\theta(t)$ ovvero

$$\hat{e}_1 = \cos\theta\, \hat{e}_1 + \sin\theta\, \hat{e}_2 \quad \hat{e}_2' = -\sin\theta\, \hat{e}_1 + \cos\theta\, \hat{e}_2 \quad \hat{e}_3' = \hat{e}_3$$

allora otteniamo

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\, \hat{e}_3$$

DERIVATA TEMPORALE DI UN VETTORE IN RIF. DIVERSI

Prop: Data $t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3$ derivabile in Σ e Σ' vale

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$e_i' = R\, e_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ji}\, e_j$$

$$\rightsquigarrow \hat{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ji}\, \hat{e}_j$$

Dim: Osserviamo che, perché $\hat{e}_i' = \sum_j R_{ji}\, \hat{e}_j$

$$\vec{u} = \sum_i u_i' \hat{e}_i' = \sum_i u_i \sum_j R_{ji}\, \hat{e}_j = \sum_j \Big(\sum_i u_i' R_{ji}\Big) \hat{e}_j$$

ora calcoliamo d/dt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\sum_i u_i' R_{ji}\Big)\hat{e}_j \\
&= \sum_j \sum_i \big(\dot{u}_i' R_{ji} + u_i' \dot{R}_{ji}\big)\hat{e}_j \\
&= \sum_j \sum_i \big[\dot{u}_i' R_{ji}\, \hat{e}_j + u_i' \dot{R}_{ji}\, \hat{e}_j\big] \\
&= \sum_i \Big[\dot{u}_i' \cdot \sum_j R_{ji}\, \hat{e}_j + u_i' \cdot \sum_i \dot{R}_{ji}\, \hat{e}_j\Big] \\
&= \sum_i \dot{u}_i' \underbrace{\sum_j R_{ji}\, \hat{e}_j}_{\hat{e}_i'} + \sum_i u_i' \cdot \sum_i \dot{R}_{ji}\, \hat{e}_j \\
&= \sum_i \dot{u}_i'\, \hat{e}_i' + \sum_i u_i' \cdot \left.\frac{d\hat{e}_i'}{dt}\right|_{\Sigma} \\
&= \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i \vec{\omega} \times u_i' \hat{e}_i' = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma} + \vec{\omega} \times \vec{u}
\end{aligned}$$

$\square$

Oss: Da questo segue anche che la deriv. di $\vec{\omega}$ in Σ e Σ' coincidono dunque possiamo scrivere $\dot{\vec{\omega}}$.

Oss: La prop. di prima in coord. diventa

$$\dot{u} = R\dot{u}' + \omega \times R u'$$

in cui ω è $\vec{\omega}$ nelle coord di $\mathcal{B}$ e R è la mat. di cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

COMPOSIZIONE VEL. ANG.

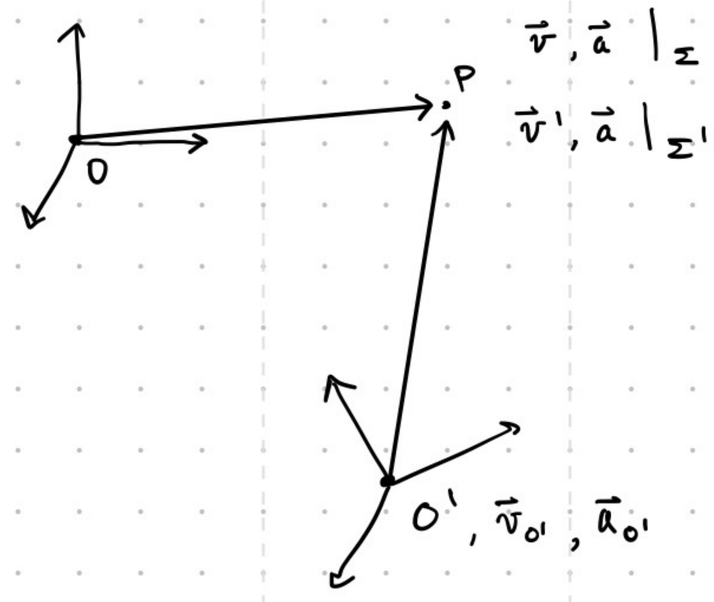
Prop. $\vec{\omega}$ vel da Σ a Σ', $\vec{\omega}'$ vel. ang. da Σ' a Σ'' $\Rightarrow$ la vel. ang. da Σ a Σ'' è $\vec{\omega}' + \vec{\omega}''$.

Dim: Usando le formule di Poisson si ha

$$\vec{\omega} \times \hat{e}''_h = \frac{d\hat{e}''_h}{dt}\Big|_\Sigma = \frac{d\hat{e}''_h}{dt} + \vec{\omega} \times \hat{e}''_h = (\vec{\omega}'' + \vec{\omega}') \times \hat{e}''_h$$

EQ. DEL MOTO IN RIF. DIVERSI

Scriviamo le formule che legano $\vec{v}$ e $\vec{a}$ di un punto mat. P in Σ a Σ' con vel. $\vec{v}'$ e acc. $\vec{a}'$ e Σ' con vel. ang. $\vec{\omega}$ risp. a Σ



Prop: Valgono le rel.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^T$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}^T + \vec{a}^C$$

con

$$\vec{v}^T := \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O')$$

$$\vec{a}^T := \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O')$$

$$\vec{a}^C := 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

dove $\vec{v}_O$, $\vec{a}_{O'}$ sono la vel. e l'accel. di O' in Σ

Dim: Iniziamo scrivendo

$$P - O = (P - O') + (O' - O)$$

deriviamo in t:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(P - O')\Big|_\Sigma + \frac{d}{dt}(O' - O)\Big|_\Sigma =$$

$$= \frac{d}{dt}(P - O')\Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'}$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'}$$

$v_{O'}$ e $a_{O'}$ sono in O'

$$\frac{d}{dt} v_{O'}\Big|_\Sigma = a_{O'}$$

derivando nuovamente otteniamo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \vec{a}_{O'}$$

$$= \vec{a}' + \underbrace{\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O')}_{\text{Trascinamento}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}}$$

5. DINAMICA DEI SISTEMI DI N PT. MAT

QUANTITÀ DINAMICHE

Consideriamo un sist. di N pt. mat. P_i, m_i su cui agiscono $\vec{F}_i$ e sia $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ e $\vec{x}_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i$ pos/vel./acc. per P_i risp. a Σ.

Def:

- QUANTITÀ DI MOTO TOT: $\vec{p} := \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$
- MOMENTO ANG. RISP. A Q: $\vec{M}_Q := \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times m\vec{v}_i$
- ENERGIA CINETICA: $T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |\vec{v}_i|^2$
- RISULTANTE DL FORZE: $\vec{R} := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$
- MOMENTO RIS. DL FORZE RISP A Q: $\vec{N}_Q := \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times \vec{F}_i$
- POTENZA RIS. DL FORZE F_i: $\Pi := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

TH. DI SCOMP. NEL BARICENTRO

Def: $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Def: Il baricentro $B \in \mathbb{E}^3$ è def. come

$$m(B - Q) = \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - Q)$$

e si può verificare che B non dipende dalla scelta di Q.

Def: Dato Σ possiamo def. Σ_B come il rif. orientato come Σ in B.

RAPPR. DL QUANTITÀ DI MOTO

Prop: $p = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i = m v_B$

Prop (Th. dl centro di massa): $m \ddot{x}_B = R$

Dim: Basta derivare l'expr. sopra

$$m \ddot{x}_B = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

SCOMPOSIZIONE DEL MOM. ANG RISP A Q

Il momento ang. tot. risp. a $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come

$$M_Q = (x_B - x_Q) \times m v_B + M^{(B)}$$

$$M^{(B)} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times m_i (v_i - v_B)$$

Dim:

$$M_Q = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times m_i v_B + \sum_{i=1}^{N} (x_B - x_Q) \times m_i v_i$$

$$= M_B + (x_B - x_Q) \times m v_B$$

Inoltre

$$M_B = M^{(B)} + \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times m_i v_B$$

e si ha

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times m_i v_B = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_B) \times v_B$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m (x_B - x_B) \times v_B$$

$$= 0$$

Oss: Nel rif. del baricentro il mom. ang. non dipende dl polo infatti vale

$$\sum m_i v_i = m v_B = 0$$

da cui se $Q \neq Q'$ in $\mathbb{E}^3$:

$$M_Q = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_Q) \times m_i v_i}_{\text{per def.}} + \underbrace{(x_Q - x_{Q'}) \times \sum_{i=1}^{N} m_i v_i}_{\text{aggiungiamo questo termine che è in realtà è } = 0.}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{Q'}) \times m_i v_i}_{\text{unisco così}} = M_{Q'}$$

SCOMPOSIZIONE DEL MOM. RIS. RISP. A Q

Possiamo scrivere N_Q risp. al baricentro:

$$N_Q = (x_B - x_Q) \times R + N^{(B)}$$

$$N^{(B)} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times (F_i - m_i a_B)$$

Dim:

$$N_Q = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times F_i + \sum_{i=1}^{N} (x_B - x_Q) \times F_i =$$

$$= N_B + (x_B - x_Q) \times R$$

Inoltre

$$N_B = N^{(B)} + \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times m_i a_B$$

e si ha

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_B) \times m_i a_B = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i - x_B) \times a_B =$$

$$= m (x_B - x_B) \times a_B = 0$$

<u>Oss</u>: Nel rif. del baricentro il mom. ris. non dip. dl polo

$$\sum_i F_i = \sum_i m_i \ddot{x}_i = m \ddot{x}_B = 0$$

e quindi se $Q \neq Q'$ in $\mathbb{E}^3$ si ha

$$N_Q = \sum_i (x_i - x_Q) \times F_i + (x_Q - x_{Q'}) \times \sum_i F_i$$

$$= \sum_i (x_i - x_{Q'}) \times F_i = N_{Q'}$$

SCOMP. DL ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} m |v_B|^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i |v_i - v_B|^2$$

<u>Dim</u>: Inserendo la rel. $v_i = (v_i - v_B) + v_B$ nell' expr. per T otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} m_i |v_i - v_B|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot |v_B|^2 + \sum_i m_i v_B \cdot (v_i - v_B)$$

FORZE INTERNE E ESTERNE

Possiamo scomporre le $\vec{F}_i$ come $\vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}$ dove $\vec{F}_i^{(I)}$ è la somma dl forze "interne" che gli altri pt. esercitano su P_i, mentre $\vec{F}_i^{(E)}$ sono le forze esterne al sist (e.g. forza di gravità $m\vec{g}$). Assumiamo che dip. solo dal pt. P_i ovvero

$$\vec{F}_i^{(E)} = \vec{F}_i^{(E)} (\vec{x}_i, \vec{v}_i, t)$$

Facciamo anche l'hp. che le forze int. siano puramente pos. ovvero

$$\vec{F}_i^{(I)} = \vec{F}_i^{(I)}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

e che valgano

i) $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

ii) $\vec{F}_{ij} \times \vec{r}_{ij} = 0$ con $\vec{r}_{ij} := \vec{x}_i - \vec{x}_j$

iii) $\vec{F}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij}) \frac{x_{ij}}{\rho_{ij}}$ con $\rho_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$

(da cui segue $f_{ij} = f_{ji}$)

Prop: Segue che la ris. ed il mom. ris. di forze interne sono nulli

Dim:

$$\vec{R}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

$$\vec{N}_Q^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (P_i - Q) \times \vec{F}_{ij} =$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N}^{N} \left[(P_i - Q) \times \vec{F}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{F}_{ji} \right] =$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N}^{N} (P_i - P_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

LE EQ. CARDINALI

Consideriamo un sist mecc. con N pt. mat. P_i, m_i su cui agiscono $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{est}$ con forze interne del tipo classico.

Prop: Sia $x(t)$ una sol. di eq. di Newton, allora $x(t)$ risolve

$$\begin{cases} \dot{P} = R^{est} \\ \dot{M}_Q = -\dot{x}_Q \times P + N_Q^{est} \end{cases}$$

che sono dette equazioni cardinali della dinamica.

Dim:

Calcoliamo $\dot{p}$ e $\dot{M}_Q$ lungo le sol. di Newton

$$\dot{p} = m\ddot{x}_B = R = \underbrace{R^{int}}_{=0} + R^{est} = R^{est}$$

$$\dot{M}_Q = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(\dot{x}_i - \dot{x}_Q) \times m_i \dot{x}_i}_{\dot{x}_i \times \dot{x}_i = 0} + \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_Q) \times m_i \ddot{x}_Q$$

$$= -\dot{x}_Q \times \sum m_i \dot{x}_i + N_Q = -\dot{x}_Q \times m\dot{x}_B + N_Q$$

$$= -\dot{x}_Q \times m\dot{x}_B + N_Q = -\dot{x}_Q \times p + \cancel{N_Q^{int}} + N_Q^{est}$$

$$= -\dot{x}_Q \times m\dot{x}_B + N_Q^{est}$$

SISTEMI EQUIV. DI VETT. APPLICATI

Def: Un sist. di vett. applicati è un insieme S di forma

$$S = \{(\vec{v}_1, P_1), \dots, (\vec{v}_N, P_N)\}$$

Def: La retta di applicazione di $\vec{v}_i$ è

$$\{P_i + \lambda v_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Def: La ris. ed il momento risultante risp. a Q sono

$$\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i \qquad \vec{N}_Q := \sum_i (P_i - Q) \times \vec{v}_i$$

Def: Dati $\{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^{N}$ e $\{(Q_j, \vec{w}_j)\}_{j=1}^{M}$ si dicono equivalenti se hanno stessa risultante e momento risultante rispetto a qlng polo Q

Def: Diciamo che un sist. di vettori applicati è equilibrato se $\{(\vec{v}_i, P_i)\}_{i=1}^{N}$ ha

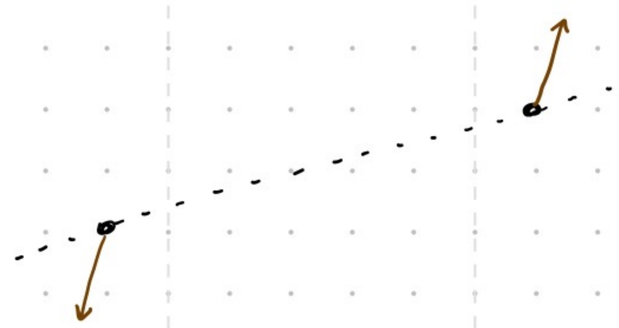
$$\vec{R} = 0 \qquad e \qquad \vec{N}_Q = 0$$

OPERAZIONI ELEMENTARI

Consideriamo le seguenti op. elem. su un sist. S di vett. applicati.

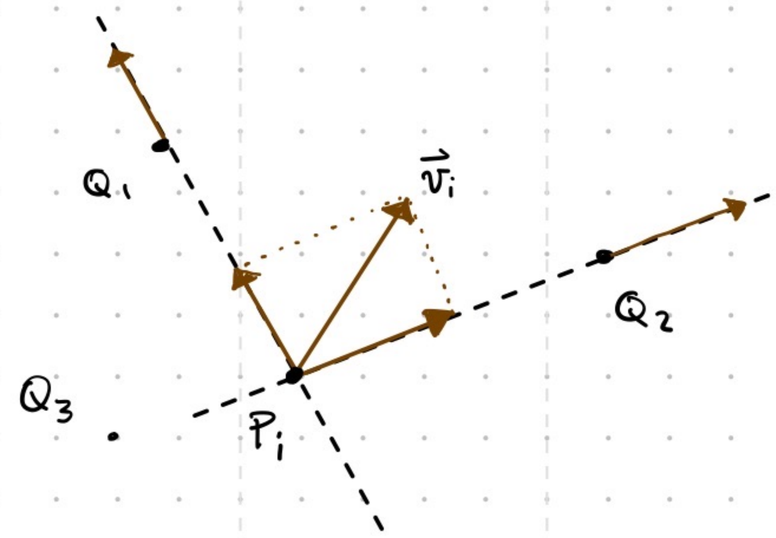
i) Composizione e scomp. di vett. in uno stesso punto

ii) Aggiunta / eliminazione di vettori opposti e paralleli alla retta cong. i loro pt. di applicazione.

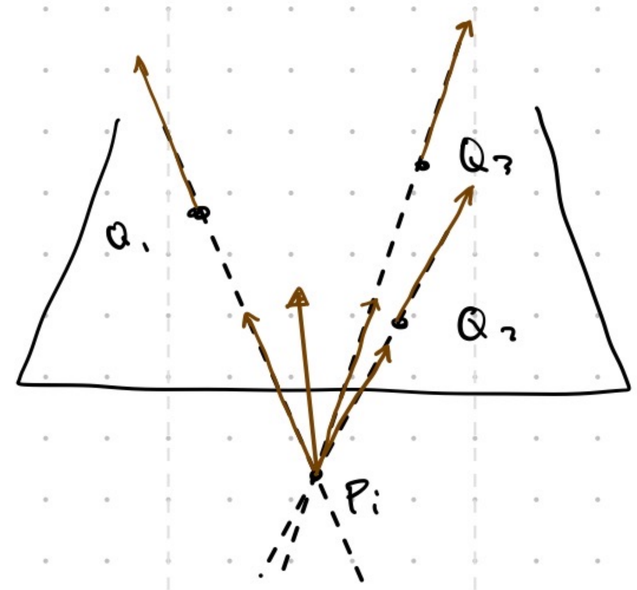


Prop: Ogni sistema di vett. applicati $\{(\vec{v}_i, P_i)\}$ può essere ridotto ad un sist. di tre vett. (anche nulli) applicati in tre pt. distinti non allineati scelti a piacere.

Dim: Siano Q_1, Q_2, Q_3 tre pt. non allin.



1) Se $(\vec{v}_i, P_i)$ appartiene a $\text{span}\{Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1\}$ e P_i giace nel piano $Q_1Q_2Q_3$ allora con la prima op. possiamo scrivere $\vec{v}_i$ come combinazione lineare di due $Q_\square - P_i$



2) Altrimenti $\vec{v}_i$, intanto assumiamo che sia applicato in un pt. non nel piano $Q_1Q_2Q_3$, possiamo ora decomp. v_i come

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j (Q_j - P_i)$$

per qlc. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e traslarli risp. in Q_j

In particolare questo procedimento possiamo eseguirlo per ogni (P_j, v_j)

Prop: Ogni sist. di vett. applicati può essere ridotto tramite op. elementari ad un sist. di due soli vett. applicati dove uno dei due pt. può essere scelto a piacere.

Dim: Scegliamo Q a piacere e poi prendiamo Q_1, Q_2 non allin. con Q e per la prop. prima possiamo ridurre S a

$$\{(Q, \vec{w}), (Q_1, \vec{w}_1), (Q_2, \vec{w}_2)\}$$

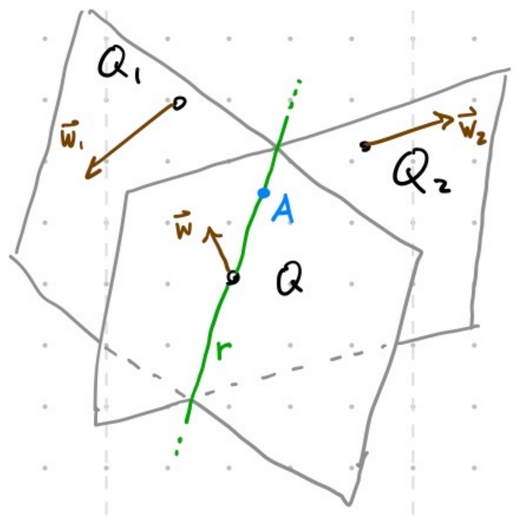
Siano ora i piani

$$\Pi_1 := QQ_1\vec{w}_1 \quad \text{e} \quad \Pi_2 := QQ_2\vec{w}_2$$

dove se $\vec{w}_1$ (risp. $\vec{w}_2$) è nullo prendiamo

un piano qualsiasi.

·) Se $\Pi_1 \neq \Pi_2$ e $Q_1, Q_2 \notin r$ con $r := \Pi_1 \cap \Pi_2$ scegliamo $A \neq Q$ su r. Decomponiamo $(Q_i, \vec{w}_i)_{i=1,2}$ lungo Q ed A dunque possiamo scrivere il sist. di 3 vett. applicati come 2.



·) Se invece $\Pi_1 \neq \Pi_2$ ma $Q_1 \in r$ (risp. Q_2) allora possiamo prendere $A = Q_1$.

·) Se invece $\Pi_1 = \Pi_2$ possiamo prendere $A = Q_1$ o $A = Q_2$.

$\square$

ASSE CENTRALE

Prop: Dato un sistema di vettori applicati $\{(P_i, \vec{v}_i)\}_{i=1}^{N}$ con risultante $\vec{R} \neq 0$, $\exists! r$ detta asse centrale formata da tutti i punti $Q \in \mathbb{E}^3$ tc.

$$N_Q \times \vec{R} = 0$$

Dim: Ricordiamo che $\forall P, Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{N}_P = \vec{N}_Q + (Q - P) \times \vec{R}$$

Scelto a piacere $O' \in \mathbb{E}^3$, consideriamo il piano $\Pi_{O'}$ passante per O' e ort. a $\vec{R}$.

Osserviamo che se $Q \in \Pi_{O'}$ e $Q' \in \{Q + \lambda \vec{R}\}$ passante per Q e parallela a $\vec{R}$, dl rel sopra si ottiene $\vec{N}_{Q'} = \vec{N}_Q$

$$\Rightarrow \vec{N}_{Q'} \times \vec{R} = \vec{N}_Q \times \vec{R}$$

Ovvero per cercare l'asse centrale possiamo limitarci a trovare in $\Pi_{O'}$ un pt. Q_0 tc. $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = 0$.

$$\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = \left(\vec{N}_{O'} + (O' - Q_0) \times \vec{R}\right) \times \vec{R} =$$

$$= \vec{N}_{O'} \times \vec{R} - |\vec{R}|^2 \cdot (O' - Q_0) \qquad \leftarrow O' - Q_0 \perp \vec{R}$$

In particolare se $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = 0$

$$0 = \vec{N}_{O'} \times \vec{R} - |\vec{R}| \cdot (O' - Q_0)$$

$$\Rightarrow Q_0 - O' = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \times \vec{N}_{O'}$$

$\square$

Oss: Inoltre l'espressione $\vec{N}_P \cdot \vec{R}$ non dip. dalla scelta del polo e si chiama trinomio invariante

Oss: Sia $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{N}_Q = \frac{1}{|\vec{R}|^2} [(\vec{N}_Q \cdot \vec{R})\vec{R} + \vec{R} \times (\vec{N}_Q \times \vec{R})]$$

Il primo vettore è lo stesso al variare di Q perché $\vec{N}_Q \cdot \vec{R}$ è il trinomio invariante.

Se si sceglie Q_0 dl' asse centrale $\vec{N}_{Q_0} \times \vec{R} = 0$ dunque

$$|\vec{N}_Q| = \frac{1}{|\vec{R}|^2} \sqrt{(\vec{N}_Q \cdot \vec{R})^2 \cdot |\vec{R}|^2 + |\vec{R} \times (\vec{N}_Q \times \vec{R})|^2}$$

segue che

$$|\vec{N}_{Q_0}| = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} |\vec{N}_Q|$$

COPPIE DI VETT. APPLICATI

Def: Una coppia di vett. applicati è un sist. della forma $\{(P_1, \vec{v}), (P_2, -\vec{v})\}$ tali che La quantità $|(P_1 - P_2) \times \vec{v}_1| / |\vec{v}_1|$ è la dist. tra le rette $P_1\vec{v}_1$, $P_2\vec{v}_2$ ed è detta braccio della coppia.

Oss: Il momento di una coppia non dip. dal polo infatti

$$(P_1 - Q) \times \vec{v}_1 + (P_2 - Q) \times \vec{v}_2 = (P_1 - P_2) \times \vec{v}_1$$

Prop: Ogni sist. di vett. applicati S è equiv. ad un sistema costituito da un vett. applicato in un pt. qlnq e da una coppia di vettori dipendente dl scelta di Q.

Dim: Siano $\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i$ e $\vec{N}_Q = \sum (P_i - Q) \times \vec{v}_i$ risp. a $Q \in \mathbb{E}^3$ scelto a piacere.

Consideriamo il sist. di vett. applicati

$$S' := \{(Q, \vec{R}), (Q_1, \vec{v}), (Q_2, -\vec{v}_2)\}$$

con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{v} \in \mathbb{V}^3$ t.c. $(Q_1 - Q_2) \times \vec{v}$ della coppia $\{(Q_1, \vec{v}), (Q_2, -\vec{v})\}$ sia uguale a $\vec{N}_Q \Rightarrow S'$ è equiv. a S. $\square$

Prop: Un sist S è equiv. ad uno con un solo vett. o una sola coppia $\Leftrightarrow$ il trinomio invariante è nullo.

Dim:

$\boxed{\Rightarrow}$ Se S è equiv. ad un sist. con una sola coppia $\vec{N}_Q \cdot \vec{R} = 0$ ed anche se è equiv ad un sist. con un solo vett. $\vec{N}_Q \cdot \vec{R} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $\vec{R} = 0$ allora usando la prop. prec il sist è equiv. ad un sist. con una sola coppia.

Se $\vec{R} \neq 0$ allora $\vec{N}_Q = 0 \Rightarrow \vec{N}_Q \times \vec{R} = 0$ ovvero $\vec{N}_Q = 0$ su tutti i pt. dl asse centrale $\Rightarrow$ sempre per la prop. prec si ottiene sempre un sist. con un solo vett.

CENTRO DI VETT. PARALLELI

Consideriamo un sist $\{(P_i, v_i \hat{e})\}_{i=1}^N$ di vett. tutti paralleli con $v_i \in \mathbb{R}$ e $\hat{e}$ vett. unit.

Def: Scelto $Q \in \mathbb{E}^3$, il centro è $C \in \mathbb{E}^3$

$$v(C - Q) = \sum_{i=1}^N v_i (P_i - Q) \quad \text{con} \quad v = \sum_{i=1}^n v_i$$

Oss: Analogamente al baricentro Q non dip. dl scelta di Q.

Oss: C appartiene all'asse centrale.

SISTEMI MECCANICI CONSERVATIVI

Prop: Le forze int. di tipo classico ammettono un'energia potenziale

$$V^{int}(x) := \sum_{1\le i<j\le N} V_{ij}(\rho_{ij}(x)) \qquad x = (x_1, \dots, x_N)$$

con

$$\frac{dV_{ij}}{d\rho_{ij}} = -f_{ij}$$

cioè $F_k^{int} = -\nabla_{x_k} V^{int} \quad \forall k$

Dim:

$$\nabla_{x_k} V^{int} \overset{\text{def. } V^{int}}{=} \sum_{1\le i<j\le N} \nabla_{x_k} V_{ij} \overset{V_{ij} \text{ dip. solo da } x_i, x_j}{=} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \nabla_{x_k} V_{kj} =$$

$$\overset{\text{chain rule}}{=} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \frac{dV_{kj}}{d\rho_{kj}} \nabla_{x_k} \rho_{kj} \underset{\nabla\rho = \hat{e}}{=} -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} f_{kj} \frac{r_{kj}}{\rho_{kj}} =$$

$$\underset{\text{def.}}{=} -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} F_{kj} \underset{\text{def.}}{=} -F_k^{int}$$

Oss: Possiamo anche assumere $V_{ij} = V_{ji}$, in questo caso

$$V^{int}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{N} V_{ij}(\rho_{ij})$$

Oss: Singolarmente la

$$V_k^{int}(x) = \sum_{j=1, j\neq k}^{N} V_{kj}(\rho_{kj}) \Rightarrow F_k^{int}(x) = -\nabla_{x_k} V_k^{int}$$

ma $\sum_{k=1}^{N} V_k^{int}$ non va bene come energia pot. di forze interne.

Def: Potenza di forze int. e est.

$$\Pi^{int} := \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^{int} \cdot \vec{v}_j \qquad \Pi^{est} := \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^{est} \cdot \vec{v}_j$$

Th (di energia cinetica): Sia x una sol. di eq. di Newton, allora vale

$$\dot{T} = \Pi$$

inoltre se le forze int. sono di tipo classico

$$\frac{d}{dt}\left(T + V^{int}\right) = \Pi^{est}$$

Dim:

$$\dot{T} = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i \cdot \dot{x}_i)^2 =$$

$$= \sum_i m_i \ddot{x}_i \cdot \dot{x}_i =$$

$$= \sum_i F_i \cdot \dot{x} = \Pi$$

Inoltre se le forze int. sono di tipo classico

$$\frac{d}{dt} V^{int} = \nabla_x V^{int} \cdot \dot{x} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{x_i} V^{int} \cdot \dot{x}_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} F_i^{int} \cdot \dot{x}_i = -\Pi^{int}$$

$\square$

Def: F_i^{est} che agisce su P_i è detta conservativa se è puramente posizionale, cioè $F_i^{est}(x_i)$ ed $\exists V_i(x_i)$ tc. $F_i^{est} = -\nabla_{x_i} V_i$

Def: Un sist. meccanico si dice conservativo se le F_i sono pos. e se $\exists V(x)$ tc. $F_i = -\nabla_{x_i} V$.

Oss: Se le forze est. sono conservative allora

$$V^{est}(x) := \sum_{i=1}^{N} V_i(x) \Rightarrow F_i^{est} = -\nabla_{x_i} V^{est}$$

$$\Rightarrow V(x) = V^{int}(x) + V^{est}(x)$$

Def: L'energia tot. è

$$E(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) + V^{int}(x) + V^{est}(x)$$

Prop (Conservazione di energia): L'energia tot. in un sist. di N pt. sogg. a forze int. di tipo classico e forze est. conservative è un int. primo

Dim:

$$\frac{d}{dt}\left(T + V^{int} + V^{est}\right) = \Pi^{est} + \frac{d}{dt} V^{est} = 0$$

poiché

$$\frac{d}{dt} V^{est} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{x_i} V^{est} \cdot \dot{x}_i = -\sum_{i=1}^{N} F_i^{est} \cdot \dot{x}_i$$

$$= -\Pi^{est}$$

MOMENTO DI INERZIA

Consideriamo un sist. di N pt. mat. sogg. solo a forze int. classiche, allora

$$m_i \ddot{x}_i = -\nabla_{x_i} V(x_1, \dots, x_N)$$

Def: Il momento di inerzia dl sist risp a x_B

$$I(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i - x_B|^2$$

Prop: Vale

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i - x_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \le i < j \le N} m_i m_j |x_i - x_j|^2$$

Dim:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} m_i m_j |x_i - x_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_i m_j \left(|x_i|^2 + |x_j|^2 - 2 x_i \cdot x_j \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (m - m_i) |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (m - m_j) |x_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j x_i \cdot x_j$$

$$= m \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i^2 |x_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j (x_i \cdot x_j)$$

$$= m \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i|^2 - \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j (x_i \cdot x_j)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i |x_i - x_B|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{N} m_j x_j \right) \cdot \left(x_i - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{N} m_h x_h \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{m} x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m^2} \sum_{j,h=1}^{N} m_j m_h x_j \cdot x_h$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i |x_i|^2 - \frac{2}{m} \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j (x_i \cdot x_j) + \frac{1}{m} \sum_{j,h=1}^{N} m_j m_h x_j \cdot x_h$$

Prop: Vale

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot x_i$$

Dim:

$$\dot{I} = 2 \sum m_i x_i \cdot \dot{x}_i \qquad \ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{x}_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot x_i$$

Prop (Identita' di Lagrange): Se le forze sono conservative e V è omogenea di grado α

$$\ddot{I} = 4T - 2\sum_{i=1}^{N} \nabla_{x_i} V \cdot x_i = 4T - 2\alpha V$$

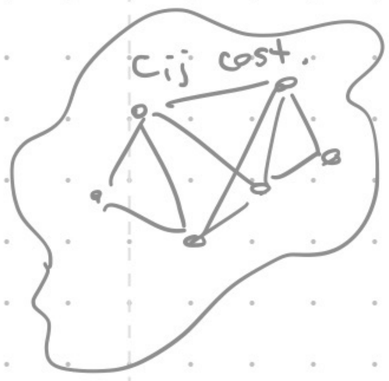
$$= 4E - 2(\alpha+2)V.$$

6. IL CORPO RIGIDO

Def: Un corpo rigido discreto/continuo è un sistema formato da N punti mat. che mantengono le dist. due a due cost. al variare del tempo

CORPO RIGIDO (DISCRETO)

Sia $\mathcal{C}$ un corpo rigido disc., P_i, m_i punti mat. Fissato $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ le pos. dei P_i sono $P_i - O$ con coord. x_i in $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ dette $\rho_{ij} = |x_i - x_j|$ abbiamo che $\rho_{ij} = c_{ij} > 0$ costanti.



$\mathcal{C}$ corpo rigido, formato da P_i, m_i con coord. in Σ x_i. Il suo insieme di conf. è

$$\{(x_1, \dots, x_N) \mid |x_i - x_j| = c_{ij}\}$$
$$\parallel$$
$$\mathrm{Conf}(\mathcal{C})$$

SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^m$

Def: Sia $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ una mappa diff. con $1 \le k \le m$.

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Psi(x) = 0\}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m$ di dim $m-k$

$$\mathrm{rk}\, \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) = k \qquad \forall x \in \mathcal{C}$$

PARAMETRIZZAZIONI E COORDINATE LOCALI

Per il th. di fn. implicita $\forall x \in \mathcal{C}$ esistono di coord locali $q = (q_1, \dots, q_n)$ ed una mappa

$$\chi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}$$
$$q \mapsto \chi(q)$$

con $\mathrm{rk}\, \frac{\partial \chi}{\partial q}(q) = n$. Con U aperto di $\mathbb{R}^n$.

PROPRIETÀ CINEMATICHE DI UN CORPO RIGIDO

Prop: Se tutti i punti di C sono allineati il suo insieme di conf. è in bij con

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$$

Dim: Sappiamo tutte le dist c_{ij}, per conoscere le pos. di tutti i punti ci basta conoscerne solo due e.g. P_1, P_2, infatti nel caso P_i si può ottenere con c_{1i}, c_{2i}. Inoltre per P_1 possiamo specificare le sue coord. in $\mathbb{R}^3$, mentre per ricavare P_2 basta usare c_{12} e la dir. di $P_2 - P_1$ che è un vett. di norma 1 ovvero un pt. di $\mathbb{S}^2$.

Assumiamo ora esistano $P_1, P_2, P_3 \in C$ non allin.

Def: Diciamo che $\Sigma' = O' \hat{e}_1' \hat{e}_2' \hat{e}_3'$ è solidale a C se i pt. P_i hanno tutti vel. nulle in Σ' cioè le coord. di tutti i pt. in Σ' sono cost.

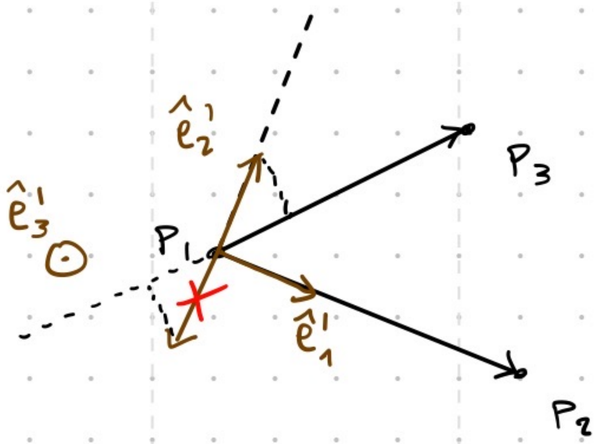
Oss: Dato C con tre pt. non allin. possiamo costruire Σ' ad esempio come segue:

0) $O' := P_1$

i) $\hat{e}_1' := P_2 - P_1 / \rho_{12}$

ii) $\hat{e}_2' \in \pi(P_1, P_2, P_3) \cap \hat{e}_1'^{\perp}$ e tale che $(P_3 - P_1) \cdot \hat{e}_2' > 0$

iii) $\hat{e}_3' := \hat{e}_1' \times \hat{e}_2'$.



Prop: Se C ha tre pt. non allineati allora l'insieme delle configurazioni di C è in bij. con

$$\mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

Configurazioni di C

$$\{(x_1, \dots, x_N) \mid |x_i - x_j| = c_{ij} \ \forall i,j\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid \dots\}$$

P_1, P_2, P_3 in Σ non allineati

$$\Updownarrow \Phi$$

Dim: Sia Σ' un rif. solidale a C, mostriamo che per det. le coord. x_i dei P_i in Σ ci basta descrivere la posizione del rif Σ'

$\mathbb{R}^3 \times SO(3)$

risp. a Σ che è det. da O' e da una mat. $R \in SO(3)$

Siano ora x_i le coord. dei pt. in Σ. Definiamo

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \to \mathbb{R}^9$$
$$(x_{O'}, R) \mapsto (x_{O'} + Rx_1', \; x_{O'} + Rx_2', \; x_{O'} + Rx_3')$$

Φ è iniettiva poiché se

$$x_{O'}^{(1)} + R_1 x_j' = x_{O'}^{(2)} + R_2 x_j'$$

allora

$$R_1(x_2' - x_1') = R_2(x_2' - x_1') \quad e$$
$$e \quad R_1(x_3' - x_1') = R_2(x_3' - x_1')$$

poiché $x_2' - x_1'$ e $x_3' - x_1'$ sono lin. indip., $R_2^{-1} R_1$ è in $SO(3)$ ed ha due autoval. indip. per $\lambda = 1 \Rightarrow R_1 = R_2 \Rightarrow x_{O'}^{(1)} = x_{O'}^{(2)}$. $\square$

Prop.: Le coord. $x_{O'}$ e la mat. R si ottengono univoc. da x_1, x_2, x_3 e x_1', x_2', x_3' dei pt. P_1, P_2, P_3 in Σ e Σ'.

Dim: Consideriamo i vettori

$$u := x_2 - x_1, \quad v := x_3 - x_1, \quad w := u \times v$$
$$u' := x_2' - x_1', \quad v' := x_3' - x_1', \quad w := u' \times v'$$

Consideriamo le mat. invertibili

$$A = [u | v | w] \quad e \quad A' = [u' | v' | w']$$

e osserviamo che

$$u = Ru', \quad v = Rv', \quad w = Ru' \times Rv' = Rw'$$

da cui

$$A = RA' \Rightarrow R = A(A')^{-1}$$

mentre il vettore $x_{O'}$ si può ottenere da

$$x_j = x_{O'} + Rx_j' \Rightarrow x_{O'} = x_j - Rx_j'$$

$\square$

Prop: L'insieme $O(3)$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^9$ di dimensione 3.

Dim: Consideriamo la mappa $\Psi = (\Psi_{ij})_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{3}$

$$\Psi_{ij} : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^6$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{h=1}^{3} a_{ih} a_{jh} - \delta_{ij}$$

Esempi:

$(1,1)$: $a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} - 1$

$\Rightarrow \; d/da_{11} = 2a_{11}$

$(1,2)$: $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}$

$\Rightarrow \; d/da_{11} = a_{21}$

Il gradiente in $a = (a_{11}, \dots, a_{33})$ è

$$\nabla_a \Psi(a) = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix} =: A$$

Dette $r_1, \dots, r_6 \in \mathbb{R}^9$ le righe di $\partial\Psi/\partial a$, vediamo che $\sum_i^6 \lambda_i r_i = 0 \iff \lambda_i = 0$. Dalle righe di A otteniamo

$$2\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0$$

$$2\lambda_2 A_1 + \lambda_4 A_2 + \lambda_5 A_3 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,4,5} = 0$$

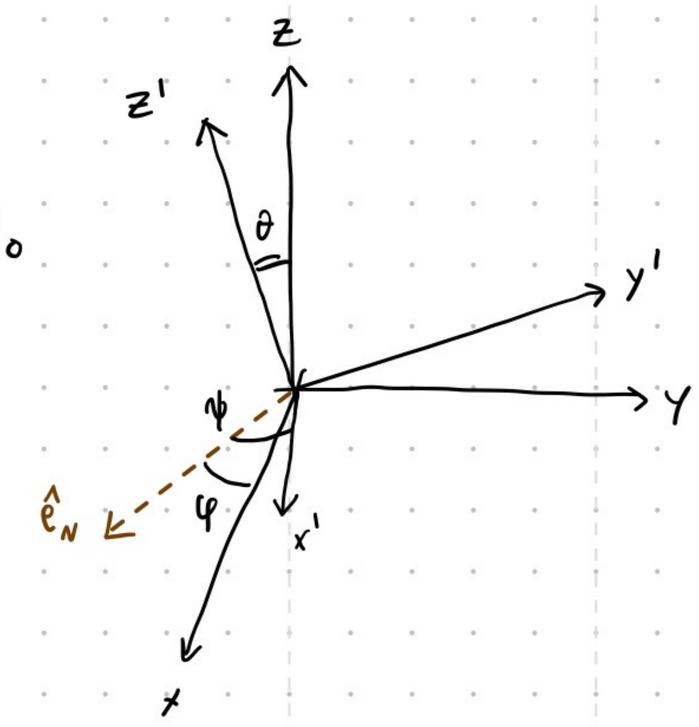
$$2\lambda_3 A_1 + \lambda_5 A_2 + \lambda_6 A_3 = 0 \Rightarrow \lambda_{3,5,6} = 0$$

$\square$

Oss: $SO(3)$ è una componente connessa di $SO(3)$ def. dl mat. di $O(3)$ con det. 1.

ANGOLI DI EULERO

Introduciamo dl coord. loc. su $SO(3)$. Sia $\Sigma = O\hat{e}_{i=1,2,3}$ e $\Sigma' = O\hat{e}'_{i=1,2,3}$ solidale al corpo rigido



A meno di ruotare Σ possiamo assumere $O\hat{e}_1\hat{e}_2$ non parallelo a $O\hat{e}'_1\hat{e}'_1$

$$r_N := \{\lambda \hat{e}_N \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \hat{e}_N := \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3|}$$

detta linea dei nodi. Introduciamo:

- φ angolo tra $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_N$

·) θ angolo tra $\hat{e}_3$ e $\hat{e}_3'$

·) ψ angolo tra $\hat{e}_N$ e $\hat{e}_1'$

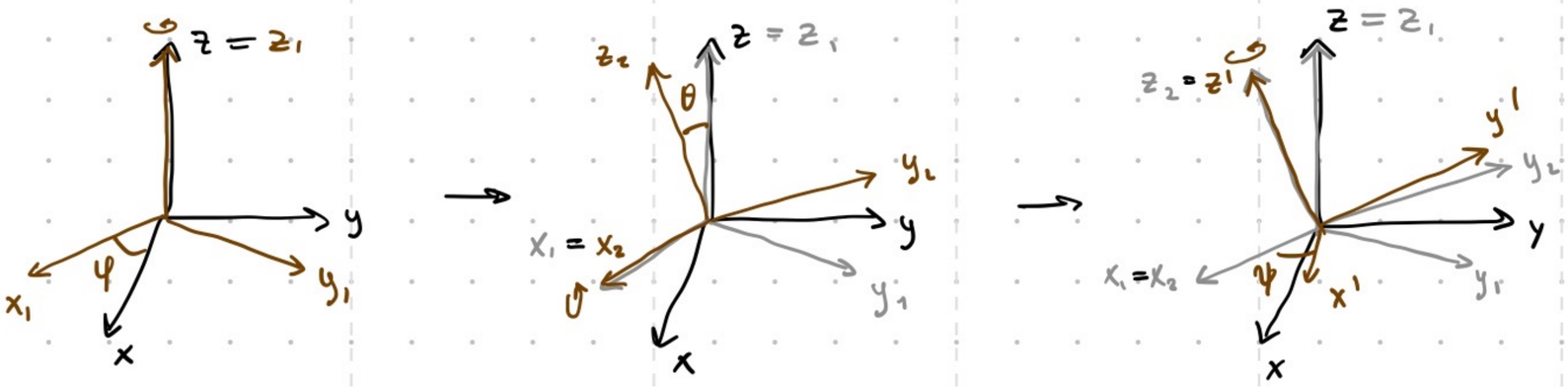
e (φ, ψ, θ) sono detti angoli di Eulero.

Si possono descrivere con una serie di rotazioni

-) Rotazione di φ attorno a Oz

·) Rotazione di θ attorno a Ox_1

·) Rotazione di ψ attorno a Oz'



Oz di φ $\qquad$ Ox_1 di θ $\qquad$ Oz_2 di ψ

<u>Prop</u>: Sia G un corpo rigido con tre pt. non allineati, allora

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \longrightarrow \mathbb{R}^9$$
$$(x_{0'}, R) \longmapsto (x_{0'} + R x_i')_{i=1,2,3}$$

dove x_i' sono le coord. di P_i nel rif. solidale, allora Φ è un diffeom. sull'immagine.

<u>Dim</u>: Sappiamo già che Φ è iniettiva, consider. $\alpha = (\psi, \theta, \varphi)$ vett. degli angoli di eulero che param. localmente in U $SO(3)$

$$\chi : \mathbb{R}^3 \times U \longrightarrow \Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3)) \subseteq \mathbb{R}^9$$

definita da

$$\chi(x_{0'}, \alpha) = (x_{0'} + R_\alpha x_i')_{i=1,2,3}$$

con jacobiana

$$\nabla^2 \chi = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} x_1' & \theta & \varphi \\ e_1 & e_2 & e_3 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} x_2' & \theta & \varphi \\ e_1 & e_2 & e_3 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} x_3' & \theta & \varphi \end{bmatrix}$$

Mostriamo che le colonne $C_1, \dots, C_6$ sono lin.

indip., abbiamo le seguenti relazioni

$$A(x_2' - x_1) = 0 \qquad A = \lambda_4 \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_5 \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_6 \frac{\partial R}{\partial \varphi}$$

e $x_i = x_{0'} + R x_i'$, otteniamo

$$A R^T (x_2 - x_1) = 0$$

con AR^T antisimm., analog. otteniamo rel.

$$A(x_3' - x_1') = A R^T (x_3 - x_1) = 0$$

$\Rightarrow A = 0$.

<u>Lemma</u>: Sia $R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}$, allora

$$\lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \lambda_{\psi,\varphi,\theta} = 0$$

(. . .)

QUATERNIONI

<u>Def</u>: Un quaternione è un'espressione della forma

$$q = a + bi + cj + dk$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e t.c.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Introduciamo anche il coniugato di q

$$\bar{q} := a - bi - cj - dk$$

e la norma

$$\|q\| := \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

da cui segue

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

Se $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ allora il quaternione si dice unitario. Invece se $a = 0$ si dice puro.

<u>Prop</u>: Sia u quat. unitario, allora

$$R_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$p \mapsto u p \bar{u}$$

allora l'imm. è formata solo da quat. puri

$(\cong \mathbb{R}^3)$ e risulta se $u = a + bi + cj + dk$

che

$$\theta = 2\arccos a = 2\arccos\sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

attorno all'asse orient. come (b, c, d).

Prop: La mappa $S^3 \ni u \mapsto R_u \in SO(3)$ è un omom. di gruppi con nucleo $\mathbb{Z}_2$ infatti quat. unit. opposti def. la stessa rot. da cui

$$S^3/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$$

HOPF

La mappa da S^3 a S^2 data da $u \mapsto u i \bar{u}$ ha come imm. un quat. puro unitario.
Le fibre di questa mappa sono circonferenze ed è un esempio di fibrazione non banale di $\mathbb{R}^3$

VELOCITÀ ANGOLARE E FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA RIGIDA

Def: Definiamo $\vec{\omega}$ vel. ang. di un corpo rigido C come quella di norma minima tra le vel. ang. di tutti i sistemi di rif. solidali

Prop:

i) Se C ha 3 pt. non allin. $\Rightarrow$ la sua vel. ang. è quella di un qlnq rif. solidale a C.

ii) Se tutti i pt. di C sono allin. allora la sua vel. ang. è data dalla diff. tra ql. in un qlnq rif. solidale a C e la sua comp. nella dir. di allin. dei punti

Dim: Consideriamo Σ e due rif. Σ' e Σ'' con $\Sigma'|_{\circlearrowleft \Sigma} = \vec{\omega}$ e $\Sigma''|_{\circlearrowleft \Sigma'} = \vec{\omega}'$

Notazione a caso ma dovrebbe essere chiara, e.g. il primo è $\vec{\omega}$ vel. ang. di Σ' risp a Σ

i) La vel. ang. di Σ'' risp. a Σ è $\vec{\omega} + \vec{\omega}'$.

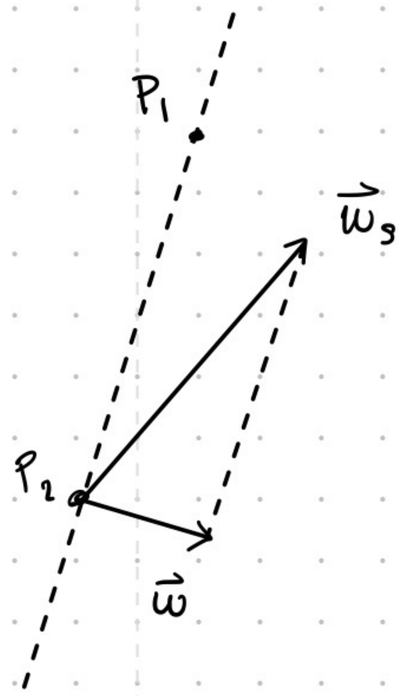
Se P_1, P_2, P_3 sono pt. di corpo non allin.
allora $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ sono vett. cost.
sia in Σ' che in Σ'' poiché sono rif. solid.
a $\mathcal{C}$ e segue che

$$\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = 0 \qquad \vec{\omega}' \times (P_3 - P_1) = 0$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{du}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

e poiché sono lin. indip. $\vec{\omega}' = 0$. Ovvero
Σ' e Σ'' hanno stessa vel. ang. risp. a Σ.

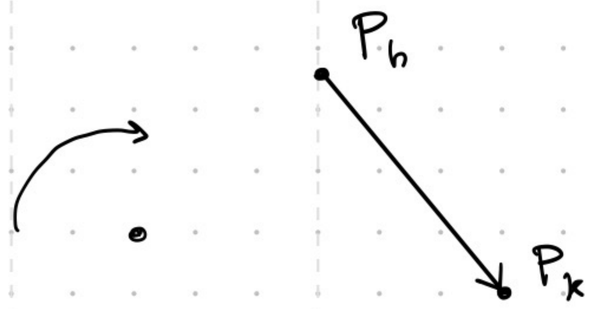
ii) Se tutti i pt. sono allineati, siano
P_1, P_2 due pt. in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = 0$
Consideriamo un qlnq sist. solidale con
vel. $\vec{\omega}_s$ e togliere la comp. parallela
all'allin. dei punti



Def: Un punto P è solidale ad un corpo $\mathcal{C}$
di P se ha vel. nulla in tutti i rif. solid.
a $\mathcal{C}$ di norma minima.

Prop: Indichiamo con $\vec{v}_h, \vec{v}_k \in \mathbb{V}^3$ le velocità
di P_h, P_k di $\mathcal{C}$ o ad esso solidali rel. a
Σ, se il corpo è in moto con vel. ang. $\vec{\omega}$
vale:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_h + \vec{\omega} \times (P_k - P_h)$$



Dim: Denotando con $\Sigma' = O'\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$ un sist.
di rif. solidale a $\mathcal{C}$ con $\vec{\omega}$ di norm. minima

$$\vec{v}_k - \vec{v}_h = \vec{v}_k' + \cancel{\vec{v}_{O'}} + \vec{\omega} \times (P_k - \cancel{O'})$$
$$- \vec{v}_h' - \cancel{\vec{v}_{O'}} - \vec{\omega} \times (P_h - \cancel{O'})$$
$$= \vec{\omega} \times (P_k - P_h)$$
$$\Rightarrow \vec{v}_k = \vec{v}_h + \vec{\omega} \times (P_k - P_h)$$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}^T$

$\vec{v}^T := \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O')$

$\vec{v}_h', \vec{v}_k' = 0$ poiché sono in Σ' che è solidale a $\mathcal{C}$

Esempio: Velocità angolare di un disco che
rotola senza strisciare su Ox:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3 \qquad 0 = \vec{v}_P = \vec{v}_B + \omega \hat{e}_3 \times (P - B) = \dots = (\dot{s} + \omega R)\hat{e}_1 \Rightarrow \omega = -\frac{\dot{s}}{R}$$

VELOCITÀ ANGOLARE E ANGOLI DI EULERO

$O\, e_1 e_2 e_3$
$\rightsquigarrow \dot\varphi\, \hat e_3$
$O\, e_N\, e_\varphi\, e_3$
$\rightsquigarrow \dot\theta\, \hat e_N$
$O\, e_N\, e_\psi\, e_3'$
$\rightsquigarrow \dot\psi\, \hat e_3'$
$O\, e_1' e_2' e_3'$

Prop: La vel. angolare di un corpo rigido si può scrivere in term. degli angoli di Eulero e delle loro deriv. temporali:

$$\vec\omega = \dot\psi\, \hat e_3' + \dot\theta\, \hat e_N + \dot\varphi\, \hat e_3$$

Dim:

Ricordiamo che possiamo scrivere gli angoli di Eulero per un cambio di rif. come

$$e_i' = R e_i \quad \text{con} \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)} \qquad \Rightarrow \quad e_i = R^T e_i'$$

da cui derivando $\dot e_i$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\dot e_i' = \dot R e_i &= (\dot R_\varphi R_\theta R_\psi + R_\varphi \dot R_\theta R_\psi + R_\varphi R_\theta \dot R_\psi)\, e_i \\
&= (\dot R_\varphi R_\theta R_\psi + R_\varphi \dot R_\theta R_\psi + R_\varphi R_\theta \dot R_\psi)\, R_\psi^T R_\theta^T R_\varphi^T e_i' \\
&= [\dot R_\varphi R_\varphi^T + R_\varphi (\dot R_\theta R_\theta^T) R_\varphi^T + R_\varphi R_\theta (\dot R_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T]\, e_i'
\end{aligned}$$

le tre matrici

$$\dot R_\varphi R_\varphi^T = \dot\varphi \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T \quad \dots$$

— Ed analogamente per θ, ψ

sono antisimmetriche, segue derivando

$$R_\varphi R_\varphi^T = I \Rightarrow \dot R_\varphi R_\varphi^T + R_\varphi \dot R_\varphi^T = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot R_\varphi R_\varphi^T = -(\dot R_\varphi R_\varphi^T)$$

— Ed analogamente per θ, ψ

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: J^{(3)}
\end{aligned}$$

MNEMONICA:
— la mat. di rotazione attorno a (3) ha un 1 in $R_{\varphi,(3,3)}$

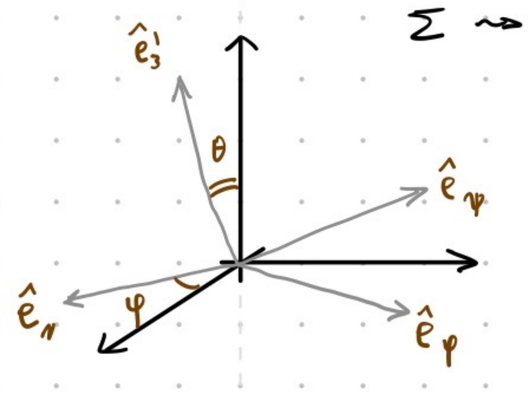
ed analogamente per θ e ψ otteniamo

$$\dot R_\varphi R_\varphi^T = \dot\varphi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \dot R_\theta R_\theta^T = \dot\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \dot R_\psi R_\psi^T = \dot\psi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

inoltre R_φ^T e $R_\theta^T R_\varphi^T$ rappr. il cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_1$ e da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_2$ con

$$\mathcal{B}_1 = \{\hat e_N, \hat e_\varphi, \hat e_3\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{\hat e_N, \hat e_\psi, \hat e_3'\}$$

$\Sigma \rightsquigarrow \Sigma_1 \rightsquigarrow \Sigma_2 \rightsquigarrow \Sigma'$



inoltre osserviamo che le mat. anti-simm.

$$\dot{R}_\varphi R_\varphi^T, \quad R_\varphi(\dot{R}_\theta R_\theta^T)R_\varphi^T, \quad R_\varphi R_\theta(\dot{R}_\psi R_\psi^T)R_\theta^T R_\varphi^T$$

corrisp. (come vettori per la corrisp. tra mat. anti-simm. e prodotto vettore):

- $\dot{R}_\varphi R_\varphi^T \rightsquigarrow$ vel. ang. di Σ_1 risp. a $\Sigma \rightsquigarrow \varphi$
- $R_\varphi(\dot{R}_\theta R_\theta^T)R_\varphi^T \rightsquigarrow \theta(t)$ attorno a $O\hat{e}_N$, Σ_2 risp. Σ_1
- $R_\varphi R_\theta(\dot{R}_\psi R_\psi^T)R_\theta^T R_\varphi^T \rightsquigarrow \psi(t)$ attorno a $O\hat{e}_3'$, Σ' risp. Σ_2

infine sostituendo in e_i per $i=1,2,3$:

$$\dot{R}_\varphi R_\varphi^T + R_\varphi(\dot{R}_\theta R_\theta^T)R_\varphi^T + R_\varphi R_\theta(\dot{R}_\psi R_\psi^T)R_\theta^T R_\varphi^T$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\psi}\hat{e}_3' + \dot{\theta}\hat{e}_N + \dot{\varphi}\hat{e}_3$$

POSIZIONI E VEL. DEI PT DI UN CORPO RIGIDO

Date $x_1', \dots, x_N'$ dei punti di un corpo rigido in un rif. solidale Σ', le coord. delle pos. $x_1, \dots, x_N$ e delle $v_1, \dots, v_N$ di qst pt. in Σ sono det. da pos O' solidale al corpo e $R \in SO(3)$ e vel. ang. ω del corpo

$$x_i = x_{O'} + Rx_i' \qquad v_j = v_{O'} + \omega \times (x_i - x_{O'})$$

ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE

Prop: Se $\vec{\omega}(t) \neq 0$ è la vel. ang. di un corpo rigido all'istante t. $\Rightarrow \exists!\, r(t)$ retta detta asse istantaneo di rotazione composta dai pt. che hanno $\vec{v}_P \times \vec{\omega} = 0$

Dim: Osserviamo che dati P, Q solidali al corpo che all'istante t si trovano su una retta parallela a $\vec{\omega}$, per la formula fondamentale si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q) = \vec{v}_Q \qquad \leftarrow \vec{\omega} \parallel P - Q$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{v}_Q \times \vec{\omega}$$

dunque basta trovare un pt. per avere tutta la retta.

Sia O' solidale e $\Pi_{O'}$ il piano ort. a $\vec{\omega}^{\perp}$ e passante per O', molt. per $\vec{\omega}$ la form. fond. per O' e $P_0 \in \Pi_{O'}$ otteniamo

$$\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times (P_0 - O')) \times \vec{\omega}$$
$$= \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2 \cdot (P_0 - O')$$

$(P_0 - O') \cdot \vec{\omega} = 0$

Imponendo ora che $\vec{v}_{P_0}$ sia nulla o $// \vec{\omega}$ otteniamo

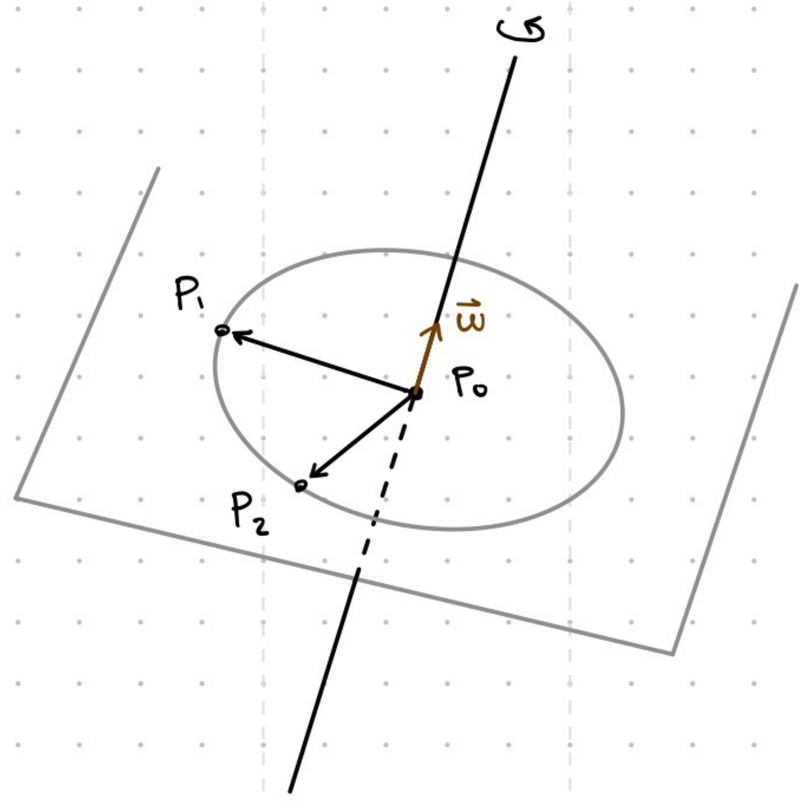
$$P_0 - O' = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}$$

che individua il pt. P_0 cercato.

CAMPO DELLE VELOCITÀ DI UN CORPO RIGIDO

<u>Prop</u>: Le velocità dei pt. solidali al corpo rigido hanno una simm. cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rot.

<u>Dim</u>: Assumiamo $\vec{\omega} \neq 0$ e consideriamo $r(t)$. WLOG basta mostrare per i pt. di un piano ortogonale ad r., dato $P_1 \notin r$ definiamo $P_0 := r \cap \Pi_{P_1}$ (centro rel. a P_1 in Π_{P_1}).



Ora dato P_2 sulla circ. di raggio P_0 e raggio $|P_1 - P_0|$ e ort. a $\vec{\omega}$ consideriamo R tc. $P_2 = P_0 + R(P_1 - P_0)$, inoltre

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0)$$
$$\vec{v}_{P_2} = v_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_2 - P_0)$$

Siccome $\vec{v}_{P_0}$ e $\vec{\omega}$ sono paralleli all'asse

$$R\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times R(P_1 - P_0) = \vec{v}_{P_2}$$

E questo in teoria conclude per quanto riguarda la simm. cilindrica.

Ora mostriamo il campo delle vel. non ha componente radiale. Intanto osserviamo che

$$\vec{v}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

$$\vec{v}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = (\vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0)) \cdot (P_1 - P_0)$$
$$= \underbrace{\vec{v}_{P_0} \cdot (P_1 - P_0)}_{\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = 0 \Rightarrow = 0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0) \cdot (P_1 - P_0) =$$
$$= 0 + \underbrace{(P_1 - P_0) \times (P_1 - P_0)}_{=0} \cdot \vec{\omega} = 0$$

Ora decomp. $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_Q$ nelle comp. lungo $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega}^{\perp}$, per $i = P, Q$:

$$\vec{v}_i^{\,\parallel} := \frac{(\vec{v}_i \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2}\vec{\omega} \qquad \vec{v}_i^{\,\perp} := \vec{v}_i - \vec{v}_i^{\,\parallel} \qquad i \in \{P, Q\}$$

dalla formula fondamentale segue che

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega}$$

Moltiplicando per $\cdot\,\vec{\omega}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q)$$

e poiché

$$\vec{\omega} \times (P - Q) \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \cdot (P - Q) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega}$$

Da cui $\vec{v}_P^{\,\parallel} = \vec{v}_Q^{\,\parallel}$

dunque cancellando vari termini dl eq. fond

$$\Rightarrow \vec{v}_P^{\,\perp} = \vec{v}_Q^{\,\perp} + \vec{\omega} \times (P - Q)$$

ed in particolare possiamo prendere uno dei due pt. sull'asse ist. di rot. dove vale $\vec{v}_Q^{\,\perp} = 0$.

$$\Rightarrow \vec{v}_P^{\,\perp} = \vec{\omega} \times (P - Q)$$

$\square$

MOTI RIGIDI PIANI

<u>Def</u>: Un moto rigido piano è tc. $\vec{\omega}$ è non nulla ed ha direzione costante e tutti i pt. hanno vel. ort. a tale direzione.

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$$

CENTRO IST. DI ROTAZIONE

Consideriamo un moto rigido piano con piano di rif. Π. In ogni istante t tc. $\vec{\omega}(t) \neq 0$ possiamo definire $r(t)$ asse ist. di rot. e def. centro ist. di rotazione il pt.

$$C_0(t) := r(t) \cap \Pi$$

<u>Prop</u> (teorema di Chasles): In un moto rigido piano il centro C_0 si trova sulla retta normale alla vel. di ciascuno dei pt. solidali al corpo distinti da C_0.

<u>Dim</u>:

Sia C_0 il centro ist. di rot., $\vec{v}_{C_0} = 0$. Quindi

$$(P_0 - C_0) \cdot \vec{v}_P = (P - C_0) \cdot (\vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times (P - C_0)) = 0$$

per ogni pt. P solidale al corpo.

$\square$

TRAIETTORIE POLARI

Consideriamo un moto rigido piano e denotiamo con Π il piano di rif.. Fissiamo in tale piano un rif. $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$ ed un rif. $\Sigma' = O'\hat{e}_1'\hat{e}_2'$ solidale al corpo rigido.

Def: Chiamiamo **base** la curva descritta dal centro di rot. C_0 in Σ e **rulletta** la curva descritta da C_0 in Σ'.

Def: Diciamo che due corpi **rotolano senza strisciare** l'uno sull'altro se le vel. dei punti dei corpi a contatto coincidono.

In particolare si dice che un corpo effettua un moto di puro rotolamento su un vincolo fisso se le vel. dei pt. a contatto sono nulle.

Prop: Durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base.

Dim: Ad ogni istante $\bar{t}$ t.c. $\vec{\omega}(t) \neq 0$ esiste un unico centro ist. C_0. Vale la seguente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_P' + \vec{\omega} \times (P - O') \qquad \longleftarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}^T$$

in cui $\vec{v}_P, \vec{v}_P'$ sono le vel. di P in Σ e Σ'

inoltre

$$0 = \vec{v}_{C_0} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (C_0 - O')$$

da cui sost.

$$\vec{v}_{C_0} = \cancel{\vec{v}_{O'}} + \vec{v}_{C_0}' + \cancel{\vec{\omega} \times (P - O')} = \vec{v}_{C_0}'$$

ovvero il pt. di contatto ha la stessa vel nei due rif.

OPERATORE DI INERZIA

Def: Sia $\mathcal{J}_Q : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ l'operatore di inerzia risp. a Q:

$$\mathcal{J}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)]$$

Prop: Per ogni scelta di Q l'applicazione bilin. indotta da $\mathcal{J}_Q$ ovvero $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \mathcal{J}_Q \vec{v}$ è simm. e se il corpo ha 3 pt. non allin. è def. > 0.

Dim:

$$\vec{u} \cdot \mathcal{J}_Q \vec{v} = \vec{u} \cdot \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{v} \times (P_h - Q)] =$$

$$= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{v} \times (P_h - Q)] \cdot \vec{u} =$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$= \sum_{h=1}^{N} m_h (\vec{u} \times (P_h - Q)) \cdot (\vec{v} \times (P_h - Q))$$

e dunque per simm. del prodotto scalare anche $\mathcal{J}_Q$ è un op. simmetrico.

Se esistono almeno 3pt. non allineati allora almeno due dei $P_i - Q$ sono lin. indip. e $|\vec{u} \times (P_i - Q)| > 0$ ...

SCOMPOSIZIONE OPERATORE DI INERZIA

Si verifica che

$$\mathcal{J}_Q \vec{u} = \mathcal{J}_B \vec{u} + m (B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)]$$

Dim: Scomponiamo $P_h - Q$ come $P_h - B + B - Q$

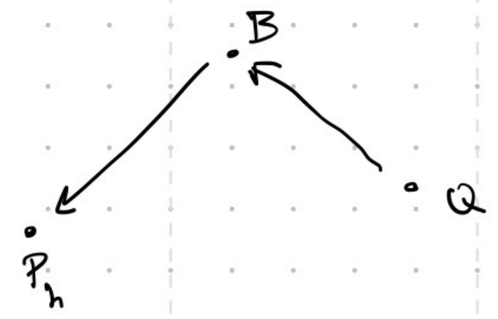
$$\mathcal{J}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)] =$$

$$= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] +$$

$$+ \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)] =$$

Vediamo che i due termini brutti sono

nulli ovvero



$$\sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] =$$

$$= -\sum_{h=1}^{N} m_h [\vec{u} \times (B - Q)] \times (P_h - B) =$$

$$= -\sum_{h=1}^{N} m_h \left[(\vec{u} \cdot (P_h - B))(B - Q) - ((B - Q) \cdot (P_h - B)) \cdot \vec{u} \right] =$$

$$=$$

Def: Dati $Q \in \mathbb{E}^3$ e $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ definiamo il momento di inerzia relativo ad un asse $Q\hat{e}$ passante per Q:

$$I_{Q\hat{e}} = \hat{e} \cdot \mathcal{J}_Q \hat{e}$$

inoltre preso Q' nello stesso asse vale

$$I_{Q'\hat{e}} = \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{e} \times (P_h - Q')|^2 =$$

$$= \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{e} \times (P_h - Q + Q - Q')|^2 =$$

Poiché $Q - Q' \parallel \hat{e}$ vale $\hat{e} \times (Q - Q') = 0$

$$= \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{e} \times (P_h - Q)|^2 = I_{Q\hat{e}}$$

Prop (Huygens-Steiner): Vale la seguente proprietà

$$I_{Q\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + m|\hat{e} \times (B - Q)|^2$$

dove B è il baricentro del corpo rigido.

Dim: Segue dagli ultimi due fatti.

Oss: Segue che

$$I_{B\hat{e}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{e}}$$

MATRICE DI INERZIA

Fissata $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ base ortonormale, $\mathcal{J}_Q$ si scrive come

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad \text{con } I_{ij} = \hat{e}_i' \cdot \mathcal{J}_Q \hat{e}_j'$$

Più precisamente, posto

$$P_h - Q = x_h \hat{e}_1' + y_h \hat{e}_2' + z_h \hat{e}_3' \qquad h = 1, \dots, N$$

$$I_{11} = \sum_{h=1}^{N} m_h (y_h^2 + z_h^2) \qquad I_{22} = \sum_{h=1}^{N} m_h (x_h^2 + z_h^2) \qquad I_{33} = \sum_{h=1}^{N} m_h (x_h^2 + y_h^2)$$

$$I_{12} = -\sum_{h=1}^{N} m_h x_h y_h \qquad I_{13} = -\sum_{h=1}^{N} m_h x_h z_h \qquad I_{23} = -\sum_{h=1}^{N} m_h y_h z_h$$

infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^{N} m_h \hat{e}_i' \times (P_h - Q) \cdot \hat{e}_j' \times (P_h - Q)$$

con

$$\hat{e}_1' \times (P_h - Q) = y_h \hat{e}_3' - z_h \hat{e}_2'$$
$$\hat{e}_2' \times (P_h - Q) = z_h \hat{e}_1' - x_h \hat{e}_3'$$
$$\hat{e}_3 \times (P_h - Q) = x_h \hat{e}_2' - y_h \hat{e}_1'$$

SIMMETRIE E MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA

Def: Gli autovalori dell'operatore $\mathcal{J}_Q$ si chiamano momenti principali di inerzia e le dir. degli autovett. direzioni principali di inerzia.

La mat. di inerzia essendo simmetrica è diag. in una base ortonormale (x th. spett.)
Quindi possiamo trovare R rotazione che la porti in forma diagonale, cioè:

$$R I_Q R^T = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

dove I_1, I_2, I_3 sono i momenti principali di inerzia.

Def: Una base $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ in cui I_Q si scrive in forma diagonale si dice base principale

Prop. (Varie proprietà):

i) Se esiste Π piano di simm. per rifl. del corpo, allora $\Pi^\perp$ è una dir. principale

ii) Per ogni punto $\exists k$ tc. c'è tutta l'orbita dei pt. per $\frac{2\pi}{k}$-rotazioni allora la dir. di r è principale.

Inoltre se $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ è una base principale per $\mathcal{J}_Q$:

iii) I momenti principali di $\mathcal{J}_Q$ soddisfano

$$I_1 \leq I_2 + I_3$$

e si ha $\boxed{=}$ solo quando il corpo è piano.

iv) Sia $\vec{v}$ un autovett. di $\mathcal{J}_Q$ con autoval. λ.

1) Se $\vec{v} = v_i \hat{e}_i' + v_j \hat{e}_j'$ $i \in \{1,2,3\}$ $i \neq j$ e $v_i v_j \neq 0$. $\Rightarrow$ Tutti i vettori nel piano gen. da $\hat{e}_i', \hat{e}_j'$ sono dir. principali con lo stesso autoval. λ.

2) Se $\vec{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{e}_j'$ $v_j \neq 0$ $\forall j$ $\Rightarrow$ J_Q è un multiplo dell'identità e tutte le dir. sono principali.

Dim:

i) Simm. per Π $\Rightarrow$ $\Pi^\perp$ è dir. principale:

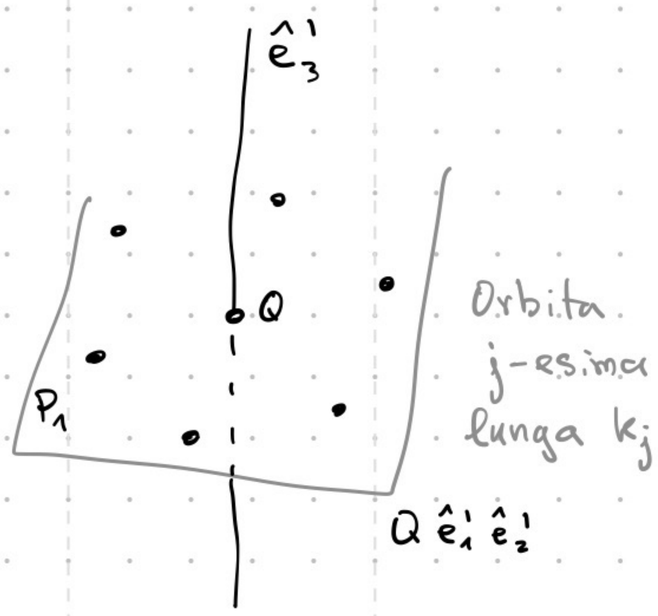
Sia $Q \in \Pi$ e sia $Q\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$ t.c. $\Pi^\perp = \langle \hat{e}_3' \rangle$

$$I_Q = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Osserviamo che $I_{13}, I_{23} = 0$, detto P_i un punto con coord. x_i, y_i, z_i, o $z_i = 0$ ed il contributo è 0, altrimenti se $z_i \neq 0$ c'è sempre un pt. corrisp. con $(x_i, y_i, -z_i)$ con contributo opposto.

ii) Simm. per $\frac{2\pi}{k}$-rotazioni $\Rightarrow$ r è dir. principale:

Consideriamo Q punto dell'asse. Se $P_i \in r$ allora non contribuisce a I_{13}, I_{23} poiché $x_i = 0$ o $y_i = 0$. (siamo nel rif. $\Sigma = Q\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$ con $Q\hat{e}_3 = r$). Invece se $P_i \notin r$ allora $\exists k_1, \dots, k_s$ con $k_j \geq 1$ $\sum_{j=1}^{s} k_j = N$ t.c.



$$I_{13} + i I_{23} = -\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i + i y_i) z_i =$$

$$= -\sum_{j=1}^{s} m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j - 1} \omega_{k_j}^{l} (x_j + i y_j)$$

Raggruppando insieme i punti che appartengono alla stessa orbita

dove $\omega_{k_j} = e^{2\pi i / k_j}$ è una k_j-esima radice dell'unità. Ora ricordiamo che

Presi punti della stessa orbita j $\exists l$ t.c. $x_i + i y_i = \omega_{k_j}^{l} (x_j + i y_j)$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \omega_k^i = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0$$

e dunque tutti i contributi dei term. sopra si cancellano e $I_{13}, I_{23} = 0$.

iii) $I_{11} \leq I_{22} + I_{33}$

$$I_1 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \leq \sum m_i (y_i^2 + 2x_i^2 + z_i^2)$$

$$= \sum m_i (y_i^2 + x_i^2) + \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_2 + I_3$$

iv) $\vec{v}$ λ-autovettore di $\mathcal{J}_Q$.

1|2) $\mathcal{J}_Q \hat{e}_j' = I_j \hat{e}_j'$ e $\vec{v} = \sum v_k \hat{e}_k'$ si ha

$$\sum_{k=1}^{3} v_k I_k \hat{e}_k' = \mathcal{J}_Q \vec{v} = \lambda \vec{v} = \sum_{k=1}^{3} v_k \lambda \hat{e}_k'$$

Se $\mathcal{J}_Q \hat{e}_i' = \lambda \hat{e}_i'$, $\mathcal{J}_Q \hat{e}_j' = \lambda \hat{e}_j'$ con $i \neq j$

allora dato $\alpha \hat{e}_i + \beta \hat{e}_j$ vale

$$\mathcal{J}_Q (\alpha \hat{e}_i' + \beta \hat{e}_j') = \alpha \lambda \hat{e}_i' + \beta \lambda \hat{e}_j'$$

$$= \lambda (\alpha \hat{e}_i' + \beta \hat{e}_j')$$

ovvero è un λ-autovettore per $\mathcal{J}_Q$.

Inoltre se $\vec{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{e}_j'$ con $v_1 v_2 v_3 \neq 0$

$\Rightarrow I_1 = I_2 = I_3$.

MOMENTO ANGOLARE ED ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO

Fissiamo $\Sigma = O \hat{e}_1' \hat{e}_2' \hat{e}_3'$, dato $\mathcal{C}$ possiamo ricavare che

$$\vec{M}_Q = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times \vec{v}_{P_h} \qquad \vec{v}_{P_h} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O)$$

$$= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] = \qquad P_h - O' = P_h - Q + Q - O'$$

$$= m (B - Q) \times \vec{v}_{O'} + \mathcal{J}_Q \vec{\omega} + m (B - Q) \times [\vec{\omega} \times (Q - O')] =$$

$$= m (B - Q) \times \vec{v}_Q + \mathcal{J}_Q \vec{\omega} \qquad \vec{M}_Q = M_Q^{(B)} + \mathcal{J}_Q \vec{\omega}$$

In particolare se $Q = B$ o se $v_Q = 0$ (polo fisso) abbiamo $\vec{M}_Q = \mathcal{J}_Q \vec{\omega}$.

Inoltre l'energia cinetica per il corpo $\mathcal{C}$ usando la formula fondamentale diventa

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{O'}|^2 + m \vec{\omega} \cdot (B - O') \times \vec{v}_{O'} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{J}_Q \vec{\omega} \qquad \frac{1}{2} m |v_h|^2 = \text{doppi prodotti}$$

$$v_h = v_{O'} + \omega \times (P_h - O')$$

e se $O' = B$ otteniamo la versione per corpi rigidi del th. di König

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{J}_B \vec{\omega}$$

CORPI RIGIDI CONTINUI

Possiamo avere corpi continui con densità lineare (λ), superficiale (σ) o di volume (ρ) di massa

Studiamo il caso di densità per il volume.

$$\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

densità di volume con $\rho(x')$ e x' rel. a Σ solidale al corpo, assumiamo ρ int. su $C \subseteq \mathbb{R}^3$.

Una param. loc. del corpo è $q \mapsto \chi(q; x')$ con $q = (x_{O'}, \alpha)$ ed $\alpha = (\varphi, \theta, \psi)$ angoli di Eulero.

La vel. dei pt. del corpo si ottiene da

$$(q, \dot{q}) \mapsto v(q, \dot{q}; x') = v_{O'} + \omega \times (\chi(q; x') - x_{O'})$$
$$= v_{O'} + \omega \times R x' \in \mathbb{R}^3$$

Ci piace che C sia definito in un sistema solidale al corpo

QUANTITÀ NOTEVOLI

•) MASSA TOTALE: $m = \int_C \rho(x')\, dx'$

•) BARICENTRO:

$$\Sigma \sim m_h (P_h - O) \sim$$
$$\int_C \sim \rho(x) R x \sim dx$$

$$m(x_B - x_{O'}) = \int_C \rho(x') R x' \, dx' =$$
$$= R \int_C \rho(x') x' \, dx'$$

•) QUANTITÀ DI MOTO:

$$p := \int_C \rho(x') v(q, \dot{q}; x') dx' = \int_C \rho(x') (v_{O'} + \omega \times R x') \, dx' =$$
$$= m v_{O'} + \omega \times R \int_C \rho(x') \cdot x' \, dx' =$$

$$= m v_{O'} + m \omega \times (x_B - x_{O'})$$

$$= m \left(v_{O'} + \omega \times (x_B - x_{O'}) \right) = m v_B$$

$$M_Q = \sum m_h (P_h - Q) \times v_h$$

•) MOMENTO ANGOLARE :

$$M_Q = \int_c \rho(x') \cdot \left(\chi(q ; x') - x_Q \right) \times v(q, \dot{q} ; x') \, dx'$$

•) ENERGIA CINETICA :

$$T = \frac{1}{2} \int_{c'} \rho(x') \cdot |v(q, \dot{q} ; x')|^2 \, dx' = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} m |v_{O'}|^2 + m v_{O'} \cdot \omega \times (x_B - x_{O'}) + \frac{1}{2} \omega \cdot I_{O'} \omega$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$P_h - Q \rightsquigarrow \chi(q ; x') - x_Q$$

$$\chi(q ; x') := x_{O'} + R x'$$

$$\shortparallel$$

$$(x_{O'}, \lambda)$$

$$\lambda \rightsquigarrow R$$

7. SISTEMI VINCOLATI

VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI

Abbiamo due tipi di vincoli:

-) UNILATERI: descritti da disequazioni

-) BILATERI: descritti da equazioni

— escludendo i casi banali tipo $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = 0$

Si distinguono anche in

-) Fissi: Non dipendenti dal tempo

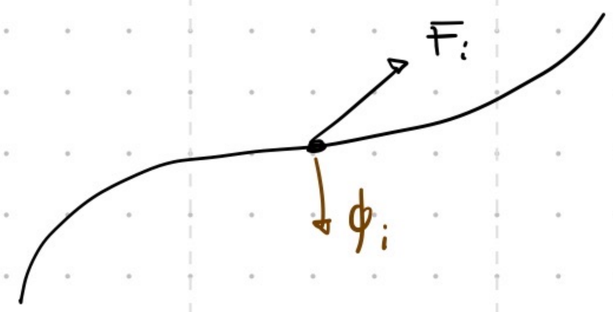
-) MOBILI: Dipendenti dal tempo

Consideriamo N punti mat. $m_1, \dots, m_N$ soggetti a vincoli bilateri. Possiamo descrivere i vincoli con un'eq. di forma:

$$a(\underline{x}, t) + B(\underline{x}, t)\,\underline{v} = 0$$

con $\underline{x} = (x_i)_{i=1}^N$ e $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^N$ vettori di pos. e vel. dei punti e $a \in \mathbb{R}^k$ e $B \in \mathbb{R}^{k \times 3N}$.

Affinché questi vincoli siano soddisfatti si assume che i vincoli esercitino delle forze Φ_i dette reazioni vincolari. Se valgono le eq. di Newton



$$m_i \ddot{x}_i(t) = F_i(x(t), \dot{x}(t), t) + \Phi_i(t)$$

si aggiungono alle forze classiche solo che sono incognite da ricavare in base al sist.

ACCENNI BASI DI FRENET

Consideriamo il caso di un pt. vincolato a muoversi su una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ definita su $I \subseteq \mathbb{R}$. Assumiamo γ p.l.a. ovvero

$$\int_0^s |\gamma'(\sigma)|\, d\sigma = s \iff |\gamma'(s)| = 1$$

Possiamo considerare la base di Frenet

$$e_t(s) := \gamma'(s) \qquad e_n(s) := \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} \qquad e_b := e_t \times e_n$$

Possiamo anche definire la curvatura come

$$k(s) := |\gamma''(s)|$$

e se $x(t) := \gamma(s(t))$ abbiamo

$$\dot{x}(t) = \dot{s}(t)\gamma'(s(t)) \qquad \ddot{x}(t) = \dot{s}^2(t)\gamma''(s(t)) + \ddot{s}(t)\gamma'(s(t))$$

se supponiamo che sul pt. agisce una forza $F(x, \dot{x}, t)$ e c'è la reazione vincolare $\Phi(t)$, proiettando sulla base di Frénet otteniamo

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_t(s, \dot{s}, t) + \Phi_t \\ m\dot{s}^2 k(s) &= F_n(s, \dot{s}, t) + \Phi_n \\ 0 &= F_b(s, \dot{s}, t) + \Phi_b \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = \dot{s}^2 k(s)\, e_n(s) + \ddot{s}\, e_t(s)$$

Una delle ipotesi che possiamo fare sulla reazione è quella di vincolo liscio ovvero

$$\Phi_t = \Phi \cdot e_t = 0$$

o vincolo senza attrito. Segue che la I-eq. diventa

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t)$$

e sostituendo otteniamo

$$\Phi_n = -F_n(s, \dot{s}, t) + m\dot{s}^2 k(s) \qquad \Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t)$$

VARIETÀ E SP. TANGENTI

Ricordiamo che data $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{C} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \Psi(x) = 0 \}$$

è una $(m-k)$-sottovarietà di $\mathbb{R}^m$ se

$$\operatorname{rk} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) = k \qquad \forall x \in \mathcal{C}$$

inoltre $\forall x \in \mathcal{C}$ possiamo introdurre coord. loc. $q = (q_1, \dots, q_n)$ dette param. loc.

$$\begin{aligned} \chi : U \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ q &\longmapsto \chi(q) \end{aligned}$$

dove $U \ni x$ è un ap. di $\mathbb{R}^n$ e χ ha rk max su U.

Def: Dati $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^m$ sottovar. e $x \in \mathcal{C}$ diciamo $v \in \mathbb{R}^m$ tangente a $\mathcal{C}$ in x se $\exists \varepsilon > 0$ e $\exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{C}$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$

Denotiamo con $T_x\mathcal{C}$ l'insieme dei vett. tangenti

Prop: $\forall x_0 \in \mathcal{C}$ l'insieme $T_{x_0}\mathcal{C}$ è uno sp. vett. di dim. n.

Dim: Data una param. loc. $q \mapsto \chi(q)$ di $\mathcal{C}$ in un int. di $x_0 = \chi(q_0)$ i vett.

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(q_0), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(q_0)$$

formano una base di $T_{x_0}\mathcal{C}$. Infatti se consid. le curve $\gamma_i(s) = \chi(q + s e_i)$ si ha $\gamma_i(0) = x_0$ e $\gamma_i'(0) = \frac{\partial \chi}{\partial q}(q_0)\, e_i = \frac{\partial \chi}{\partial q_i}(q_0)$

Def: Per ogni $x_0 \in \mathcal{C}$ l'insieme $T_{x_0}\mathcal{C}$ si chiama sp. tangente a $\mathcal{C}$ in x_0.

Def: Il fibrato tangente è l'insieme

$$T\mathcal{C} := \{(x, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid x \in \mathcal{C},\ v \in T_x\mathcal{C}\}$$

Prop: $T\mathcal{C}$ ha dimensione $2n$.

$\Psi(\gamma(t)) = 0$

$\nabla_x \Psi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ ovvero

$\forall (x, v) \in T\mathcal{C}\ \ \nabla_x \Psi(x) \cdot v = 0$

VINCOLI OLONOMI, FISSI E MOBILI

Consideriamo un sistema di N punti materiali le cui posizioni $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$ sono vincolate ad essere su $\mathcal{C}_t := \{x \in \mathbb{R}^{3N} \mid \Psi(x, t) = 0\}$ dove $\Psi : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ con $1 \leq k \leq 3N$ e si ha

$$\operatorname{rk} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, t) = k \qquad \forall x \in \mathcal{C}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Def: Il numero di gradi di libertà è la dim. di $\mathcal{C}_t$. (min. numero di param. scalari necessari per individuare la conf. dl sistema).

Consideriamo per ogni $t \in \mathbb{R}$ le mappe

$$U \ni q \longmapsto \chi(q,t) \in \mathcal{C}_t$$

che definiscono param. loc. di $\mathcal{C}_t$. Le comp. $q_1, \dots, q_n$ del vett. q si chiamano coord. lagrangiane. I possibili vettori velocità dei pt. del sistema al tempo t si scrivono nella forma

$$v(q,\dot{q},t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q,t)\,\dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial t}(q,t)$$

al variare di $q, \dot{q}, t$, inoltre $\dot{q}$ sono detti velocità lagrangiane.

$$\Psi(x(t)) \xleftarrow{\frac{d}{dt}}$$
$$\parallel$$
$$\Psi(\chi(q,t)) = 0$$

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \dot{x}(t)$$
$$\parallel$$
$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q} \cdot \dot{q}_h$$

Infatti se $t \mapsto q(t)$ rappresenta un moto $x(t) = \chi(q(t),t) \in \mathcal{C}_t$, derivando otteniamo

$$\dot{x}(t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q(t),t)\,\dot{q}_h(t) + \underbrace{\frac{\partial \chi}{\partial t}(q(t),t)}_{\text{come varia } \chi \text{ al variare del tempo.}}$$

$\Rightarrow$ se il vincolo è fisso qst è nullo

Al variare di $\dot{q}$ abbiamo

$$v(q,\dot{q},t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q,t)\,\dot{q}_h$$

descrive tutti i vettori tangenti a $\mathcal{C}_t$ e sono detti velocità virtuali. Nel caso di vincoli fissi

$$v(q,\dot{q},t) = v(q,\dot{q},t)$$

Def: Diciamo che un vincolo è olonomo se ad ogni istante t l'insieme delle conf. del sistema corrisp. ad una $\mathcal{C}_t$ e l'insieme delle vel. virt. è sempre tutto $T_x\mathcal{C}_t$.

Def: Se Ψ che definisce $\mathcal{C}_t$ verifica

$$a(x,t) + B(x,t)\,v = 0 \quad \text{con } a = \frac{\partial \Psi}{\partial t},\ B = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

allora il vincolo si dice integrabile.

9. EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

EQUAZIONI CARDINALI E MOTI RIGIDI

Per un sist. di N punti vale

$$\begin{cases} m a_B = R^{est} \\ \dot{M}_Q = -m v_Q \times v_B + N_Q^{est} \end{cases}$$

EQUAZIONI DEL MOTO CON CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Per sistemi ad un grado di libertà possiamo usare $\dot{T} = \Pi$ per trovare l'eq. di moto

$$\Pi = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum F_i \cdot (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_i - O'))$$

$$= \vec{R} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{N}_{O'} \cdot \vec{\omega} = \vec{R}^{est} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{N}_O^{est} \cdot \vec{\omega}$$

e vale analogamente per corpi continui.

[...]

Boh in qst cap. ci sono troppi esempi

EQUAZIONI DI EULERO PER IL CORPO RIGIDO CON UN PT. FISSO

Fissiamo $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ e scriviamo le eq. che descrivono il moto di un corpo rigido $\mathcal{C}$ con un pt. fisso O. In questo caso ci basta la II-eq. cardinale per det. il moto.

$$\frac{d}{dt}\vec{M}_O\Big|_\Sigma = \vec{N}_O$$

Sia $\vec{\omega}$ la velocità angolare del corpo rigido e sia $\Sigma' = O\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$ solidale a $\mathcal{C}$ e con vel. ang. di minima norma, segue

$$\vec{N}_O = \frac{d}{dt}\vec{M}_O\Big|_\Sigma = \frac{d}{dt}\vec{M}_O\Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{M}_O$$

e segue

$$\frac{d}{dt}\vec{M}_O\Big|_{\Sigma'} = \vec{M}_{O'} \times \vec{\omega} + \vec{N}_O$$

inoltre applicando $\vec{M}_O = \mathcal{J}_O \vec{\omega}$ otteniamo le eq. di Eulero.

$$\vec{M}_Q = (B - Q) \times m v_Q + \mathcal{J}_Q \vec{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{J}_O \vec{\omega})\Big|_{\Sigma'} = \mathcal{J}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{N}_O$$

Scriviamo la velocità angolare $\vec{\omega}$, il momento $\vec{M}_0$ e il momento di forza $\vec{N}_0$ in $\mathcal{B}'$

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \hat{e}_i' \qquad \vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{3} M_i \hat{e}_i' = \sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i \hat{e}_i' \qquad \vec{N}_0 = \sum_{i=1}^{3} N_i \hat{e}_i'$$

con $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, $M_0 = (M_1, M_2, M_3)^T$, $N_0 = (N_1, N_2, N_3)^T$.

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + N_3 \end{cases}$$

MOTO PER INERZIA

Def: Diciamo moti per inerzia o anche moti di Eulero-Poinsot le sol. di

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{J}_0 \vec{\omega})\Big|_{\Sigma'} = \mathcal{J}_0 \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

cioè le sol. eq. di Eulero per $\vec{N}_0 = 0$ e le eq. precedenti diventano

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_1)\omega_2\omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

1) $\vec{M}_0$ si conserva in Σ e la trasf. da Σ a Σ' è una rot.

2) $T = \Pi = \vec{R}^{est} \cdot \vec{v}_0 + \vec{N}_0^{est} \cdot \vec{\omega} = 0$

Studiamo ora questo moto sfruttando che si conservano $|M_0|$ e l'energia cinetica.

Def: Introduciamo l'ellissoide di inerzia

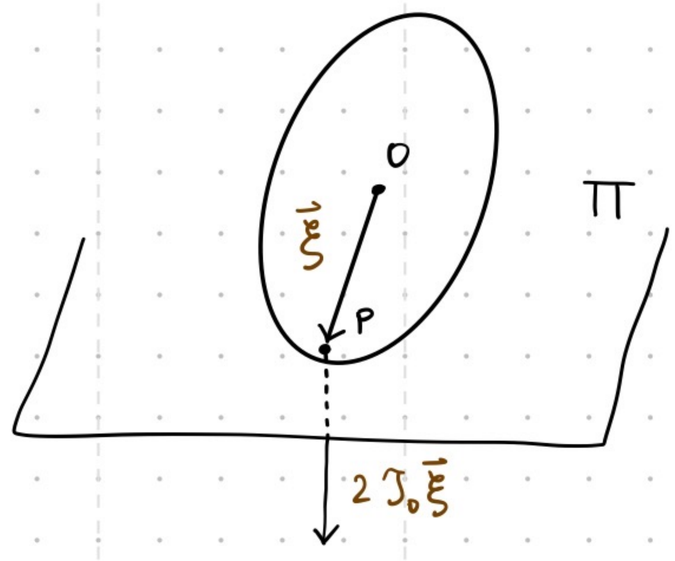
$$\mathcal{E}_0 := \{ O + \vec{x} \in \mathbb{E}^3 \mid \vec{x} \cdot \mathcal{J}_0 \vec{x} = 1 \}$$

in particolare $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E}_0$ è t.c.

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1$$

ovvero gli assi di ellissoide di inerzia sono diretti lungo le dir. principali di inerzia e le lunghezze sono $1/\sqrt{I_i}$

Prop. (Poinsot): In un moto per inerzia di un corpo rigido con punto fisso O, l'ellissoide di inerzia rel. al polo O rotola senza strisciare su un piano Π perp. a $\vec{M}_0$



Dim: Sia E il valore costante dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot J_0\vec{\omega} = E$$

Il punto $P = O + \vec{\xi}$ con $\vec{\xi} = \vec{\omega}/\sqrt{2E}$ è su $\mathcal{E}_0$

infatti

$$\vec{\xi}\cdot J_0\vec{\xi} = \frac{\vec{\omega}\cdot J_0\vec{\omega}}{2E} = 1$$

Osserviamo che

1) Ad ogni istante il piano tangente all'ellissoide in P è ort. a $\vec{M}_0$:

$$\nabla_x(x\cdot I_0 x) = 2 I_0 x$$

e sostituendo $\xi = \omega/\sqrt{2E}$ otteniamo

$$2 I_0 \xi = \sqrt{\frac{2}{E}} I_0 \omega = \sqrt{\frac{2}{E}} M_0$$

$\mathcal{E}_0 = \{x\cdot J_0 x = 1\}$ dunque per il th. di funzione implicita $\nabla_x(x\cdot J_0 x) \perp \mathcal{E}_0$ in x

2) La dist. da tale piano è cost. infatti:

$$\xi\cdot\frac{M_0}{|M_0|} = \frac{\omega\cdot M_0}{\sqrt{2E}\cdot|M_0|} = \frac{\sqrt{2E}}{|M_0|}$$

$M_0 = J_0\vec{\omega}$

3) La velocità del punto dell'ellissoide a contatto con il piano è nulla: $O\vec{\xi}$ è l'asse istantaneo di rotazione perché $\vec{v}_0 = 0$ e $\vec{\xi} \parallel \vec{\omega}$ $\Rightarrow$ tutti i pt. solidali al corpo su $O\vec{\xi}$ hanno velocità nulla.

P è un punto sull'ellissoide e sull'asse ist. di rot. $\Rightarrow$ vel. nulla.

Def: Si dice poloide la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide dal pt. a contatto.

Def: Invece è detto erpoloide la curva tracciata sul piano fisso dal pt. a contatto.

Studiamo ora i vari casi in base a I_i

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ \vdots \end{cases}$$

•) $I_1 = I_2 = I_3$ che rinominiamo I:

Se la mat. che rappr. J_0 è un mult. di identità nella base principale allora lo è in qualunque base. Dunque

$\Rightarrow I_i\dot{\omega}_i = 0$

$$\vec{M}_0 = I\vec{\omega}$$

Siccome $\vec{M}_0$ è un int. primo in Σ anche $\vec{\omega} = \vec{M}_0 / I$ è cost. $\Rightarrow$ Il moto è rotatorio uniforme attorno ad un asse fisso.

$\vec{M}_0$ cost. $\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{M}_0}{I}$ cost.

Possiamo metterci in Σ' con $\hat{e}'_3 \parallel \vec{\omega}$ ...

Se ruotiamo Σ in modo che $\hat{e}'_3 \parallel \vec{\omega}$ allora se $\vec{\omega} = \omega \hat{e}'_3$, dato P in Σ' con coord. (x, y, z)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

·) $I_1 = I_2 \neq I_3$ (simmetria giroscopica): $\Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0$

<u>Prop</u>: I vettori $\vec{\omega}, \hat{e}_3, \vec{M}_0$ soddisfano le seguenti proprietà:

i) ω_3 e $|\omega|$ sono costanti

ii) Il momento angolare $\vec{M}_0$, $\vec{\omega}$ e $\hat{e}'_3$ sono coplanari

iii) Gli angoli tra $\vec{M}_0, \vec{\omega}$ e $\hat{e}'_3$ sono due a due cost.

<u>Oss</u>: La terza prop. ci dice che le comp. di $\vec{\omega}$ su $\hat{e}'_3$ e $\vec{M}_0$ sono cost.

<u>Dim</u>:

i) Le eq. di Eulero si scrivono

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

da cui $\omega_3 = $ cost. e $\omega_1^2 + \omega_2^2 = $ cost.

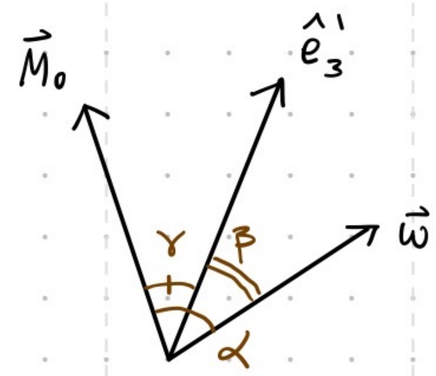
$\Rightarrow |\omega| = $ cost.

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\omega_3 \cdot \omega_2 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3 \cdot \omega_1 \end{cases}$$

$$I_1 I_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)' = 2 I_1 I_2 (\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2) =$$
$$= \cancel{2 I_2 \omega_1 \cdot \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3)} +$$
$$+ \cancel{2 I_1 \omega_2 \cdot \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1)}$$
$$= 0$$

$I_1 = I_2$ ed i term. sono opposti

iii) Siano ora α, β, γ gli angoli tra $\vec{M}_0$, $\vec{\omega}$ e $\hat{e}'_3$.



$$\cos\alpha = \frac{M_0 \cdot \omega}{|M_0| \cdot |\omega|} = \frac{2E}{|M_0| \cdot |\omega|}$$ cost. per $|\omega|$, E, M_0 cost.

$$\cos\beta = \frac{\omega_3}{|\omega|}$$ cost. per $(*)$

$$\cos\gamma = \frac{M_3}{|M_0|} = \frac{I_3 \omega_3}{|M_0|}$$ cost. per $(*)$

ii) Sono coplanari poiché

$$\begin{vmatrix} I\omega_1 & I\omega_2 & I_3\omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I\omega_1 & I\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix} = 0$$

Prop. (coni di Poinsot): Si consideri il moto di un corpo rigido con un pt. fisso O avente simm. giroscopica attorno a $\hat{e}_3'$. Allora $\vec{\omega}$ ruota attorno alla dir. fissa $\vec{M}_0$ descriv. un cono $\mathcal{C}$ con vel. cost. Analogamente la traccia di $\vec{\omega}$ sul corpo descrive un cono $\mathcal{C}'$ con vel. cost. Se consideriamo $\mathcal{C}$ fisso e $\mathcal{C}'$ solidale al corpo rigido, i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.

Dim: Il vettore $\vec{\omega}$ descrive un cono in entrambi i sist. di rif. poiché come già visto, gli angoli tra $\vec{\omega}$ e $\vec{M}_0$ e $\vec{\omega}$ ed $\hat{e}_3'$ sono costanti. I due coni rotolano senza strisciare poiché i pt. del corpo che si trovano sull'asse $O\vec{\omega}$ hanno tutti vel. nulla (in entrambi i rif. Σ e Σ', $\vec{\omega}$ ha la stessa deriv. in t nei due rif.). Resta da vedere che il moto di rot. è uniforme. Sia

$$\hat{e}_{M_0} := \frac{\vec{M}_0}{|M_0|} \Rightarrow \vec{\omega} = \omega' \hat{e}_{M_0} + \omega'' \hat{e}_3'$$

con ω' e ω'' cost., dalle formule di Poisson segue che

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_3'\Big|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}_3' = \omega' \hat{e}_{M_0} \times \hat{e}_3'$$

quindi $\hat{e}_3'$ ruota unif. attorno a $O\hat{e}_{M_0}$, cost. in Σ e per coplanarità e inv. degli angoli, $\hat{e}_3'$ si trascina anche $\vec{\omega}$. Ora vediamo che $\vec{\omega}$ ruota attorno ad $\hat{e}_3'$ in Σ'.

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_{M_0}\Big|_{\Sigma'} = -\vec{\omega}\times\hat{e}_{M_0} = -\omega''\hat{e}_3'\times\hat{e}_{M_0}$$

·) $I_1 > I_2 > I_3$ tutti distinti :

Per questo caso ricordiamo che le eq. di Eulero ammettono sempre gli int. primi :

$$\begin{cases} |M_0|^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \\ T = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) \end{cases}$$

<u>Def</u>: Diciamo rotazioni stazionarie $\vec{\omega}_s$ le sol. cost. delle eq. di Eulero.

$$\frac{d}{dt}(J_0\vec{\omega})\Big|_{\Sigma'} = J_0\vec{\omega}\times\vec{\omega} \Rightarrow J_0\vec{\omega}_s \parallel \vec{\omega}_s$$

cioè le rot. staz. sono gli autovettori di J_0 ovvero sono $\parallel$ a $\hat{e}_i'$, inoltre $\vec{M}_0 = J_0\vec{\omega}_s$ dunque anche $\vec{M}_0$ è $\parallel$ $\vec{\omega}_s$ ovvero $\vec{M}_0$ cost. anche in Σ', consideriamo ora

$$\frac{d}{dt}\vec{M}_0\Big|_{\Sigma'} = \vec{M}_0\times\vec{\omega}$$

e siano c^2, E i valori cost. degli int. primi $|M_0|^2$, T :

$$\begin{cases} M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = c^2 & (1) \\ \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E & (2) \end{cases}$$

$M_i = I_i\omega_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_i = \frac{M_i}{I_i}$

$\Rightarrow I_i\omega_i^2 = \frac{M_i^2}{I_i}$

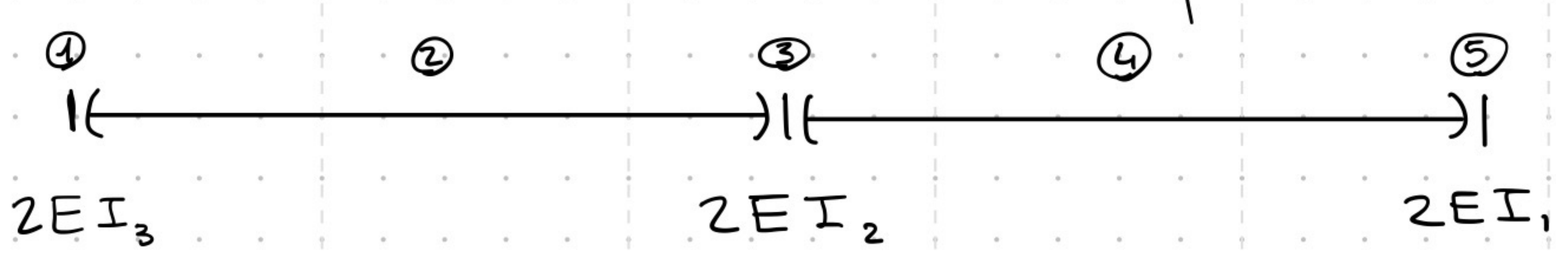
Questo sistema ci dà i possibili valori per (M_1, M_2, M_3) ovvero le coord. di $\vec{M}_0$ in $\mathcal{B}'$ solidale a Σ'.

rappresentano l'intersezione tra una sfera di raggio $|c|$ ed un ellisoide con semiassi $\sqrt{2EI_i}$. I min/max di c^2 si ottengono lungo gli assi dell'ellisse infatti da $I_1 > I_3$ otteniamo $\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_3}$ da cui

$(0, 0, \sqrt{2EI_3})$ pt. di min.

$(\sqrt{2EI_1}, 0, 0)$ pt. di max.

in conclusione abbiamo 5 casi per c^2



1) Abbiamo due pt. di equilibrio lungo $O\hat{e}_3'$

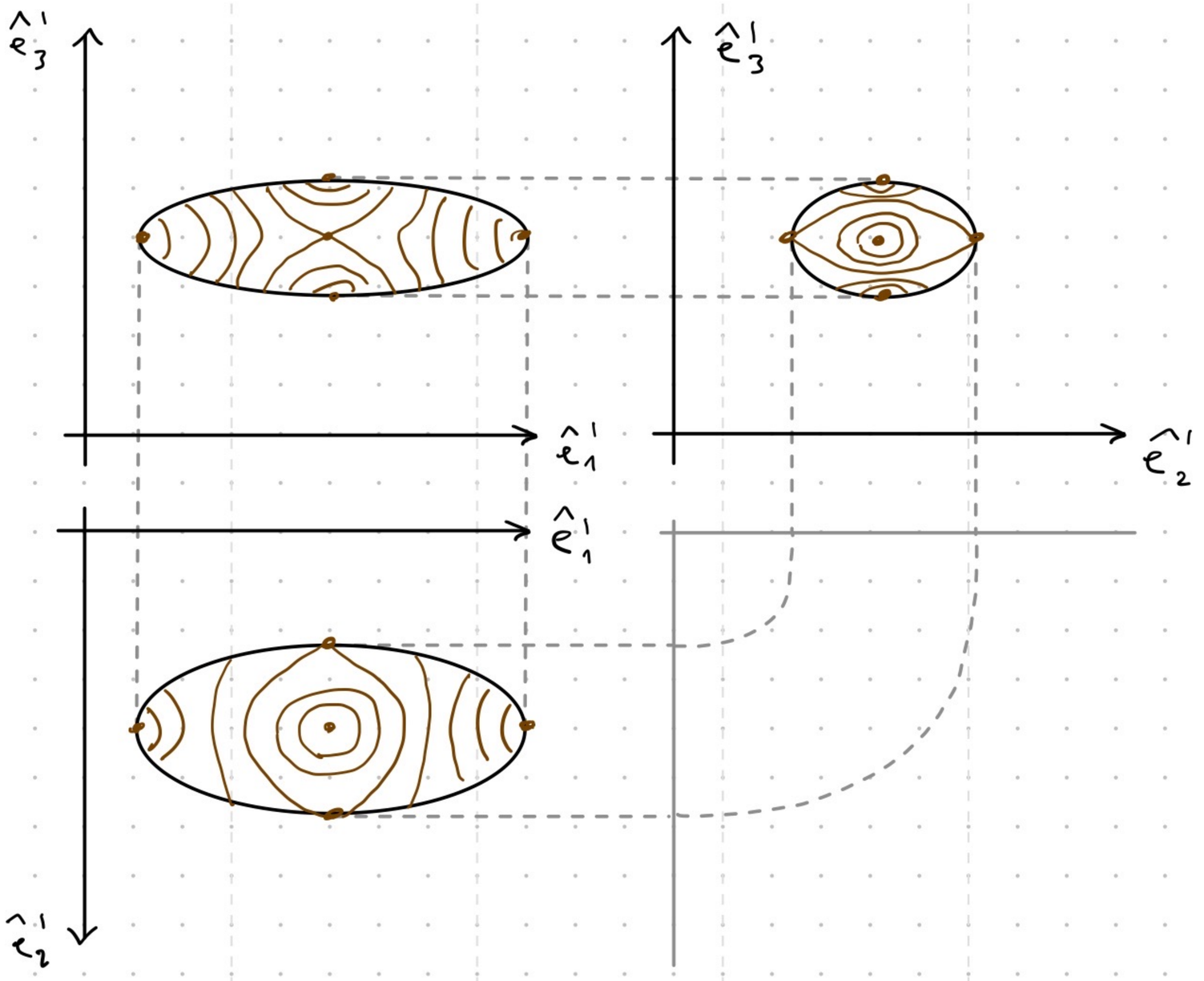
2) Abbiamo due curve chiuse attorno ad $O\hat{e}_3'$

3) Abbiamo due pt. di equilibrio sull'asse $O\hat{e}_2'$

e 4 curve che li congiungono.

4) Due curve chiuse attorno ad $O\hat{e}_1'$ e 2 pt. di equil.

5) Abbiamo due pt. di equilibrio sull'asse $O\hat{e}_1'$.



EQUILIBRI E STABILITÀ

Consideriamo ora sistemi di eq. diff $x \in \mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = f(x) \qquad (*)$$

Def: Si definiscono equilibri di $(*)$ i pt. x_0 tc. $f(x_0) = 0$.

Def: Un equilibrio x_0 è stabile se per ogni int. U di x_0 esiste un int. V di x_0, $V \subseteq U$ tc. per ogni $y \in V$ la sol. $x(t) = x(t;y)$ con $x(0) = y$ soddisfa $x(t;y) \in U$ $\forall y \in V, \forall t \geq 0$

Def: Un equilibrio x_0 è instabile se non è stabile

EFFETTO GIROSCOPICO

Consideriamo un corpo rigido con mom. princ. di inerzia I_i con $I_1 = I_2 \neq I_3$. Abbiamo

$$\vec{\omega}^{\perp} = \omega_1 \hat{e}_1' + \omega_2 \hat{e}_2'$$
$$\vec{M}_0 = I_1 \vec{\omega}^{\perp} + I_3 \omega_3 \hat{e}_3'$$

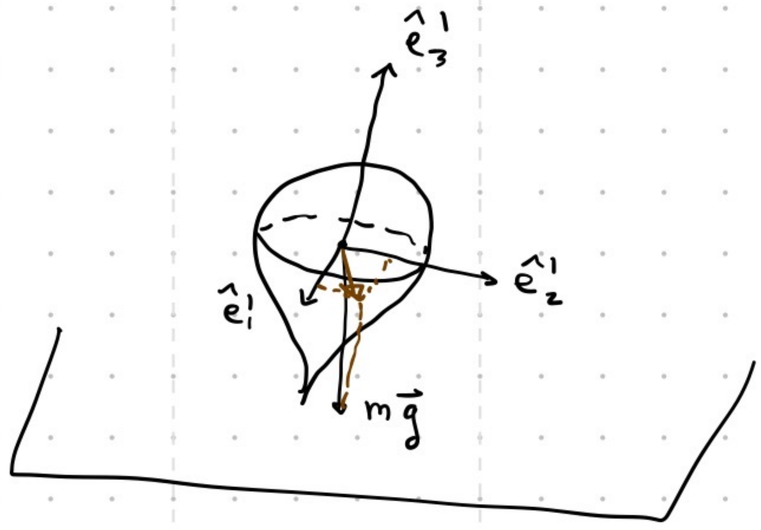
Supponiamo che la comp. lungo $\hat{e}_3'$ del mom. delle forze est. risp. a O sia nulla: $N_3 = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{M}_0 \Big|_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \left(I_1 \vec{\omega}^{\perp} + I_3 \omega_3 \hat{e}_3' \right) \Big|_{\Sigma} = \vec{N}_0 = N_1 \hat{e}_1' + N_2 \hat{e}_2' \qquad (*)$$

e le eq. di Eulero si scrivono come

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 + N_1 \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

Assumiamo cond. iniziali: $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ e $\omega_3(0) \gg 1$. Assumiamo anche $\vec{\omega}^{\perp}(t) \approx 0$.



Dato che ω_3 è cost. $\forall t > 0$ per hp. possiamo approx. $(*)$ con

$$I_3 \omega_3(0) \cdot \frac{d}{dt} \hat{e}_3' \Big|_{\Sigma} = N_1 \hat{e}_1' + N_2 \hat{e}_2'$$

[spiegazione + disegnino ...]

10. EQUAZIONI DI LAGRANGE

Vediamo il concetto di vincolo ideale, il principio di D'Alembert e le eq. di Lagrange.

MATRICE CINETICA

Consideriamo un sist. di N pt. mat. P_i, m_i soggetti a vincoli olonomi con varietà delle conf. $\mathcal{C}_t$, siano $q \mapsto \chi(q,t) \in \mathcal{C}_t$ coord. loc. di $\mathcal{C}_t$ con $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_N)$ e $\chi_i \in \mathbb{R}^3$

Prop: L'energia cinetica T è una fn. quadr. di $\dot{q}$:

$$T = T(q,\dot{q},t) = T_2(q,\dot{q},t) + T_1(q,\dot{q},t) + T(q,t)$$

con T_i omogenea di grado i in $\dot{q}$. Inoltre $T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q,t)\dot{q}$ in cui A è simm e def >0. Definiamo

$$v = v(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q}(q,t)\dot{q}_i + \frac{\partial \chi}{\partial t}(q,t)$$

inoltre posta

$$M := \mathrm{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N\}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |v_i|^2 = \frac{1}{2} v \cdot M v =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)\cdot M\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

$$= T_2 + T_1 + T_0$$

I vari termini sono:

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q,t)\dot{q} \qquad T_1 = b(q,t)\cdot\dot{q} \qquad T_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial t}\cdot M\frac{\partial \chi}{\partial t}$$

dove $A(q,t)$ è simm. con coef.

$$a_{hk} := \frac{\partial \chi}{\partial q_h}\cdot M\frac{\partial \chi}{\partial q_k} \qquad h,k = 1,\dots,n$$

e $b(q,t)$ è un vett. con coef.

$$b_h := \frac{\partial \chi}{\partial q_h}\cdot M\frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad h = 1,\dots,n$$

Mostriamo che la mat. cinetica A è def.

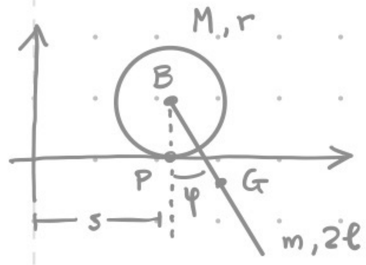
≥ 0. Sia $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$:

$$u \cdot A u = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial q_k} u_k u_h$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} u_h \right) \cdot M \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_k} u_k \right) > 0$$

poiché M è definita positiva e, se $u \neq 0$ i term. $\frac{\partial \chi}{\partial q_h} u_h \neq 0$ poiché i vett. $\frac{\partial \chi}{\partial q_h}$ sono tutti lin indip.

Ad esempio dato il sistema accanto



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} M |v_B|^2 + \frac{1}{2} \omega_d \cdot I_3^d \omega_d + \frac{1}{2} m |v_G|^2 + \frac{1}{2} \omega_a \cdot I_3^a \omega_a = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} M + m \right) \dot{s}^2 + \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + 2 m \ell \cos\varphi \, \dot{s} \dot{\varphi} \right.$$

$$\Rightarrow A(s, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} M + m & m \ell \cos\varphi \\ m \ell \cos\varphi & \frac{4}{3} m \ell^2 \end{bmatrix}$$

Oss: Nel caso dei vincoli fissi si ha solo T_2.

VINCOLI IDEALI E PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Def: Diciamo che dei vincoli olonomi sono ideali se il vett. $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ delle reazioni che i vincoli possono esercitare sui punti soddisfano

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \cdot v_i = 0$$

ovvero ogni reazione è ort. alla vel. virt. nel suo punto, con $v = (v_1, \dots, v_N) \in T_x \mathcal{C}_t$ per ogni t.

Oss: I vincoli senza attrito o di puro rotol. sono ideali.

Def: Sia $t \mapsto x(t)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$ una qlnq sol. dl eq. di Newton

$$m_i \ddot{x}_i(t) = F_i(x(t), \dot{x}(t), t) + \Phi_i(t)$$

se i vincoli sono ideali allora

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{x}_i(t) - F_i(x(t), \dot{x}(t), t) \right) \cdot v_i = 0$$

se questa eq. è soddisfatta diciamo che il sist. soddisfa il principio di D'Alembert.

Inoltre poiché i vettori

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(q(t), t), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(q(t), t)$$

formano ad ogni istante una base di $T_{x(t)}\mathcal{C}_t$

con $x(t) = \chi(q(t), t)$ le eq. dl princ. di D'Al.

diventano

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{x}(t) - F_i(x(t), \dot{x}(t), t) \right) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q(t), t) = 0 \quad \forall h$$

queste sono equazioni pure senza le Φ

nell'incognita $q(t)$. Infatti $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ usando

la def. di $x(t)$ sono

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\dot{\chi}(q(t), t)}_{\text{fn. di } n+1 \text{ var.}} = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q(t), t)\, \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(q(t), t)$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_k \partial q_h}(q(t), t)\, \dot{q}_h(t)\, \dot{q}_k(t)$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t\, \partial q_k}(q(t), t)\, \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q(t), t)\, \ddot{q}_h(t) \right)$$

$$+ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(q(t), t)$$

Consideriamo ora le forze generalizzate:

$$Q_h := \sum_{i=1}^{N} F_i(\chi, v, t) \cdot \frac{\partial \chi_i}{\partial q_h} \qquad v = v(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial q}(q, t)\, \dot{q} + \frac{\partial \chi}{\partial t}(q, t)$$

che ci permettono di scrivere le eq. dl princ.

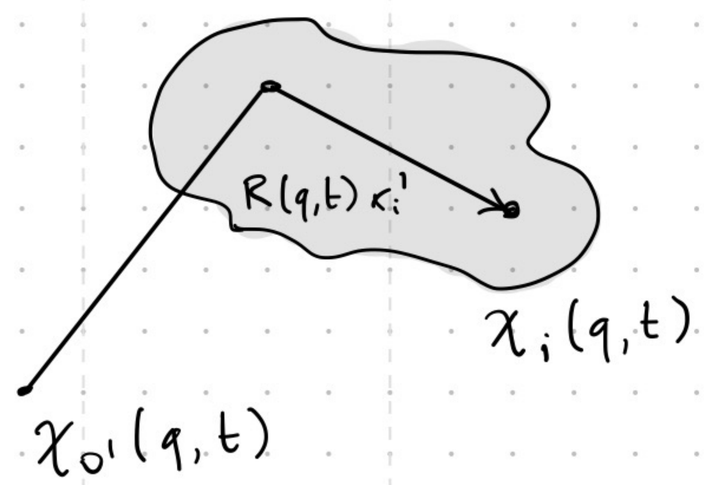
di D'Alembert come segue

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \chi_i}{\partial q_h}(q(t), t) = Q_h(q(t), \dot{q}(t), t) \qquad h = 1, \dots, n$$

Se invece abbiamo un corpo rigido con

coord.

$$\chi_i(q, t) = \chi_{O'}(q, t) + R(q, t)\, x_i'$$



$$\Rightarrow \frac{\partial \chi_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \chi_{O'}}{\partial q_h} + \frac{\partial R}{\partial q_h} R^T$$

notiamo che $RR^T = I$, definiamo $\Omega^{(h)}$ anti-simm. e

$$\Omega^{(h)} := \frac{\partial R}{\partial q_h} R^T \rightsquigarrow \exists\, \omega^{(h)} \text{ t.c. } \Omega^{(h)} = \omega^{(h)} \times \cdot$$

quindi possiamo scrivere

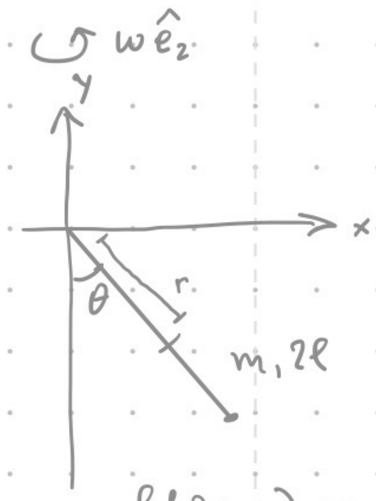
$$\frac{\partial \chi_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \chi_{O'}}{\partial q_h} + \omega^{(h)} \times R x_i' = \frac{\partial \chi_{O'}}{\partial q_h} + \omega^{(h)} \times (\chi_i - \chi_{O'})$$

da cui le forze gen. diventano

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial \chi_i}{\partial q_h} = R \cdot \frac{\partial \chi_{O'}}{\partial q_h} + N_{O'} \cdot w^{(h)}$$

cioè Q_h dipende solo dalla risultante R e dal momento risultante delle forze $N_{O'}$. Possiamo anche introdurre

$$\chi_B := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_i$$



Nel caso di corpi continui le forze gen. diventano

$$Q_h(q, \dot{q}, t) = \int_C f(q, \dot{q}, t; x') \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q, t; x')\, dx' \quad \forall h$$

$$f(\theta; r) = -\lambda \omega^2 e_2 \times (e_2 \times \chi) = \lambda \omega^2 r \sin\theta\, \hat{e}_1$$

$$\Rightarrow Q_\theta = \int_0^{2\ell} f(\theta; r) \frac{\partial \chi}{\partial \theta} dr = \lambda \omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin\theta \cos\theta\, dr = \frac{4}{3} m \ell^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE

· **Prop:** Assumiamo che $q \mapsto \chi(q, t)$ sia C^2. Una curva $t \mapsto q(t)$, param. col tempo soddisfa le eq. di D'Alembert se e solo se soddisfa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) - \frac{\partial T}{\partial q_h}(q, \dot{q}, t) = Q_h(q, \dot{q}, t)$$

che rappresentano una forma delle eq. di Lagrange

Dim:

Possiamo scrivere le eq. dl princ. di D'Alem. come

$$M \ddot{x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = Q_h$$

dove M è la mat. diag. $3N$ con le masse dei corpi. Verifichiamo che lungo $t \mapsto q(t)$ si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = M \ddot{x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}$$

Calcoliamo l'energia cinetica con $v = \sum \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \dot{q} + \frac{\partial \chi}{\partial t}$

·) Calcoliamo $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$:

·) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} v \cdot M v}_{\frac{1}{2} M v^2 \to M v \cdot \dot{v}} \Big) = \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_h} \cdot M v = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M v$$

·) $$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M v + \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

•) ed ora $\frac{\partial T}{\partial q_h}$:

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial v}{\partial q_h} \cdot M v$$

Otteniamo quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_h}} \cdot M v + \frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot M \frac{dv}{dt} - \boxed{\frac{\partial v}{\partial q_h}} \cdot M v$$

ma notiamo che quei due termini sono opposti

scambiando le derivate che compaiono alla fine

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_h}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_h}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial q_h}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x}{\partial q_h \partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_h} = \frac{\partial v}{\partial q_h}}$$

dunque

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot M \frac{dv}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_h} \cdot M \ddot{x}$$

$\square$

Ricordiamo che possiamo scrivere T come

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot A(q,t) \dot{q} + b(q,t) \cdot \dot{q} + c(q,t)$$

che può essere scritta come

$$\nabla_{\dot{q}} T(q, \dot{q}, t) = A(q,t) \dot{q} + b(q,t)$$

Dunque possiamo scrivere le eq. di Lagrange come

$$A(q,t) \ddot{q} = F(q, \dot{q}, t)$$

con

$$F = Q + \nabla_q T - \frac{dA}{dt} \dot{q} - \frac{db}{dt}$$

inoltre poiché A è invertibile possiamo scrivere

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = A^{-1}(q,t) \cdot F(q, v, t) \end{cases}$$

FORZE CONSERVATIVE E LAGRANGIANE

<u>Def</u>: In un sist. di eq. di Lagrange della forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

le forze generalizzate $Q_1, \dots, Q_n$ si dicono conservative se esiste $V(q,t)$ t.c.

$$Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n$$

e V si dice energia potenziale delle Q_h.

Se il sistema di forze $F_1, \dots, F_N$ è cons. con energ. pot. $\mathcal{V}(x)$ cioè si ha

$$-\nabla_{x_i} \mathcal{V}(x) = F_i(x)$$

allora possiamo scegliere

$$V(q,t) := \mathcal{V}(\chi(q,t))$$

infatti

$$-\frac{\partial V}{\partial q_h} = -\nabla_x \mathcal{V}(\chi(q,t)) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q,t) \qquad \leftarrow D_{q_h} V = D_{q_h} \mathcal{V}(\chi(q,t)) = \underbrace{D_{q_h}\mathcal{V}}_{\nabla_{q_h}}(\chi(q,t)) \cdot \underbrace{D_{q_h}\chi}_{\frac{\partial}{\partial q_h}}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \nabla_{x_i} \mathcal{V}(\chi(q,t)) \cdot \frac{\partial \chi_i}{\partial q_h}(q,t)$$

separo il prod. scal. nelle comp.

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{F_i(\chi(q,t))}_{\text{def.}} \cdot \frac{\partial \chi_i}{\partial q_h}(q,t) = Q_h(q,t)$$

In particolare nel caso lagrangiano conservativo possiamo scrivere le eq. di lagrange come

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

dove

$$L(q,\dot{q},t) := T(q,\dot{q},t) - V(q,t)$$

e viene detta lagrangiana. Infatti in questo caso si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial q_h}$$

LAGRANGIANE EQUIVALENTI

Vale il seguente

<u>Lemma</u>: Sia $F(q,t)$ di classe C^2 e sia

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}$$

allora si ha

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{dF}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

<u>Dim</u>:

$$\text{"} \frac{\partial}{\cancel{\frac{\partial q_h}{\partial t}}} \frac{dF}{\cancel{dt}} = \frac{\partial F}{\partial q_h} \text{"}$$

- $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_h}$
- $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t \partial q_k}$
- $\frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}$

dunque i due termini sono opposti

$\square$

<u>Oss</u>: Siano $L(q,\dot{q},t)$, $F(q,t)$ funzioni di classe C^2

$$\mathcal{L} := cL + \frac{dF}{dt}$$

con $c \neq 0$ costante e

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial F}{\partial q_h} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

allora dal lemma segue che L e $\mathcal{L}$ def. le stesse eq. di Lagrange.

COVARIANZA DELLE EQ. DI LAGRANGE

<u>Prop</u>: Consideriamo un sist. lagrangiano def. da una funzione $L(q,\dot{q},t)$. Sia $q \mapsto \varphi(q)$ un cambiamento di var.. Allora $q(t)$ è una sol. delle eq. di Lagrange per L se e solo se $Q(t) = \varphi(q(t))$ è una sol. delle eq. di $\mathcal{L}$.

per

$$\mathcal{L}(Q,\dot{Q},t) = L\left(\varphi^{-1}(Q), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q}(Q)\dot{Q}, t\right)$$

Dim: Dobbiamo calcolare

Ricordiamo che data una $f(q)$:

$$\frac{d}{dt} f(q) = \nabla_q f(q) \cdot \dot{q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k$$

(questa cosa succederà spesso)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q}(Q)\, \dot{Q} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)_{k=1}^{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \left(\left(\underbrace{\frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q}}_{\text{in realtà è un } \nabla_Q} (Q) \cdot \dot{Q} \right)_{k=1}^{n} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)_{k=1}^{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \left(\left(\left(\frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}(Q) \right)_{\ell=1} \cdot (\dot{Q}_\ell)_{\ell=1}^{n} \right)_{k=1}^{n} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)_{k=1}^{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}(Q) \cdot \dot{Q}_\ell \right)_{k=1}^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}(Q) \cdot \dot{Q}_\ell \right)}_{\text{ora derivando risp. a } \dot{Q}_h \text{ rimane solo il termine per } \ell = h.} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h}(Q)$$

$$\frac{d}{dx_i} \left(\sum_j c_j x_j \right) = c_i$$

derivando ora in t:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} \right) \right)$$

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} = \left(\frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h}(Q) \right)_{k=1}^{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h} \cdot \dot{Q}_\ell \right)}_{=} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} = \nabla_Q \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} \cdot \dot{Q} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h} \cdot \dot{Q}_\ell$$

infine l'ultimo termine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h}}_{L(\underbrace{\varphi^{-1}(Q)}_{q}, \dots)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial Q_h}}_{L(\dots, \underbrace{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_\ell}(Q)\, \dot{Q}_\ell}_{\dot{q}}, \dots)} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial Q_h \partial Q_\ell} \cdot \dot{Q}_\ell \right)}_{=}$$

e dunque si cancellano e restano loro

Usando il fatto che φ^{-1} è C^2 si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} =$$

$$= \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right]^{-1} \right) \circ \Phi^{-1}$$

con

$$\Phi(q, \dot{q}, t) := \left(\varphi(q), \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q)\, \dot{q}, t \right)$$

$\square$

ENERGIA POT. GENERALIZZATA

Def: Diciamo che le comp. lagrangiane di Q_h ammettono un'energia pot. generalizzata se $\exists V(q, \dot{q}, t)$ t.c.

$$Q_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n$$

Se esiste tale V allora con $L = T - V$ soddisfa le eq. di Lagrange.

Oss: Se esiste tale $V(q, \dot q, t)$ possiamo decomp. come

$$V(q, \dot q, t) = V_0(q, t) + V_1(q, \dot q, t)$$

con V_i omogenea di grado i nelle $\dot q$ infatti

Ricordiamo che data $f(q, \dot q, t)$:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(q(t), \dot q(t), t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial f}{\partial \dot q_k}\ddot q_k + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h$$

$$\cdot)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot q_h}\dot q_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_k \partial \dot q_h}\ddot q_k\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot q_h}$$

dunque

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot q_h}\dot q_k + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_k \partial \dot q_h}\ddot q_k}_{\text{Dato che } Q_h \text{ non dip. da } \ddot q \text{ questo termine è } 0.}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot q_h} = Q_h = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} F_j(x, \dot x, t)\cdot\frac{\partial x}{\partial q_h}(q, t)}_{\text{Vista come fn. in } q, \dot q, \ddot q, \dots \text{ ci sono solo i termini fino a } \dot q}$$

se integriamo quel term. due in $\dot q$ volte otteniamo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot q_k \partial \dot q_h}(q, \dot q, t) = 0 \Rightarrow V(q, \dot q, t) = a(q, t)\cdot \dot q + V_0(q, t)$$

con $a = (a_1, \dots, a_n)$ e V_0 certe funzioni. Da cui

$$Q(q, \dot q, t) = -\nabla_q V_0(q, t) + \underbrace{\left(\frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h}\right)_{hk}}_{\text{Matrice anti-simm.}}\dot q + \frac{\partial a}{\partial t}(q, t)$$

Infatti

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot q_h}\dot q_k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} =$$

$$\cdot)\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot q_h} = \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial \dot q_h}(a\cdot\dot q + V_0) = \frac{\partial}{\partial q_k \partial \dot q_h}\Big(\underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_l \cdot \dot q_l}_{\text{in } \dot q \text{ rimane solo il term. } \dot q_h \text{ per } l = h} + V_0\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\big(a_h(q, t)\big) = \frac{\partial a_h}{\partial q_k}$$

$$\cdot)\ \frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \dot q_k + V_0\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial a_k}{\partial q_h}\cdot \dot q_l + \cancel{a_l \cdot \frac{\partial \dot q_k}{\partial q_h}}\right] + \frac{\partial V_0}{\partial q_h} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_k}{\partial q_h}\dot q_k + \frac{\partial V_0}{\partial q_h}$$

$$\cdot)\ \frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial \dot q_h} = \frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial \dot q_h}\Big(\sum_\ell \underbrace{a_\ell \cdot \dot q_\ell}_{\text{solo } \ell=h} + \cancel{V_0}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}(a_h) = \frac{\partial a_h}{\partial t}$$

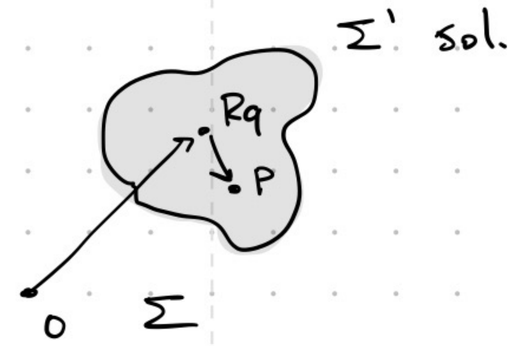
$$\Rightarrow = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h}\right)\dot q_k + \frac{\partial a_h}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_h}$$

Prop: Le forze apparenti agenti su un pt. mat. P di massa m ammettono l'energia pot. gen.

$$V' = m\vec a_{O'}\cdot(P-O') - \frac{1}{2}m|\vec\omega\times(P-O')|^2 - m\vec\omega\times(P-O')\cdot\vec v'$$

anche scrivibile in coord. in B come

$$V' = m\vec a_{O'}\cdot Rq - \frac{1}{2}|\omega\times Rq|^2 - m\omega\times Rq\cdot R\dot q$$



Dim: Consideriamo un punto mat. di massa m che si muove in $\mathbb{R}^3$ su cui non agiscono forze in Σ. Sia Σ' un altro rif., scriviamo le eq. di Lagrange in Σ e Σ'

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h}T' - \frac{\partial}{\partial q_h}T' = Q'_h \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h}T - \frac{\partial}{\partial q_h}T = 0$$

dove le Q_h sono le comp. lagrang. di forze apparenti. La diff. tra queste due eq. ci dà

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_h}(T'-T) - \frac{\partial}{\partial q_h}(T'-T) = Q'_h$$

CAP. 4

$$\boxed{\dot u = R\dot u' + \omega\times Ru'}$$

$$\chi(q,\dot q,t) = x_{O'} + Rq$$

$$v(q,\dot q,t) = v_{O'} + \omega\times Rq + R\dot q$$

Calcoliamo ora $T'-T$

$$T'-T = \frac{1}{2}m\underbrace{|\dot q|^2}_{v_P|_\Sigma} - \frac{1}{2}m\overbrace{|v_{O'} + \omega\times Rq + R\dot q|^2}^{v_P|_\Sigma} =$$

$$= -\frac{1}{2}m|v_{O'}|^2 - \frac{1}{2}m|\omega\times Rq|^2 - m v_{O'}\cdot(\omega\times Rq + R\dot q) - m\omega\times Rq\cdot R\dot q$$

Possiamo tralasciare $v_{O'}$,

$$\frac{d}{dt}(v_{O'}\cdot Rq) = a_{O'}\cdot Rq + v_{O'}\cdot(\dot Rq + R\dot q) =$$

$$= a_{O'}\cdot Rq + v_{O'}\cdot(\omega\times Rq + R\dot q)$$

per cui possiamo sost.

$$-m v_{O'}\cdot(\omega\times Rq + Rq) \quad \text{con} \quad m a_{O'}\cdot Rq - m\frac{d}{dt}(v_{O'}\cdot Rq)$$

e trascurare il II term. poiché è una deriv. tot., infatti se

$$\tilde V = V + \frac{d}{dt}F$$

dove è $F(q,t)$ e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q} = Q \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q} = Q$$

$\square$

<u>Oss</u>: Questo pot. non riesce a distinguere i termini rel. a trascinamento e Coriolis.

<u>Prop</u>: Nel caso particolare in cui $\vec{\omega}$ è cost. possiamo def. sep. dei pot. per

$$-m\vec{a}_{O'}, \quad -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times(P-O')), \quad -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

<u>Dim</u>:

Se $\vec{\omega}$ è cost., esiste una mat. $R_0 R^T \omega = \omega$

$$[\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ]$$

DA QUI IN GIÙ RICONTROLLARE TUTTO

FUNZIONE DI DISSIPAZIONE DI RAYLEIGH

Dato un sist. di N punti mat. dividiamo le forze attive in due cat., quelle che amm. ener. pot. generalizzata V e quelle che non la ammettono

Possiamo scrivere le eq. di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h \qquad \forall h$$

dove $L = T - V$ e Q_h sono le comp. lagrang. delle forze che non ammettono pot. Se le Q_h sono prodotte da forze dissipative di forma

$$\vec{F}_j = -k\vec{v}_j \qquad \forall j$$

dove le $\vec{v}_j$ sono le vel. dei pt. P_j, consid.

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}k\sum_{j=1}^{N}|\vec{v}_j|^2 \qquad \mathcal{R} := \mathcal{R}\circ v$$

$$\Rightarrow F_j = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial v_j}$$

Per le forze generalizzate si scrivono

$$Q_h = \sum_{j=1}^{N} F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial v_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_h}$$

$$= -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial \dot{q}_h} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}}$$

da cui otteniamo:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

La funzione $\mathcal{R}$ si chiama funzione di dissipazione di Rayleigh

11. SIMMETRIE E INTEGRALI PRIMI

VARIABILI CICLICHE

Consideriamo il sist. lagrangiano in $L(q,\dot{q},t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad \forall h$$

Def: Se la coord. q_k non appare in L allora si dice che q_k è ciclica.

Def: Chiamiamo momento coniugato a q_k

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad \forall k = 1, \dots, n$$

Se $L = L(y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ $\rightsquigarrow$ $\nabla_{\dot{x}} L$ sono tutte le variabili cicliche

Prop: Se q_k è una var. ciclica per L allora p_k è un int primo.

Dim:

$$\frac{d}{dt} p_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\text{aggiungo qst term. che è zero.}} = 0$$

Prop: Se la lagrangiana non dip. da t allora la funzione

$$J(q,\dot{q}) = \nabla_{\dot{q}} L \cdot \dot{q} - L(q,\dot{q})$$

è un int. primo del sistema.

Possiamo vedere le eq. di Lagrange come

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \iff \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{q}} L - \nabla_q L = 0$$
$$\iff D_t \nabla_{\dot{q}} L - \nabla_q L = 0$$
$$\iff D_t \nabla_{\dot{q}} L = \nabla_q L$$

Dim:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h + \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_h}\ddot{q}_h}\right]$$
$$- \sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_h}\dot{q}_h + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h}\right] = 0$$

e questi sono zero poiché siamo lungo le eq. di Lagrange

$$D_t J = (D_t \nabla_{\dot{q}} L)\cdot \dot{q} + \nabla_{\dot{q}} L \cdot \ddot{q} - D_t L$$
$$= D_t \nabla_{\dot{q}} L \cdot \dot{q} + \nabla_{\dot{q}} L \cdot \ddot{q} -$$
$$- (\nabla_q L \cdot \dot{q} + \nabla_{\dot{q}} L \cdot \ddot{q}) = 0$$

$\square$

Oss: Se L è della forma $L_2 + L_1 + L_0$ con L_i omogenea di grado j in $\dot{q}$ allora

$$J = L_2 - L_0$$

infatti per un th. di Eulero sulle fn. omog.

$$\nabla_{\dot{q}} L_i \cdot \dot{q} = j L_j \qquad j = 0, 1, 2$$

Riduzione di Routh

Assumiamo che $L = L(y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ con x vett. di s var. tutte cicliche e supponiamo che

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$$

sia def. positiva. Consideriamo la sol.

$$t \mapsto q(t) = (x(t), y(t))$$

con cond. iniziali $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$. Sia c

$$c := \nabla_{\dot{x}} L(y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, 0)$$

il valore del momento coniugato a x, cost. lungo la sol. $q(t)$ e sia $v(y, \dot{y}, t, c)$ la fn. impl.

$$\text{t.c. } \nabla_{\dot{x}} L(y, v(y, \dot{y}, t, c), \dot{y}, t) = c$$

che è ben def. poiché $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}$ è def. essendo un minore principale.

<u>Prop</u>: La comp. $y(t)$ è la sol. di eq. di Lagrange per L con cond. iniziali come prima è la sol. di

$$L_R^{(c)}(y, \dot{y}, t) = \left[L(y, \dot{x}, \dot{y}, t) - c \cdot \dot{x} \right]\Big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)} = L(y, v(y, \dot{y}, t, c), \dot{y}, t) - c \cdot v(y, \dot{y}, t, c)$$

e

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(y(\tau), \dot{y}(\tau), \tau, c)\, d\tau$$

$$\nabla_{\dot{x}} L \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{y}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h} + c \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{y}_h}$$

<u>Dim</u>:

$$\frac{\partial L_R^{(c)}}{\partial \dot{y}_h}(y, \dot{y}, t) = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(y, \dot{x}, \dot{y}, t) + \underbrace{\left(\nabla_{\dot{x}} L(y, \dot{x}, \dot{y}, t) - c \right)}_{=0} \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{y}_h}(y, \dot{y}, t, c) \right]\Big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)}$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(y, \dot{x}, \dot{y}, t) \right]\Big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)}$$

$$D_{y, \dot{x}, \dot{y}, t} L \cdot D_{\dot{y}} \begin{bmatrix} \cancel{y} \\ v(y, \dot{y}, t, c) \\ \dot{y} \\ \cancel{t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L_R^{(c)}}{\partial y_h}(y, \dot{y}, t) = \left[\frac{\partial L}{\partial y_h}(y, \dot{x}, \dot{y}, t) \right]\Big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)} = D_{\dot{x}} L \cdot D_{\dot{y}} v + D_{\dot{y}} L \cdot \underbrace{D_{\dot{y}} \dot{y}}_{=1}$$

Quindi la mappa $t \mapsto y(t)$ che è sol. di

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(y, \dot{x}, \dot{y}, t)\Big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)} - \frac{\partial L}{\partial y}(y, \dot{x}, \dot{y}, t)\Big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)} = 0$$

Def: La funzione $L_R^{(c)}$ è detta lagrangiana ridotta o funzione di Routh

Oss: Se $L = L_2 + L_1 + L_0$ con L_i omogenea di grado i in $\dot{x}$ allora

$$L_R^{(c)} = [-L_2 + L_0]\big|_{\dot{x} = v(y, \dot{y}, t, c)}$$

Esempio: Moto centrale piano, siano ρ, θ le coord. polari.

$x = \theta$
$y = \rho$

$$L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - V(\rho)$$

quindi la variabile θ è ciclica ed il suo momento coniugato p_θ è un int. primo

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \rho^2 \dot{\theta}$$

Sia c il valore di tale integrale per le condizioni iniziali $\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}_0, \dot{\theta}_0$ per $t = 0$.

In questo caso $v(\rho, \dot{\rho}, t, c)$ verifica

$$\nabla_{\dot{\theta}} L(\rho, v(\rho, \dot{\rho}, t, c), \dot{\rho}, t) = c$$

ovvero

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\rho, v, \dot{\rho}, t) = 2 m \rho^2 \dot{\theta}\Big|_{\dot{\theta} = v} = c \Rightarrow v = \frac{c}{2 m \rho^2}$$

Dunque la lagrangiana ridotta è

$$L_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \left[\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - V(\rho) - c \cdot \dot{\theta}\right]\Big|_{\dot{\theta} = v} =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - V(\rho) - \frac{c^2}{2 m \rho^2}$$

Possiamo anche definire

$$V_R^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2 m \rho^2}$$

Inoltre usando l'integrale di Jacobi restringendoci a $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = c$

$$J_R^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = J\left(\rho, \dot{\rho}, \frac{c}{m \rho^2}\right) = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V_R^{(c)}(\rho)$$

Es: Coordinate jacobiane nel piano: Consideriamo 3 pt. di massa unitaria che si muovono sotto l'azione di forze elastiche con pot.

$$\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}k\left(|x_1 - x_2|^2 + |x_1 - x_3|^2 + |x_2 - x_3|^2\right)$$

con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ e $k > 0$ cost.. Definiamo

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad \eta = x_3 - x_2 \qquad \zeta = x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2}$$

Vediamo che la lagrangiana non dip. da ξ.

Sia $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ la mappa di c.v. a (ξ, η, ζ) l'inversa è

$$x_1 = \xi + \frac{2}{3}\zeta \qquad x_2 = \xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\zeta \qquad x_3 = \xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\zeta$$

Quindi l'energia pot. $V = \mathcal{V} \circ \Phi^{-1}$ e T si scrivono

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}k\left(\left|\zeta + \frac{\eta}{2}\right|^2 + \left|\zeta - \frac{\eta}{2}\right|^2 + |\eta|^2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(|\dot{x}_1|^2 + |\dot{x}_2|^2 + |\dot{x}_3|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3|\dot{\xi}|^2 + \frac{1}{2}|\dot{\eta}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\zeta}|^2\right)$$

e la lagrangiana $L = T - V$ non dipende da ξ dunque è ciclica e possiamo appl. il metodo di Routh. Sia $c = (c_1, c_2)$ il vettore dei valori dei momenti

$$p_{\xi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = 3\dot{\xi}_1 \qquad p_{\xi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} = 3\dot{\xi}_2$$

La lagrangiana ridotta allora è

$$L_R^c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|\dot{\eta}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\zeta}|^2\right) - \frac{1}{2}k\left(\left|\zeta + \frac{\eta}{2}\right|^2 + \left|\zeta - \frac{\eta}{2}\right|^2 + |\eta|^2\right) - \frac{|c|^2}{6}$$

LA TROTTOLA DI LAGRANGE

Consideriamo un oggetto simm. con un pt. fisso O diverso dal suo baricentro. Assumiamo $I_1 = I_2 \neq I_3$

MNEMONICA:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{MAT. BELLA}} \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{\text{MAT. BRUTTA}}$$

ricordiamo che

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\hat{e}_1' + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\hat{e}_2' + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{e}_3'$$

detta ℓ la dist tra B e O allora

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot J_0\vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 \underbrace{(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta)}_{rad^2/s^2} + \frac{1}{3} I_3 \underbrace{(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2}_{rad^2/s^2}$$

$$V = mgl\cos\theta$$

Notiamo che φ, ψ sono cicliche nella lagrangiana

dunque abbiamo gli int. primi:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1 \dot\varphi \sin^2\theta + I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\cos\theta$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)$$

Oss: Notiamo che p_φ e p_ψ sono le proiezioni di $\vec{M}_0$ su $\hat{e}_3$ ed $\hat{e}_3'$. Infatti se I_0, ω rappr. $J_0, \vec{\omega}$ in una base princ. B' abbiamo

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot\varphi}\cdot I_0\omega \qquad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot\psi}\cdot I_0\omega$$

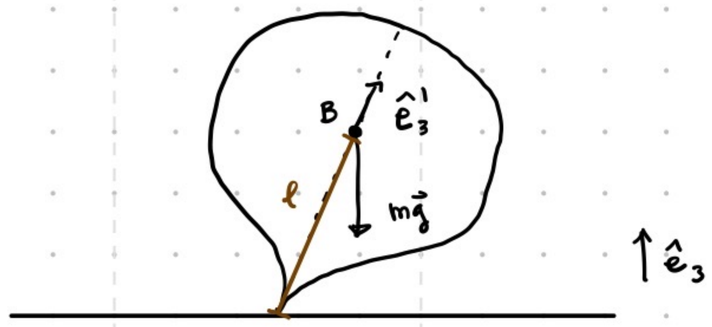
e si ha

$$\frac{\partial \omega}{\partial \dot\varphi} = (\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta)^T \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \dot\psi} = (0,0,1)^T$$

I mom. p_φ, p_ψ si conservano perché il momento risultante di forze est. $\vec{N}_0$ è diretto come la linea dei nodi che è ort. sia a $\hat{e}_3$ e $\hat{e}_3'$.

Più precisamente si ha

$$\vec{N}_0 = l\,\hat{e}_3' \times (-mg\,\hat{e}_3) = mgl\sin\theta\,\hat{e}_N$$



$$\hat{e}_3' \times (-\hat{e}_3) = \hat{e}_N$$

Si conserva anche $E = T + V$ che è l'int. di Jacobi del sistema.

Mostriamo che il pb. è int. secondo Liouville.

Per il metodo di Routh per valori c_φ, c_ψ dei momenti coniugati abbiamo

$$\dot\varphi = \frac{1}{I_1\sin^2\theta}(c_\varphi - c_\psi\cos\theta) =: v_\varphi(\theta, \dot\theta, c_\psi, c_\varphi)$$

$$\dot\psi = \frac{c_\psi}{I_3} - \frac{\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}(c_\varphi - c_\psi\cos\theta) =: v_\psi(\psi, \dot\psi, c_\psi, c_\varphi)$$

quindi

Risolvendo lai in $\dot\varphi, \dot\psi$

$$\begin{cases} c_\varphi = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\cos\theta \\ c_\psi = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) \end{cases}$$

↑ basta fare $I - \cos\theta \cdot II$ per ottenere $\dot\varphi$

otteniamo

$$L_R^{(c_\varphi, c_\psi)}(\theta, \dot\theta) = \left[L(\theta, \dot\theta, \dot\varphi, \dot\psi) - c_\varphi \dot\varphi - c_\psi \dot\psi \right]\Big|_{\dot\varphi = v_\varphi, \dot\psi = v_\psi} =$$

$$= \frac{1}{2} I_1 \dot\theta^2 - \frac{1}{2} \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos\theta)^2}{I_1 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta \underbrace{- \frac{1}{2}\frac{c_\psi^2}{I_3}}_{\text{cost.}} = T_R^{(c)} - V_R^{(c)}$$

Le equazioni di Lagrange per $L_R^{(c)}$ corrisp. alle eq. del moto unidim.

$$I_1 \ddot\theta = -\frac{d}{d\theta} V_R^{(c)}(\theta) \qquad (*) \qquad \leftarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

con

$$V_R^{(c)}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos\theta)^2}{I_1 \sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

per cui il pb. è int. secondo Liouville. Inoltre $(*)$ non dipende da t per cui abbiamo l'int. primo

$$E_R^{(c)}(\theta, \dot\theta) = \frac{1}{2} I_1 \dot\theta^2 + V_R^{(c)}(\theta)$$

<u>Oss</u>: La conservazione di $E_R^{(c)}$ corrisp. alla cons. di E lungo $p_\varphi = c_\varphi$, $p_\psi = c_\psi$.

Mostriamo che in $(\theta, \dot\theta)$ c'è un unico equilibrio e tutte le orb. sono periodiche. Sia e il valore di $E_R^{(c)}$ allora sost. otteniamo:

$$\dot\theta^2 \sin^2\theta + \frac{(c_\varphi - c_\psi \cos\theta)^2}{I_1^2} + 2\frac{mgl}{I_1}\cos\theta \sin^2\theta = 2\frac{e}{I_1}\sin^2\theta$$

Poniamo

$$a := \frac{c_\psi}{I_1} \qquad b := \frac{c_\varphi}{I_1} \qquad \alpha := 2\frac{e}{I_1} \qquad \beta := 2\frac{mgl}{I_1} \qquad u := \cos\theta \in [-1, +1]$$

allora otteniamo la seguente eq. diff.

$$\dot u^2 = \underbrace{(1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}_{f(u)}$$

Gli zeri di f corrisp. a valori di inv. del moto di θ. Abbiamo che

$$f(-1) = -(b+a)^2 \le 0 \qquad f(1) = -(b-a)^2 \le 0$$

Consideriamo il caso generico in cui $b \neq a$.

Poiché $f(\to\infty) = +\infty$ esiste sempre $u_3 > 1$ che non corrisp. a valori reali di θ. Ma $f(\to -\infty) = -\infty$

dunque poiché il moto deve esistere ci sono due radici in $(-1,+1)$ con

$$u_1 \leq \cos\theta \leq u_2$$

<u>Def</u>: Si dice luogo dell'asse di simm. la curva descritta dal pt. di inter. dl'asse di simm. con la sfera unit.

Tale curva è compresa ta due cerchi limite

$$\theta_1 = \arccos u_1 \qquad \theta_2 = \arccos u_2$$

in corrisp. ai quali $\dot\theta$ si annulla. Poniamo

$$\bar u := \frac{b}{a}$$

Abbiamo 3 casi:

·) Se $\bar u > u_2$, ricordiamo

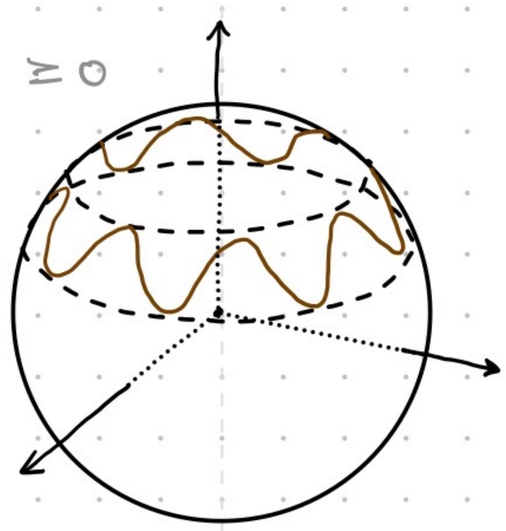
$$\dot\varphi = \frac{1}{I_1 \sin^2\theta}(c_\varphi - c_\psi \cos\theta) = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \geq 0$$

si trova che $\dot\varphi$ ha lo stesso segno per tutti i possibili valori di $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

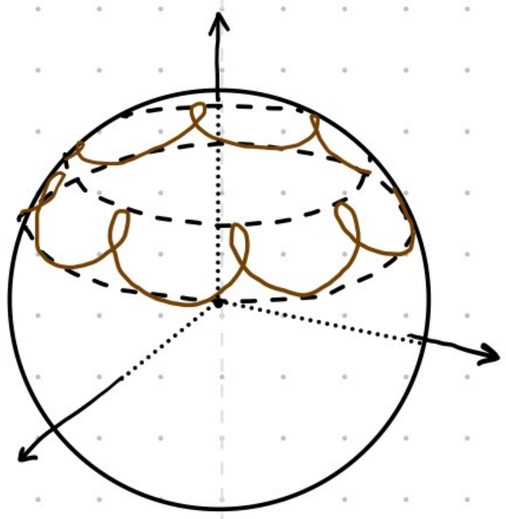
$b - a\cos\theta \geq 0$

$\frac{b}{a} \geq \cos\theta$

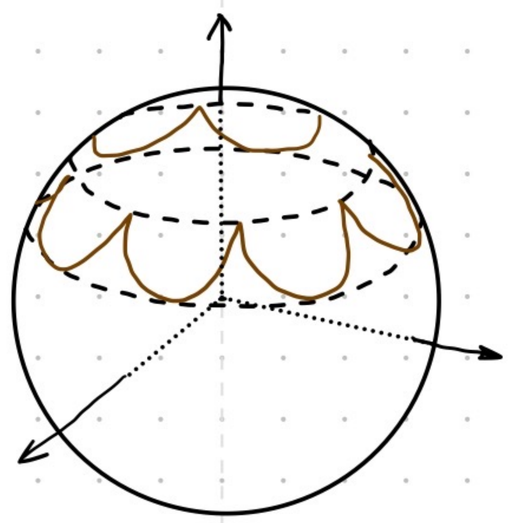
$\bar u \geq \underbrace{\cos\theta}_{\in[u_1,u_2]}$



·) Se $u_1 < \bar u < u_2$, non abbiamo più che il segno di $\dot\varphi$ è cost. dunque ci sono dei loop.



·) Se $\bar u = u_1$ o $\bar u = u_2$ allora abbiamo dei punti tc. $\dot\varphi = 0$ in corrisp. dl cerchio limite che danno luogo a delle cuspidi



<u>SPOILER</u>: ho ricalcato un'immagine da questo PDF

TEOREMA DI NOETHER

Ricordiamo le prop. dell'azione $\varphi : U \times G \to U$ di un grp. di diffeom. su un insieme U. $G = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^n$.

i) $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un diffeo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) $\varphi_0 = Id$

iii) $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Oltre a $\varphi_\alpha(q)$, $q \in \mathbb{R}^n$ useremo anche la notaz. $\varphi(q, \alpha)$ e assumeremo che le mappe φ siano C^2

Def: Dato un gruppo a un param. di diffeo. $\varphi_\alpha(q)$ si dice generatore infinitesimo l'azione il vettore

$$\xi(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, 0)$$

Il flusso $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ di un'eq. diff $\dot{u} = F(u)$ è

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \phi_t(x_0) = F(\phi_t(x_0)) \\ \phi_0(x_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\phi_t(x) := \int_0^t F(\phi_{t'}(x))\, dt'$$

Oss: Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una funzione di cl. C^1 t.c. il flusso integrale $\Phi(u, t)$ di eq. diff. $\dot{u} = F(u)$ sia $\underbrace{\text{completo}}_{\text{definito su tutto } \mathbb{R}}$, allora Φ è un'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^n$.

Prop: Ogni azione $\varphi(q, \alpha)$ è il flusso del suo generatore infinitesimo.

Dim:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, \alpha) = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\varphi(q, \alpha), 0)}_{\varphi(q,\alpha) = \varphi(\varphi(q,\alpha), 0)} = \xi(\varphi(q, \alpha)) \qquad \square$$

Si consideri l'azione di G a un param. sulla varietà delle conf. $\mathcal{C}$.

$$q \mapsto Q = \varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$$

e la corrisp. azione indotta su fibrato tangente $T\mathcal{C}$

$$(q, \dot{q}) \mapsto (Q, \dot{Q}) = \left(\varphi(q, \alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q, \alpha)\, \dot{q} \right)$$

Th. di Noether: Se la Lagrangiana L è inv. per l'azione indotta su $T\mathcal{C}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè

$$L(q,\dot q,t) = L\left(\varphi(q,\alpha), \frac{\partial\varphi}{\partial q}(q,\alpha)\dot q, t\right)$$

allora le eq. di Lagrange ammettono l'integrale primo

$$I(q,\dot q,t) = p(q,\dot q,t)\cdot \xi(q)$$

dove p è il momento coniugato a q e ξ è il generatore infinitesimo dell'azione φ_α.

Dim:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\alpha} L\left(\varphi(q,\alpha), \frac{\partial\varphi}{\partial q}(q,\alpha)\dot q, t\right)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot q,t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(q,0) + \frac{\partial L}{\partial\dot q}(q,\dot q,t)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial q}(q,0)\dot q$$

in cui abbiamo usato

$$\varphi(q,0) = q \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial q}(q,0) = Id$$

Lungo le soluzioni $t\mapsto q(t)$ dell'eq. di Lagrange, scambiando l'ordine di deriv. si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}(q,\dot q,t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(q,0) + \frac{\partial L}{\partial\dot q}(q,\dot q,t)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial\alpha}(q,0)\dot q$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}(q,\dot q,t)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(q,0)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(q,0) \underset{q(t)}{=} \frac{\partial\varphi}{\partial q}(q,0)\dot q$$

$$\Rightarrow I(q,\dot q,t) = \frac{\partial L}{\partial\dot q}(q,\dot q,t)\cdot\xi(q)$$

è un int. primo del sist. lagrangiano. $\square$

Prop: Sia $\Phi^t(x)$ il flusso integrale dell'eq. differenziale $\dot x = F(x)$. Consideriamo un c.v. $y = u(x)$ e sia $\dot y = G(y)$ la corrisp. eq. diff.

$$G = \left(\frac{\partial u}{\partial x}F\right)\circ u^{-1}$$

Allora

$$\Psi^t(y) := u\circ\Phi^t\circ u^{-1}(y)$$

è il flusso integrale di $\dot y = G(y)$.

Dim: Osserviamo che $\Psi^0(y) = (u\circ\Phi^0)(x)$, inoltre $F = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^{-1}(G\circ u)^{(*)}$, da cui

$$\frac{d}{dt}\Psi^t(y) = \frac{d}{dt}\underbrace{(u\circ\Phi^t\circ u^{-1}(y))}_{\text{chain rule}} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Phi^t\circ u^{-1}(y))\underbrace{\frac{d}{dt}(\Phi^t\circ u^{-1}(y))}_{\dot{x}=F(x)}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\Phi^t\circ u^{-1}(y))\,F(\Phi^t\circ u^{-1}(y))$$

$$\overset{(\star)}{=}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\Big[\frac{\partial u}{\partial x}\Big]^{-1}}_{Id}(G\circ u)\Big)(\Phi^t\circ u^{-1}(y))$$

$$= G(u\circ\Phi^t\circ u^{-1}(y)) = G(\Psi^t(u))$$

$\square$

<u>Lemma</u> (rettificazione locale): Sia $\Phi^t(x)$ il flusso dell'eq. diff. $\dot{x} = F(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ e sia $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ tc. $F(\bar{x})\neq 0$. Allora esiste un int. U di $\bar{x}$ ed un c.v. locale $x\mapsto y = u(x)$ tc.

$$u^{-1}\circ\Psi^t(y) = \Phi^t\circ u^{-1}(y)$$

dove

$$\Psi^t(y) = y + te_1$$

cioè il flusso Φ^t nelle nuove var. è lin. in t.

<u>Dim</u>: A meno di traslare nell'origine e rinum. le coord. possiamo assumere che

$$\bar{x} = 0 \qquad F_1(0)\neq 0$$

Consideriamo

$$w(y) := \Phi^{y_1}(0, y_2, \dots, y_n)$$

dalle relazioni

$$\frac{\partial w}{\partial y_1}(0) = F(0) \qquad \frac{\partial w}{\partial y_j}(0) = e_j \quad \forall j$$

si ottiene

$$\det\frac{\partial w}{\partial y}(0) = F_1(0)$$

quindi w def. un diffeo. da un int. V di $y=0$ ad un int U di $x=0$. Sia $u = w^{-1}: U\to V$ il diffeo. inverso. Ponendo

$$\Psi^t(y) := y + te_1$$

e usando la prop. di semigrp. dl flusso si ottiene la rel. di c.v. :

$$w \circ \Psi^t(y) = \Phi^{y_1+t}(0, y_2, \dots, y_n) = \Phi^t \circ w(y) \qquad \square$$

<u>Prop</u>: Sia $L(q, \dot{q}, t)$ una lagrangiana inv. per l'azione di φ_α, cioè t.c.

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q)\dot{q}, t\right)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia inoltre $\bar{q}$ una conf. per cui $\xi(\bar{q}) \neq 0$ dove ξ è il gen. infinit. di $\varphi_\alpha(q)$

In questa hp. esiste U int. di $\bar{q}$ ed una trasf. $U \ni q \longmapsto Q = u(q)$ t.c. la coord. Q_1 sia ciclica nella lagrangiana

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = L\left(u^{-1}(Q), \frac{\partial u^{-1}}{\partial Q}(Q)\dot{Q}, t\right)$$

<u>Dim</u>: Consideriamo $\bar{q}$ t.c. $\xi(\bar{q}) \neq 0$, con $\xi(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, 0)$

Per il lemma di rettificazione del flusso possiamo trovare un c.v. $Q = u(q)$ in un int. di $\bar{q}$ che coniuga l'azione φ_α che è il flusso del suo generatore infin. ξ, alla mappa

$$\eta_\alpha(Q) = Q + \alpha e_1 = u \circ \varphi_\alpha \circ u^{-1}(Q)$$

Inoltre la lagrangiana $\mathcal{L}$ è inv. per η_α infatti

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) &= L\left(u^{-1}(Q), \frac{\partial u^{-1}}{\partial Q}(Q)\dot{Q}, t\right) = \\
&= L\left(\varphi_\alpha \circ u^{-1}(Q), \left[\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q} \circ u^{-1}(Q)\right] \frac{\partial u^{-1}}{\partial Q}(Q)\dot{Q}, t\right) && \leftarrow \text{inv. di } L \text{ per } \varphi_\alpha \\
&= L\left(u^{-1} \circ \eta_\alpha(Q), \left[\frac{\partial u^{-1}}{\partial Q} \circ \eta_\alpha(Q)\right] \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial Q}(Q)\dot{Q}, t\right) && \leftarrow u^{-1} \circ \eta_\alpha = \varphi_\alpha \circ u^{-1} \\
&= \mathcal{L}\left(\eta_\alpha(Q), \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial Q}(Q)\dot{Q}, t\right) = \\
&= \mathcal{L}(Q + \alpha e_1, \dot{Q}, t)
\end{aligned}$$

Concludiamo che $\mathcal{L}$ è indip. da Q_1

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1}(Q, \dot{Q}, t) = 0$$

12. EQUILIBRI E STABILITÀ

CARATTERIZZAZIONE DEGLI EQUILIBRI

Consideriamo le eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad \forall h \qquad (*)$$

per vincoli fissi $T = T_2 = \frac{1}{2}\dot q \cdot A(q)\dot q$ e per forze indip. da t. Possiamo scrivere $(*)$ come

$$A(q)\ddot q = F(q,\dot q)$$

con

$$F(q,\dot q) = Q(q,\dot q) + \nabla_q T(q,\dot q) - \frac{dA}{dt}(q,\dot q)\dot q$$

$\nabla_q T = v \cdot M \nabla_q v$

$v(q,\dot q,t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_h}\dot q_h + \frac{\partial \chi}{\partial t}(q,t)$

$T = \frac{1}{2} v \cdot M v$

Poiché A è def. pos. possiamo scrivere il sist. come

$$\begin{cases} \dot q = v \\ \dot v = A^{-1}(q)\, F(q,v) \end{cases}$$

Segue che i pt. di equilibrio $(q,\dot q) = (q_0, 0)$ sono di forma

$$Q(q_0, 0) = 0$$

non dip. da q

$F(q_0,0) = Q(q_0,0) + \nabla_q T(q_0,0) + \cancel{\frac{dA}{dt}(q_0,0)\cdot 0}$

<u>Def</u>. I valori q_0 sol. di eq. sopra si chiamano conf. di equilibrio

<u>Oss</u>: In corrisp. alle conf. di equilibrio q_0 si hanno sol. cost. $x(t) = \chi(q_0)$ di eq. di Newton.

Se le forze attive derivano da un'energia pot. generalizzata $V(q,\dot q) = V_0(q) + V_1(q,\dot q)$ possiamo scrivere la lagrangiana come

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q \cdot A(q)\dot q - V(q,\dot q)$$

In questo caso le conf. di equilibrio sono

$$\frac{\partial V_0}{\partial q}(q_0) = 0$$

<u>Dim</u>: Poiché V è un pot. generalizzato vale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q} - \frac{\partial V}{\partial q} = Q \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot q} - \frac{\partial V_1}{\partial q} - \frac{\partial V_0}{\partial q} = Q$$

tenendo conto che

$$V_1 = a(q)\cdot\dot q \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot q} = \frac{\partial a}{\partial q}\cdot\dot q$$

e si ottiene

$$Q(q,0) = -\frac{\partial V_0}{\partial q}(q)$$

LINEARIZZAZIONE ATTORNO AD UN EQ.

Dato un punto di equilibrio $(q_0,0)$ analizziamo la stab. linearizzando le eq. in un intorno di questo punto. Poiché i termini

$$\nabla_q T \quad e \quad \frac{dA}{dt}\dot q$$

sono almeno quadratici omogenei in $\dot q$, le eq. linearizzate sono

$$F(q,\dot q) = -\frac{d}{dt}A(q)\dot q + \frac{\partial T}{\partial q} + Q(q,\dot q)$$

$$\begin{cases} \dot q = v \\ \dot v = A^{-1}(q_0)\left[\frac{\partial Q}{\partial q}(q_0,0)(q-q_0) + \frac{\partial Q}{\partial \dot q}(q_0,0)\,v\right] \end{cases}$$

Se le forze attive derivano dall'energia pot. $V(q,\dot q) = V_0(q) + a(q)\cdot\dot q$ si ha

$$Q(q,\dot q) = -\frac{\partial V_0}{\partial q}(q) + B(q)\dot q$$

e le eq. linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot q = v \\ \dot v = -A^{-1}(q_0)\cdot\left[V_0''(q_0)\cdot(q-q_0) - B(q_0)\cdot v\right] \end{cases}$$

dove B è antisimmetrica con comp.

$$B_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$$

che sono le eq. di Lagrange per

$$L_0(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q\cdot A(q_0)\dot q_0 - V_0(q_0) - \frac{1}{2}(q-q_0)\cdot V_0''(q_0)(q-q_0) - \left[a(q_0) + \frac{\partial a}{\partial q}(q_0)(q-q_0)\right]$$

che è lo sviluppo di Taylor di $L(q,\dot q)$ al II ordine in $(q_0,0)$. Verifichiamo che il sist corrisp. alle eq. di lagrange per L_0

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot q} = A(q_0)\dot q - a(q_0) - \frac{\partial a}{\partial q}(q_0)(q-q_0)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial q} = -V_0''(q_0)(q-q_0) - \left[\frac{\partial a}{\partial q}(q_0)\right]^T \dot{q}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_0}{\partial q} = A(q_0)\ddot{q} - \left(\frac{\partial a}{\partial q}(q_0) - \left[\frac{\partial a}{\partial q}(q_0)\right]^T\right)\dot{q} + V_0''(q_0)(q-q_0)$$

Se $V = V_0$, tralasciando la cost. $-V_0(q_0)$

otteniamo

$$L_0(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q_0)\dot{q} - \frac{1}{2}(q-q_0)\cdot V''(q_0)(q-q_0)$$

Le eq. di Lagrange per questa sono

$$A(q_0)\ddot{q} + V''(q_0)(q-q_0) = 0$$

e si possono scrivere come

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{bmatrix} = \Lambda(q_0)\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}$$

con

$$\Lambda(q_0) = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -A^{-1}\cdot V''(q_0) & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q-q_0 \\ \dot{q}\end{bmatrix}$$

In questo caso la mat. di sist. lin. ha autoval. che dip. solo da $A(q_0)$ e $V''(q_0)$ che sono simmetriche. Segue che gli autoval λ_h di $A^{-1}V''(q_0)$ sono reali.

Sia $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base di autovett. ortonorm. risp. al p.s. definito da $A(q_0)$ ovvero

$$u_h \cdot A(q_0)u_k = \delta_{hk}$$

Per Binet si ha che

$$\det(A^{-1}V'' - \lambda I) = \det(A^{-1})\cdot\det(V'' - \lambda A)$$

quindi gli autoval. λ_h si possono calc. risolvendo

$$\det(V''(q_0) - \lambda A(q_0)) = 0$$

detta equazione secolare (che non richiede calcolare $A^{-1}(q_0)$). Inoltre si ha

$$u_h \cdot V''(q_0)u_k = u_h\cdot\lambda_k A(q_0)u_k = \lambda_k\delta_{hk}$$

cioè nella base $\mathcal{B}$ entrambe le mat. sono

diagonali. Osserviamo che se λ_h sono gli AV. di $A^{-1}V''(q_0)$ allora $\pm\sqrt{-\lambda_h}$ sono gl di $\Lambda(q_0)$.

In particolare, se $\lambda_k < 0$ per qlc k allora $(q_0, 0)$ è instabile perché il sist. ha un esp. di Lyapounov positivi.

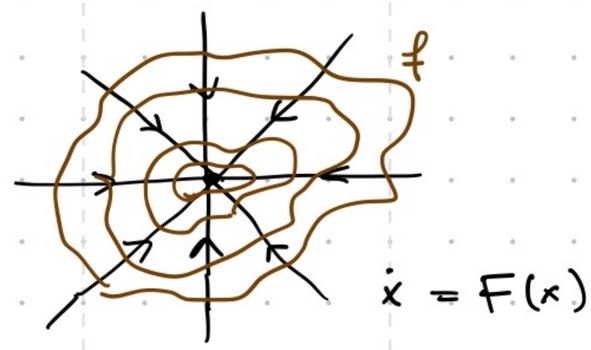
·) Se $\lambda_h \geq 0$ $\forall h$ allora gli autoval di Λ sono tutti imm. puri o nulli, quindi gli esp. di Lyapounov sono tutti nulli ed il metodo di linearizzazione non ci permette di concludere nulla sulla stab. di q_0.

TEOREMA DI LAGRANGE-DIRICHLET

Consideriamo un pt. di equilibrio x_0 dl sist.

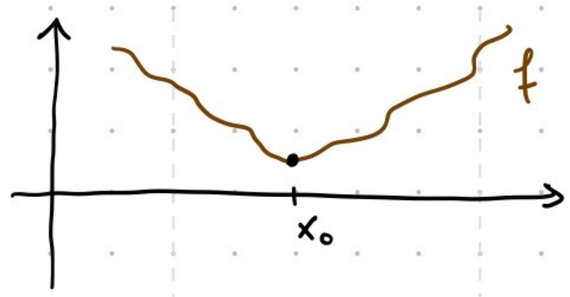
$$\dot{x} = F(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

<u>Def</u>: Si dice che una fn. $f \in C^1(U;\mathbb{R})$, def. in un int. di un pt. di eq. x_0, è una fanz. di Lyapounov se



i) $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$.

ii) $\frac{df}{dt}(x) \leq 0$ per ogni $x \in U$.



dove la derivata d/dt è

$$\frac{df}{dt}(x) := \nabla f(x) \cdot F(x)$$

<u>Th</u>. (Lyapounov): Se un pt. di eq. ammette una fn. di Lyapounov allora è stabile.

<u>Dim</u>: Sia $f: U \to \mathbb{R}$ una fn. di Lyapounov per $x_0 \in U$, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^n$. $\forall B = B(x_0, r)$ contenuta in U. Sia $\partial B(x_0, r)$ il suo bordo allora sia $m := \min_{x \in \partial B} f(x)$.

Consideriamo la c.c. V di $\{x \in B \mid f(x) < m\}$ che contiene x_0. Sia ora $y \in V$ la traiettoria

— Per usare la ii) serve un int. che contiene x_0.

di una sol. $x(t) = x(t; 0, y)$ ovvero che parte da y per $t=0$. Se per assurdo uscisse da B dovrebbe passare dal bordo per un glc $\bar{t}$ ma

$$f(x(\bar{t})) > f(y)$$

ma qst contraddice la ii) che ci dice che la derivata in t è ≤ 0.

$\square$

Th. (Lagrange-Dirichlet): Consideriamo il sist. lagrangiano definito da

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q)\dot{q} - V_0(q) - V_1(q,\dot{q})$$

— Lagrangiana del tipo $L = T_2 - V$ non dipendente dal tempo

Se q_0 è un minimo locale stretto di V_0 allora q_0 è una conf. di equilibrio stabile.

Dim: Si osserva che q_0 è una conf. di equil. per quanto visto precedentemente. Siccome la lagrangiana non dipende dal tempo la fn.

$$J(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(q)\dot{q} + V_0(q)$$

è un int. primo dl eq. di Lagrange per L. Inoltre $(q_0, 0)$ è un pt. di minimo loc. stretto per $J(q,\dot{q})$ quindi possiamo usarla come fn. di Lyapounov restringendoci ad un int.

$\square$

ANALISI DELLA STABILITÀ

Nel caso in cui le forze generalizzate siano conservative con energ. pot. $V = V_0(q)$. L'analisi del solo spettro $V''(q_0)$, dove q_0 è una conf. di eq. ci può permettere di det. le prop. di stab. dei pt. di eq..

- Se $V''(q_0)$ ha tutti gli autoval. positivi allora q_0 è un minimo stretto di V, quindi il pt. $(q_0, 0)$ è stabile per il th. di Lagrange-Dirichlet

·) Se $V''(q_0)$ ha un autoval. $\mu < 0$ con autovett. v, sia $v = \sum_h v_h \underline{u}_h$ l'espressione di v come comb. lin. degli elem. della base $\mathcal{B}$. Allora

$$0 > \mu |v|^2 = v \cdot V''(q_0) v = \sum_{h,k}^{n} v_h v_k \underline{u}_h V''(q_0) \underline{u}_k$$

$$= \sum_{h,k}^{n} v_h v_k \lambda_k \underline{u}_h \cdot A(q_0) \underline{u}_k = \sum_{h,k}^{n} v_h v_k \lambda_k \delta_{hk}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} v_h^2 \lambda_h$$

quindi esiste k con $\lambda_k < 0$ ed il punto $(q_0, 0)$ è instabile perché il sist. lin. ha un esp. di Lyapounov positivo.

STABILIZZAZIONE CON TERMINI GIROSTATICI

Se le comp. lagrangiane delle forze attive ammettono un'energia pot. gen. $V(q, \dot{q}, t) = V_0(q, t) + V_1(q, \dot{q}, t)$ è un pt. di massimo di V_0 sia stabile: infatti il term. V_1 mod. la lin. ma non gli equilibri. (stabilizzazione girostatica)

[· · ·]

PICCOLE OSCILLAZIONI ATTORNO AD UN EQ. STAB.

Assumiamo $L = T_2 - V_0$ e che q_0 sia un min. non degenere di V, quindi per L-D., q_0 è una conf. di eq. stabile. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di $A^{-1} V''(q_0)$, soluzioni di

$$\det(V''(q_0) - \lambda A(q_0)) = 0$$

osserviamo che molt. scal. per $V''(q_0) u_h = \lambda_h A u_h$ per u_h si ottiene

$$\lambda_h = \frac{u_h \cdot V''(q_0) u_h}{u_h \cdot A(q_0) u_h} > 0 \qquad \forall h$$

La sol. generale del sist. lineare

$$A(q_0)\ddot{q} + V''(q_0)(q - q_0) = 0$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 + \sum_{h=1}^{n} c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) u_h$$

con $c_h \geq 0$, $\varphi_h \in S^1$, $\omega_h = \sqrt{\lambda_h} > 0$, come possiamo verificare per sost.

Le quantità ω_h sono dette frequenze proprie del sistema e le fam. di sol. part.

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) u_h \qquad \forall h$$

si chiamano modi normali di oscillazione attorno all'equilibrio q_0.

DIAGONALIZZAZIONE SIMULTANEA DI FORME QUADR.

Consideriamo le forme quadratiche

$$a(x) = x \cdot Ax \qquad b(x) = x \cdot Bx \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

con A, B mat. $n \times n$ simm. ed A def. > 0. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ nella quale $a(x)$ e $b(x)$ sono entrambe rappr. da mat. diagonali.