Боймурод АЛИЕВ

АЛГЕБРА

Китоби дарсӣ барои синфи 11

Вазорати маорифи Ҷумҳурии Тоҷикистон
тавсия кардааст

Душанбе
ҶДММ «Бахт LTD»
2011

МУҚАДДИМА

Мо омӯзиши фанни «Алгебра ва ибтидои анализ»-ро, ки дар синфи 10 сар карда будем, давом медиҳем. Мундариҷаи китоб аз доираи барномаи таълимӣ васеътар буда, қариб тамоми маводи таълимии мактабҳои тамоили риёзиро дар бар мегирад. Сохтори китоб бо сохтори китобҳои дарсии синфҳои 7-10, ки дар чанд соли охир чоп шудаанд, якхела аст.

Китоб аз се боб иборат аст. Дар боби 1 мафҳумҳои нав - функсияи ибтидоӣ ва интеграл, баъзе хосиятҳо ва татбиқоти онҳо омӯхта мешавад. (Бояд гуфт, ки анализ ба курси математикаи олӣ мансуб аст. Дар мактаби миёна танҳо элементҳои он омӯхта мешавад.) Боби 2 аз омӯзиши мафҳуми функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он сар мешавад. Баъд мафҳуми нав – логарифм, ки амали баръакси бадараҷабардорӣ аст, оварда мешавад. Хосиятҳои логарифм, тарзҳои ҳал кардани муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ қисми асосии ин боб мебошанд. Боб бо мафҳум дар бораи муодилаҳои дифференсиалӣ ба итмом мерасад.

Ҳалли мисолу масъалаҳои дар ин ду боб овардашуда зарурияти истифодаи тамоми паҳлӯҳои маводи назариявиро талаб мекунад. Барои ҳамин дар аввал қисми назариявии бандро бодиққат омӯхта, ба саволҳои назоратӣ ҷавоб гардонида, мисолҳои дар он ҳалшударо аз худ кунед. Баъд ба ҳалли супоришҳо шурӯъ намоед. Дар бандҳо супоришҳо тавре ҷойгир карда шудаанд, ки бо зиёд шудани рақами тартибиашон ҳаллашон андаке мураккаб мегардад. Барои ҳамин чанд машқи аввали дар банд, пас аз назария омадаро шифоҳӣ шумурдан мумкин аст. Машқҳои ҳаллашон мураккабтар бо аломати (*) ишорат карда мешаванд. Бо ҳал кардани мисолу масъалаҳои қисми «Машқҳои иловагӣ доир ба боб», ки дар охири ҳар як боб нисбати ҳар як параграф оварда мешаванд, шумо мустақилона худро санҷида метавонед, ки то кадом дараҷа маводи заруриро аз худ кардаед.

Ҷавобҳои машқҳои ҳар як боб дар охираш оварда мешаванд, ки ин вақти шуморо барои санҷидани дурустии ҷавоби ёфташуда сарфа мекунад.

Ҳар як банд бо қисми «Машқҳо барои такрор» ба охир мерасад. Азбаски шумо хатмкунанда ҳастед ва имтиҳони хаттии хатмкунӣ месупоред, мисолу масъалаҳои ин қисм айнан ба ин имтиҳон шабоҳат доранд (бо назардошти назарияи то ҳамин дам омӯхташуда). Дар тартиб додани машқҳои ин қисм вариантҳои корҳои хаттии имтиҳони хатмкунии солҳои охир истифода шудаанд. Ин имконият медиҳад, ки шумо тахминан чӣ гуна будани масъалаҳои имтиҳони хатмкуниро дарк кунед. Барои ҳамин боисрор хоҳиш карда мешавад, ки машқҳои ин қисмро ҳатман ҳал кунед.

Талаботи Стандарти давлатии маълумоти умумиро дар Тоҷикистон ба эътибор гирифта дар охири бобҳо маълумоти таърихӣ оварда мешавад. Аз онҳо шумо роҷеъ ба пайдоиши мафҳумҳо, истилоҳҳо, рамзҳо ва бунёдгарони анализи математикӣ тасаввурот ҳосил мекунед.

Боби сеюм, ки «Такрор» ном дорад, аз мисолу масъалаҳое иборат аст, ки онҳо тамоми маводи мактабии синфҳои V–XI –ро дар бар мегиранд. Ин мавод на аз рӯйи омӯзишаш дар ин ё он синф, балки ҳамчун объекти математикӣ ба параграфҳо ҷудо карда шудааст. Масалан, прогрессияҳо, ки аз адад иборатанд, дар қисми ададҳои ҳақиқӣ дар аввал, дар параграфи 1 оварда шудаанд. Тамоми маводи ин боб барои тайёрӣ ба имтиҳони хатмкунӣ пешбинӣ мешавад. Китобҳои дарсии то ҳол нашршудаи муаллифони тоҷик ва чандин китоби дарсии мамолики дигар ҳангоми навиштани ин боб истифода шудаанд.

ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ИНТЕГРАЛ

1. ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ

Мо ба омӯзиши амали нави математикӣ – *интегронӣ* ва қонуниятҳои он шурӯъ мекунем. Ин амал ба амали дифференсиронӣ, яъне ёфтани ҳосилаи функсия, амали баръакс аст.

Аз мисол сар мекунем. Фарз мекунем, ки ҷисм аз рӯйи қонуни $S(t)=t^2+2t$ ҳаракат менамояд. Яъне дар лаҳзаи вақти t ҷисм масофаи бо ин формула ҳисоб мешударо тай менамояд. Суръат ва шитоби ҷисмро меёбем. Чӣ тавре ки медонем, ҳосила аз масофаи тайшуда суръат $\vartheta(t)$ буда, ҳосила аз суръат шитоб $a(t)$-ро медиҳад:

$$\vartheta(t)=s'(t)=(t^2+2t)'=(t^2)'+(2t)'=2t+2;$$
$$a(t)=\vartheta'(t)=(2t+2)'=2.$$

Айнан мисли ҳамин мисол, агар формулаи Галилей $s=\frac{gt^2}{2}$-ро гирем, он масофаеро, ки ҷисм вобаста ба вақти t ҳангоми озод афтидан тай мекунад, ифода менамояд (дар лаҳзаи ибтидоии вақт $t=0$ суръат нул аст, яъне $\vartheta(0)=0$), он гоҳ бо воситаи дифференсиронӣ суръатро меёбем:

$$\vartheta(t)=s'(t)=gt.$$

Дифференсиронии дуюм шитобро медиҳад:

$$a(t)=\vartheta'(t)=g.$$

Дар механика ва техника бо масъалаи ба масъалаҳои овардаамон баръакс вомехӯрем: шитоби нуқта $a(t)$ (ҷисм ҳамчун нуқта қабул карда мешавад) маълум аст, ёфтани қонуни тағйирёбии суръат $\vartheta(t)$ ва координата $s(t)$ талаб карда мешавад. Бо ибораи дигар, аз рӯйи ҳосилаи маълуми $\vartheta'(t)$, ки ба $a(t)$ баробар аст,

$\vartheta(t)$-ро ёфтан ва баъд аз рӯйи ҳосилаи $s'(t)$, ки ба $\vartheta(t)$ баробар аст, $s(t)$-ро ёфтан даркор аст.

Ин гуна масъалаҳо бо ёрии амали *интегронӣ* ҳал карда мешаванд.

Т а ъ р и ф: **Функсияи $F(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ номида мешавад, агар барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбандаи x аз $(a;b)$**

$$F'(x) = f(x)$$

бошад. Яъне, ҳосилаи $F(x)$ ба $f(x)$ баробар бошад.

Ёфтани функсияи ибтидоии функсияи додашударо **амали интегронӣ** меноманд.

М и с о л и 1. Функсияи $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ барои функсияи $f(x)=x$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки барои ҳар гуна $x\in(-\infty;\infty)$

$$F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x=f(x).$$

Ба осонӣ мебинем, ки, масалан, ҳосилаи $\dfrac{x^2}{2}+5$ низ ба x баробар аст. Пас ин функсия низ функсияи ибтидоӣ аст. Фаҳмост, ки ба ҷойи 5 адади дилхоҳро гирифтан мумкин аст. Мебинем, ки барои функсияи мушаххаси $f(x)=x$ функсияҳои ибтидоӣ бешуморанд.

М и с о л и 2. Барои функсияи $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи $F(x)=2\sqrt{x}$ функсияи ибтидоӣ аст, чунки барои ҳар гуна x аз $(0;\infty)$

$$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x).$$

Айнан мисли мисоли 1, функсияи $F(x)=2\sqrt{x}+C$ ҳангоми қимати дилхоҳи доимӣ қабул кардани C барои функсияи

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи ибтидоӣ мебошад.

М и с о л и 3. Функсияи $F(x)=\frac{1}{x-1}$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ барои функсияи $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$ функсияи ибтидоӣ шуда наметавонад, чунки дар нуқтаи $x=1$ баробарии $F'(x)=f(x)$ ҷой надорад. Вале дар ҳар яке аз фосилаҳои $(-\infty;1)$ ва $(1;\infty)$ $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ мебошад.

Э з о ҳ. Бар хилофи мафҳуми ҳосила, ки дар синфи 10 дар аввал дар нуқта, баъд дар фосила муайян карда шуда буд, мафҳуми функсияи ибтидоӣ якбора дар тамоми фосила муайян мешавад.

?

1. Ҳангоми дода шудани қонуни ҳаракат, суръат ва шитоби он чӣ тавр ёфта мешавад? **2.** Чӣ гуна масъалаҳо бо ёрии амали интегронӣ ҳал карда мешаванд? **3.** Функсияи ибтидоӣ чист? Таърифро бо мисолҳо мукаммал намоед. **4.** Чаро барои функсияи додашуда функсияҳои ибтидоӣ бешуморанд?

---

1. Исбот кунед, ки функсияи $F(x)$ дар фосилаи додашуда барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст:

а) $F(x)=x^3$, $f(x)=3x^2$, $x\in(-\infty;\infty)$;

б) $F(x)=\frac{1}{6}x^6$, $f(x)=x^5$, $x\in(-\infty;\infty)$;

в) $F(x)=x^{-4}$, $f(x)=-4x^{-5}$, $x\in(0;\infty)$;

г) $F(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}$, $f(x)=x^{-3}$, $x\in(0;\infty)$;

д) $F(x)=\sin 3x$, $f(x)=3\cos 3x$, $x\in(-\infty;\infty)$;

е) $F(x)=1+tg\frac{x}{4}$, $f(x)=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$, $x\in(-2\pi;2\pi)$;

ж) $F(x)=x^{\frac{4}{3}}-21$, $f(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x\in(-\infty;\infty)$;

з) $F(x)=\sin(2x+3)+1$, $f(x)=2\cos(2x+3)$, $x\in(-\infty;\infty)$;

2. Оё дар фосилаи додашуда функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидой шуда метавонад:

а) $F(x)=2-\cos x$, $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty;\infty)$;

б) $F(x)=12-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(-1;1)$;

в) $F(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\in(0;\infty)$;

г) $F(x)=x^2\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$, $x\in(-\infty;\infty)$;

д) $F(x)=x^{-2}+1$, $f(x)=\frac{1}{2x^3}$, $x\in(0;\infty)$;

е) $F(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1;1)$?

3. Барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$, яке аз функсияҳои ибтидоиро ёбед:

а) $f(x)=1{,}5$; б) $f(x)=2x$; в) $f(x)=\sin x$;

г) $f(x)=\cos x$; д) $f(x)=-x$; е) $f(x)=-\cos x$;

ж) $f(x)=-3$; з) $f(x)=-\sin x$; и) $f(x)=x^2$;

к) $f(x)=x^5$; л) $f(x)=0$; м) $f(x)=-x^3$.

4. Ба ҷойи нуқтаҳо ягон функсияеро гузоред, ки баробариро қаноат намояд:

а) $(...)'=1{,}5$; б) $(...)'=\cos x$; в) $(...)'=-\frac{1}{x^2}$;

г) $(...)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; д) $(...)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; е) $(...)'=2\sin x$;

ж) $(...)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;   з) $(...)' = \sin 4x$;   и) $(...)' = -\cos(2x+3)$.

5. Ду функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ –ро ёбед:

а) $f(x) = 4x$;   б) $f(x) = \sin x + 1$;

в) $f(x) = x^3$;   г) $f(x) = 2 - \cos x$.

6. Аз се функсияи овардашуда ҳамонашро нишон диҳед, ки дутои дигар мувофиқан ҳосила ва функсияи ибтидоии он аст:

а) $f(x) = 2$, $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x + 1$;

б) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 1$, $h(x) = \frac{x^2}{2} + x + 3$;

в) $f(x) = 1 - \sin x$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + 2$, $h(x) = x + \cos x$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

7. Коэффитсиенти кунҷии расандаро, ки ба графики функсияи $f(x) = 2x^4 - 7x + 4$ дар нуқтаи абсиссаш $x = 1$ гузаронида шудааст ёбед.

8. Шитоби ҳаракатро ёбед, агар ҷисм ростхатта аз рӯйи қонуни $s(t) = 2t^2 - t + 3$ ҳаракат намояд.

9. Муодиларо ҳал кунед:

$$x + \sqrt{7 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}} = 4.$$

10. Функсияи $y = x^2(x-3)$-ро бо ёрии ҳосила тадқиқ карда, графикашро созед.

11*. $tg\alpha$ –ро ёбед, агар $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ ва $\alpha \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$ бошад.

2. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ

Дар ин банд намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи додашуда меёбем.

Чӣ тавре дидем, функсияи ибтидоӣ ягона нест. Масалан, функсияҳои $\frac{x^2}{2}+5$ ва $\frac{x^2}{2}-10$, ва умуман, функсияи $\frac{x^2}{2}+C$ барои ҳар гуна қимати доимии C, барои $f(x)=x$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ функсияҳои ибтидоианд. Зоҳиран фаҳмост, ки фарқи ин ду функсияи ибтидоӣ адади доимист. Нишон медиҳем, ки ин ба ҳар гуна функсияи ибтидоӣ хос аст, яъне як функсияи ибтидоӣ аз дигараш бо қимати доимӣ фарқ мекунад. Аниқаш тасдиқи зерин дуруст аст, ки он *хосияти асосии* функсияи ибтидоиро ифода мекунад.

Т е о р е м а. **Агар функсияи $F(x)$ яке аз функсияи ибтидоӣ барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ бошад, он гоҳ ҳар гуна функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ дар ин фосила намуди**

$$F(x)+C$$

-ро дорад, ки дар ин ҷо C доимии дилхоҳ аст.

Пеш аз исботи теорема дурустии леммаи зеринро нишон медиҳем, ки он ҳамчун *нишонаи доимӣ* будани функсия маълум аст.

Л е м м а. **Агар дар фосилаи $(a;b)$ ҳосилаи функсияи $F(x)$ айниятан ба нул баробар бошад, яъне $F'(x)=0$ барои ҳар гуна $x\in(a;b)$, он гоҳ $F(x)$ дар ин фосила доимӣ аст.**

И с б о т. Нуқтаи ихтиёрии x_0-ро аз фосилаи $(a;b)$ интихоб мекунем. Барои ҳар гуна x аз ин фосила, мувофиқи формулаи Лагранж, чунин нуқтаи c-и ин фосила ёфт мешавад, ки:

$$F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0).$$

Вале мувофиқи шарт $F'(c)=0$ аст, пас $F(x)=F(x_0)$ барои ҳар гуна $x\in(a;b)$. Яъне функсияи $F(x)$ дорои қимати доимӣ аст. Лемма исбот шуд.

И с б о т и т е о р е м а. Бигузор функсияҳои $\Phi(x)$ ва $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ функсияҳои ибтидоӣ мебошанд, яъне барои ҳар гуна $x\in(a;b)$: $\Phi'(x)=f(x)$ ва $F'(x)=f(x)$. Пас

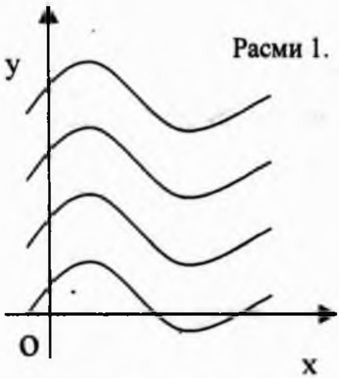
$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Аз ин ҷо ва дар асоси лемма бармеояд, ки фарқи $\Phi(x)-F(x)$ функсияест, ки дар фосилаи $(a;b)$ доимӣ мебошад. Ин қимати доимиро бо C ишорат карда ҳосил мекунем:

$$\Phi(x)=F(x)+C, \qquad (1)$$

ки он дурустии тасдиқи теоремаро нишон медиҳад.

Э з о ҳ и 1. Маънои геометрии хусусияти асосии функсияи ибтидоӣ чунин аст: графикҳои ду функсияи дилхоҳи ибтидоии функсияи $f(x)$ аз ҳамдигар бо воситаи ба самти тири OY параллел кӯчонидан ҳосил карда мешаванд (расми 1).



Расми 1.

М и с о л и 1. Зоҳиран фаҳмост, ки функсияҳои $F(x)=x^2$ ва $\Phi(x)=x^2+4$ барои ҳамон як функсия функсияи ибтидоианд. Дар ҳақиқат $F'(x)=2x$, $\Phi'(x)=(x^2+4)'=(x^2)'+(4)'=2x+0=2x$ ва $\Phi(x)=F(x)+4$. Графики $\Phi(x)$ аз графики параболаи $F(x)$ бо воситаи ба самти тири OY, ба боло, ба 4 воҳид кӯчонидан ҳосил мешавад.

Э з о ҳ и 2. Тасдиқи теорема ду хосияти функсияи ибтидоиро дарбар мегирад: 1) Ҳангоми дар баробарии (1) ба ҷойи C гузоштани адади дилхоҳ функсияи ибтидоӣ ҳосил мешавад; 2) Ҳангоми дода шудани яке аз функсияҳои ибтидоии $F(x)$, ҳатман чунин адади C-ро ёфтан мумкин аст, ки дигараш бо баробарии (1) ифода мешавад.

М и с о л и 2. Нишон медиҳем, ки фарқи функсияҳои $F(x)=\dfrac{\cos 2x}{2}$ ва $\Phi(x)=\cos^2 x$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ доимӣ аст. Ин доимиро меёбем. Азбаски

$$F'(x)-\Phi'(x)=\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)'-\left(\cos^2 x\right)'=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2-$$

$$-2\cos x(\cos x)'=-\sin 2x-2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x+2\sin x\cos x=$$

$=-\sin 2x+\sin 2x=0$ Пас, мувофиқи тасдиқи теорема:

$$\frac{\cos 2x}{2} = \cos^2 x + C; \qquad \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \cos^2 x + C;$$

$$\frac{2\cos^2 x - 1}{2} = \cos^2 x + C. \quad \text{Аз ин ҷо} \quad C = -\frac{1}{2}.$$

?

---

1. Нишонаи доимӣ будани функсияро баён кунед. **2.** Тасвияи теоремаро, ки он ду хосияти функсияи ибтидоиро дар бар мегирад, оред. **3.** Графикҳои функсияҳои ибтидоии як функсия аз якдигар чӣ тавр ҳосил мешаванд?

---

12. Магар функсияҳои зерин барои ҳамон як функсия функсияи ибтидоианд:

а) $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 5$ ва $L(x) = (x+5)^2$;

б) $F(x) = \cos 2x$ ва $\Phi(x) = 2\cos^2 x$;

в) $F(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ ва $\Phi(x) = \dfrac{2}{x-1}$?

13. Нишон диҳед, ки функсияҳои $F(x) = -\sin^2 x$ ва $\Phi(x) = 2\cos^2 x + \sin^2 x$ барои $f(x) = -\sin 2x$ функсияҳои ибтидоӣ буда, $F(x) = \Phi(x) - 2$ аст.

14. Оё функсияи ибтидоии функсияи даврӣ функсияи ғайридаврӣ шуда метавонад?

15*. Исбот кунед, ки функсияи ибтидоии функсияи тоқ функсияи ҷуфт аст.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

16. Ифодаро сода кунед:

$$\frac{2x}{x+y} : \left[\frac{x-y}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{x^2-y^2}\right].$$

17. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{(1-x)(5-x)}$ -ро ёбед.

18. Дар прогрессияи геометрӣ аъзои якум ба 312 ва махраҷи он ба $\frac{1}{2}$ баробар аст. Суммаи чор аъзои аввалаи ин прогрессияро ёбед.

19. Қимати хурдтарини функсияи $y=x^4-2x^2$ -ро дар порчаи $[-2;\ 2]$ ёбед.

20. Решаҳои муодилаи квадратии ислоҳшуда ба –2 ва 3 баробаранд. Ин муодиларо ёбед.

3. ЁФТАНИ ФУНКСИЯҲОИ ИБТИДОӢ. ҶАДВАЛИ ОНҲО

Теоремаи дар банди пешина исбот кардаамонро асос карда, намуди умумии функсияҳои ибтидоиро барои якчанд функсияи додашуда меёбем. Баъд ҷадвали функсияҳои ибтидоиро меорем.

I

М и с о л и 1. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи $f(x)=x^2$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ меёбем.

Ҳ а л. Мебинем, ки яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$ функсияи $\frac{x^3}{3}$ аст, чунки $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$. Дар асоси теорема намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои ин функсия чунин аст:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C.$$

М и с о л и 2. Барои функсияи $f(x)=-\frac{1}{x^3}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро меёбем, ки қиматаш ҳангоми $x=1$ будан ба 2 баробар аст.

Ҳ а л. Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки функсияи $\frac{1}{2x^2}$ барои $-\frac{1}{x^3}$

дар фосилаи $(0;\infty)$ функсияи ибтидой аст, чунки $\left(\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-2-1} = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$. Пас, мувофиқи теорема ҳар гуна функсияи ибтидой намуди $F(x) = \frac{1}{2x^2} + C$ -ро дорад. Мувофиқи шарт $F(1) = 2$ аст, пас $F(1) = \frac{1}{2\cdot 1^2} + C = 2$ ё $C = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5$. Ҳамин тариқ, функсияи ибтидоии матлуб $F(x) = \frac{1}{2x^2} + 1{,}5$ мебошад.

Мисоли 3. Маълум аст, ки графики функсияи ибтидоии функсияи $f(x) = -\cos x$ аз нуқтаи $(\frac{\pi}{2};\, 12)$ мегузарад. Ин функсияро меёбем.

Ҳал. Намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи $-\cos x$ функсияи $F(x) = -\sin x + C$ мебошад. Пас, барои ёфтани доимии C муодилаи $F(\frac{\pi}{2}) = 12$ ё $-\sin\frac{\pi}{2} + C = 12$, ё ки $-1 + C = 12$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $C = 13$ ва $F(x) = -\sin x + 13$.

Мисоли 4. Нуқта аз рӯйи хати рост бо шитоби $a(t) = 4t$ ҳаракат мекунад. Дар лаҳзаи ибтидоии $t_0 = 1$ координатааш ба $x_0 = 2$ ва суръаташ ба $\vartheta_0 = 1$ баробар аст. Координатаи нуқта $x(t)$-ро ҳамчун функсияи вақт меёбем.

Ҳал. Ин масъала мисоли типии масъалаи баръакс, ки дар банди 1 қайд карда будем мебошад: аз рӯйи $\vartheta'(t) = a(t)$ аввал $\vartheta(t)$-ро, баъд аз рӯйи $x'(t) = \vartheta(t)$ функсияи $x(t)$-ро меёбем.

Функсияи ибтидой барои $a(t) = 4t$ функсияи $\vartheta(t) = 2t^2 + C$ мебошад. Вале $\vartheta_0 = \vartheta(1) = 1$, пас $2\cdot 1^2 + C = 1$, $C = -1$. Инак, $\vartheta(t) = 2t^2 - 1$. Функсияи ибтидой барои $\vartheta(t)$ бошад, функсияи

$x(t)=\frac{2}{3}t^3-t+C$ аст. Мувофиқи шарти масъала $x_0=x(t_0)=$ $=x(1)=\frac{2}{3}\cdot 1^3-1+C=2$. Пас, $-\frac{1}{3}+C=2$, $C=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ ва $x(t)=\frac{2}{3}t^3-t+\frac{7}{3}$.

II

Акнун ҷадвали функсияҳои ибтидоиро меорем. Дар сатри якум функсияи $f(x)$ ва дар сатри дуюм намуди умумии функсияи ибтидоии он $F(x)$ оварда шудааст:

$f(x)$	k (доимӣ)	x^{α}, $\alpha\in R$ $(\alpha\neq-1)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	kx+C	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$2\sqrt{x}+C$	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$tgx+C$	$-ctgx+C$

Дурустии ин ҷадвал бо гирифтани ҳосила нишон дода мешавад. Масалан,

$$(tgx+C)'=(tgx)'+C'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'+0=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Чӣ тавре дар оянда хоҳем дид, истифодаи ин ҷадвал ёфтани функсияи ибтидоиро барои баъзе функсияҳо осон менамояд.

Э з о ҳ. Функсияҳои $\frac{1}{\sqrt{x}}$ дар $(0;\infty)$, $\frac{1}{\cos^2 x}$ дар $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$ ва $\frac{1}{\sin^2 x}$ дар $(\pi k;\pi(k+1))$, $k\in Z$

муайянанд. Функсияҳои ибтидоии онҳо $2\sqrt{x}+C$, $tgx+C$ ва $-ctgx+C$ низ дар ҳамин фосилаҳо муайян ҳисоб карда мешаванд.

?

1. Чӣ тавр санҷидан мумкин аст, ки функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст? **2.** Оё аз нуқтаи додашуда ду функсияи ибтидоӣ мегузарад?

---

21. Намуди умумии функсияҳои ибтидоиро барои функсияи $f(x)$ ёбед:

а) $f(x)=2$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=x^5$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$; д) $f(x)=-\sin x$; е) $f(x)=-4$.

22. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он қимати додашударо дар нуқтаи додашуда қабул намояд:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $F(1)=10$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(\dfrac{\pi}{4})=-2$;

в) $f(x)=x^6$, $F(-1)=3$;

г) $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-3$.

23. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x)=x^3$, $M(2;1)$; б) $f(x)=\sin x$, $M(0;3)$;

в) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $M(\frac{\pi}{4};0)$; г) $f(x)=-2$, $M(3;5)$;

д) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $M(-\frac{1}{2};3)$; е) $f(x)=-\cos x$, $M(\frac{\pi}{2};0)$.

24. Нуқта аз рӯйи хати рост бо шитоби $a(t)$ ҳаракат мекунад. Дар лаҳзаи ибтидоии t_0 координатааш ба x_0 ва суръаташ ба ϑ_0 баробар аст. Координатаи $x(t)$-ро чун функсияи вақт ёбед:

а) $a(t)=-t$, $t_0=2$, $x_0=4$, $\vartheta_0=-3$;

б) $a(t)=\cos t$, $t_0=\pi$, $x_0=0$, $\vartheta_0=0$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

25. Экстремали функсияи $y=2-2x-x^2$-ро ёбед.

26. Ифодаро сода кунед:

$$\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos(\alpha-30^0)}.$$

27. Системаро ҳал намоед:

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ x-\sqrt{xy}=2.\end{cases}$$

28. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$-ро ёбед.

4. ҚОИДАҲОИ СОДАТАРИНИ ЁФТАНИ ФУНКСИЯҲОИ ИБТИДОӢ

Аз сабаби он ки масъалаи ёфтани функсияи ибтидоӣ нисбати масъалаи ёфтани ҳосила баръакс аст, ҳар яке аз ин се қоида ба қоидаҳои мувофиқи дифференсиронӣ монанданд.

1^0. Функсияи ибтидоии суммаи ду функсия. *Агар $F(x)$ барои $f(x)$ ва $G(x)$ барои $g(x)$ функсияи ибтидоӣ бошанд, он гоҳ $F(x)+G(x)$ барои $f(x)+g(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.*

Дар ҳақиқат, азбаски $F'(x)=f(x)$ ва $G'(x)=g(x)$ аст, пас

$$\left(F(x)+G(x)\right)' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x).$$

Мисоли 1. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи

$$f(x)=x^2+\cos x$$

мeёбем.

Ҳал. Азбаски $\frac{x^3}{3}$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи x^2, $\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $\cos x$ аст, пас мувофиқи қоидаи 1^0 мебинем, ки функсияи $\frac{x^3}{3}+\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)=x^2+\cos x$ мебошад.

Ҷавоб: $F(x)=\frac{x^3}{3}+\sin x+C$.

Мисоли 2. Намуди умумии функсияи ибтидоиро барои функсияи

$$F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

мeёбем.

Ҳал. Монанди ҳалли мисоли пешина мулоҳиза ронда, ҷадвали функсияҳои ибтидоиро (ниг. ба саҳ.15) истифода карда мебинем, ки функсияи $tgx+2\sqrt{x}$ барои $f(x)$ яке аз функсияҳои ибтидоист.

Ҷавоб: $F(x)=2\sqrt{x}+tgx+C$.

2^0. Функсияи ибтидоии функсияи ҳосили зарби адад бар функсия. *Агар $F(x)$ барои $f(x)$ функсияи ибтидоӣ ва k бузургии доимӣ бошад, он гоҳ $kF(x)$ барои $kf(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.*

Дар ҳақиқат, азбаски зарбшавандаро аз зери аломати ҳосила баровардан мумкин аст, пас

$$(kF(x))' = k(F(x))' = kf(x).$$

Ин баробарӣ дурустии қоидаро нишон медиҳад.

М и с о л и 3. Барои функсияи $f(x) = 7\sin x$ функсияи ибтидоиро меёбем.

Ҳ а л. Барои $\sin x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $-\cos x$ аст. Пас мувофиқи ин қоида $-7\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоист.

Ҷ а в о б: $F(x) = -7\cos x + C$.

М и с о л и 4. Функсияи ибтидоиро барои $f(x) = 5\cos x + 2x^4$ меёбем.

Ҳ а л. Аввал қоидаи 2^0, баъд қоидаи 1^0-ро татбиқ намуда, мувофиқи ҷадвали функсияҳои ибтидоӣ ҳосил мекунем:

$$F(x) = 5\sin x + \frac{2}{5}x^5 + C.$$

М и с о л и 5. Қуввае, ки ба ҷисми массааш m таъсир мекунад, аз рӯйи қонуни синусоидалӣ тағйир меёбад: $F = A\sin t$, ки $A > 0$ аст. Дар зери таъсири ин қувва ҷисм ростхатта ҳаракат мекунад. Маълум аст, ки ҳангоми $t = 0$ будан, суръати ҷисм ϑ_0 аст. Ба чанд баробар будани суръатро дар лаҳзаи дилхоҳи t муайян мекунем.

Ҳ а л. Аз рӯйи қувва шитобро мувофиқи қонуни Нютон меёбем: $a = \frac{F}{m} = \frac{A}{m}\sin t$. Суръат функсияи ибтидоии шитоб аст, барои ҳамин $\vartheta(t) = -\frac{A}{m}\cos t + C$, ки C доимии дилхоҳ аст.

Мувофиқи шарт $\vartheta_0 = \vartheta(0) = -\frac{A}{m} + C$, пас $C = \vartheta_0 + \frac{A}{m}$. Ҳамин тариқ,

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \frac{A}{m} - \frac{A}{m}\cos t.$$

3^0 Функсияи ибтидоии функсияи $f(kx+b)$. *Агар $F(x)$ функсияи ибтидоии $f(x)$, k ва b доимиҳо $(k \neq 0)$ бошанд, он гоҳ $\frac{1}{k}F(kx+b)$ функсияи ибтидоии функсияи $f(kx+b)$ мебошад.*

Дар ҳақиқат, мувофиқи шарти $F'(kx+b)=f(kx+b)$ ва қоидаи дифференсиронии функсияи мураккаб дорем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\left(F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' =$$

$$= \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b).$$

Мисоли 6. Барои функсияи $f(x)=\cos(7x-9)$ яке аз функсияҳои ибтидоиро меёбем.

Ҳал. Барои $\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $\sin x$ аст. Бинобар ин аз рӯйи қоидаи 3^0 $F(x)=\frac{1}{7}\sin(7x-9)$ функсияи ибтидоии матлуб аст.

Мисоли 7. Барои функсияҳои: а) $f(x)=(3x+5)^7$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10x-7}}$ функсияҳои ибтидоиро меёбем.

Ҳал. а) Барои функсияи x^7 яке аз функсияҳои ибтидоӣ $\dfrac{x^8}{8}$ аст.

Пас, мувофиқи қоидаи 3^0 функсияи $\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{(3x+5)^8}{8}\right)=\dfrac{1}{24}(3x+5)^8$ барои $(3x+5)^7$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Ҳамин тариқ, $F(x)=\dfrac{1}{24}(3x+5)^8+C$.

б) Барои функсияи $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ $2\sqrt{x}$ аст.

Пас аз рӯйи қоидаи 3^0 функсияи $\dfrac{1}{10}\cdot 2\sqrt{10x-7}=\dfrac{1}{5}\sqrt{10x-7}$ барои

$\frac{1}{\sqrt{10x-7}}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Инак,

$$F(x)=\frac{1}{5}\sqrt{10x-7}+C.$$

?

1. Се қоидаи ёфтани фуксияҳои ибтидоиро баён кунед ва онҳоро бо мисолҳои мушаххас шарҳ диҳед. **2.** Ин қоидаҳо ба кадом қоидаҳои дифференсиронӣ монананд.

Намуди умумии фуксияҳои ибтидоии $f(x)$ -ро ёбед (29-31):

29. а) $f(x)=4x+x^2-\frac{1}{x^2}$; б) $f(x)=x-\frac{4}{x^4}+\sin x$;

в) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^2}-4\sin x$.

30. а) $f(x)=(3x-1)^6$; б) $f(x)=(2-5x)^3$;

в) $f(x)=\sin(9x+1)$; г) $f(x)=\cos(4x-9)$.

31*. а) $f(x)=\frac{4}{(2-7x)^3}$; б) $f(x)=\frac{2}{(4-3x)^4}$;

в) $f(x)=\frac{3}{\cos^2(4x-1)}$; г) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\sin^2(3x+1)}$.

32. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x)=2x+\frac{1}{x^3}$, $M(-2;1)$;

б) $f(x)=x^4-1$, $M(2;10)$;

в) $f(x) = 1 - 3x$, $M(2; 3)$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 8x^5 + 2$, $M(1; 7)$.

33*. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$-ро ёбед:

а) $f(x) = 1 - \sin 6x + 2\cos(\frac{\pi}{3} - x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x} + \frac{1}{\sqrt[5]{3-x}} - 2x^3$;

в) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(4x+1)} - 4\cos(2-x) + 3x$;

г) $f(x) = \frac{1}{(4-2x)^3} + \frac{2}{\sqrt{7x-1}} - 2\sin(\frac{\pi}{4} - x)$.

34. Суръати нуқтаи ростхатта ҳаракаткунанда бо формулаи $\vartheta(t) = t^2 - 3t + 1$ ифода мешавад. Агар дар лаҳзаи ибтидоии вақт $(t = 0)$ нуқта дар ибтидои координатаҳо бошад, вобастагии координаи он x-ро аз вақти t ба воситаи формула нависед.

35. Нуқта бо шитоби $a(t) = 8t^2 + 5$ ростхатта ҳаракат мекунад. Агар дар лаҳзаи $t = 0$ суръати он ба 8 м/с, координатааш ба 16 баробар бошад, қонуни ҳаракати нуқтаро ёбед.

36. Нуқтаи массааш m аз рӯйи тири абсисса дар зери қуввае ҳаракат мекунад, ки он қад-қади ҳамин тир равон шудааст. Дар лаҳзаи вақти t қувва ба $F(t)$ баробар аст. Агар ҳангоми $t = t_0$ будан суръати нуқта ба ϑ_0, координатааш ба x_0 баробар бошад, формулаи вобастагии $x(t)$-ро аз вақти t ёбед. ($F(t)$-ба ҳисоби Нютон, t-ба ҳисоби сония, ϑ-ба ҳисоби метр дар сония, m-ба ҳисоби килограмм):

а) $F(t) = 3 - 6t$, $t_0 = 1$, $\vartheta_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;

б) $F(t) = 8\sin t$, $t_0 = \pi$, $\vartheta_0 = 3$, $x_0 = 2$, $m = 6$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

37. Қимати калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)=2x^3+3x^2-36x$ - ро дар порчаи $[-1;3]$ ёбед.

38. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\ x+y=5.\end{cases}$$

39. Решаи дар фосилаи $(0^0;180^0)$ воқеъбудаи муодилаи

$$\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x$$

-ро ёбед.

40. Барои кадом қиматҳои c муодилаи $x^2+2x+c=0$ реша надорад? Қимати хурдтарини бутуни чунин c-ро нишон диҳед.

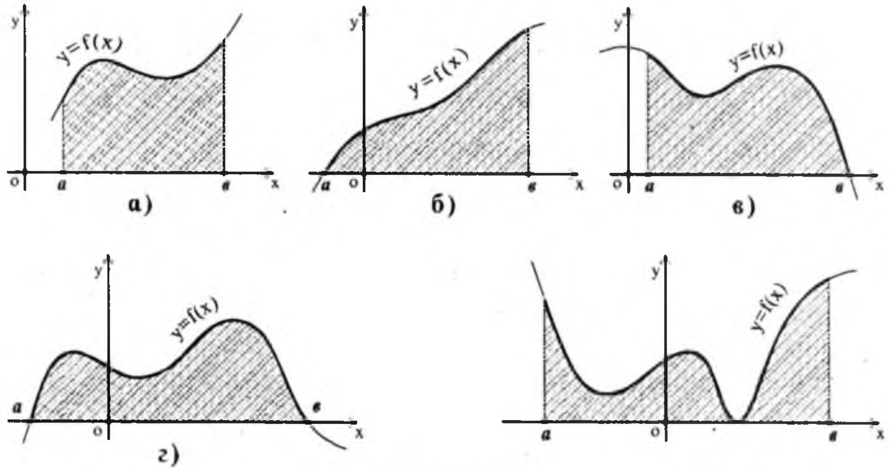
41. Аз шаҳри A ба шаҳри B, ки масофаи байни онҳо 120 км аст, дар як вақт ду велосипедрон ҳаракат намуданд. Суръати велосипедрони якум назар ба суръати велосипедрони дуюм 3 км/соат зиёдтар буд, бинобар ин ӯ ба шаҳри B 2 соат пештар омада расид. Суръати ҳар як велосипедронро ёбед.

§2 ИНТЕГРАЛ

5. МАСОҲАТИ ТРАПЕТСИЯИ КАҶХАТА

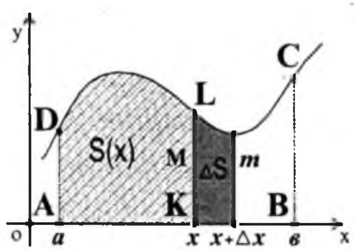
Бигузор дар порчаи $[a;b]$ функсияи бефосилаи $y=f(x)$ дода шудааст, ки доималомат мебошад. (Барои муайянӣ фарз мекунем, ки ғайриманфӣ аст, яъне барои ҳар гуна $x\in[a;b]$ $f(x)\ge 0$.)

Т а ъ р и ф. **Фигурае, ки бо графики функсияи ғайриманфӣ, порчаи $[a;b]$, хатҳои рости $x=a$ ва $x=b$ маҳдуд аст, трапетсияи каҷхатта номида мешавад.**



Расми 2. д)

Шаклҳои гуногуни трапетсияи каҷхата дар расми 2, *а) – д)* оварда шудаанд.



Расми 3.

Бо S масоҳати трапетсияи каҷхатаро ишорат менамоем. Бо мақсади ёфтани S, рафтори масоҳати фигураи тағйирёбандаи $AKLD$ –ро, ки он бо хатҳои рости $x = a$ ва KL, графики $y = f(x)$ дар порчаи $[a; x]$ ва худи ҳамин порча маҳдуд аст (расми 3) меомӯзем. Ин масоҳатро бо $S(x)$ ишорат мекунем. (Ҳангоми тағйир ёфтани x масоҳати номбурда мувофиқан тағйир меёбад. Яъне, масоҳати трапетсияи каҷхаттаи $AKLD$ функсияи аргументаш x аст). Функсияи ҳозир дохилкардаамон дорои хосияти аҷибе аст, ки онро дар шакли теорема меорем.

Т е о р е м а . **Функсияи $S(x)$ барои функсияи $y = f(x)$ функсияи ибтидоӣ аст.**

И с б о т. Ҳосилаи функсияи $S(x)$ -ро меёбем. Бо ин мақсад ба x ягон афзоиши (масалан, мусбати) Δx -ро медиҳем. Масоҳати $S(x)$ афзоиши $\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$ -ро қабул мекунад (расми 3).

Бо m ва M мувофиқан, қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи $f(x)$-ро дар порчаи $[x; x+\Delta x]$ ишорат карда, масоҳати ΔS-ро бо масоҳатҳои росткунҷаҳое муқоиса менамоем, ки асосашон Δx буда, баландиҳояшон m ва M мебошанд. Зоҳиран фаҳмост, ки

$$m\Delta x < \Delta S < M\Delta x$$

аст. Аз ин ҷо

$$m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M .$$

Азбаски функсияи бефосила дар порчаи $[m; M]$ тамоми қиматҳои мобайниро қабул мекунад, пас чунин нуқтаи $c \in [x; x+\Delta x]$ ёфт мешавад, ки $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(c)$. (Ин баробарӣ ҳангоми $\Delta x < 0$ будан низ дуруст аст.) Акнун Δx-ро ба нул майл карда мебинем, ки порчаи $[x; x+\Delta x]$ бо нуқтаи x якҷоя мешавад, яъне ҳангоми $\Delta x \to 0$ $f(c) \to f(x)$. Инак, ҳангоми $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$. Ин наздикшавӣ нишон медиҳад, ки $S'(x) = f(x)$. Теорема исбот шуд.

Х у л о с а. **Ҳангоми дар порчаи $[a;b]$ бефосила ва доималомат будани функсияи $y = f(x)$ масоҳати трапетсияи каҷхаттаи ABCD (расми 3) ба афзоиши яке аз функсияҳои ибтидоӣ дар порчаи $[a;b]$ баробар аст, яъне**

$$S = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи теоремаи ҳозир исботкардаамон ва хосияти асосии функсияи ибтидоӣ

$$S(x) = F(x) + C ,$$

ки $F'(x) = f(x)$ аст. Дар баробарии болоӣ $x = a$ гузошта доимии C-ро меёбем: $0 = S(a) = F(a) + C$, яъне $C = -F(a)$. Пас

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

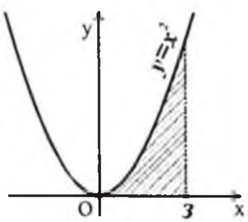
Барои ҳосил кардани масоҳати ҳамаи трапетсияи каҷхаттаи $ABCD$ $x = b$ гузоштан лозим аст:

$$S = S(b) = F(b) - F(a) .$$

Э з о ҳ. Формулаи (2) ҳангоми дар порчаи $[a; b]$ гуногуналомат будани $y = f(x)$ низ дуруст аст. Барои исбот порчаи $[a; b]$-ро ба k ҳисса ҷудо кардан даркор аст, ки дар ҳар як ҳиссаи $[x_i; x_{i+1}]$ $(x_0 = a, x_k = b)$ функсияи $y = f(x)$ доималомат мебошад. Формулаи (2) барои ҳар як ҳисса дуруст аст, яъне $S_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$ масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо ин ҳисса, графики $y = f(x)$, хатҳои рости $x = x_i$ ва $x = x_{i+1}$ маҳдудбуда мебошад. Зоҳиран фаҳмост, ки $S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{k-1} =$

$$= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \cdots$$

$$\cdots + (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$



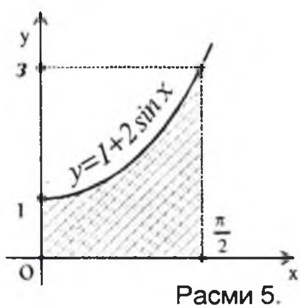
Расми 4.

М и с о л и 1. Масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо графики функсияи $f(x) = x^2$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 3$ маҳдудбударо меёбем.

Ҳ а л. Графикҳоро схемавӣ кашида масоҳати матлубро бо хатҳои рах-рах қайд мекунем (расми 4).

Функсияи $f(x) = \frac{x^3}{3}$ барои функсияи $f(x) = x^2$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ мебошад. Пас, мувофиқи формулаи (2)

$$S = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$



Расми 5.

М и с о л и 2. Масоҳати трапетсияи каҷхаттаи бо графики функсияи $f(x) = 1 + 2\sin x$ ва хатҳои $y = 0$, $y = 3$, $x = \frac{\pi}{2}$ маҳдудшударо ҳисоб мекунем (расми 5).

Ҳ а л. Функсияи $F(x) = x - 2\cos x$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст. Пас, мувофиқи формулаи (2)

$$S = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} - (0 - 2\cos 0) = \frac{\pi}{2} + 2.$$

?

1. Чӣ гуна фигура трапетсияи каҷхатта номида мешавад? **2.** Магар ҳамаи шаклҳои ин гуна трапетсияҳо ҳангоми доималомат будани функсия дар расми 2 нишон дода шудаанд? **3.** Масоҳати трапетсияи каҷхаттаи функсияи $y = f(x)$ бо воситаи функсияи ибтидоиаш бо кадом формула ифода мешавад?

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ёбед (42-44):

42. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$;

в) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

г) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

43. а) $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = 1 + \frac{\sin x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

в) $y = 1 + 2\cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

г) $y = 16 - x^2$, $y = 0$.

44. а) $y = (x+1)^2$, $y = 0$, $x = 1$;

б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

в) $y = x - x^2$, $y = 0$;

г) $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

45*. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$-ро ёбед, агар $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2(2x+1)}+\sqrt{6x-5}+2x^4$ бошад.

46. Ҳисоб кунед: $\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{8^{-\frac{2}{3}}}$.

47. Системаро ҳал намоед:

$$\begin{cases} x^2+3xy=18, \\ 3y^2+xy=6. \end{cases}$$

48. Муодилаи $tg^2x-6tgx+5=0$-ро дар порчаи $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ ҳал кунед ва ҷавобро бо градус нависед.

49. Фосилаҳои монотонӣ, экстремум ва экстремали функсияи $f(x)=6x-8x^3$-ро ёбед.

6. ЁФТАНИ МАСОҲАТИ ФИГУРАҲО

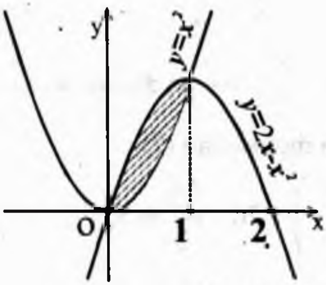
Мо аллакай масоҳати трапетсияи каҷхаттае, ки бо хатҳои $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ маҳдуд аст, ҳисоб карда метавонем (ниг. ба формулаи (2) дар б.5). Дар айни ҳол функсияи $f(x)$ ғайриманфӣ ҳисоб карда мешавад.

Ҳоло ба ҳисоби масоҳати фигураҳое шурӯъ менамоем, ки онҳо дар натиҷаи буриши ду ё якчанд хати каҷ ҳосил мешаванд. Дар ҳалли мисолҳои мушаххас ***схемаи умумии*** ёфтани чунин масоҳатҳоро нишон медиҳем.

М и с о л и 1. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y=x^2$ ва $y=2x-x^2$ маҳдуд аст, меёбем.

Ҳ а л. 1) Фигураи додашударо схемавӣ тасвир мекунем (расми 6). 2) Абсиссаҳои нуқтаҳои буриши графикҳои функсияҳоро меёбем:

$x^2=2x-x^2$; $x^2=x$; $x(x-1)=0$; $x=0$ ва $x=1$.



Расми 6.

3) Масоҳати трапетсияи каҷхаттаро, ки аз боло бо графики функсияи $y = 2x - x^2$ ва хатҳои $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, меёбем. Барои ин функсияи ибтидоии ин функсияро ёфта, формулаи (2)-ро татбиқ менамоем. Яке аз функсияҳои ибтидоӣ функсияи $F(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$ аст. Пас, масоҳати ин трапетсияи каҷхатта $S_2 = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ аст.

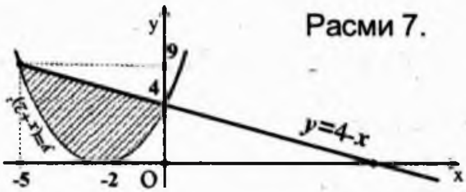
4). Масоҳати трапетсияи каҷхаттаро, ки бо хатҳои $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ маҳдуд аст, меёбем. Функсияи ибтидоӣ бо формулаи $F(x) = \frac{x^3}{3}$ дода мешавад, барои ҳамин $S_1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$.

5). Масоҳати фигураи матлубро ҳамчун фарқи масоҳатҳо меёбем:

$$S = S_2 - S_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Мисоли 2. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = (x+2)^2$ ва $y = 4 - x$ маҳдудбударо меёбем.

Ҳал. Мувофиқи схемаи дар ҳалли мисоли 1 истифода кардаамон амал менамоем.



Расми 7.

1) Графики функсияҳоро сохта соҳаи заруриро бо хати рах - рах қайд мекунем (расми 7).

2) Абсиссаҳои нуқтаҳои буриши графикҳоро меёбем:

$(x+2)^2 = 4 - x$; $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$; $x^2 + 5x = 0$; $x(x+5) = 0$;

$x = -5$, $x = 0$.

3) Масоҳати бо хатҳои $y = 4 - x$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 0$ маҳдудбударо меёбем. Функсияи $F(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ барои $y = 4 - x$ аст. Пас, мувофиқи формулаи (2):

$$S_2 = F(0) - F(-5) = 0 - \left(4 \cdot (-5) - \frac{(-5)^2}{2}\right) = 20 + \frac{25}{2} = 32\frac{1}{2}.$$

4). Барои ёфтани масоҳати бо хатҳои $y = (x+2)^2$, $y = 0$, $x = -5$ $x = 0$ маҳдуд буда, мебинем, ки $F(x) = \frac{(x+2)^3}{3}$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст, пас:

$$S_1 = F(0) - F(-5) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{8}{3} + 9 = 11\frac{2}{3}.$$

5) Масоҳати матлуб ба фарқи масоҳатҳо баробар аст:

$$S = S_2 - S_1 = 32\frac{1}{2} - 11\frac{2}{3} = \frac{65}{2} - \frac{35}{3} = \frac{195 - 70}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

?

1. Зинаҳои схемаи умумии ёфтани масоҳати фигурае, ки дар натиҷаи буриши ду ё якчанд хати каҷ ҳосил мешавад, номбар намоед. **2.** Нишон диҳед, ки ин схема барои ҳисоби масоҳати трапетсияи каҷхаттае, ки аз болою поён бо хатҳои каҷ маҳдуд аст, низ татбиқшаванда аст.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ҳисоб кунед (50-53):

50. а) $y = 2 + x - x^2$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 2x$;

в) $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

г) $y = \cos 0{,}1x$, $y = 0$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = 5\pi$.

51. а) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 6x$;

в) $y = (x-3)^2$, $y = 9 - 2x$; г) $y = -x^2 + 3$, $y = 0$.

52. а) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = x^3$, $y = \sqrt[4]{x}$;

в) $y = (x-2)^2, y = 4 - x^2$; г) $y = x^2$, $y = 1 - x^2$.

53*. а) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = 2x$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$;

в) $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$, $x > 0$;

г) $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 2$, $x > 0$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

54. Ҳисоб кунед:

$$\left(3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{5}\right) \cdot 20 - \left(\frac{11}{12} - \frac{2}{3}\right) : \frac{3}{12}.$$

55. Ифодаро сода кунед:

$$1 + \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}}.$$

56. Муодилаи $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$ -ро ҳал намоед.

57. Муодиларо ҳал кунед:

$$\sqrt{1 - 2x + x^2} = x + 1.$$

58. Функсияи ибтидоии функсияи $f(x) = \cos(4x - 5)$ -ро ёбед.

7. МАФҲУМИ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛАИ НЮТОН-ЛЕЙБНИТС

1⁰.Масъалаи ҳисоби масоҳати трапетсияи каҷхаттаро аз нуқтаи назари дигар муоина менамоем. Чун пештара фарз мекунем, ки функсияи $y = f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ ғайриманфӣ ва бефосила аст. Масоҳати трапетсияи каҷхатта S -ро тақрибӣ ин тавр ҳисоб кардан мумкин аст.

Порчаи $[a; b]$-ро ба воситаи нуқтаҳои $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$

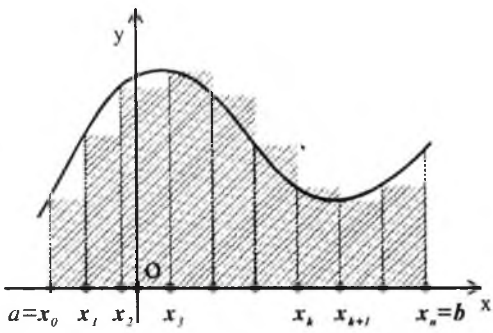
$\ldots < x_{n-1} < x_n = b$ ба n порчаҳои дарозиашон якхела ҷудо мекунем. Бигузор $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$ дарозии порчаи $[x_{k-1}; x_k]$ аст, ки дар ин ҷо $k = 1, 2, 3, \cdots n-1, n$ мебошад. Дар ҳар яки аз порчаҳои $[x_{k-1}; x_k]$ чун дар асос, росткунҷаи баландиаш $f(x_{k-1})$-ро месозем. Масоҳати ин росткунҷа ба

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

ва суммаи масоҳатҳои тамоми ҳамин гуна росткунҷаҳо ба

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \cdots f(x_n)\right)$$

баробар аст (расми 8).



Расми 8.

Аз сабаби бефосила будани $f(x)$ ҳангоми ниҳоят калон будани n, яъне ҳангоми ниҳоят хурд будани Δx, ҳар яке аз росткунҷаҳои сохташуда бо қисми трапетсияи качхаттаи мазкур қариб ҳамҷоя мешавад. Бо ибораи дигар, ҳангоми ниҳоят калон будани n фарзияи ҷой доштани баробарии тақрибии $S_n \approx S$ ба миён меояд. (Инро кӯтоҳ ин тавр мегӯянд: «ҳангоми ба беохирӣ майл кардани n S_n ба S майл мекунад» ва ин тавр менависанд: ҳангоми $n \to \infty$ $S_n \to S$.)

Ин фарзия амалан дуруст аст. Бар замми ин, барои ҳар гуна функсияи $f(x)$-и дар порчаи $[a; b]$ бефосила (ғайриманфӣ буданаш шарт нест) ҳангоми $n \to \infty$ S_n ба ягон адад майл мекунад. Мувофиқи таъриф ин ададро интеграли функсияи $f(x)$ аз a то b меноманд ва бо $\int_a^b f(x)dx$ ишорат мекунанд, яъне:

$$\text{ҳангоми } n \to \infty \qquad S_n \to \int_a^b f(x)dx.$$

(Хонда мешавад: «Интеграл аз a то b эф аз икс дэ икс».) Ададҳои a ва b *ҳудудҳои интегронӣ* номида мешаванд: a-ҳудуди поёнӣ, b-ҳудуди болоӣ. Ишорати $\int$ ишорати интеграл аст. Функсияи $f(x)$ *функсияи зеринтегралӣ*, тағйирёбандаи x *тағйирёбандаи интегронӣ* ном доранд.

Ҳамин тариқ, агар дар порчаи $[a;b]$ нобаробарии $f(x) \geq 0$ ҷой дошта бошад, масоҳати трапетсияи каҷхатаи мувофиқ S бо формулаи

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

ифода мешавад.

2^0. Дар 6.5 дида будем, ки масоҳати трапетсияи каҷхаттаи аз боло бо графики $y = f(x)$ маҳдудбуда бо формулаи (2), яъне бо формулаи $S = F(b) - F(a)$ ҳисоб мешавад (ниг. ба саҳ. 25). Инро бо баробарии (3) муқоиса намуда натиҷаи зеринро ҳосил мекунем: *агар дар порчаи $[a;b]$ функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ бошад, он гоҳ*

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4}$$

аст.

Формулаи (4) *формулаи Нютон-Лейбнитс* ном дорад. Вай барои ҳар гуна функсияи дилхоҳи дар порчаи $[a;b]$ бефосилаи $f(x)$ дуруст аст. Фарқи $F(b) - F(a)$-ро, ки афзоиши $F(x)$ дар порчаи $[a;b]$ аст, бо $F(x)\Big|_a^b$ ишорат мекунанд ва формулаи Нютон-Лейбнитс (4)-ро кӯтоҳ ин тавр

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (5)$$

менависанд.

Акнун мисолҳои татбиқи формулаи Нютон – Лейбнитсро дида мебароем.

Мисоли 1. Интеграли $\int_{-2}^{3} x^2 dx$ -ро ҳисоб мекунем.

Ҳал. Функсияи $F(x) = \frac{x^3}{3}$ барои $f(x) = x^2$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ аст, бинобар ин мувофиқи (5)

$$\int_{-2}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 9 + \frac{8}{3} = 11\frac{2}{3}.$$

Мисоли 2. Интеграли $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ - ро меёбем.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Қайд мекунем, ки формулаи (4) (ё (5)) ҳангоми $b < a$ будан низ дуруст аст. Бар замми он $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ аст. Инчунин баробариҳои $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ва

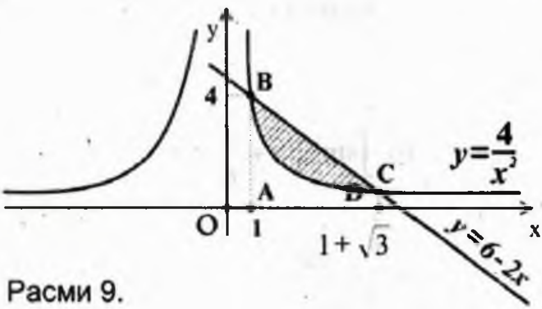
$$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\text{-доимӣ}) \text{ дурустанд.}$$

Мисоли 3.

$$\int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 + \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}.$$

Мисоли 4. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y = \frac{4}{x^2}$ ва $y = 6 - 2x$ маҳдудбударо ҳисоб мекунем.

Ҳал. Схемаи дар б. 6 овардаамонро татбиқ намуда, нуқтаҳои буриши графикҳоро меёбем: $\frac{4}{x^2} = 6 - 2x$; $4 = 6x^2 - 2x^3$; $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; $(x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$; $x^2 - 2x - 2 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Инак, нуқтаҳои буриш $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$ мебошанд.



Расми 9.

Ҳамин тариқ, масоҳати трапетсияи мазкур ба фарқи масоҳати трапетсияи ростхаттаи ABCD ва масоҳати трапетсияи каҷхаттаи ABCD баробар аст (расми 9). Мувофиқи формулаи (5)

$$S = \int_1^{1+\sqrt{3}} (6-2x)dx - \int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{4dx}{x^2} = (6x - x^2)\Big|_1^{1+\sqrt{3}} - \left(-\frac{4}{x}\right)\Big|_1^{1+\sqrt{3}} =$$

$$= (6 + 6\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} - 3) - (6 - 1) + \frac{4}{\sqrt{3}+1} - 4 = 4\sqrt{3} - 3 +$$

$$+\frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1}-4=4\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-2-4=6\sqrt{3}-9.$$

?

1. Интеграли функсия дар порчаи $[a;b]$ гуфта чиро мегӯянд?
2. Формулаи Нютон – Лейбнитсро нависед. Барои чӣ гуна функсияи зериинтегралӣ ин формула дуруст аст?

Интегралҳоро ҳисоб кунед (59-63):

59. а) $\int\limits_0^2 x^3dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^3 x^2\,dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

60. а) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^3 (1+3x^2)\,dx$;

в) $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+2x\right)dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 6x\,dx$.

61*. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi} \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

62. а) $\int\limits_0^8 (2x+\sqrt[3]{x})dx$; б) $\int\limits_4^9 \left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$;

в) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx$; г) $\int\limits_{-2}^{-1} (x^{-3}-x)dx$.

63. а) $\int\limits_0^3 (x-3)(x+3)dx$; б) $\int\limits_0^2 (2x+3)^3 dx$;

в) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$; г) $\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ҳисоб кунед (64-67):

64. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$; б) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$;

в) $y = \frac{x}{3}$, $y = x$, $x = 1$; г) $y = \sqrt{x}$, $y = 3$, $x = 0$.

65. а) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;

б) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

в) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; г) $y = x^2 - 7x + 10$, $y = 0$.

66. а) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 1 - x$; б) $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$;

в) $y = x^2$, $y = 2 - x$; г) $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x - 2$.

67. а) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$;

б) $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$;

в) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$;

г) $y = x^2$, $y = x^3$.

68. Масоҳати фигураеро ҳисоб кунед, ки он бо графики функсияи $y = 6x - 2x^2$, расанда ба ин парабола дар қуллаи он ва хати рости $x = 0$ маҳдуд шудааст.

69. Масоҳати фигураеро ҳисоб кунед, ки он бо графики функсияи $f(x) = 4 - 0{,}5x^2$, расанда ба он дар нуқтаи абсиссааш $x = -1$ ва хати рости $x = 1$ маҳдуд шудааст.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

70. Исбот кунед, ки барои ҳар гуна n-и натуралӣ адади n^3+3n^2+5n ба 3 тақсим мешавад.

71. Намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

а) $f(x)=\sqrt[3]{4x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3x+2}}+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-2x\right)$.

72. Муодилаи ирратсионалиро ҳал кунед:

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=1.$$

73*. Нобаробариро ҳал кунед: $\dfrac{6}{(x+2)(x-3)}-\dfrac{1}{x+2}>3$.

8. БАЪЗЕ ТАТБИҚОТИ ИНТЕГРАЛ

Мо аллакай як татбиқи интегралро муоина намудем: интеграл ҳамчун аслиҳа барои ҳисоб кардани масоҳати трапетсияи каҷхатта.

Мафҳуми интеграл дар геометрия, физика, техника, сотсиология ва дигар илмҳо васеъ истифода карда мешавад. Ҳоло ду татбиқи интегралро дида мебароем.

1^0. Масофаи тайкардаи ҷисм. Агар ҷисм ғайримунтазам ба як самт ҳаракат карда суръаташ вобаста ба вақт тағйир ёбад, яъне $\vartheta=\vartheta(t)$ бошад, он гоҳ масофае, ки ин ҷисм дар муддати вақти аз t_1 то t_2 тай мекунад,

$$S(t_2)-S(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vartheta(t)dt$$

мебошад. Ин аз баробарии $S'(t)=\vartheta(t)$, яъне аз он ки $S(t)$ барои $\vartheta(t)$ функсияи ибтидоӣ аст ва аз формулаи Нютон – Лейбнитс бармеояд.

М и с о л и 1. Суръати ҷисм (бо м/сония) аз рӯйи қонуни

$\vartheta(t) = 4t - t^2$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм аз ибтидои ҳаракат то бозистоданаш тай менамояд, меёбем.

Ҳ а л. Мӯҳлати ҳаракати ҷисмро меёбем:

$$4t - t^2 = 0; \quad t(4-t) = 0; \quad t = 0, \quad t = 4.$$

Яъне баъди 4 сония ҷисм ҳаракатро қатъ менамояд. Барои ҳамин

$$S = \int_0^4 (4t - t^2)\,dt = \left(2t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ м.}$$

М и с о л и 2. Ҷисм, ки суръаташ аз рӯйи қонуни $\vartheta(t) = 29{,}4 - 9{,}8t$ (бо м/сония) тағйир меёбад, амудӣ ба боло партофта шудааст. Баландии калонтарини болобароии ҷисмро меёбем.

Ҳ а л. Вақтеро, ки дар мӯҳлати он ҷисм ба боло мебарояд, меёбем: $29{,}4 - 9{,}8t = 0$, $t = 3$ сония. Баландии калонтарини болобароиро ҳисоб мекунем:

$$h = \int_0^3 (29{,}4 - 9{,}8t)\,dt = \left(29{,}4t - \frac{9{,}8}{2}t^2\right)\Bigg|_0^3 = 29{,}4\cdot 3 - 4{,}9\cdot 3^2 = 44{,}1 \text{ м.}$$

2^0. Кори қувваи тағйирёбанда. Чӣ тавре аз курси физика медонем, кори қувваи доимии P бо формулаи $A = PS$, ки S кӯчиш аст, чен карда мешавад. Акнун ҳангоми тағйирёбанда будани қувва барои кор формула ҳосил мекунем.

Бигузор дар тири OX ба ҷисм қувваи тағйирёбандаи бефосилаи $P = f(x)$ таъсир мекунад. Кори қувваи P-ро, ки ҷисм зери таъсири он аз нуқтаи $x = a$ то нуқтаи $x = b$ ҷойиваз мешавад, ҳисоб мекунем. Порчаи $[a;b]$-ро ба n ҳиссаи баробар ҷудо мекунем, яъне, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқтаҳои тақсимот буда, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ дарозии ҳар як ҳисса аст. Дарозии ҳар як ҳиссаро, ки дарозии порчаи $[x_{k-1}; x_k]$ аст, хурд ҳисоб карда, функсияи $f(x)$-ро дар ин порча тахминан ба $f(x_{k-1})$ баробар ҳисоб мекунем $(k = 1, 2, \ldots, n-1, n)$. Бо ин фарзия мебинем, ки кор дар $[x_{k-1}; x_k]$

тахминан $f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = f(x_{k-1})\Delta x$ аст. Кори қувва дар тамоми порчаи $[a;b]$ бошад, тахминан ба суммаи корҳо дар ҳиссаҳо баробар аст, яъне ба

$$A_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) \right).$$

Мувофиқи қисми 1^0-и б.7 ҳангоми $n \to \infty$ A_n ба A майл мекунад. Яъне:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (6)$$

Мисоли 3. Қувваи 10 Н фанарро (пружинаро) 2 см меёзонад. Чӣ қадар кор иҷро кардани ин қувваро меёбем.

Ҳал. Аз рӯйи қонуни Гук, қуввае, ки фанарро ба бузургии x меёзонад, аз рӯи формулаи $f(x) = kx$ ҳисоб мешавад, ки дар ин ҷо k-коэффитсиенти мутаносибӣ аст. Нуқтаи $x = 0$ ба ҳолати озоди фанар мувофиқ меояд. Мувофиқи шарти масъала $k = \frac{10\text{ Н}}{0{,}02м} = 500\frac{\text{Н}}{м}$, пас $f(x) = 500x$. Ҳамин тариқ, мувофиқи формулаи (6): $A = \int_0^{0{,}02} 500x\,dx = \left.\frac{500x^2}{2}\right|_0^{0{,}02} = 250\cdot(0{,}02)^2 =$

$$= 250\cdot(2\cdot10^{-2})^2 = 1000\cdot10^{-4} = 10^{-1} = 0{,}1 \text{ Ҷ}.$$

Эзоҳ. Яке аз муҳимтарин соҳаи татбиқи интеграл ин ҳисоби ҳаҷми ҷисмҳои геометрӣ аст, ки мо онро партофта гузаштем. Ин татбиқ дар курси геометрия муфассал омӯхта мешавад.

74. Суръати ҳаракат (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $\vartheta(t) = 2t$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм дар муддати дақиқаи сеюми ҳаракат тай мекунад, ёбед.

75. Суръати ҳаракат (бо м/сония) аз рӯйи қонуни $\vartheta(t) = 3t^2 + t + 1$ тағйир меёбад. Масофаеро, ки ҷисм дар 4 сонияи аввал тай мекунад, ёбед.

76. Ҷисм амудӣ бо суръати аввалаи ϑ_0 ба боло партофта шудааст. Баландии калонтарини болобароии ҷисмро ёбед.

77. Қувваи $60\,\text{Н}$ кифоя аст, ки фанар ба 2 см ёзонида шавад. Дарозии аввалаи фанар 14 см аст. Барои фанарро то 20 см ёзонидан чӣ қадар корро иҷро кардан лозим аст?

78. Агар қувваи бузургиаш $2\,\text{Н}$ фанарро ба 1 см фишурад, барои 4 см фишурдани фанар кадом корро сарф кардан даркор аст?

79. Дар зери таъсири қувваи $1{,}5\cdot 10^4\,\text{Н}$ рессор 1 см қатъ мешавад. Барои деформатсияи ба 3 см баробари рессор чӣ қадар кор зарур аст?

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

80. Қимати ифодаи $0{,}2x^2 - 2{,}4$-ро ҳангоми $x = \sqrt{10-3\sqrt{11}} + \sqrt{10+3\sqrt{11}}$ будан ҳисоб кунед.

81. Сода кунед:

$$\frac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a^{0,5}} : \left[\frac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}} - \frac{b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}\right].$$

82. Ҳисоб кунед:

а) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

83. Суммаи шаш аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ёфта шавад, агар $b_1 = 32$, $q = -0{,}5$ бошад.

МАЪЛУМОТИ ТАЪРИХӢ

1^0. Доир ба пайдоиши истилоҳот ва ишоратҳо. Рамзи интеграл $\int$ -ро математики немис *Готфрид Лейбнитс* (1646-1716), ки дар қатори *Исаак Нютон* (1642-1627) бунёдгари ҳисоби дифференсиалӣ ва интегралӣ ҳисоб мешавад, соли 1675 дохил кардааст. Ин рамз тағйири ҳарфи лотинии S (ҳарфи аввали калимаи *Summa* – ҳосили ҷамъ) мебошад. Худи калимаи *интегралро* Якоб Бернули (1654-1705) соли 1690 пешниҳод карда буд. Шояд аз калимаи лотинии

Integro, ки маънояш барқарор кардан аст, гирифта шуда бошад, чунки амали интегронӣ функсияеро, ки дар натиҷаи дифференсирониданаш функсияи зериинтегралӣ ҳосил мешавад, «барқарор мекунад». Истилоҳи *ҳисоби интегралӣ* (Calculus integralus), ки соли 1696 Иоганн Бернулли (1667-1748) дохил кардааст, шохаи нави математика ҳисоб шуда, асосан ба тарзҳои ёфтани функсияи ибтидоӣ машғул буд. Ҳисоби интегралӣ аз муоинаи масъалаҳои зиёди табиатшиносӣ ва математикӣ пайдо шудааст. Муҳимтарини ин масъалаҳо – масъалаи физикавии ёфтани масофае, ки ҷисми суръаташ тағйирёбанда дар мӯҳлати муайян тай мекунад ва масъалаи ёфтани масоҳату ҳаҷми фигураҳои геометрӣ, ки масъалаи хеле қадима аст, мебошанд.

Аз соли 1797 сар карда истилоҳи ***функсияи ибтидоӣ*** ба ҷойи истилоҳи «функсияи сода», ки онро франсуз *Жозеф Лагранж* (1736-1813) дохил карда буд, пайдо шуд. Калимаи лотинии *PrimitvuS* чун ибтидоӣ тарҷума мешавад: $F(x)=\int f(x)\,dx$ барои функсияи $f(x)$ ибтидоӣ мебошад, агар вай аз $F(x)$ бо воситаи дифференсиронӣ ҳосил шавад.

Айни замон маҷмӯи тамоми функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$-ро *интеграли номуайян* низ меноманд. Ин мафҳумро Лейбнитс дохил кардааст. $\int_a^b f(x)\,dx$-ро *интеграли муайян* мегӯянд. Онро соли 1819 *Ж. Фурйе* (1768-1830) дохил карда буд.

2^0. Аз таърихи ҳисоби интегралӣ. Бисёр ғояҳои ҳисоби интегралиро математикҳои Юнони қадим ҳангоми ҳалли масъалаҳо оид ба ёфтани *квадратураҳои* (масоҳатҳои) фигураҳои ҳамвор, инчунин ёфтани *кубатураҳои* (ҳаҷмҳои) ҷисмҳо пешгӯӣ карда буданд. Дар ин қатор пеш аз ҳама бояд *Евдокс* (408-355-и пеш аз милод) ва *Архимед* (287-212-и пеш аз милод)-ро номбар кард.

Асри XVII асри рушду камол ёфтани ҳисоби интегралӣ ба ҳисоб меравад. Дар ин давра вай ба шохаи мустаҳками илми математика мубаддал мегардад. Ҳамчун намуна чанд кашфиёти ин давраро меорем. *Пйер Ферма* (1601-1665) соли 1629 масъалаи ёфтани квадратураи хати каҷи $y=x^n$-ро, ки дар ин ҷо n адади бутуни дилхоҳ аст, ҳал намуд. Ин ҳалро истифода карда, ӯ якчанд масъалаҳоро оид ба ёфтани маркази вазнинӣ ҳал кард. *Иоган Кеплер* (1571-1630) барои ҳасил кардани қонунҳои ҳаракати сайёраҳо ғояи интегронии тақрибиро истифода бурд. *Исаак Барроу* (1630-1677), ки устоди Нютон буд, алоқаи байни интегронӣ ва дифференсирониро хеле хуб дарк карда буд. Теоремаи дар банди 5 исботкардаамон ба ӯ мансуб аст.

Назарияи соф илмии ҳисоби интегралиро Нютон ва Лейбнитс (новобаста аз ҳамдигар) пешниҳод кардаанд. Онҳо аз ғояҳои дар ҳалли масъалаҳои хусусӣ истифодашуда назарияи умумиро сохта, формулаеро кашф кардаанд, ки ҳоло номи онҳоро дорад. Вале ёфтани функсияҳои ибтидоӣ барои бисёр функсияҳо, мантиқан асоснок кардани ҳисоби нав дар пеш буд.

Дар асри оянда методҳои анализи математикӣ боз ҳам инкишоф ёфтаанд. Дар ин кор пеш аз ҳама *Леонард Эйлер* (1707-1793) ва И. Бернулли саҳмгузоранд. Эйлер тадқиқи системавии интегронидани функсияҳои элементариро ба итмом расонид.

Дар инкишофи ҳисоби интегралӣ олимони рус *М.В. Остроградский* (1801-1862), *В.Я. Буняковский* (1804-1889), *П.Л. Чебушёв* (1821-1894) фаъолона иштирок кардаанд. Масалан, Чебушёв нишон дод, ки интегралҳои функсияҳои элементарӣ метавонанд функсияҳои элементарӣ набошанд. Ин натиҷаи барҷастаи илмӣ ба ҳисоб меравад. Танҳо дар асри XIX баёни қатъии назарияи интеграл бо кӯшиши олими немис *Бернхард Риман* (1826-1866) ва фаронсавӣ *Гастон Дарбу* (1842-1917) ба вуҷуд омад. Дар ибтидои асри XX аз тарафи математикҳои фаронсавӣ *Анри Лебег* (1875-1941) ва *Андрэ Данжуа* (1884-1974), математики рус *Александр Хинчин* (1894-1959) такмили гуногуни мафҳуми интеграл пешниҳод карда шудаанд.

МАШҚҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБ

Ба параграфи 1.

84. Магар барои функсияи $f(x)$ функсияи $F(x)$ дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ функсияи ибтидоӣ аст:

а) $f(x)=4x-2$, $\qquad F(x)=2x^2-2x+5$;

б) $f(x)=-x^4+3$, $\qquad F(x)=-\dfrac{x^5}{4}+3x+2$;

в) $f(x)=-\cos\dfrac{x}{4}+2$, $\qquad F(x)=-4\sin\dfrac{x}{4}+2x+1$;

г) $f(x)=\sin(2x+1)$, $\qquad F(x)=-\dfrac{\cos(2x+1)}{2}+10$?

85. Оё дар фосилаи $(-\infty;\infty)$ функсияи $F(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ шуда метавонад:

а) $F(x)=x^3-2x$, $\qquad f(x)=3x^2-2$;

б) $F(x)=\frac{1}{x^4}-\cos x$, $\qquad f(x)=-\frac{1}{x^5}-\sin x$;

в) $F(x)=x^4+1$, $\qquad f(x)=-\frac{x^5}{5}+x$;

г) $F(x)=2x+\sin x$, $\qquad f(x)=2+\cos x$?

86. Барои функсия намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $f(x)=kx+b$ (k *ва* b доимиҳо); б) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x)=x^n$ (n -адади бутун, $n\neq -1$); г) $f(x)=\sin x$.

87. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоии $F(x)$-ро ёбед, ки он дар нуқтаи додашуда қимати маълумро мегирад:

а) $f(x)=\sqrt{x}+x$, $F(4)=10$; б) $f(x)=\cos x$, $F(\pi)=\pi$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $F(\sqrt{2})=0$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$, $F(4)=12$.

88. Барои функсияи $f(x)$ намуди умумии функсияи ибтидоиро ёбед:

а) $f(x)=\cos 2x-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$; б) $f(x)=\frac{4}{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=(2-3x)^4-\frac{1}{(4x-2)^3}$; г) $f(x)=x-8\sin 2x$.

89. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x)=(4-2x)^3$, $M(3;6)$;

б) $f(x)=\cos 2x$, $M(\frac{\pi}{4};-4)$;

в) $f(x)=(3x-4)^{\frac{4}{5}}$, $M(1;3)$;

г) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $M(5;2)$.

Ба параграфи 2.

90. Ҳисоб кунед:

а) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x+4)^2}$; б) $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\sin x dx$; г) $\int_{0}^{4}x^3 dx$.

91. Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 6x dx$; б) $\int_{-3}^{3}(x^5-x)dx$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)dx$; г) $\int_{0}^{1}(3x-1)^{\frac{3}{5}}dx$.

92. Трапетсияи качхаттаи бо хатҳои додашуда муҳдудро тасвир намоед ва масоҳати онро ёбед:

а) $y=5-3x$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$;

б) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=1$;

в) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-3$;

г) $y=\cos x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

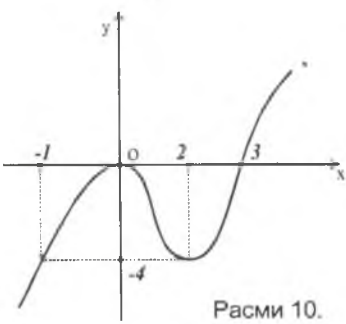
93. Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ёбед:

а) $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}$; б) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$, $x=9$;

в) $y=x^2$, $y=4x$; г) $y=8-x^2$, $y=4$.

ҶАВОБҲО

2. а) Ҳа; б) не; в) ҳа; г) ҳа; д) не; е) ҳа. **3.** Масалан: а) 1,5х+1; б) x^2+2; в) $-\cos x$; г) $\sin x$; д) $-\frac{x^2}{2}+2$; е) $-\sin x$; ж) –3х+4; з) $\cos x$; и) $\frac{x^3}{3}$; к) $\frac{x^6}{6}$; л) 1; м) $-\frac{x^4}{4}+2$. **4.** а) 1,5х; б) $\sin x$; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $tg x$; е) $-2\cos x$; ж) $-ctg x$; з) $-\frac{1}{4}\cos 4x$; и) $-\frac{\sin(2x+3)}{2}$. **5.** Масалан: а) $2x^2+1$ ва $2x^2+3$; б) $-\cos x + x + 1$ ва $-\cos x + x + 2$; в) $\frac{x^4}{4}+8$ ва $\frac{x^4}{4}+11$; г) $2x - \sin x + 5$ ва $2x - \sin x + 2$. **6.** а) $g(x), f(x), h(x)$; б) $f(x), g(x), h(x)$; в) $h(x), f(x), g(x)$. **7.** 1. **8.** 4. **9.** 1. **10.** Расми 10. **11.** 1,5. **12.** а) не; б) ҳа; в) ҳа; **14.** Ҳа, масалан, $f(x)=a,\ a\in R=(-\infty;\infty)$ даврӣ буда, функсияи ибтидоияш $F(x)=ax+b$ ғайридаврӣ мебошад. **15.** Исбот: Агар $f(x)=-f(-x)$ ё $F'(x)=-F'(-x)=\left(F(-x)\right)'$ бошад, пас $F(x)=F(-x)+C$. Аз ин ҷо $F(0)=F(-0)+C$ ё $C=0$. Пас $F(-x)=F(x)$. **16.** *х-у.* **17.** $(-\infty;1]\cup[5;\infty)$. **18.** 585. **19.** –1. **20.** $x^2-x-6=0$. **21.** а) $2x+C$; б) $\sin x+C$, в) $\frac{x^6}{6}+C$, г) $-\frac{1}{3x^3}+C$, д) $\cos x+C$, е) $-4x+C$. **22.** а) $-\frac{1}{2x^2}+10{,}5$; б) $-ctgx-1$; в) $\frac{x^7+22}{7}$; г) $-(\cos x+2)$. **23.** а) $\frac{x^4}{4}-3$; б) $-\cos x+4$;



Расми 10.

в) $tgx-1$; г) $-2x+11$; д) $-\frac{1}{2x^2}+5$; е). $-\sin x+1$. **24.** а) $x(t)=-\frac{t^3}{6}-t+\frac{22}{3}$; б) $x(t)=-\cos t-1$. **25.** –1. **26.** 2. **27.** (4;1). **28.** $(-\infty;0)\cup[2;3]$. **29.** а) $2x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$; б) $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3x^3}-\cos x+C$;

в) $tgx-\cos x+C$; г) $-\frac{1}{x}+4\cos x+C$. **30.** а) $\frac{(3x-1)^7}{21}+C$;

б) $-\frac{(2-5x)^4}{20}+C$; в) $-\frac{\cos(9x+1)}{9}+C$; г) $\frac{1}{4}\sin(4x-9)+C$. **31.**

а) $\frac{2}{7(2-7x)^2}+C$; б) $\frac{2}{9(4-3x)^3}+C$; в) $\frac{3}{4}tg(4x-1)+C$;

г) $\frac{1}{2x^4}-\frac{1}{3}ctg(3x-1)$. **32.** а) $x^2-\frac{1}{2x^2}-\frac{23}{8}$; б) $\frac{x^5}{5}-x+5{,}6$;

в) $-\frac{3}{2}x^2+x+7$; г) $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3}x^6+2x+7\frac{1}{3}$. **33.** а) $x+\frac{1}{6}\cos 6x-2\sin(\frac{\pi}{3}-x)+C$; б) $\frac{1}{3}tg3x-\frac{5}{4(3-x)^{\frac{6}{5}}}-\frac{1}{2}x^4+C$;

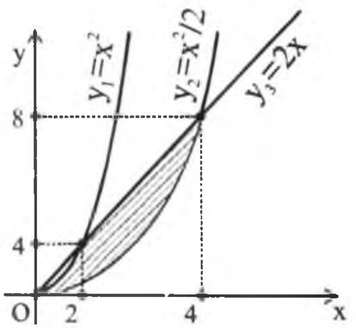
в) $\frac{1}{4}ctg(4x+1)+4\sin(2-x)+\frac{3}{2}x^2+C$;

г) $\frac{1}{4(4-2x)^2}+\frac{4}{7}\sqrt{7x-1}-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+C$. **34.** $x(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+t$.

35. $x(t)=\frac{2}{3}t^4+\frac{5}{2}t^2+8t+16$. **36.** а) $x(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+4t-9\frac{1}{6}$; б) $x(t)=-\frac{4}{3}\sin t+\frac{5}{3}t+2-\frac{5}{3}\pi$. **37.** $y_{min}=y(2)=-44$, $y_{max}=y(-1)=37$. **38.** (4;1) ва (1; 4). **39.** 90^0 **40.** Барои $C>1$, қимати хурдтарини бутуни C ба 2 баробар аст. **41.** 12 км ва 15 км.

42. а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) 2; г) 1. **43.** а) $4\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)$; в) $\frac{\pi}{2}+2$; г) $85\frac{1}{3}$. **44.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $2{,}5$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{4}$. **45.** $-\frac{1}{2}ctg(2x+1)+\frac{1}{9}\sqrt{(6x-5)^3}+\frac{2}{5}x^5+C$. **46.** 4. **47.** (-3; -1) ва (3; 1). **48.** 45^0. **49.** Дар $(-\infty;-0{,}5)$ ва $(0{,}5;+\infty)$ камшаванда буда, дар $(-0{,}5;\ 0{,}5)$ афзуншаванда аст. $f_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$, $f_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

50. а) $4\frac{1}{2}$; б) $\frac{4}{3}$; в) 9; г) 5. **51.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 36; в) $10\frac{2}{3}$; г) $4\sqrt{3}$. **52.** а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{11}{20}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$. **53.** а) Ҳ а л. Дар як системаи координатавӣ графики функсияҳои $y_1=x^2$, $y_2=\frac{x^2}{2}$ ва $y_3=2x$ -ро кашида мебинем, ки масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои рах – рах нишона шудааст, ёфтан зарур аст (расми 11).



Расми 11.

Зоҳиран фаҳмост, ки масоҳати матлуб:

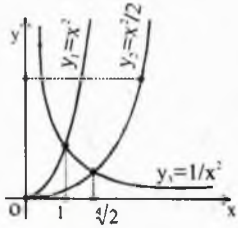
$$S=\int_0^2(y_1(x)-y_2(x))\,dx+\int_2^4(y_3(x)-y_2(x))dx=$$

$$=\int_0^2(x^2-\frac{x^2}{2})dx+\int_2^4(2x-\frac{x^2}{2})dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx+$$

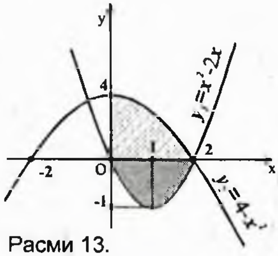
$$+\frac{1}{2}\int_2^4(4x-x^2)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2+\frac{1}{2}(2x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_2^4=\frac{8}{6}+\frac{1}{2}(32-8-\frac{64}{3}+\frac{8}{3})=$$

$= \dfrac{4}{3} + 12 - \dfrac{28}{3} = 12 - 8 = 4$. б) $1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (нигаред ба расми 12);

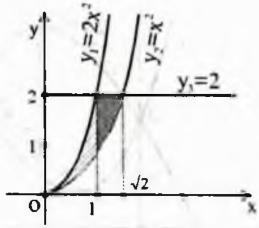
в) $6\dfrac{2}{3}$ (нигаред ба расми 13);



Расми 12.



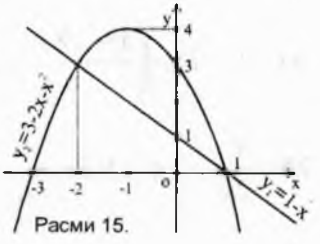
Расми 13.



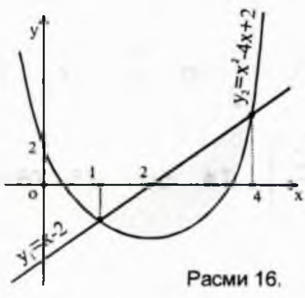
Расми 14.

г) Ҳ а л. $S = \int\limits_0^1 (2x^2 - x^2)\,dx + (\sqrt{2} - 1)\cdot 2 - \int\limits_1^{\sqrt{2}} x^2 dx = \dfrac{4(\sqrt{2} - 1)}{3}$ (ниг. ба расми 14). **54.** 26. **55.** $\sqrt{a}$. **56.** $\dfrac{5\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$. **57.** 0. **58.** $\dfrac{1}{4}\sin(4x - 5) + C$. **59.** а) 4; б) 1; в) $9\dfrac{1}{3}$; г) $\sqrt{3} - 1$. **60.** а) $\dfrac{16}{3}$; б) 30; в) $3\sqrt[3]{2}$; г) $\dfrac{1}{6}$. **61.** а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **62.** а) 76; б) 14; в) $-\dfrac{2}{15}$; г) $\dfrac{9}{8}$. **63.** а) –18; б) 290; в) $\sqrt{5} - 1$; г) $2(\sqrt{5} - \sqrt{2})$. **64.** а) 9; б) $\dfrac{3}{4}$; в) $\dfrac{1}{3}$; г) 9. **65.** а) $2(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3})$; б) $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$; в) $10\dfrac{2}{3}$; г) 4,5.

66. а) 4,5 (ниг. ба расми 15). б) $1\dfrac{1}{3}$; в) 4,5; г) 4,5 (ниг. ба расми 16).

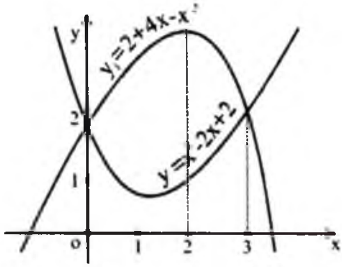


Расми 15.

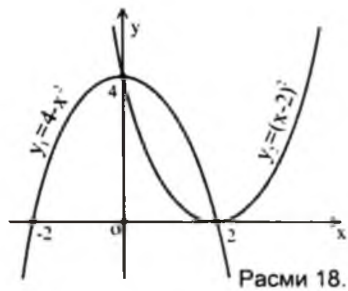


Расми 16.

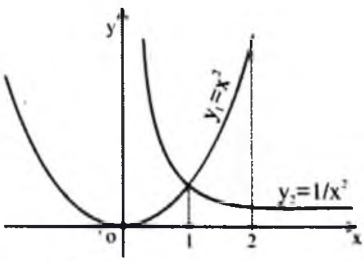
67. а) 9 (ниг. ба расми 17); б) $2\frac{2}{3}$ (ниг. ба расми 18); в) $1\frac{5}{6}$ (ниг. ба расми 19); г) $\frac{1}{12}$ (ниг. ба расми 20).



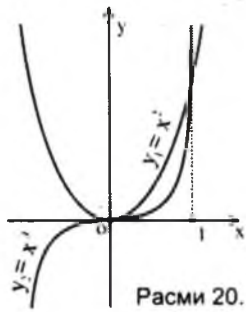
Расми 17.



Расми 18.



Расми 19.



Расми 20.

68. $2\frac{1}{4}$. **69.** $1\frac{1}{3}$. **70.** Нишондод. $n^3+3n^2+5n=n^3-n+(3n^2+6n)=$ $=(n-1)\,n\,(n+1)+3n\,(n+2)$. Ҷамъшавандаҳо ба 3 тақсим мешаванд, пас, суммаашон низ. **71.** а) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x+1)^4}+\sqrt{2x-1}+C$; б) $\frac{5}{12}(3x+2)^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{3}-2x)$. **72.** 6 ва 11. **73.** $\left(\frac{1-\sqrt{82}}{3};-2\right)\cup\left(3;\frac{1+\sqrt{82}}{3}\right)$. **74.** 5м. **75.** 76 см. **76.** $\frac{\vartheta_0^2}{2g}$ $\left(g=9{,}8\frac{м}{сония^2}\right)$.

77. 5,4 Ч. **78.** 0,16 Ч. **79.** 675 Ч. **80.** 2. **81.** $a-b$. **82.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{2}$.
83. 21. **84.** а) ҳа; б) не; в) ҳа; г) ҳа. **85.** а) ҳа; б) не; в) не; г) ҳа.
86. а) $\frac{kx^2}{2}+bx+C$; б) $tgx+C$; в) $\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$; г) $-\cos x+C$. **87.** а) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-\frac{10}{3}$; б) $\sin x+\pi$; в) $-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4}$; г) $2\sqrt{x-3}+10$. **88.** а) $\frac{\sin 2x}{2}+2ctg\frac{x}{2}+C$; б) $-\frac{2}{x^2}-\sqrt{x}+C$; в) $-\frac{1}{15}(2-3x)^5+\frac{1}{8(4x-2)^2}+C$; г) $\frac{x^2}{2}+4\cos 2x+C$. **89.** а) $-\frac{1}{8}(4-2x)^4+8$; б) $\frac{\sin 2x}{2}-4,5$; в) $\frac{5}{27}(3x-4)^{\frac{9}{5}}+\frac{86}{27}$; г) $-\sqrt{2x-1}+5$. **90.** а) $\frac{1}{3}$; б) 2; в) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 64. **91.** а) 0; б) 0; в) 1; г) $\frac{5}{24}\left(\sqrt[5]{256}-1\right)$. **92.** а) 16; б) $\frac{1}{3}$; в) 20,25; г) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **93.** а) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; б) $25\frac{1}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) $10\frac{2}{3}$.

ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИЮ ЛОГАРИФМӢ

§3. ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ. ГРАФИК ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

9. ТАЪРИФ ВА ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Мо ба омӯзиши функсияе шурӯъ мекунем, ки вай дар математика ва татбиқи он дар физика, техника, иқтисодиёт, сотсиология ва экология роли муҳим мебозад.

Т а ъ р и ф. **Функсияе, ки бо формулаи $y = a^x$ ифода мешавад, функсияи нишондиҳандагӣ ном дорад.**

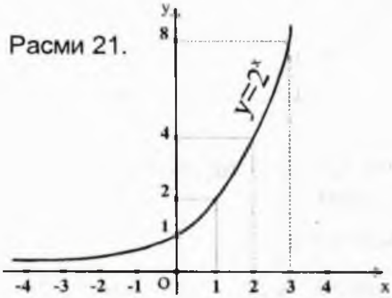
Дар ин ҷо a адади додашуда буда, *асос* ном дорад. Тағйирёбандаи x қиматҳои ҳақиқӣ қабул мекунад, яъне ҳам ратсионалӣ ва ҳам ирратсионалӣ шуда метавонад. Вай *нишондиҳандаи дараҷа* ё *дараҷа* ном дорад. Чӣ тавре медонем, барои он ки ифодаи a^x барои ҳамаи қиматҳои тағйирёбанда маъно дошта бошад, зарур аст, ки $a > 0$ шавад. (Масалан, ифодаи $(-1)^{\frac{1}{2}}$ маъно надорад). Ҳангоми $a = 1$ будан қимати функсия доимӣ аст (барои ҳамаи қиматҳои аргумент қимати функсия ба 1 баробар аст). Аз ҳамин сабаб ҳисоб карда мешавад, ки $a > 0$ ва $a \neq 1$ аст.

Барои аёнӣ дарк кардани графики функсияи $y = a^x$, графики функсияҳои, масалан, $y = 2^x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$-ро месозем. Бо мақсади ёфтани якчанд нуқтаи графики $y = 2^x$ ҷадвали қиматҳояшро бо қадами 1 тартиб медиҳем.

Ин нуқтаҳоро дар ҳамвории координатавии $(x; y)$ қайд ва баъд онҳоро бо хати муназзами яклухт пайваст карда графикро ҳосил мекунем (расми 21).

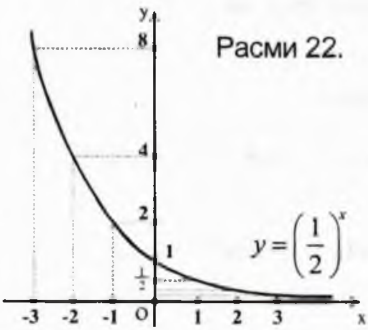
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Расми 21.



Барои сохтани графики $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ худи ҳамин ҷадвалро истифода кардан мумкин аст. Барои ин аз баробарии $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ истифода бурда мебинем, ки қимати ин функсия дар нуқтаи $x=-3$ ба қимати $y=2^x$ дар нуқтаи $x=3$ баробар аст ва ҳоказо. Яъне ҷадвали қиматҳои $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ чунин аст.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



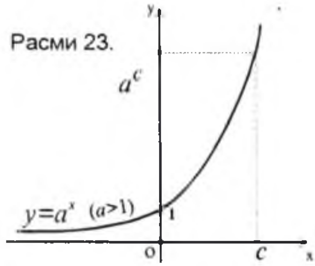
Расми 22.

Дар ҳамвории координатавӣ ин нуқтаҳоро қайд мекунем ва онҳоро бо хати муназзам пайваст намуда, графики $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$-ро ҳосил мекунем (расми 22).

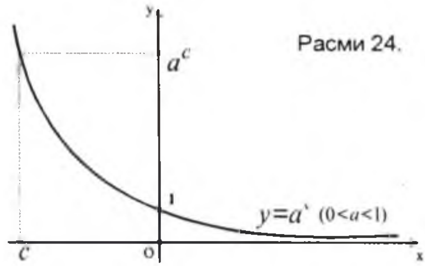
Муоинаи дақиқи ин ду график ба хулоса меорад, ки графики функсияи $y=a^x$: а) ҳангоми $a>1$

будан; б) ҳангоми $0 < a < 1$ будан схемавӣ намуди зеринро дорад (расмҳои 23 ва 24):

Расми 23.



Расми 24.

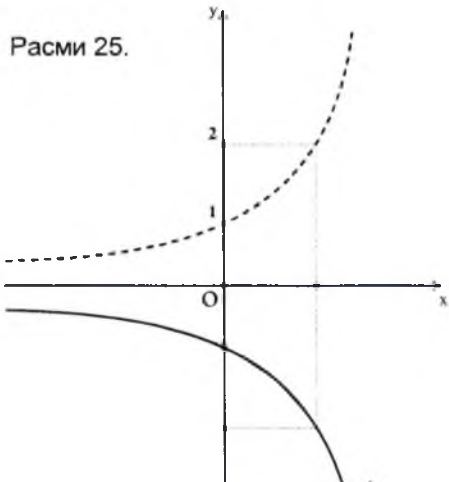


Сохтани ду графикро, ки ба сохтани графики функсияи нишондиҳандагӣ оварда мешаванд, дида мебароем.

М и с о л и 1. Графики $y = -2^x$ -ро месозем.

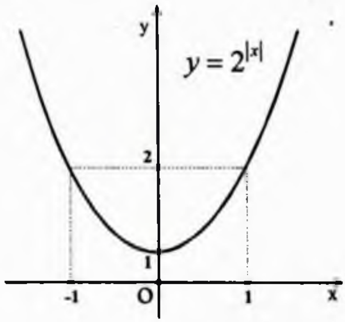
Мо аллакай графики $y = 2^x$ -ро медонем. Агар нуқтаи $(a; b)$ ба он тааллуқ дошта бошад, пас $b = 2^a$ аст. Аз ин ҷо $-b = -2^a$. Аз ин баробарӣ бармеояд, ки нуқтаи $(a; -b)$ дар графики $y = -2^x$ ҷойгир аст. Баръакс, агар нуқтаи $(c; d)$ дар графики $y = -2^x$ ҷойгир бошад, пас $d = -2^c$, яъне $-d = 2^c$. Аз ин ҷо бармеояд, ки нуқтаи $(c; -d)$ ба графики $y = 2^x$ тааллуқ дорад.

Расми 25.



Ҳамин тариқ, барои сохтани графики функсияи $y = -2^x$ кифоя аст, ки графики $y = 2^x$ нисбати тири OX симметрӣ инъикос карда шавад (расми 25).

М и с о л и 2. Графики $y = 2^{|x|}$ -ро месозем.



Расми 26.

Агар $x \geq 0$ бошад, он гоҳ $|x| = x$ ва $y = 2^x$ аст. Барои ҳамин дар чоряки якум графики матлуб бо графики функсияи $y = 2^x$ якхела аст. Агар $x < 0$ бошад, $|x| = -x$ ва $y = 2^{|x|} = 2^{-x}$ мешавад. Яъне дар чоряки дуюм график айнан графики функсияи $y = 2^{-x}$ аст (расми 26).

?

1. Таърифи функсияи нишондиҳандагиро диҳед. **2.** Чаро асосро мусбат ва нобаробари 1 ҳисоб мекунанд. **3.** Оё графики функсияи нишондиҳандагӣ тири абсиссаро мебурад?

---

94. Аз байни функсияҳои $y = -3x + 6$; $y = (0{,}2)^x$; $y = |x+3|$; $y = (-2)^x$; $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$; $y = 1^x$, $y = -3^x$ функсияҳои нишондиҳандагиро нишон диҳед.

95. Ҷадвали қиматҳои функсияи $y = 3^x$-ро аз –3 то 3 бо қадами ба 1 баробар сохта, аз рӯйи он графики функсияҳои $y = 3^x$ ва $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$-ро созед.

96. Дар як ҳамвории координатавӣ графикҳои функсияҳои:

а) $y = 2^x$ ва $y = 4^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ва $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

-ро кашед.

97. Графики функсияҳои $y = 5^x$ ва $y = -5^x$-ро дар як ҳамвории координатавӣ созед.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

98. Соҳаи муайянии функсияи $y=\sqrt{5x-2x^2}$ -ро ёбед.

99. Ҳисоб кунед: а) $81^{0,25}\cdot 27^{-\frac{1}{6}}\cdot 9^{0,75}$; б) $\left(2^{-\frac{1}{7}}\right)^{1,4}\cdot 4^{0,1}$.

100. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед: а) $a-4a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

101. Қимати калонтарини сеаъзогии квадратии $-x^2+5x-4$ -ро ёбед.

10. ХОСИЯТҲОИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Боз ба муоинаи графики функсияҳои $y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ бармегардем (расмҳои 21 ва 22). Графикҳо нишон медиҳанд, ки ин функсияҳо дар тамоми тири ададӣ муайян буда, қиматашон ҳамеша мусбат аст. Ғайр аз ин онҳо ҳар як қимати худро танҳо як маротиба (дар як нуқта) қабул мекунанд. Бо ибораи дигар, муодилаҳои $2^x=y$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^x=y$ ҳангоми $y\le 0$ будан ҳал надошта, ҳангоми $y>0$ будан танҳо як ҳал доранд. Ҳангоми афзудани аргумент функсияи $y=2^x$ афзуда, функсияи $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ кам мешавад.

Ин андешаҳо ба фикре меоранд, ки $y=a^x$- функсияи нишондиҳандагии асосаш адади дилхоҳи $a>0$ ва $a\ne 1$, дорои хосиятҳои зерин аст (азбаски исботи ин хосиятҳо аз доираи курси математикаи мактабӣ берун аст, исботҳоро намеорем):

1^0. Соҳаи муайянии функсия тамоми маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty;\infty)$ аст.

2^0. Соҳаи қиматҳои функсия маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+=(0;\infty)$ мебошад. Яъне барои ҳар гуна қимати тағйирёбандаи x қимати функсия мусбат аст.

3^0. Функсия ҳар як қимати худро расо як маротиба қабул мекунад. Аз ҳамин сабаб вай на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст.

4^0. Функсия қиматҳои хурдтарин ва калонтарин надорад.

5^0. Графики функсия тири абсиссаро намебурад. Нуқтаи буриши графики функсияи нишондиҳандагӣ бо тири ордината нуқтаи (0; 1) аст. Координатаҳои ин нуқта аз асоси функсияи нишондиҳандагӣ вобастагӣ надоранд, чунки дараҷаи нулии ҳар гуна адади $a>0$ ба воҳид баробар аст.

6^0. Ҳангоми $a>1$ будан, функсия дар тамоми хати рости ададии R меафзоял (афзуншаванда аст), ҳангоми $0<a<1$ будан дар R кам мешавад (камшаванда аст).

7^0. Барои қиматҳои дилхоҳи ҳақиқии x ва y баробариҳои:

1) $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$; 2) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$; 3) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$;

4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$; 5) $(a^x)^y=a^{xy}$

ҷой доранд (дар ин ҷо a ва b ададҳои мусбати нобаробари як ҳастанд).

Ин баробариҳоро *хосиятҳои асосии дараҷа* меноманд.

Э з о ҳ. Дурустии хосиятҳои 6^0 ва 7^0 ҳангоми ратсионалӣ будани нишондиҳанда исбот карда шуда буд. Акнун ба хулоса меоем, ки ин хосиятҳо ҳангоми адади ҳақиқӣ, аз он ҷумла ирратсионалӣ будани дараҷа низ ҷой доштаанд.

Қайд мекунем, ки хосиятҳои 1^0-6^0 имкон медиҳанд, ки графики функсияи нишондиҳандагӣ схемавӣ, бе пешакӣ тартиб додани ҷадвал сохта шавад. Акнун чанд мисолро дида мебароем, ки ҳалли онҳо ба хосиятҳои функсия такя мекунанд.

М и с о л и 1. Маълум, ки нобаробарии $4^m>4^n$ дуруст аст. m ва n-ро муқоиса мекунем.

Ҳ а л. Ифодаҳои 4^m ва 4^n-ро ҳамчун қимати функсияи нишондиҳандагии $y=4^x$ ҳангоми $x=m$ ва $x=n$ будан ҳисоб кардан мумкин аст. Функсияи $y=4^x$ афзуншаванда мебошад ба қимати калони функсия қимати калони аргумент рост меояд. Барои ҳамин $m>n$.

М и с о л и 2. Нобаробарии $a^4<a^6$ дуруст мебошад, $a>0$. Асоси a-ро бо воҳид муқоиса менамоем.

Ҳ а л. Мувофиқи шарт ба қимати хурди аргументи 4 қимати хурди функсияи a^x мувофиқат мекунад. Барои ҳамин функсия афзуншаванда аст. Пас $a>1$ мебошад.

М и с о л и 3. Аломати решаи муодилаи $0{,}9^x=4$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Азбаски $4>0$ аст, пас ин муодила танҳо як реша дорад. Функсияи $y=0{,}9^x$ камшаванда аст ва ҳангоми $x=0$ будан $y=1$ мебошад. Вале $1<4$ аст, пас аломати решаи муодила манфӣ мебошад.

?

1. Хосиятҳои функсияи нишондиҳандагиро як-як номбар намоед. **2.** Ҳангоми ратсионалӣ будани аргумент баробариҳои 3) ва 4)-ро исбот кенед. **3.** Оё функсияи нишондиҳандагӣ каниш дошта метавонад?

---

102. Дараҷаи x ва y -ро муқоиса кунед, агар нобаробарӣ дуруст бошад:

а) $\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{5}{4}\right)^y$; б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x<\left(\frac{4}{9}\right)^y$; в) $0{,}2^x>0{,}2^y$; г) $\left(\frac{9}{2}\right)^x<\left(\frac{9}{2}\right)^y$.

103. Адади мусбати a-ро бо воҳид муқоиса намоед, агар маълум бошад, ки:

а) $a^{0,2}>a^{0,5}$; б) $a^{4,3}<a^3$; в) $a^{\sqrt{5}}>a^2$; г) $a^{\sqrt{2}}<a^{1,4}$.

104. Графики функсияро схемавӣ тасвир кунед:

а) $y=3^x$; б) $y=0{,}6^x$; в) $y=1{,}5^x$; г) $y=0{,}9^x$.

105. Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+1$ б) $y=-3^x$; в) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y=6^x-5$;

д) $y=2^{x+1}-2$; е) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+2$; ж) $y=\left|3^x-3\right|$; з) $y=7^{|x|}$.

106. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро ёбед:

а) $y=2^{\sin x}$; б) $y=1+9^{|\sin x|}$; в) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$; г) $y=\left(\frac{1}{6}\right)^{|\cos x|}-1$.

107. Аломати решаи муодиларо муайян намоед:

а) $2{,}3^x = 4{,}5$; б) $0{,}2^x = 0{,}3$; в) $0{,}7^x = 2{,}9$; г) $4{,}7^x = 0{,}2$.

108. Муодиларо графикӣ ҳал намоед:

а) $2^x = 4$; б) $2^x = 3 - x$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$; г) $3^x = 1 - x$.

109. Барои кадом қиматҳои x графики функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ҳамдигарро мебуранд:

а) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2$; б) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 16$;

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{27}$; г) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $g(x) = 0{,}04$?

110. Барои кадом қиматҳои x графики функсияи $f(x)$ дар поёни графики функсияи $g(x)$ ҷойгир аст, агар:

а) $f(x) = 4^x$, $g(x) = 16$; б) $f(x) = 0{,}3^x$, $g(x) = 0{,}027$ бошад?

111. Нобаробариро графикӣ ҳал кунед:

а) $2^x > 1 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x + 1$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

112. Қимати ифодаи ададиро ҳисоб кунед:

а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$;

в) $\sqrt[7]{\frac{1}{9}} : 243^{\frac{1}{7}} \cdot (7\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{6}}$.

113. Ифодаро сода кунед:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}$; б) $\frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$;

в) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;   г) $\dfrac{x-8}{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4}$.

114. Кадоме аз ин ададҳо калон аст:

а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}$ ё $2^{-1,5}$;   б) $3^{\sqrt{5}}$ ё $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2,25}$?

115. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y=\sqrt{x}(x+2)$; $y=\dfrac{2x-1}{x}$.

116. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}$;   б) $ctg\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

§4. МУОДИЛА, НОБАРОБАРӢ ВА СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

11. МУОДИЛАИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Т а ъ р и ф. **Муодилае, ки дар он номаълум дар дараҷа аст, муодилаи нишондиҳандагӣ номида мешавад.**

Муодилаи одитарини нишондиҳандагӣ ин муодилаи

$$a^x=b \qquad (1)$$

мебошад, ки $a>0$ ва $a\neq 1$ аст. Чӣ тавре, ки дар б.10 дидем, соҳаи қиматҳои функсияи $y=a^x$ маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+=(0;\infty)$ аст. Аз ҳамин сабаб ҳангоми $b\leq 0$ будан муодилаи (1) ҳал надорад. Ҳангоми $b>0$ будан, аз сабаби он ки функсия афзуншаванда (дар ҳолати $a>1$ будан) ё камшаванда (дар ҳолати $0<a<1$ будан) аст ва ҳар як қимати худро расо як маротиба қабул мекунад, муодилаи (1) танҳо як реша дорад. Барои ёфтани ин реша адади b-ро дар намуди $b=a^c$ ифода кардан лозим аст. Аз баробарии $a^x=a^c$ ва хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ зоҳиран бармеояд, ки $x=c$ решаи (1) мебошад (ниг. ба расмҳои 23 ва 24).

Э з о ҳ и 1. Муодилаҳои нишондиҳандагие, ки бо онҳо мо дар курси мактабӣ сару кор дорем чун қоида ба муодилаҳои намуди $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, ки $f(x)$ ва $g(x)$ функсияҳои нисбатан содаанд, оварда мешаванд. Муодиларо бо муодилаи ба он баробарқувваи $f(x)=g(x)$ иваз карда, ҳалли охиринро меёбанд. Аз сабаби баробарқувваги ин ҳал ҳалли матлуби муодилаи аввала аст.

Э з о ҳ и 2. Фаҳмост, ки тасвири визуалии (назарраси) ҳар гуна адади мусбати b дар намуди a^c осон нест. Масалан, барои ёфтани ҳалли муодилаи $2^x=3$ адади 3-ро дар намуди 2^c ифода кардан лозим меояд. Гарчанде чунин c вуҷуд дошта ягона аст (вай адади ирратсионалӣ мебошад), мо ҳанӯз тайёр нестем, ки онро аниқ ё тақрибӣ нависем. Тарзи ҳалли ин гуна муодилаҳо дар б.18-и ҳамин боб оварда мешавад.

М и с о л и 1. Муодилаи $6^{2x-3}=\sqrt[3]{36}$-ро ҳал мекунем.

Ҳ а л. Азбаски $36=6^2$ ва $\sqrt[3]{36}=\sqrt[3]{6^2}=6^{\frac{2}{3}}$ аст, пас муодиларо дар намуди $6^{2x-3}=6^{\frac{2}{3}}$ навиштан мумкин аст. Асосҳо якхела шуданд, дараҷаҳои мувофиқро баробар карда $2x-3=\frac{2}{3}$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо:

$$6x-9=2; \quad 6x=11; \quad x=1\frac{5}{6}.$$

Ҷ а в о б. $1\frac{5}{6}$.

М и с о л и 2. Решаи муодилаи $0{,}25^{\frac{9x-20}{2}}=0{,}5^{x^2}$-ро меёбем.

Ҳ а л. Аввал қисми чапи муодиларо табдил медиҳем:

$$0{,}25^{\frac{9x-20}{2}}=\left(0{,}5^2\right)^{\frac{9x-20}{2}}=0{,}5^{2\cdot\frac{9x-20}{2}}=0{,}5^{9x-20}.$$

Ҳамин тариқ, ҳалли муодилаи

$$0{,}5^{9x-20}=0{,}5^{x^2}$$

-ро ёфтан лозим аст. Решаҳои ин муодила фақат ҳамон ададҳои x мебошанд, ки онҳо решаи $9x-20=x^2$ ё $x^2-9x+20=$ $=(x-4)(x-5)=0$ ҳастанд. Реша будани ададҳои 4 ва 5 возеҳ аст.

Ҷ а в о б. 4; 5.

М и с о л и 3. Ҳалли муодилаи $4^x + 4^{x-1} = 1{,}25$ -ро меёбем.

Ҳ а л. Дорем $4^{x-1} = 4^x \cdot 4^{-1} = 4^x \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{4^x}{4}$. Инро дар муодила гузошта $4^x + \dfrac{4^x}{4} = 1{,}25$ ё $4 \cdot 4^x + 4^x = 5$ ва ё $5 \cdot 4^x = 5$ -ро ҳосил мекунем. Ҳамин тариқ,

$4^x = 1$ ё $4^x = 4^0$. Аз ин ҷо $x = 0$. Ҷ а в о б: 0.

Дар баъзе ҳолатҳо функцияи аргументаш номаълум дар муодила дар дараҷаҳои гуногун меоянд. Ин гуна муодилаҳоро бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал кардан мумкин аст.

М и с о л и 4. Муодилаи $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$ -ро ҳал мекунем.

Зарбшавандаи аъзои якуми муодиларо дар намуди $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ ва аъзои дуюмро дар намуди $3^{x+1} = 3^x \cdot 3 = 3 \cdot 3^x$ тасвир карда, муодиларо дар намуди $2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 9 = 0$ менависем. $3^x = t$ ишорат карда, муодилаи $2t^2 - 3t - 9 = 0$ -ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодилаи квадратиро меёбем:

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 9}{4}; \quad t_1 = -\frac{6}{4} = -1{,}5; \quad t_2 = \frac{12}{4} = 3.$$

Муодилаи $3^x = t_1 = -1{,}5$ ҳал надорад, чунки $-1{,}5 < 0$ аст. Муодилаи $3^x = t_2 = 3$ дорои решаи $x = 1$ аст. Ҷ а в о б: 1.

Дар охир боз ҳалли ду муодиларо меорем, ки онҳо нисбати муодилаҳои муоинашуда мураккабанд.

М и с о л и 5. $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$.

Қисмҳои чап ва рости муодиларо ҳамин тавр табдил медиҳем, ки дар асос 5 бошад:

$$\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \left[\left(5^3\right)^{3-2x}\right]^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}(3-2x)}; \qquad \frac{5}{\sqrt[4]{5}} = \frac{5}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{1-\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}.$$

Аз ин табдилдиҳиҳо бармеояд, ки муодила ба муодилаи хаттии $\frac{3}{4}(3-2x)=\frac{3}{4}$ ё $3-2x=1$ баробарқувва аст. Ҷ а в о б: 1.

М и с о л и 6. $3\cdot 2^{2x}+6^x-2\cdot 3^{2x}=0$.

Азбаски $2^{2x}=4^x$, $3^{2x}=9^x$ аст, пас решаи муодилаи $3\cdot 4^x+6^x-2\cdot 9^x=0$ -ро ёфтан лозим аст. Ин муодиларо аъзо ба аъзо ба 9^x тақсим менамоем:

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+\left(\frac{6}{9}\right)^x-2=0 \quad ё \quad 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0.$$

Тағйирёбандаи $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ -ро дохил карда муодилаи квадратии $3t^2+t-2=0$ -ро ҳосил мекунем. Решаҳои ин муодила

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\frac{-1\pm 5}{6}; \quad t_1=-1; \quad t_2=\frac{2}{3}$$

ҳастанд. Муодилаи $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t_1=-1$ ҳал надошта, решаи муодилаи $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t_2=\frac{2}{3}$ бошад як аст. Ҷ а в о б: 1.

Х у л о с а. Муоинаи дақиқи тарзи ҳалли мисолҳои 1-6 нишон медиҳад, ки дар табдилдиҳии муодилаҳои (ифодаҳои) нишондиҳандагӣ баробариҳое, ки хосиятҳои асосии дараҷаро ифода менамоянд, роли асосиро мебозанд. (ниг. ба баробариҳои 1) – 5) –и б.10-и §3).

?

1. Баробариҳоеро, ки хосиятҳои асосии дараҷаро ифода менамоянд, нависед. **2.** Чӣ гуна муодиларо муодилаи нишондиҳандагӣ меноманд? **3.** Чаро муодилаи (1) ё ҳал надорад, ё танҳо як ҳал дорад? **4.** Дар кадом ҳолат дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳалли муодиларо осон мекунад?

Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал намоед (117-126):

117. а) $2^x=32$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=81$; в) $4^x=128$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=\frac{1}{625}$.

118. а) $2^{x-2}=1$; б) $3^{5x+1}=9^{2x}$; в) $\sqrt[3]{2^{x-1}}=\sqrt{2}$; г) $\sqrt{7^{2x+6}}=\dfrac{7}{\sqrt[4]{7}}$.

119. а) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3-2x}=\left(\dfrac{49}{9}\right)^{-3}$; б) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{x}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{5}$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-2x}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-3}$; г) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{x+2}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{6}$.

120. а) $4^{x+1}+4^{x}=320$; б) $3^{x+2}-3^{x+1}=6$;
в) $5^{3x+6}-5^{3x+4}=600$; г) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x}-5\cdot 2^{x+2}+120=0$.

121. а) $4^{x}+2^{x}=2$; б) $9^{x}-3^{x}-6=0$;
в) $4^{x+1}+2^{x}-5=0$; г) $4^{x}-3(\sqrt{4})^{x}-4=0$.

122. а) $2^{x+1}-3\cdot 2^{x-2}=5$; б) $2\cdot 9^{x}+9^{x-1}=19$;

в) $2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=150$; г) $5^{2x+1}-5^{2x-1}=24$.

123. а) $2^{x-1}=3^{x-1}$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-x}$;

в) $6^{x+1}=7^{x+1}$; г) $8^{x-3}=9^{3-x}$.

124. а) $3^{4x+10}\cdot 5^{6x+2}=15^{5x+6}$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x-1}=\left(\dfrac{1}{12}\right)^{4x+1}$;

в) $2^{x}\cdot 5^{x}=10^{3x+1}$; г) $7^{4x+3}\cdot 3^{4x+3}=21^{2x-1}$.

125. а) $2^{x}+2^{4-x}=10$; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=-\dfrac{2}{3}$;

в) $9^{\sqrt{x-3}}+3=4\cdot 3^{\sqrt{x-3}}$; г) $4^{x}-0{,}25^{x-2}=15$.

126. а $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{71\sqrt{x-1}-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3\sqrt{x-1}-293}$; б) $\left(\dfrac{11}{2}\right)^{8x^{2}+5x}=\left(\dfrac{2}{11}\right)^{-2x^{2}-8x}$;

в) $11-3^{x}=\sqrt{3^{x}-5}$; г) $3^{x+1}-2=\sqrt{10-3^{x+2}}$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

127. Маълум, ки $0{,}1^x < 0{,}1^y$ аст. x калон аст ё y? Агар $3{,}2^x < 3{,}2^y$ бошад чӣ?

128. Муодилаи ирратсионалиро ҳал намоед:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0.$$

129. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y = -x^2 + 4x - 3$ ва $y = 0$ маҳдуд аст, ҳисоб кунед.

130. Барои истеҳсоли як детал коргари якум нисбат ба коргари дуюм 6 дақиқа вақт кам сарф мекунад. Ҳар кадоми онҳо дар муддати 7 соат чанддеталӣ истеҳсол менамоянд, агар маълум бошад, ки коргари якум дар ин муддат 8-то детал зиёд истеҳсол кардааст?

12. НОБАРОБАРИИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Ҳалли одитарин нобаробариҳои нишондиҳандагӣ аз қабили $a^x > b$;

$$a^x \geq b; \; a^x < b; \; a^x \leq b$$

ба хосиятҳои маълуми функсияи $y = a^x$ такя мекунад. Нобаробариҳое, ки бо онҳо сару кор хоҳем дошт, аслан бо ёрии табдилоти айниятӣ ба намуди

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \text{ ё } a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

оварда мешаванд. Ҳангоми ҳалли онҳо онро бояд ба эътибор гирифт, ки функсияи $y = a^x$ дар тамоми тири ададӣ муайян буда, ҳангоми $a > 1$ будан афзуншаванда ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан камшаванда аст. Масалан, нобаробарии $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ ҳангоми $a > 1$ будан ба нобаробарии $f(x) \geq g(x)$ ва ҳангоми $0 < a < 1$ будан ба нобаробарии $f(x) \leq g(x)$ баробарқувва аст. Вобаста ба бузургии a ҳалли яке аз нобаробариҳои мазкур ҳалли матлуби нобаробарии дар аввал додашуда аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $7^{2x-1} \leq 7^{14-3x}$-ро ҳал мекунем.

Азбаски функсияи нишондиҳандагии $y = 7^x$ афзуншаванда аст, пас ба қимати ками функсия қимати ками аргумент рост меояд. Барои ҳамин нобаробарии мазкур ба нобаробарии

$$2x - 1 \leq 14 - 3x$$

баробарқувва аст. Ин нобаробарии хаттиро ҳал карда меёбем, ки $x \le 3$ мебошад. Ҷ а в о б: $(-\infty; 3]$.

М и с о л и 2. Ҳалли нобаробарии $0{,}4^{5x-1} > 0{,}16$ -ро меёбем. $0{,}16 = 0{,}4^2$ буданро ба назар гирифта нобаробариро дар шакли $0{,}4^{5x-1} > 0{,}4^2$ менависем. Функсияи $y = 0{,}4^x$ камшаванда аст (асосаш 0,4 аз 1 хурд аст!). Бинобар ин нобаробарӣ ба нобаробарии $5x - 1 < 2$ ё $5x < 3$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо $x < 0{,}6$. Ҷ а в о б: $(-\infty; 0{,}6)$.

М и с о л и 3. Нобаробарии

$$2 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 3^{x+2} < 27$$

-ро ҳал мекунем.

Азбаски $9^{x+1} = (3^2)^{x+1} = 3^{2x+2} = 9 \cdot 3^{2x}$ ва $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$ аст, пас нобаробарии додашуда ба нобаробарии

$$18 \cdot 3^{2x} - 45 \cdot 3^x - 27 < 0$$

баробарқувва аст. Агар тағйирёбандаи нав $t = 3^x$ -ро дохил кунем, нобаробарӣ намуди $18t^2 - 45t - 27 < 0$ ё $2t^2 - 5t - 3 < 0$ -ро мегирад. Ин нобаробариро ҳал мекунем. Муодилаи квадратии $2t^2 - 5t - 3 = 0$ -ро ҳал карда решаҳои онро меёбем: $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 3$.

Яъне $2t^2 - 5t - 3 = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 3)$. Методи фосилаҳоро истифода карда, меёбем, ки $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ ҳалли нобаробарии квадратӣ аст.

Аз ин ҷо, бо назардошти $-\frac{1}{2} < t < 3$ ва $t = 3^x$ ба нобаробарии $-\frac{1}{2} < 3^x < 3$ доро мешавем. Нобаробарии якум $-\frac{1}{2} < 3^x$ барои қимати ҳақиқии дилхоҳи x иҷро мешавад. Нобаробарии дуюм $3^x < 3$ дорои ҳалли $x < 1$ аст. Ҷ а в о б: $(-\infty; 1)$.

?

1. Хосиятҳои функсияи нишондиҳандагиро, ки ба онҳо тарзи ҳалли одитарин нобаробарии нишондиҳандагӣ асос карда шудааст, номбар кунед. 2. Чаро дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳалли нобаробариро осон мегардонад? Бо мисол фаҳмонед. 3. Моҳияти методи фосилаҳоро дар ҳалли мисоли мушаххас шарҳ диҳед.

Нобаробарии нишондиҳандагиро ҳал кунед (131-136):

131. а) $2^x \geq \frac{1}{2}$; б) $0{,}2^x < 0{,}2^5$; в) $\left(\sqrt{7}\right)^x \geq \frac{1}{49}$; г) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \geq 1$.

132. а) $2^{2-x} < 16$; б) $0{,}3^{3x-4} > 0{,}09$; в) $0{,}1^{2x-1} \leq 0{,}01$ г) $0{,}5^{2x-2} \geq 4$.

133. а) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; в) $2^{\frac{3x}{2}+3} \geq 16$; г) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leq 7$.

134. а) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$; б) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} \geq 64^{2\frac{2}{3}-x^2}$; г) $7^{2x-1} - 7^{x+1} < 7^{x-1} - 7$.

135. а) $\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} > \frac{21}{16}$; б) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geq 4$; г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \leq \frac{5}{2}$.

136. а) $\pi^x - \pi^{2x} \geq 0$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - 6\cdot 2^{-x} - 8 < 0$;

в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 28\cdot 3^{-x-1} + 3 < 0$ г) $4^x + 2^x - 2 \geq 0$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

137. Графики функсияи $y=-x^2+1$-ро кашед. Барои кадом қимати x ин функсия қимати калонтарин қабул мекунад?

138. Системаи муодилаҳои зеринро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ xy=15. \end{cases}$$

139. Аъзои якуми прогрессияи геометрии (b_n)-ро ёбед, агар:

а) $b_5=\frac{1}{64}$, $q=\frac{1}{2}$; б) $b_6=243$, $q=-3$ бошад.

140. Қимати ифодаи $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$ -ро ёбед.

141. $\cos\alpha$ ва $tg\alpha$ -ро ёбед, агар маълум бошад, ки $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ ва

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ аст.

142. Муодиларо ҳал кунед: $3^x-\frac{6}{3^x}=1$.

13. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Тарзи ёфтани ҳалли системаи нишондиҳандагӣ ҳалли муодилаи нишондиҳандагиро мемонад. Чун пештара аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ ва аз баробариҳое, ки бо онҳо хосияти асосии дараҷа ифода меёбанд, истифода карда, системаи нишондиҳандагиро ба системаи ба он баробарқувваи алгебравӣ иваз мекунем. Ҳал кардани ин система боқӣ мемонад.

Мисоли 1. Ҳалли системаи зеринро меорем:

$$\begin{cases} 3^{x+y}=9, \\ 3^{3x-2y-1}=1. \end{cases}$$

Баробариҳои $9=3^2$ ва $1=3^0$ -ро ба эътибор гирифта системаро ба системаи алгебравии

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 3x-2y-1=0. \end{cases}$$

иваз мекунем. Ин системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем. Аз муодилаи якум $x = 2 - y$. Инро дар муодилаи дуюм мегузорем:

$$3(2-y) - 2y - 1 = 0 \quad \text{ё} \quad 5 - 5y = 0.$$

Аз ин ҷо $y = 1$. Пас $x = 2 - y = 2 - 1 = 1$. Ҷ а в о б: (1; 1).

М и с о л и 2. Системаи

$$\begin{cases} 3^{x+1} + 2^{y} = 13, \\ 3^{x+2} + 2^{y+3} = 59 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем. Аз баробарии 1)-и хосияти асосии дараҷа (ниг. ба б. 10) истифода карда, системаро ба системаи ба вай баробарқувваи нишондиҳандагии

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{x} + 2^{y} = 13, \\ 9 \cdot 3^{x} + 8 \cdot 2^{y} = 59 \end{cases}$$

иваз менамоем. Агар дар ин муодилаҳо $a = 3^{x}$, $b = 2^{y}$ гузорем, системаи алгебравии

$$\begin{cases} 3a + b = 13, \\ 9a + 8b = 59 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Нуқтаи $(a; b) = (3; 4)$ ҳалли ин системаи хаттӣ аст. Акнун муодилаҳои одии $3^{x} = 3$ ва $2^{y} = 4$-ро ҳал карда меёбем: $x = 1$; $y = 2$. Ҷ а в о б: (1; 2).

М и с о л и 3. $\begin{cases} 4^{x} = 16y, \\ 2^{x+1} = 4y. \end{cases}$

Ҳар ду тарафи муодилаи якумро ба 4 тақсим карда меёбем, ки $4^{x-1} = 4y$ аст. Аз ин истифода карда, муодилаи дуюми системаро ба таври $2^{x+1} = 4^{x-1}$ ё $2^{x+1} = 2^{2(x-1)}$ менависем. Аз ин ҷо $x + 1 = 2(x - 1)$, яъне $x = 3$. Акнун аз муодилаи $4^{3} = 16y$ бармеояд: $y = 4$. Ҷ а в о б: (3; 4).

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (143-144):

143. а) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{2x-y} = \sqrt{5}, \\ 3^{4y-x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{y-2x} = \dfrac{1}{32}, \\ 2^{x-y+1} = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{7}\right)^{3x-2y} = 49, \\ 7^{8x-\frac{y}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}. \end{cases}$

144. а) $\begin{cases} 6^x - 2\cdot 3^y = 0, \\ 6^x \cdot 3^y = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 6, \\ 7^{x+y} = 49; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24, \\ x + y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \sqrt{xy} = 20. \end{cases}$

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

145. Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал кунед:

$$4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$$

146. Дар имтиҳон 25%-и талабагон ягон масъаларо ҳал карда натавонистанд. 150 нафар талаба ақаллан якто масъаларо ҳал кардааст. Дар имтиҳон чанд нафар талаба иштирок дошт?

147. Қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ -ро дар порчаи $[-0,5;\ 0,5]$ ёбед.

148. Ҳисоб кунед:

а) $\int_0^2 (1+2x)^2\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2x)\,dx$.

149. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \dfrac{2-x}{x-1}$; б) $y = \sqrt{4-x^2}$.

§5. ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ ВА ХОСИЯТҲОИ ОН

14. ТАЪРИФИ ЛОГАРИФМИ АДАД

Ба муодилаи $a^x = b$ бармегардем. Дар б. 11 муайян карда будем, ки ҳангоми $b > 0$ будан ин муодила ҳалли ягона дорад ва агар визуалӣ b-ро дар намуди $b = a^c$ тасвир карда тавонем, он гоҳ $x = c$ ҳалли муодила аст. Дар эзоҳи 2-и ҳамон ҷой қайд шуда буд, ки чунин тасвир на барои ҳар гуна адади $b > 0$ назаррас аст. (Аз ҳамин сабаб ҳамаи муодилаҳо ва нобаробариҳое, ки дар б.11-13 оварда шудаанд, чунин интихоб шуда буданд, то ки ин тасвир амалан айёнӣ бошад.)

Решаи муодилаи $a^x = b$*-ро бо* $\ell og_a b$ *ишорат мекунанд.* Яъне $\ell og_a b = c$ адади ҳақиқиест, ки ҳангоми $b > 0$, $a > 0$ ва $a \neq 1$ будан айнияти $a^c = b$ ё $a^{\ell og_a b} = b$ -ро қаноат менамояд. Навишти $\ell og_a b = c$ ин тавр хонда мешавад: *логарифми* b *аз рӯйи асоси* a *ё логарифми асосаш* a *аз адади* b *ва ё логарифми* a*-и адади* b *ба* c *баробар аст.* Ададе, ки асоси логарифмро ташкил медиҳад, дар сатри поён навишта мешавад.

Ҳамин тариқ, **логарифми адади b аз рӯйи асоси a гуфта адади (нишондиҳандаи дараҷаи) c-ро меноманд, агар a дар дараҷаи c ба b баробар бошад.**

Ин таърифро бо тарзи математикӣ ин тавр навиштан мумкин аст: $\ell og_a b = c$ аст, агар $a^c = b$ бошад ва баръакс, агар $a^c = b$ бошад он гоҳ $\ell og_a b = c$.

Аз таърифи логарифм бевосита баробарии

$$a^{\ell og_a b} = b$$

бармеояд, ки он **айнияти асосии логарифмӣ** ном дорад.

Мувофиқи таърифи логарифм

аз баробариҳои	бармеояд, ки:
$2^5 = 32$	$5 = \ell og_2 32$,
$10^2 = 100$	$2 = \ell og_{10} 100$,
$3^4 = 81$	$4 = \ell og_3 81$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \qquad\qquad -3 = \log_{\frac{1}{2}} 8,$$

$$a^y = x \qquad\qquad y = \log_a x,$$

$$a^c = b \qquad\qquad c = \log_a b.$$

Баробариҳои мувофиқи ҳар ду сутун баробарқувваанд: яке дигареро ба миён меорад ва баръакс. Яъне, $2^5 = 32$ ва $\log_2 32 = 5$ тасдиқи худи ҳамон як чиз аст.

Таърифи логарифм имкон медиҳад, ки муодилаҳои намуди

1) $a^x = b$; 2) $x^a = b$; 3) $a^c = x$.

ки дар онҳо аз рӯйи ду адади додашуда ёфтани адади сеюм талаб карда мешавад, ҳал карда шаванд.

Мисоли 1. Логарифми адади 27-ро аз рӯйи асоси 9 меёбем. Бигузор $x = \log_9 27$ бошад. Мувофиқи таърифи логарифм $9^x = 27$ мебошад, вале $9 = 3^2$ ва $27 = 3^3$. Пас $3^{2x} = 3^3$, аз ҷо $2x = 3$ ё $x = \dfrac{3}{2}$.

Мисоли 2. Асосеро меёбем, ки логарифми адади 32 аз рӯйи он ба 10 баробар аст.

Мувофиқи шарт $\log_x 32 = 10$. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи логарифм $x^{10} = 32$. Пас $x = \sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Ҳамин тариқ, $\log_{\sqrt{2}} 32 = 10$ будааст.

Мисоли 3. Ададеро меёбем, ки логарифми он аз рӯйи асоси 64 ба $-\dfrac{2}{3}$ баробар аст.

Агар адади матлубро бо x ишорат кунем, он гоҳ бояд $\log_{64} x = -\dfrac{2}{3}$ шавад. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи логарифми адад

$$x = 64^{-\frac{2}{3}} \text{ ё } x = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Инак, $\ell og_{64}\dfrac{1}{16}=-\dfrac{2}{3}$ аст.

М и с о л и 4. Аз айнияти асосии логарифмӣ истифода карда қимати ифодаи $3^{3-\ell og_3 18}$-ро ҳисоб мекунем. Дорем

$$3^{3-\ell og_3 18}=3^3\cdot 3^{-\ell og_3 18}=\frac{3^3}{3^{\ell og_3 18}}=\frac{27}{18}=1{,}5.$$

?

---

1. Таърифи логарифми ададро баён кунед ва онро бо мисолҳо шарҳ диҳед. **2.** Кадом намуди муодилаҳоро бевосита бо истифодаи таърифи логарифми адад ҳал кардан мумкин аст? **3.** Ифодаеро оред, ки ҳисоби қимати он айнияти асосии логарифмиро истифода кунад.

Дуруст будани баробариҳои зеринро санҷед (150-152):

150. а) $\ell og_2 16=4$; б) $\ell og_3\dfrac{1}{81}=-4$;

в) $\ell og_{17}1=0$; г) $\ell og_4 64=3$.

151. а) $\ell og_{\frac{1}{3}}9=-2$; б) $\ell og_{0,2}0{,}04=2$;

в) $\ell og_{10}0{,}01=-2$; г) $\ell og_{\sqrt{5}}0{,}2=-2$.

152. а) $\ell og_{\frac{4}{3}}\dfrac{27}{64}=-3$; б) $\ell og_{0,3}\dfrac{1}{0{,}09}=-2$;

в) $\ell og_{\frac{1}{4}}8=-\dfrac{3}{2}$; г) $\ell og_5\dfrac{1}{125}=-3$.

153. Логарифми ададро аз рӯйи асоси a ёбед:

а) 32; $\dfrac{1}{8}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; ҳангоми $a=2$ будан;

б) 1000; $\dfrac{1}{10}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[5]{100}$ ҳангоми $a=10$ будан;

в) 9; $\dfrac{1}{9}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[6]{3}$ ҳангоми $a=3$ будан.

154. Аз баробарӣ асоси логарифмро ёбед:

а) $\ell og_x 9=2$; б) $\ell og_x \frac{1}{8}=-3$;

в) $\ell og_x \frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2}$; г) $\ell og_x 243=37$.

Адади x-ро ёбед (155-156):

155. а) $\ell og_2 x=-1$; б) $\ell og_{\frac{1}{5}} x=-2$;

в) $\ell og_4 x=2$; г) $\ell og_6 x=-2$.

156. а) $\ell og_9 x=-2$; б) $\ell og_{\sqrt{3}} x=0$;

в) $\ell og_{\frac{1}{7}} x=1$; г) $\ell og_{\frac{1}{2}} x=-5$.

157. Ададро дар намуди логарифми асосаш a нависед:

а) 2; -2; 1; 0 ҳангоми $a=4$ будан;

б) 1; -1; 0; 4 ҳангоми $a=2$ будан;

в) 4; -1; 1; 2 ҳангоми $a=3$ будан;

г) -3; -2; 2; 1 ҳангоми $a=5$ будан.

Аз айнияти асосии логарифмӣ истифода карда, ифодаро сода кунед (158-160):

158. а) $1{,}2^{\ell og_{1,2} 3}$; б) $\pi^{\ell og_\pi 3{,}14}$; в) $2^{\ell og_2 1}$; г) $2{,}8^{\ell og_{2,8} 1{,}4}$.

159. а) $4^{1+\ell og_4 3}$; б) $10^{1-\ell og_{10} 3}$; в) $\left(\frac{1}{8}\right)^{1+\ell og_{\frac{1}{8}} 4}$; г) $2^{2-\ell og_2 8}$.

160. а) $3^{2\ell og_3 2}$; б) $2^{-2\ell og_2 4}$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2\ell og_{\frac{1}{4}} 2}$; г) $\left(\frac{1}{12}\right)^{2\ell og_{\frac{1}{12}} 1}$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

161. Нобаробариро ҳал кунед: $\left(\frac{1}{3}\right)^{7x-1} \leq 27$.

162. Ба маҳлули 18-фоизаи намаки вазнаш 2 кг 0,25 кг об рехтанд. Маҳлули чандфоизаи намак ҳосил шуд?

163. Ҳисоб кунед: 10+11+12+…+98+99.

164. Муодилаи тригонометриро ҳал кунед:

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

165. Муодилаи ратсионалиро ҳал кунед:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}.$$

15. ХОСИЯТҲОИ ЛОГАРИФМ

Бигузор a адади дилхоҳи мусбат ва нобаробари як бошад. Аз таърифи логарифми адад бармеояд, ки:

I. $\ell og_a 1 = 0$;   II. $\ell og_a a = 1$.

Шумо аллакай ҳангоми иҷрои машқҳои б. 14 ҷой доштани ин баробариҳоро барои a-и мушаххас пайхас кардаед (масалан, ҳангоми иҷрои машқи 156).

Фарз мекунем, ки x ва y ададҳои дилхоҳи мусбатанд, p бошад адади дилхоҳи ҳақиқӣ. Нишон медиҳем, ки баробариҳои зерин ҷой доранд:

III. $\ell og_a(xy) = \ell og_a x + \ell og_a y$.

IV. $\ell og_a \frac{x}{y} = \ell og_a x - \ell og_a y$.

V. $\ell og_a x^p = p\,\ell og_a x$.

Барои исботи хосияти III аз айнияти асосии логарифмӣ истифода мекунем:

$$x = a^{\ell og_a x},\quad y = a^{\ell og_a y}$$

Ин баробариҳоро аъзо ба аъзо зарб карда ҳосил мекунем:

$$xy=a^{\ell og_a x}\cdot a^{\ell og_a y}=a^{\ell og_a x+\ell og_a y}.$$

Вале мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ $xy=a^{\ell og_a(xy)}$, пас $a^{\ell og_a(xy)}=a^{\ell og_a x+\ell og_a y}$. Аз ин ҷо, аз рӯйи хосияти функсияи нишондиҳандагӣ баробарии $\ell og_a(xy)=\ell og_a x+\ell og_a y$ бармеояд.

Ҳамин тариқ, *логарифми ҳосили зарб ба суммаи логарифмҳои зарбшавандаҳо баробар аст*. Зоҳиран фаҳмост, ки ин хосият барои миқдори дилхоҳи зарбшавандаҳо дуруст аст. Масалан, $\ell og_a(xyz)=\ell og_a x+\ell og_a y+\ell og_a z$, $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Акнун исботи хосияти IV–ро меорем. Барои ин боз айнияти асосии логарифмиро истифода мекунем. Мувофиқи он $\frac{x}{y}=a^{\ell og_a\frac{x}{y}}$. Аз тарафи дигар, $\frac{x}{y}=\frac{a^{\ell og_a x}}{a^{\ell og_a y}}=a^{\ell og_a x-\ell og_a y}$. Аз ин ду баробарӣ ҳосил менамоем:

$$a^{\ell og_a\frac{x}{y}}=a^{\ell og_a x-\ell og_a y}.\quad \text{Яъне}\quad \ell og_a\frac{x}{y}=\ell og_a x-\ell og_a y.$$

Инак, *логарифми ҳосили тақсим ба фарқи логарифми сурат ва логарифми махраҷ баробар аст.*

Барои исботи хосияти V силсилаи баробариҳоро, ки онҳо аз айнияти асосии логарифмӣ бармеоянд, менависем:

$$x^p=a^{\ell og_a x^p}=\left(a^{\ell og_a x}\right)^p=a^{p\ell og_a x}.$$

Аз ин ҷо, мувофиқи хосияти функсияи нишондиҳандагӣ

$$\ell og_a x^p=p\ell og_a x.$$

Яъне, *логарифми дараҷа ба ҳосили зарби нишондиҳандаи дараҷа бар логарифми асоси ин дараҷа баробар аст.*

Хосияти I–V-и ҳосилкардаамон хосиятҳои *асосии* логарифм ном доранд. Онҳоро хосиятҳои *умумӣ* ҳам мегӯянд, чунки онҳо аз асос вобаста нестанд (танҳо зарур аст, ки $a>0$ ва $a\neq 1$ бошад).

Хулосаи 1. Аз хосияти V ва айнияти асосии логарифмӣ бармеояд, ки барои ҳар гуна ададҳои $a>0$, $b>0$ ва $a\neq 1$, $b\neq 1$ айнияти зерин ҷой дорад:

$$a^x=b^{x\ell og_b a}$$

Дар ҳақиқат, $b^{x\ell og_b a}=b^{\ell og_b a^x}=a^x$.

Хулосаи 2. Агар x, a, b ададҳои мусбат бошанд ва $a \neq 1$, $b \neq 1$ бошад, он гоҳ формулаи

$$\ell og_a x = \frac{\ell og_b x}{\ell og_b a}$$

ҷой дорад, ки вай ***формулаи гузариш*** аз логарифми як асос ба логарифми асоси дигар ном дорад.

Барои исботи ин формула боз айнияти асосии логарифмӣ ва хосияти V–и логарифмро истифода мекунем:

$$\ell og_b x = \ell og_b \left(x^{\ell og_a x}\right) = \ell og_a x \cdot \ell og_b a$$

Қисмҳои чап ва рости ин нобаробариро ба $\ell og_b a$ тақсим карда формулаи матлубро ҳосил менамоем.

Формулаи гузариш имконият медиҳад, ки аз ҷадвали пешакӣ сохташудаи логарифмҳои ададҳо аз рӯйи асоси додашудаи b истифода карда, логарифми ададро аз рӯйи асоси дилхоҳи a ёбем. Бо ин мақсад аксар вақт ҷадвалҳои логарифмҳои даҳӣ ё логарифмҳои натуралӣ, ки онҳоро дар бештари воситаҳои таълимии мактабӣ дарёфт кардан мумкин аст, истифода мешаванд. Агар асоси логарифм ба 10 баробар бошад, онро **логарифми даҳӣ** меноманд. Ишорати ***логарифми даҳӣ*** ℓg аст, яъне $\ell g x = \ell og_{10} x$. Бо логарифми натуралӣ дар б.17 шинос хоҳем шуд.

Формулаи гузариш инчунин барои ёфтани ҳалли муодилаҳое, ки дар таркибашон аз рӯйи асосҳои гуногун логарифм доранд, васеъ истифода карда мешавад.

Хулосаи 3. Баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\ell og_{a^q} x = \frac{1}{q} \ell og_a x \quad (q \neq 0); \quad \ell og_a x = \frac{1}{\ell og_x a}.$$

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи гузариш қисми чапи формулаи якумро ин тавр навишта метавонем:

$$\ell og_{a^q} x = \frac{\ell og_a x}{\ell og_a a^q} = \frac{\ell og_a x}{q \ell og_a a} = \frac{1}{q} \ell og_a x.$$

(Хосиятҳои V ва II –ро истифода кардем.) Формулаи дуюм бевосита аз формулаи гузариш ҳангоми $b = x$ будан бармеояд.

Хосиятҳои асосии логарифмҳо, формулаи гузариш ва формулаҳои дар ду хулосаи дигар овардашуда ҳангоми айниятан табдил додани ифодаҳои дар таркибашон логарифмдошта истифода мешаванд. Масалан, хосияти III имконият медиҳад, ки ёфтани ҳосили зарб ба ёфтани логарифми суммаи онҳо ва баъд ба ёфтани адад аз рӯйи логарифми ёфташуда иваз карда шавад. Айнан ба ҳамин, хосияти V бадарачабардориро ба зарби дарача бар логарифми адади додашуда, сонӣ аз рӯйи логарифм ёфтани натича меоварад. Яъне, ҳисоб бо истифодаи логарифмҳо аз ду зина иборат аст: логарифмронӣ ва потенсиронӣ.

Протсесси ҳисоби логарифми ифодаро аз рӯйи асоси додашуда *логарифмронӣ* ё *логарифмгирӣ* ва протсесси аз рӯйи дода шудани логарифми ифода ёфтани худи ифодаро *потенсиронӣ* меноманд. Зоҳиран фаҳмост, ки ин ду протсесс (амалиёт) нисбати ҳамдигар мувофиқан баръаксанд.

Барои амалан мустаҳкам кардани маводи дар боло овардашуда чанд мисолро дида мебароем.

Мисоли 1. Аз рӯйи асоси 2 аз ифодаи $16a^5\sqrt[3]{b^2}$ логарифм мегирем.

Хосиятҳои III ва V -и логарифмро истифода карда ҳосил менамоем:

$$\ell og_2\left(16a^5\sqrt[3]{b^2}\right)=\ell og_2\left(16\cdot a^5\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)=\ell og_2 16+\ell og_2 a^5+\ell og_2 b^{\frac{2}{3}}=$$

$$=4+5\ell og_2 a+\frac{2}{3}\ell og_2 b\,.$$

Мисоли 2. Қимати ифодаи $\dfrac{\ell g96-\ell g24}{\ell g5+\ell g3{,}2}$-ро ҳисоб мекунем.

Аз хосиятҳои III, IV ва баъд аз V истифода карда сурат ва махрачро табдил медиҳем:

$$\ell g96-\ell g24=\ell g\frac{96}{24}=\ell g4=\ell g2^2=2\ell g2\,,$$

$$\ell g5+\ell g3{,}2=\ell g(5\cdot 3{,}2)=\ell g16=\ell g2^4=4\ell g2\,.$$

Пас $\dfrac{\ell g96-\ell g24}{\ell g5+\ell g3{,}2}=\dfrac{2\ell g2}{4\ell g2}=\dfrac{1}{2}$.

Мисоли 3. Қимати ифодаи $\ell og_3 8-2\ell og_3 2+\ell og_3 4{,}5$-ро меёбем. Хосиятҳои III–V -ро истифода мекунем:

$$\ell og_3 8-2\ell og_3 2+\ell og_3 4{,}5=\ell og_3 8-\ell og_3 2^2+\ell og_3\frac{9}{2}=$$

$$= \ell og_3 8 - \ell og_3 4 + \ell og_3 \frac{9}{2} = \ell og_3 \frac{8}{4} + \ell og_3 \frac{9}{2} = \ell og_3 2 + \ell og_3 \frac{9}{2} =$$

$$= \ell og_3\left(2 \cdot \frac{9}{2}\right) = \ell og_3 9 = 2 .$$

М и с о л и 4. Қимати ифодаи $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\ell og_2 7}}$ -ро ҳисоб мекунем.

Формулаи дуюми хулосаи 3-ро истифода карда, дар нишондиҳандаи дараҷа ба логарифми асоси 7 мегузарем ва баъд аз рӯйи айнияти асосии логарифмӣ меёбем:

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\ell og_2 7}} = \left[(7)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{\ell og_2 7}} = 7^{\frac{1}{\ell og_2 7}} = 7^{\ell og_7 2} = 2 .$$

?

1. Хосиятҳои асосии логарифмро як-як номбар кунед. Дурустии онҳоро бо мисолҳои ададӣ санҷед. **2.** Як тарзи истифодаи формулаи гузаришро қайд намоед. **3.** Логарифми даҳӣ гуфта чиро мегӯянд? Вай чӣ тавр ишорат карда мешавад? **4.** Моҳияти протсессҳои логарифмронӣ ва потенсирониро шарҳ диҳед. Чаро онҳо амалиётҳои баръаксанд?

166. Аз ифодаҳои зерин, аз рӯйи асоси 2 логарифм гиред ($a>0, b>0$):

а) $\left(2a^2b\right)^4$; б) $\left(\frac{4a^2}{\sqrt[7]{b^3}}\right)^{-0,2}$; в) $\left(\sqrt[5]{8a^2b}\right)^{\frac{4}{5}}$; г) $\frac{a^2}{16b^6}$.

167. Аз рӯйи асоси 10 логарифм гиред ($a>0, b>0, c>0$):

а) $100\sqrt{a^4b^2c}$; б) $\frac{10}{a^2bc^3}$; в) $10^{-2}a^2b^4c^{\frac{5}{6}}$; г) $\frac{b^{\frac{4}{5}}}{10^4a^5}$.

168. Ёбед: а) $\ell g1000$; б) $\ell g0{,}1$; в) $\ell g0{,}0001$; г) $\ell g100$.

169. Маълум, ки $\ell og_7 2 = a$ ва $\ell og_7 3 = b$ мебошад. Ифодаро бо воситаи a ва b нависед:

а) $\log_7 42$; б) $\log_7 21$; в) $\log_7 24$; г) $\log_7 98$.

Ҳисоб кунед (170-171):

170. а) $\lg 4 + \lg 25$; б) $\log_2 9 - \log_2 \dfrac{9}{16}$;

в) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; г) $\lg 11 - \lg 110$.

171. а) $\dfrac{\lg 2 + \lg 32}{2\lg 4 - \lg 8}$; б) $\dfrac{\log_2 125}{\log_2 25}$;

в) $\log_9 13 - \log_9 39$; г) $\log_{0,4} 16 - 2\lg_{0,4} 10$.

Аз баробариҳои зерин x –ро ёбед (172-173):

172. а) $\log_4 x = \log_4 5 - \log_4 2 + \log_4 3$;

б) $\log_7 x = 3\log_7 2 - 2\log_7 3 + \log_7 5$;

в) $\log_9 x = \dfrac{1}{2}\log_9 3 + \dfrac{2}{3}\log_9 5 - \dfrac{1}{3}\log_9 2$;

г) $\lg x = \lg \dfrac{1}{4} - 2\lg \dfrac{2}{3} + \lg \dfrac{4}{9}$.

173. а) $\log_2 x = \log_4 2$; б) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} 5$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} x = \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\log_4 x = \log_2 3 + \log_2 \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Қимати ифодаро ёбед (174-175):

174. а) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$; б) $9^{\log_3 \sqrt{5}}$; в) $2^{\log_4 9}$; г) $7^{\log_{\sqrt[3]{7}} 3}$.

175. а) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; б) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{343} 7$.

176*. Исбот кунед, ки:

а) $\ell og_{\frac{1}{3}} 5 + \ell og_5 \frac{1}{3} \le -2$; б) $\ell og_4 9 + \ell og_9 4 \ge 2$.

177*. Исбот кунед, ки агар $a > 0, b > 0, c > 0$ ва $a \ne 1$, $b \ne 1$, $c \ne 1$ бошанд, он гоҳ формулаи

$$a^{\ell og_b c} = c^{\ell og_b a}$$

ҷой дорад.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

178. Муодиларо ҳал кунед: $|5 - x| = 2(2x - 5)$.

179. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$-ро ҳисоб кунед, агар x_1 ва x_2 решаҳои муодилаи $3x^2 - 2x - 6 = 0$ бошанд.

180. Функсияи $y = x^2 - 2x + 3$-ро тадқиқ карда графикашро созед.

181. Ифодаи $\left(1 + a^{0,5}\right)^2 - 2a^{0,5}$-ро сода кунед.

182. Ҳисоб кунед: $2\cos\frac{\pi}{6} + tg\frac{\pi}{4}$.

16. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ. ХОСИЯТҲО ВА ГРАФИКИ ОН

Дар б.9-10 график ва хосиятҳои функсияи нишондиҳандагии $y = a^x$ оварда шуда буд. Ин функсия вобастагии байни y-тарафи чапро нисбати тағйирёбии нишондиҳандаи дараҷа x инъикос мекунад. Акнун вобастагии дараҷаро нисбати тағйирёбии қимати функсия меомӯзем.

Агар $y=a^x$ ($a>0$ ва $a\neq 1$) бошад, он гоҳ мувофиқи таърифи логарифм:

$$x=\ell og_a y$$

аст. Ишоратҳои аргумент ва функсияро ҷойиваз карда ҳосил мекунем:

$$y=\ell og_a x \qquad (2$$

Т а ъ р и ф. **Функсияеро, ки бо формулаи (2) муайян мешавад функсияи логарифмии асосаш a меноманд.**

Хосияти функсияи логарифмиро як-як дида мебароем.

1^0. Соҳаи муайянии функсияи логарифмӣ маҷмӯи ададҳои ҳақиқии мусбат $R_+=(0;\infty)$ аст.

Дар ҳақиқат, ифодаи $\ell og_a x$ барои ҳар гуна адади мусбати ҳақиқии x қимати ягона дорад ва муайян нест, агар $x\leq 0$ бошад.

2^0. Соҳаи қиматҳои функсия маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty;\infty)$ мебошад.

Ин аз он бармеояд, ки муодилаи $\ell og_a x=y$ барои ҳар гуна адади ҳақиқии y танҳо як решаи $x=a^y$-ро дорост.

3^0. Азбаски функсия танҳо барои ададҳои мусбат муайян аст пас вай на даврӣ, на ҷуфт ва на тоқ аст.

4^0. Функсияи логарифмӣ қиматҳои хурдтарин ва калонтарин надорад, чунки соҳаи қиматҳояш тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

5^0. Нуқтаи буриши графики функсияи логарифмӣ бо тири абсисса нуқтаи (1;0) аст. Координатаҳои ин нуқта аз асоси функсия вобастагӣ надоранд, чунки решаи муодилаи $\ell og_a x=0$ барои ҳар гуна $a>0$ ба воҳид баробар аст. Нуқтаи нул ба соҳаи муайянии функсия тааллуқ надорад, бинобар ин график тири ординатаро намебурад.

6^0. Агар $a>1$ бошад, он гоҳ қиматҳои функсияи логарифмӣ дар фосилаи (0; 1) манфӣ ва дар фосилаи $(1;\infty)$ мусбат мебошанд. Ҳангоми $0<a<1$ будан, қиматҳои функсияи логарифмӣ дар фосилаи (0; 1) мусбат ва дар фосилаи $(1;\infty)$ манфианд.

Дар ҳақиқат, бигузор $a>1$ ва $x>1$ мебошанд. Исбот мекунем, ки дар ин ҳолат қиматҳои функсияи логарифмӣ мусбат ҳастанд.

Баръаксашро фарз мекунем: Бигузор чунин қимати x, $x>1$ вуҷуд дошта бошад, ки $\ell og_a x = y \leq 0$. Аз ин ҷо ва аз хосиятҳои функсияи нишондиҳандагӣ бо асоси $a>1$ бармеояд, ки $a^y \leq a^0 = 1$ аст. Аз тарафи дигар, мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ бояд $a^y = a^{\ell og_a x} = x$ шавад. Азбаски $x>1$ аст, пас $a^y > 1$. Зиддиятро ҳосил кардаем. Ин нишон медиҳад, ки фарзи кардаамон нодуруст будааст.

Ҳолатҳои $a>1$ ва $x<1$; $0<a<1$ ва $x>1$; $0<a<1$ ва $x<1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешаванд.

7^0. Функсияи логарифмӣ дар тамоми соҳаи муайяниаш ҳангоми $a>1$ будан меафзояд (афзуншаванда аст) ва ҳангоми $0<a<1$ будан кам мешавад (камшаванда аст).

Дар ҳақиқат, бигузор $0<x_1<x_2$ ва $a>1$ буда, $y_1 = \ell og_a x_1$, $y_2 = \ell og_a x_2$ аст. Аз таърифи логарифм бармеояд, ки

$$a^{y_1} = x_1 < x_2 = a^{y_2}, \text{ яъне } a^{y_1} < a^{y_2}.$$

Нобаробарии мазкур ва хосияти афзуншаванда будани функсияи нишондиҳандагии асосаш $a>1$-ро истифода карда ҳосил мекунем:

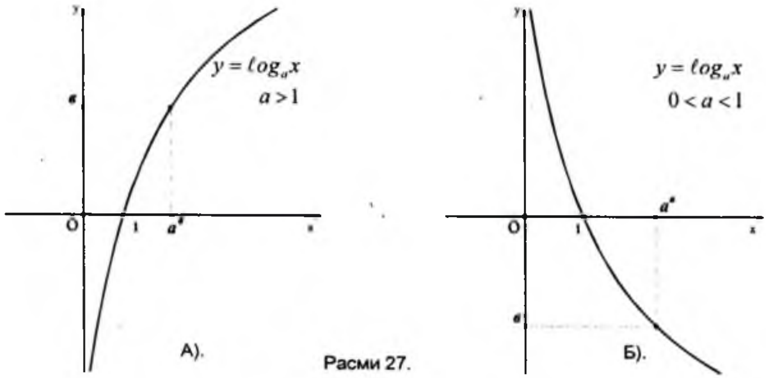
$$y_1 < y_2.$$

Аз ин ҷо афзуншавандагии функсияи логарифмӣ ҳангоми $a>1$ будан бармеояд.

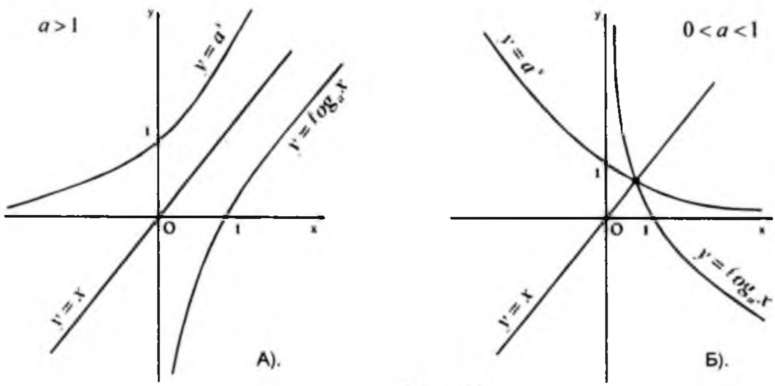
Ҳолати $0<a<1$ айнан ҳамин тавр муоина карда мешавад.

Акнун ба хосиятҳои 1^0 - 7^0 такя карда функсияи $y = \ell og_a x$-ро ҳангоми $a>0$ будан (расми 27, А) ва ҳангоми $0<x<1$ будан (расми 27, Б) схемавӣ месозем.

Агар графикҳои функсияҳои $y = a^x$ ва $y = \ell og_a x$-ро дар як системаи координатавӣ схемавӣ кашем (расми 28), он гоҳ пайхас кардан мумкин аст, ки онҳо нисбат ба хати рости $y = x$ симметрӣ мебошанд. Ин тасдиқро қотеъан исбот кардан мумкин аст (исбот аз доираи математикаи мактабӣ берун аст).



Расми 27.



Расми 28.

Акнун татбиқи хосиятҳои функсияи логарифмиро дар ҳалли чанд мисол дида мебароем.

М и с о л и 1. Соҳаи муайянии функсияи $y = \ell og_4(2-5x)$-ро меёбем.

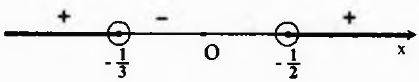
Соҳаи муайянии функсияи логарифмӣ $R_+ = (0; \infty)$ аст. Бинобар ин функсияи мазкур танҳо барои ҳамон қиматҳои аргументи x муайян мебошад, ки дар онҳо $2-5x>0$ аст, яъне ҳангоми $x<0,4$ будан. Пас фосилаи $(-\infty; 0,4)$ соҳаи муайянии функсия аст.

Мисоли 2. Соҳаи муайянии функсияи $f(x)=\ell og_2(3-2x-x^2)$-ро меёбем.

Мулоҳизаҳои дар ҳалли мисоли 1 гузаронидаро такрор намуда, ба хулоса меоем, ки функсия барои ҳамон қиматҳои x муайян аст, ки дар онҳо $3-2x-x^2>0$ мебошад. Ин нобаробариро ҳал мекунем. Решаҳои муодилаи $3-2x-x^2=0$-ро ёфта, ифодаи квадратии $3-2x-x^2$-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем: $3-2x-x^2 =(3+x)(1-x)$. Ҳалли нобаробарии $(3+x)(1-x)>0$ фосилаи (-3; 1) аст.

Инак, соҳаи муайянии функсияи мазкур фосилаи (-3; 1) будааст.

Мисоли 3. Соҳаи муайянии функсияи $f(x)=\ell og_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x+1}{4x-2}$-ро меёбем.



Расми 29.

Нобаробарии $\dfrac{3x+1}{4x-2}>0$-ро бо методи фосилаҳо ҳал намуда (расми 29) ба натиҷа меоем, ки соҳаи муайянии функсия аз якҷояшавии фосилаҳои $(-\infty;\ -\frac{1}{3})$ ва $(\frac{1}{2};\ +\infty)$ иборат аст. Ҷавоб $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Мисоли 4. Ададҳои зеринро муқоиса мекунем: а) $\ell og_4 5$ ва $\ell og_4 7$; б) $\ell og_{\frac{1}{4}} 5$ ва $\ell og_{\frac{1}{4}} 7$; в) $\ell og_2 9$ ва $\ell og_3 15$.

а) функсияи логарифмии асосаш аз 1 калон дар тамоми хати рост афзуншаванда мебошад. Азбаски 7>5 аст, пас $\ell og_4 7>\ell og_4 5$ мебошад.

б) дар ҳолати мазкур асоси логарифм аз 1 хурд аст. Функсияи $y=\ell og_{\frac{1}{4}} x$ камшаванда аст, пас $\ell og_{\frac{1}{4}} 7<\ell og_{\frac{1}{4}} 5$.

в) мебинем, ки $9 > 8 = 2^3$ аст. Аз ҳамин сабаб $\ell og_2 9>\ell og_2 2^3$ ё $\ell og_2 9>3$ мебошад. Аз тарафи дигар, $15 < 27 = 3^3$, пас $\ell og_3 15<3$. инак, $\ell og_3 15<\ell og_2 9$ мебошад.

?

1. Хосиятҳои функсияи логарифмиро як-як номбар намоед. **2.** Хосияти 6^0-и функсияро ҳангоми $0 < a < 1$ ва $x < 1$ будан исбот намоед. **3.** Исботи хосияти 7^0-ро ҳангоми $0 < a < 1$ будан оред. **4.** Оё функсияи логарифмӣ каниш дошта метавонад?

---

183. Хосиятҳои функсияи зеринро номбар кунед ва графикашро созед:

а) $y = \ell og_2 x$; б) $y = \ell og_{\frac{1}{3}} x$; в) $y = \ell og_4 x$; г) $y = \ell og_{\frac{1}{5}} x$.

Соҳаи муайянии функсияро ёбед (184-185):

184. а) $\ell og_\pi (3-2x)$; б) $\ell og_4 (16-x^2)$;

в) $\ell og_{\frac{1}{3}} (-\sqrt{x}+3)$; г) $\ell og_7 (1-2x)$.

185. а) $\ell og_{0,8} \dfrac{4x-2}{5x+7}$; б) $\ell og_{\sqrt{2}} (3-2x-x^2)$;

в) $\ell og_{2,5} \dfrac{x-1}{2-3x}$; г) $\ell og_3 (-x+x^2)$.

186. а) $\ell og_{\frac{1}{2}} \sin x$; б) $\ell og_4 (2^x - 1)$;

в) $\ell og_{\frac{1}{4}} \cos x$; г) $\ell g(1-5^x)$.

Ададҳоро муқоиса намоед (187-188):

187. а) $\ell og_3 5$ *ва* $\ell og_3 7$; б) $\ell og_{\frac{2}{3}} 12$ *ва* $\ell og_{\frac{2}{3}} 15$;

в) $\ell og_8 \dfrac{5}{7}$ *ва* $\ell og_8 \dfrac{3}{7}$; г) $\ell og_{0,6} \dfrac{6}{11}$ *ва* $\ell og_{0,6} \dfrac{8}{11}$.

188. а) $\ell og_2 12$ *ва* $\ell og_5 30$; б) $\ell og_3 2$ *ва* $\ell og_4 0,2$;

в) $\ell og_3 5$ *ва* $\ell og_7 4$; г) $\ell og_3 10$ *ва* $\ell og_7 46$;

д) $\ell og_7 3$ *ва* $\ell og_5 9$; е) $\ell og_{11} 7$ *ва* $\ell og_{13} 19$.

189. Адади зеринро бо як муқоиса кунед:

а) $\ell og_\pi 3,1$; б) $\ell og_6 8,2$; в) $\ell g 2,9$; г) $\ell og_{0,2} 0,7$.

190. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\log_2(2\sin\frac{\pi}{12})+\log_2\cos\frac{\pi}{12}$; б) $\log_3(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4})+\log_3(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16})$;

в) $\lg tg10+\lg ctg10$ г) $\log_\pi(5+2\sqrt{6})+\log_\pi(5-2\sqrt{6})$.

191. Аз баробарӣ x -ро ёбед:

а) $\log_2 x=2\log_4 6-\log_4 18$; б) $\log_3 x=\log_2 6-2\log_2 4\sqrt{6}$;

в) $\log_5 x=\frac{1}{2}\log_3 144+\log_3 0{,}75$; г) $\log_\pi x=2\log_{0,1}5+\log_{0,1}4$.

192. Қиматҳои хурдтарин ва калонтарини функсияи

а) $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$ -ро дар порчаи $\left[\frac{1}{16};2\right]$;

б) $f(x)=\log_2 x$ -ро дар порчаи $[1;4]$

ёбед.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

193. Муодиларо ҳал намоед:

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5(\sqrt{2})^{x+\sqrt{x^2-4}-2}=6.$$

194*. Нобаробариро ҳал кунед:

$$\frac{1}{x-1}>\frac{2}{2-x}.$$

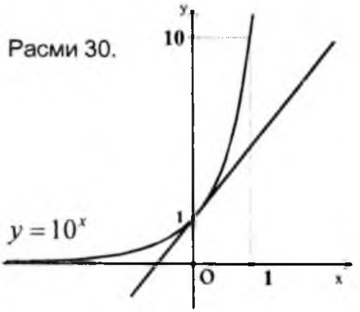
195. Миқдори китобҳо дар як раф нисбат ба дигараш 2 маротиба кам аст. Агар аз рафи якум 6 китобро гирем ва дар рафи дуюм 8 китоб монем, он гоҳ адади китобҳо дар рафи якум нисбат ба рафи дуюм 7 маротиба кам мешавад. Дар ҳар як раф чанд китоб ҳаст?

196. Ҳосилаи функсияи $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ -ро ёбед.

197. ХКҮ - хурдтарин каратнокии умумии ададҳои 18 ва 14-ро ёбед.

17. АДАДИ e. ЛОГАРИФМИ НАТУРАЛӢ

Расми 30.



Функсияи $y=10^x$-ро дида мебароем. Ин функсия афзуншаванда буда, хати каҷи яклухт аст (расми 30). Аз афзуншавии функсия бармеояд, ки агар вай ҳосила дошта бошад, пас ҳосилаи он барои ҳамаи қиматҳои аргумент адади мусбат аст.

Фарзияи зеринро, ки исботаш оянда (дар б.21) оварда мешавад, бе исбот қабул мекунем: *Функсияи* 10^x *дар ҳамаи нуқтаҳои тири ададӣ ҳосилаи мусбат* дорад. Ҳосилаи ин функсияро дар нуқтаи $x=0$ бо $\frac{1}{M}$ ишорат мекунем.

Чӣ тавре медонем, ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 ададест, ки ба он нибати

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ҳангоми ба нул майл кардани Δx майл мекунад. Ҳамин тариқ,

$$\frac{10^{0+\Delta x}-10^0}{\Delta x}=\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to\frac{1}{M} \text{ ҳангоми } \Delta x\to 0.$$

Ҳисоб карда шудааст, ки қимати тақрибии адади доимии M зерин аст: $M=0{,}4343...$

Таърифи 1. **Адади 10^M адади e номида мешавад.**

Ҳамин тариқ, $e=10^M$. Аз ин ҷо $M=\ell ge$. Исбот карда шудааст, ки адади e адади иррационалӣ мебошад. Яъне, онро дар намуди касри даҳии даврии беохир ё дар намуди $\frac{m}{n}$, ки m адади бутун ва n натуралӣ мебошад, тасвир кардан мумкин нест. То ин замон бо ёрии компютерҳо зиёда аз дуним ҳазор рақами даҳии адади e ёфта шудааст. Аввалин рақамҳои ин адад чунинанд:

$$e=2{,}718281828459045...$$

Ҳангоми ҳисоббаробариҳо (вобаста ба саҳеҳии зарурии натиҷа) $e = 2{,}72$ ё $e = 2{,}718$ ва ё $e = 2{,}7183$ қабул мекунанд.

Функсияи нишондиҳандагии асосаш e-ро, яъне $y = e^x$-ро баъзан *экспонента* ҳам мегӯянд.

Э з о ҳ. Таърифи аниқи адади e чунин аст: e ададест, ки ба он ифодаи $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ҳангоми ба беохир майл кардани n майл мекунад. Исботи ин тасдиқ аз доираи математикаи мактабӣ берун аст.

Адади e мусбат ва ба 1 баробар нест. Барои ҳамин логарифмҳо аз рӯйи асоси e муайян мебошанд.

Т а ъ р и ф и 2. **Логарифми асосаш e логарифми натуралӣ номида мешавад.**

Ин логарифм бо ℓn ишорат карда мешавад. Ҳамин тариқ, $\ell nb = \ell og_e b$.

?

1. Фарзияеро, ки аз он истифода карда адади e дохил карда шудааст, номбар кунед. **2.** Чӣ гуна логарифмро натуралӣ меноманд?

---

198. Тақрибан ҳисоб кунед (бо саҳеҳии 10^{-3}):

а) e^2; б) $\frac{1}{e}$; в) $\sqrt{e}$; г) $\frac{1}{e^2}$.

199. Қимати ифодаро ёбед:

а) ℓne^2; б) ℓne^{-3}; в) $e^{\ell n4}$; г) $\ell n\frac{1}{\sqrt{e}}$.

200. Ҳисоб кунед:

а) $\frac{2\ell n3}{\ell n45 - \ell n5} \cdot \frac{\ell n4}{\ell n32}$; б) $\frac{\ell n8 - \ell n4}{\ell n8 + \ell n4} \cdot \frac{\ell n3}{\ell n81 - \ell n9}$.

201. Ададҳоро муқоиса кунед:

а) $\ell n\frac{1}{3}$ *ва* $\ell n\frac{1}{2}$; б) $\ell n7$ *ва* $\ell n19$;

в) $-\ell n0{,}1$ *ва* 1; г) $-\ell n11$ *ва* -1.

202. Муодиларо ҳал кунед:

а) $e^{-2x+1}=1$; б) $e^{x^2-2x}=\frac{1}{e}$;

в) $e^{\sqrt{x}-2}=\sqrt{e}$ г) $e^{x^3-x-4}=-1$.

203. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $e^{3x-5}\geq 1$; б) $e^{-x+4}<1$;

в) $e^{2x}+e^{x}\leq 2$ г) $e^{x}-2e^{-x}>-1$.

204*. Нишон диҳед, ки логарифми натуралии адад тақрибан 2,3 маротиба аз логарифми даҳии ҳамин адад зиёд аст.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

205. КТУ- калонтарин тақсимкунандаи умумии ададҳои 18 ва 12-ро ёбед.

206. Ҳисоб кунед: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

207. Ифодаро сода кунед: $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{a}-2b}{\dfrac{b}{a}-1}$.

208. Муодилаи $\cos(1-2x)=-\frac{1}{2}$ - ро ҳал намоед.

209. Ҳалли нобаробарии зеринро ёбед:

$$\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2-2x}\geq 1.$$

§6. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМӢ

18. МУОДИЛАИ ЛОГАРИФМӢ

Муодилаи логарифмӣ гуфта муодилаеро меноманд, ки он дар таҳти аломати логарифм тағйирёбанда дорад. Муодилаи одитарини логарифмӣ муодилаи

$$\ell og_a x=b$$

аст. Аз хосиятҳои функсияи логарифмӣ (ниг. ба б. 16) ё бевосита аз таърифи логарифм бармеояд, ки ин муодила барои ҳар гуна адади ҳуқиқии b ҳал дорад ва ҳаллаш ягона аст. Ин ҳал бо формулаи $x = a^b$ ифода меёбад, яъне бо амали потенсиронӣ ёфта мешавад.

Э з о ҳ. Дар бандҳои пешина, аниқаш дар бандҳои 14-16 мо аллакай бо муодилаи одитарини логарифмӣ вохӯрда будем. Рост, ки бе истифодаи истилоҳи муодилаи логарифмӣ (ниг., масалан, ба машқҳои 154-156, 172-173 ва 191, ё ба исботи хосияти 2^0-и функсияи логарифмӣ дар б. 16).

Барои ҳал кардани муодилаи логарифмии нисбатан мураккаб аз рӯйи хосиятҳои логарифм (ниг. ба б.15) табдилоти айниятӣ гузаронидан лозим меояд. Ин имконият медиҳад, ки аз муодилаи мураккаби логарифмӣ ба муодилаи алгебравии бароямон муқаррарӣ гузарем. Дар айни ҳол ин гузариш боиси васеъ шудани соҳаи қиматҳои имконпазири тағйирёбанда шуда метавонад. Ин васеъшавӣ ба решаҳое оварда метавонад, ки баъзеашон решаҳои муодилаи аввала нестанд. Барои ҳамин ҳангоми ҳалли муодила ҳатман бояд ё соҳаи имконпазири тағйирёбандаи муодила дар ҳар қадами табдилдиҳӣ ба эътибор гирифта шавад, ё бо гузаронидани санҷиш муайян карда шавад, ки решаҳои ёфташудаи муодилаи муқаррарӣ решаҳои муодилаи аввалаанд ё на.

Табдилдиҳиҳо имконият медиҳанд, ки муодилаи аввала ба яке аз намудҳои:

а) $\ell og_a f(x) = b$;   б) $\ell og_a f(x) = \ell og_a g(x)$

оварда шавад. Дар ҳолати а) маҷмӯи қиматҳои имконпазири x бо нобаробарии $f(x) > 0$ муайян шуда, муодила дар ин маҷмӯъ ба муодилаи $f(x) = a^b$ баробарқувва аст. Мувофиқан, дар мавриди б) маҷмӯи қиматҳои имконпазир бо системаи нобаробариҳои $f(x) > 0$ ва $g(x) > 0$ муайян мешавад. Муодила дар маҷмӯъ ба муодилаи $f(x) = g(x)$ баробарқувва аст.

Дар поён ин гуфтаҳоро бо ҳалли муодилаҳои мушаххас равшан мекунем.

М и с о л и 1. Муодилаи $\ell og_2(x+1) + \ell og_2(x-1) = 3$-ро ҳал мекунем. Ҷамъи логарифмҳоро дар қисми чап дар намуди ҳосили зарб тасвир карда муодилаи

$$\ell og_2\left[(x+1)(x-1)\right] = 3 \quad \text{ё ин ки} \quad \ell og_2(x^2-1) = 3$$

-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо мувофиқи таърифи логарифм $x^2 - 1 = 8$. $x_1 = -3$ ва $x_2 = 3$ решаҳои ин муодилаанд. Вале ҳангоми $x=-3$ будан тарафи чапи муодила маъно надорад, чунки барои чунин қимат ҳам $x+1<0$ ва ҳам $x-1<0$ аст. Пас адади $x=-3$ решаи муодилаи квадратӣ буда, решаи муодилаи аввала нест. Ҷ а в о б: 3.

М и с о л и 2. Решаҳои муодилаи

$$\ell og_x(x^2-3x+3)=1$$

-ро меёбем.

Қисми чапи муодила маъно дорад, агар $x>0$, $x\neq 1$ (x асоси логарифм аст) ва $x^2-3x+3>0$ бошад. Аз таърифи логарифм бевосита

$$x^2-3x+3=x$$

бармеояд. Аз ин ҷо $x^2-4x+3=0$. Ададҳои 1 ва 3 решаҳои ин муодилаи квадратианд. Вале $x=1$ решаи муодилаи аввала нест. Ҳангоми $x=3$ будан $x^2-3x+3=3^2-3\cdot 3+3=3>0$ аст. Пас танҳо адади 3 ҳалли муодила аст. Ҷ а в о б: 3.

М и с о л и 3. Муодилаи

$$\ell og_2{}^2 x-\ell og_2 x-2=0$$

-ро ҳал менамоем.

Ҳанӯз дар б.11 (ниг. ба тарзи ҳалли мисоли 4) қайд карда будем, ки агар функсияи номаълумдор дар муодила дар дараҷаҳои гуногун ояд, муодиларо бо дохил кардани тағйирёбандаи нав ҳал кардан мумкин аст. Дар муодилаи мазкур $\ell og_2 x$ чунин функсия мебошад. $t=\ell og_2 x$ ишорат карда ба ҷои муодилаи аввала муодилаи

$$t^2-t-2=0$$

-ро ҳосил мекунем. Ададҳои $t_1=-1$ ва $t_2=2$ решаҳои ин муодилаанд. Акнун қиматҳои матлуби x-ро меёбем:

$$t_1=\ell og_2 x=-1, \qquad x_1=2^{-1}=\frac{1}{2};$$

$$t_2=\ell og_2 x=2, \qquad x_2=2^2=4.$$

Ҳар ду қимати ёфташуда муодиларо қаноат мекунонанд, чунки соҳаи қиматҳои имконпазири ифодаи тарафи чапи муодила ададҳои мусбат аст. Ҷавоб: $\frac{1}{2}$; 4.

М и с о л и 4. Муодилаи $\ell og_{0,6}x + 4\ell og_{\frac{5}{3}}x = 3$ -ро ҳал мекунем.

Дар ҷамъшавандаи дуюм ба логарифми асосаш 0,6 мегузарем.. Барои ин формулаи гузаришро истифода мекунем (ниг. ба хулосаи 2-и б.15):

$$\ell og_{\frac{5}{3}}x = \frac{\ell og_{0,6}x}{\ell og_{0,6}\frac{5}{3}}.$$

Азбаски $\ell og_{0,6}\frac{5}{3} = \ell og_{\frac{3}{5}}\frac{5}{3} = \ell og_{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = -\ell og_{\frac{3}{5}}\frac{3}{5} = -1$ аст, пас $\ell og_{\frac{5}{3}}x = -\ell og_{0,6}x$: Акнун муодилаи додашуда намуди $-3\ell og_{0,6}x = 3$

ё $\ell og_{0,6}x = -1$ мегирад. Аз ин ҷо $x = (0,6)^{-1} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Ҷ а в о б: $1\frac{2}{3}$.

М и с о л и 5. Решаи муодилаи $3^{7-2x} = 5$ -ро меёбем.

Пеш аз ҳал хотирнишон мекунем, ки ин муодила ба ҳамон гурӯҳи муодилаҳо дохил мешавад, ки дар бораашон дар эзоҳи 2-и б.11 сухан ронда будем.

Аз ҳар ду тарафи муодила аз рӯйи асоси 3 логарифм гирифта ҳосил мекунем:

$$\ell og_3 3^{7-2x} = \ell og_3 5 \quad \text{ё} \quad 7 - 2x = \ell og_3 5 .$$

Инак, $x = 3,5 - \frac{1}{2}\ell og_3 5$ аст.

Қайд мекунем, ки ин намуд муодилаҳои нишондиҳандагиро, ки танҳо бо истифодаи таърифи логарифм ҳал мешаванд, ҳанӯз дар б.14 дида баромадан мумкин буд.

?

1. Баробарихоеро, ки хосиятҳои асосии логарифмро ифода мекунанд, нависед. **2.** Чаро муодилаи одитарини логарифмӣ танҳо якто реша дорад. **3.** Бо мисолҳо фаҳмонед, ки ҳангоми табдилдиҳии айниятии ифодаи логарифмӣ соҳаи муайянии ифодаи ҳосил мешудагӣ васеътар буданаш мумкин аст.

Муодиларо ҳал кунед (210-219):

210. а) $8^x = 0{,}4$; б) $(0{,}2)^x = 4$; в) $3^x = 7$ г) $9^x = e$.

211. а) $(0{,}3)^{x-1} = 2$; б) $4^{x^2} = 5$; в) $10^{2x} = 6$ г) $e^{2-5x} = 2$.

212. а) $\ell og_3 x = 2$; б) $\ell og_{0,2} x = -1$; в) $\ell g x = -\frac{1}{2}$ г) $\ell n x = 2$.

213. а) $\ell og_3(2x-1) = 2$; б) $\ell n(x^2+2x+4) = \ell n 7$;

в) $\ell n(4-x) = 0$; г) $\ell og_{\frac{1}{2}}(5-x) = 1$.

214. а) $\ell og_a x = \ell og_a 4 - 2\ell og_a 5$; б) $\ell g x + \ell g(9x+10) = 3$;

в) $\ell og_a x = 2\ell og_a 3 + \ell og_a 2$ г) $\ell g(3x-2) + \ell g 25 = 3$.

215. а) $\dfrac{\ell og_2 x + 1}{\ell og_2(4x-15)} = 2;$ б) $\dfrac{1}{5-\ell g x} + \dfrac{2}{1+\ell g x} = 1;$

в) $\dfrac{\ell g x - 5}{2} + \dfrac{13 - \ell g x}{3} = 2;$ г) $\ell n(16-6x) = 2\ell n x$.

216. а) $\ell og_3^2\, x - 3\ell og_3 x + 2 = 0$; б) $\ell n^2 x + \ell n x - 2 = 0$;

в) $2\ell og_3^2\, x - 7\ell og_3 x + 3 = 0$;

г) $\ell n(x^2-6x+9) = \ell n 3 + \ell n(x+3)$.

217. а) $\ell og_{x-1}(x^2-5x+7) = 1$; б) $\ell og_x(x^2+7x-1) = 2$;

в) $\ell og_7[46 + \ell og_3(x-5)] = 2$; г) $\ell og_2[\ell og_5(4-x)+6] = 3$

218. а) $\ell og_a x = \ell og_{\sqrt{a}} 4 + \ell og_{\frac{1}{a}} 5$; б) $\ell og_9 x + \ell og_3 x = 3$;

в) $2\ell og_2 x + \ell og_{\frac{1}{2}} x = 5$; г) $\ell og_x 2 - \ell og_4 x = -\frac{1}{2}$.

219. а) $\ell og_3(10 - 3^x) = 2 - x$; б) $\ell og_4(2\cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;

в) $x^{\ell gx - 1} = 100$; г) $x^{1 - \frac{\ell gx}{3}} = \sqrt[3]{100}$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

220. Муодиларо ҳал кунед:

$$2^{x+2} + 2^x = 5^x - 5^{x-1}.$$

221. Ифодаро сода кунед:

$$\left(\frac{1}{5}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}\cdot(ab^5)^{-1}.$$

222. Масофаи ду шаҳр 720 км аст. Ду қатора ба пешвози ҳамдигар ҳаракат карда дар миёнаҷойи роҳ бо ҳамдигар вохӯрданд. Маълум аст, ки қатораи дуюм 1 соат пас аз қатораи якум ба роҳ баромада, 4 км/соат тезтар роҳ тай мекард. Суръати ҳар як қатораро ёбед.

223. 0,1% -и адади $(2 - 1\frac{1}{4}) : 0{,}25$ -ро ёбед.

224. Нуқтаҳои критикии функсияи $f(x) = x^4 - 3x^3$ -ро ёбед.

19. НОБАРОБАРИИ ЛОГАРИФМӢ

Нобаробариеро, ки тағйирёбанда дар он дар таҳти аломати логарифм аст, *нобаробарии логарифмӣ* меноманд. Ҳангоми ҳалли чунин нобаробариҳо аз хосияти афзуншавӣ ё камшавии (монотонии) функсияи логарифмӣ истифода мекунем:

а) ҳангоми $a > 1$ будан: агар $0 < x < 1$ бошад, он гоҳ $\ell og_a x < \ell og_a 1$ аст, яъне $\ell og_a x < 0$; агар $x > 1$ бошад, он гоҳ $\ell og_a x > \ell og_a 1$, яъне $\ell og_a x > 0$.

б) ҳангоми $0<a<1$ будан: агар $0<x<1$ бошад, он гоҳ $\ell og_a x>0$ аст; агар $x>1$ бошад, он гоҳ $\ell og_a x<0$ аст.

Мисоли 1. Нобаробарии

$$\ell og_3(2x+1)<\ell og_3 5$$

-ро ҳал мекунем.

Асоси логарифм $a=3>0$ аст. Пас ҳангоми ҷой доштани нобаробарии мазкур нобаробарии

$$2x+1<5$$

ҷой дорад. $x<2$ ҳалли ин нобаробарӣ аст. Вале тағйирёбандаи x бояд чунин бошад, ки ифодаҳои дар нобаробарӣ буда, маъно дошта бошанд. Қисми чапи нобаробарии мазкур маъно дорад, агар $2x+1>0$ ё $x>-\dfrac{1}{2}$ бошад.

Инак, ҳалли нобаробарӣ фосилаи $\left(-\dfrac{1}{2};\ 2\right)$ аст.

Мисоли 2. Ҳалли нобаробарии

$$\ell og_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)>-1$$

-ро меорем.

Азбаски $\dfrac{1}{3}<1$ аст, пас ҳангоми ҷой доштани нобаробарии мазкур ҳатман нобаробарии $x^2+2x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$ ҷой дорад. Инчунин барои маъно доштани ифодаи тарафи чапи нобаробарӣ зарур аст, ки $x^2+2x>0$ бошад. Ҳамин тариқ, нобаробарии додашуда ба системаи нобаробариҳои

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0, \\ x^2+2x>0. \end{cases}$$

баробарқувва аст. Фосилаи (-3;1) ҳалли нобаробарии $x^2+2x-3<0$, фосилаҳои $(-\infty;-2)$ ва $(0;\infty)$ ҳалли нобаробарии $x^2+2x>0$ мебошанд. Қисми умумии ин фосилаҳо фосилаҳои (-3;-2) ва (0;1) мебошанд.

Инак, фосилаҳои (-3;-2) ва (0;1) ҳалли нобаробарии мазкуранд.

?

1. Фаҳмонед, ки чаро нобаробарии $\log_a f(x) < b$ ҳангоми $a > 1$ будан ба нобаробарии $f(x) < a^b$ нобаробарқувва шуда метавонад. Вале нобаробарии $\log_a f(x) > b$ ба нобаробарии $f(x) > a^b$ баробарқувва аст, ҳангоми $a > 1$ будан. **2.** Моҳияти татбиқи методи фосилаҳоро дар ҳалли нобаробариҳо шарҳ диҳед.

Нобаробариро ҳал кунед (225-230).

225. а) $\log_2 x > 1$; б) $\log_{\frac{1}{4}} x < 2$; в) $\log_{0,6} x < 1$; г) $\log_{2,5} x > 2$.

226. а) $\log_3(x-2) < 2$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(2-3x) > -1$;

в) $\log_5(3x-1) > 2$; г) $\log_{\frac{1}{6}}(7x+1) < -2$.

227. а) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$;

б) $\lg(2x-4) \geq \lg(x+1)$;

в) $\log_2(4x-3) \leq \log_2(3x-4)$;

г) $\log_{0,3}(2x+7) < \log_{0,3}(4x-1)$.

228. а) $\log_\pi(x+1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;

б) $\ln x + \ln(x-1) \leq \ln 6$;

в) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$;

г) $\log_{\frac{1}{2}}(8-x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)$.

229. а) $\ell n^2 x - \ell nx \le 0$; б) $\ell og^2_{\frac{1}{5}} x - 3 > 0$;

в) $\ell g^2 x + 3\ell gx > 4$; г) $\ell og^2_5 x - 25 \le 0$.

230. а) $\ell og_2 \cos x < -\dfrac{1}{2}$; б) $|2 - \ell nx| \le 1$;

в) $\ell og_{\frac{1}{2}} \sin 2x > 1$; г) $|3\ell gx - 1| < 2$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

231. Муодилаи $2\sin^2 x = 5\cos x + 2$ -ро ҳал намоед.

232. Муодиларо ҳал кунед: $\ell og_2(5^x + 3) + \ell og_2(5^x - 3) = 4$.

233. Фосилаҳои афзуншавию камшавӣ ва нуқтаҳои экстремуми функсияи $y = -x^2 + 6x - 8$ -ро ёбед.

234. Сода кунед: $\dfrac{27 - 27a + 9a^2 - a^3}{a^2 - 6a + 9}$.

235. Комбайн 4 соат кор карду баъд ба он комбайни дуюм ҳамроҳ шуд. Ҳар ду пас аз ин даравро дар 8 соат ба охир расониданд. Ҳар як комбайн дар алоҳидагӣ даравро дар чанд соат ба охир мерасонд, агар маълум бошад, ки барои ин комбайни дуюм бояд 8 соат зиёд дарав мекард?

20. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ ЛОГАРИФМӢ ВА ОМЕХТА

Барои ҳал кардани системаи муодилаҳои логарифмӣ тарзи маъмули ёфтани ҳалли муодилаҳои логарифмиро истифода карда, системаи муодилаҳои алгебравии муқарририро ҳосил мекунанд. Ин системаро ҳал карда аз байни онҳо ҳалли системаи муодилаҳои логарифмиро ҷудо менамоянд.

Усули умумии ҳалли системаҳои омехта (системаҳое, ки дар таркиби худ ғайри муодилаи логарифмӣ боз муодилаҳои намуди дигарро, масалан, муодилаҳои хаттӣ, квадратӣ, ирратсионалӣ, нишондиҳандагӣ ва ғайраро доранд) низ аз ҳосил кардани системаи муқаррарии алгебравӣ иборат аст.

М и с о л и 1. Системаи

$$\begin{cases} \ell og_2 x - \ell og_2 y = 1, \\ \ell og_2 (xy) = 3 \end{cases}$$

-ро ҳал мекунем.

Муодилаи якуми системаро дар намуди $\ell og_2 \frac{x}{y} = 1$ навишта меёбем: $\frac{x}{y} = 2$ ё $x = 2y$. Аз муодилаи дуюм $xy = 2^3 = 8$. Дар ин ҷо $x = 2y$ гузошта ҳосил мекунем, ки $y = \pm 2$ аст. Аз $x = 2y$ бармеояд, ки $x = \pm 4$. Вале қисми чапи система маъно дорад, агар $x > 0$ ва $y > 0$ бошад. Бо назардошти ин ҳалро меёбем. Ҷ а в о б: (4; 2).

Э з о ҳ. Системаи

$$\begin{cases} \ell og_2 \frac{x}{y} = 1, \\ \ell og_2 (xy) = 3 \end{cases}$$

дуто ҳал дорад: (4; 2) ва (-4; -2). Инро маънидод кунед.

М и с о л и 2. Системаи зеринро ҳал менамоем:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \ell g\sqrt{xy} = 1 + \ell g2. \end{cases}$$

Аз $512 = 2^9$ ва $1 + \ell g2 = \ell g10 + \ell g2 = \ell g(10 \cdot 2) = \ell g20$ истифода карда системаи

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$$

-ро ҳосил мекунем. Агар $\sqrt{x} = u$ ва $\sqrt{y} = \vartheta$ гузорем, он гоҳ ба системаи

$$\begin{cases} u + \vartheta = 9, \\ u \cdot \vartheta = 20 \end{cases}$$

доро мешавем. Дар муодилаи дуюми ин система $u = 9 - \vartheta$ гузошта муодилаи квадратии $\vartheta^2 - 9\vartheta + 20 = 0$-ро соҳиб мешавем. Решаҳои он

$$\vartheta_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-4\cdot 20}}{2}=\frac{9\pm 1}{2}, \quad \vartheta_1=4,\ \vartheta_2=5$$

мебошанд. Аз $u=9-\vartheta$ бармеояд: $u_1=5$, $u_2=4$. Вале $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=\vartheta$ ё $x=u^2$, $y=\vartheta^2$ аст. Пас (25; 16) ва (16;25) ҳалҳои системаи аввалаанд.

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (236-238):

236. а)
$$\begin{cases} \ell og_{\frac{1}{9}}(x+y)=-2, \\ \ell og_5(x-y)=2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \ell og_2 x+\ell og_4 y=4, \\ \ell og_4 x+\ell og_2 y=5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \ell og_2(x-y)=5-\ell og_2(x+y), \\ \dfrac{\ell gx-\ell g4}{\ell gy-\ell g3}=-1; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \ell g(y-x)=\ell g2, \\ \ell og_2 x-4=\ell og_2 3-\ell og_2 y. \end{cases}$$

237. а)
$$\begin{cases} 5^x\cdot 2^y=80, \\ \ell og_{\sqrt{5}}(x+y)=2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=972, \\ \ell og_{\sqrt{3}}(x-y)=2; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81, \\ \ell g\sqrt{xy}=1+\ell g3; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \ell gx-\ell gy=\ell g15-1, \\ 10^{\ell g(3x+2y)}=39. \end{cases}$$

238. а)
$$\begin{cases} x-y=90, \\ \ell gx+\ell gy=3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \ell og_4 x+\ell og_4 y=1+\ell og_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \ell og_4 x-\ell og_2 y=0, \\ x^2-2y^2-8=0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \ell og_4(x+y)=0, \\ (x+14)(x+y)=64. \end{cases}$$

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

239. Ифодаро сода намоед:

$$\left(\frac{a}{5+a}+\frac{5+a}{5-a}\right):\frac{3a+5}{a+5}.$$

240. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 2x+9\ge 6x-5, \\ -\dfrac{x}{2}<-1. \end{cases}$$

241. Велосипедрон аз пункти А ба пункти Б, ки масофаашон 45 км аст равон шуд. Пас аз 30 дақиқа аз паси ӯ велосипедрони дигар ба роҳ баромад. Вай ба пункти Б 15 дақиқа тезтар омада расид. Суръати велосипедрони аввала чанд аст, агар маълум бошад, ки суръати вай нисбати суръати дигарӣ 3 км/соат кам аст?

242*. Муодиларо ҳал кунед: $16^{\log_x 2}=8x$.

243. Айниятро исбот кунед: $\dfrac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha\, tg\alpha$.

§7. ҲОСИЛА ВА ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИЮ ЛОГАРИФМӢ ВА ДАРАҶАГӢ

21. ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Дар б.17 ҳангоми дохил кардани мафҳуми логарифми натуралӣ фарз када будем, ки нисбати афзоиши функсияи $y=10^x$ бар афзоиши аргумент дар нуқтаи $x=0$ ҳангоми ба нол майл кардани афзоиши аргумент ба $\dfrac{1}{M}$ майл мекунад, яъне

$$\frac{10^{0+\Delta x}-10^0}{\Delta x}=\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to\frac{1}{M}, \text{ ҳангоми } \Delta x\to 0. \qquad (3)$$

Инчунин қайд карда будем, ки $M=0{,}4343...$ аст.

Ин фарзия ба тасдиқи дар нуқтаи $x=0$ ҳосила доштани $y=10^x$ ва ба $\frac{1}{M}$ баробар будани он баробарқувва аст. Фарзияро истифода карда ҳосилаи функсияи нишондиҳандагии $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$-ро меёбем. Барои ин аввал ҳосилаи функсияи $y=10^x$-ро дар нуқтаи дилхоҳ ҳисоб мекунем. Нисбати афзоиши ин функсия бар афзоиши аргумент

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\frac{10^{x+\Delta x}-10^x}{\Delta x}=10^x\cdot\frac{10^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

аст ва ҳангоми $\Delta x\to 0$ мувофиқи (3) ба $\frac{1}{M}\cdot 10^x$ майл мекунад. Аз ин мулоҳизаҳо ва аз таърифи ҳосила бармеояд, ки

$$(10^x)'=\frac{1}{M}\cdot 10^x.$$

Барои асоси дилхоҳи $a>0,\ a\neq 1$ мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ (ниг. ба б.14)

$$a^x=10^{\ell g a^x}=10^{x\ell g a}.$$

Пас, мувофиқи қоидаи дифферентсиронии функсияи мураккаб

$$(a^x)'=(10^{\ell g a^x})'=\frac{1}{M}\cdot 10^{x\ell g a}\cdot(x\ell g a)'=\frac{\ell g a}{M}\cdot 10^{x\ell g a}=\frac{\ell g a}{M}a^x.$$

Азбаски $10^M=e$ (ниг. ба таърифи 1-и б.16) аст, пас $M=\ell g e$. Аз рӯйи формулаи гузариш $\frac{\ell g a}{M}=\frac{\ell g a}{\ell g e}=\ell g_e a=\ell n a$, бинобар ин

$$(a^x)'=a^x\ell n a. \tag{4}$$

Т е о р е м а и 1. **Функсияи нишондиҳандагии $y=a^x$ дар ҳар як нуқтаи тири ададӣ ҳосила дорад ва ҳосилаи он бо формулаи (4) ифода карда мешавад.**

Х у л о с а. Функсияи нишондиҳандагӣ дар тамоми нуқтаҳои тири ададӣ бефосила аст, яъне ҳангоми $x\to x_0$ $a^x\to a^{x_0}$.

Ин хулоса аз дифферентсирондашаванда будани функсия ва аз лемма оид ба бефосилагии ҳар гуна функсияи ҳосиладошта бармеояд.

Ҳосилаи функсияи $y=e^x$-ро бевосита аз (4) ҳангоми $a=e$ будан ҳосил каран мумкин аст. Азбаски $\ell ne=1$ аст, пас

$$(e^x)'=e^x. \qquad (5)$$

Яъне **ҳосилаи экспонента e^x ба худаш баробар аст.** Бар замми ин нишон додан мумкин аст, ки ҳар гуна функсияе, ки ҳосилааш ба худаш баробар буда, дар нуқтаи $x=0$ ин ҳосила ба 1 баробар аст, экспонента мебошад.

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияҳои $y=10^x$ ва $y=3^{-5x}$-ро ҳисоб мекунем.

Аз рӯйи формулаи (4)

$$(10^x)'=10^x\ell n10; \quad (3^{-5x})'=3^{-5x}\ell n3\cdot(-5x)'=-5\cdot 3^{-5x}\ell n3.$$

Мисоли 2. Ҳосилаи функсияи $y=e^{2x}$-ро меёбем.

Мувофиқи қоидаи ҳосилаи функсияи мураккаб ва формулаи (5) $(e^{2x})'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$.

Мисоли 3. Функсияҳои $f(x)=(x-1)e^x$-ро оид ба афзуншавӣ (камшавӣ) ва экстремум тадқиқ мекунем.

Ҳосилаи функсияро меёбем:

$$f'(x)=\left[(x-1)e^x\right]'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=e^x+(x-1)e^x=xe^x.$$

Азбаски барои ҳар гуна қимати x $e^x>0$ *аст, пас* аломати ҳосила бо аломати x якхела аст. Яъне дар фосилаи $(0;\infty)$ $f'(x)>0$ буда функсия меафзояд. Дар фосилаи $(-\infty;0)$ $f'(x)<0$ аст, бинобар ин дар ин фосила функсия камшаванда аст. Дар нуқтаи $x=0$ ҳосила аломаташро аз минус ба плюс иваз мекунад, яъне ин нуқта нуқтаи минимум аст: $f_{\min}=f(0)=-1$.

?

1. Фарзияеро, ки аз он истифода карда ҳосилаи функсияи нишондиҳандагӣ ёфта шудааст, номбар кунед. **2.** Чаро функсияи нишондиҳандагӣ барои ҳар гуна қимати аргументаш бефосила аст? **3.** Ҳосилаи экспонента ба чӣ баробар аст?

Ҳосилаи функсияро ёбед (244-246):

244. а) $y=2e^x+3$; б) $y=3x+5e^{-x}$;

в) $y=1-\frac{1}{3}e^x$; г) $y=5e^{-x}+x^2$.

245. а) $y=e^x\sin x$; б) $y=2e^x+3x$;

в) $y=4x^2-4^x$; г) $y=x^2\cdot 3^x$.

246*. а) $y=e^{x^2}\cos\frac{x}{2}$; б) $y=6^{\frac{x}{2}}\cdot tg4x$;

в) $y=\frac{2^x}{1+2^{-x}}$; г) $y=\frac{0,2^{-x}}{x+1}$.

247. Дар нуқтаи абсиссааш x_0 муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ нависед:

а) $f(x)=e^x$, $x_0=0$; б) $f(x)=2^x$, $x_0=1$;

в) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=0$; г) $f(x)=3^{-x}$, $x_0=1$.

248. Функсияро оид ба афзуншавӣ (камшавӣ) ва экстремумҳо тадқиқ намоед:

а) $f(x)=xe^{3x}$; б) $f(x)=x^2\cdot 4^{-x}$;

в) $f(x)=xe^{-x}$; г) $f(x)=x^2\cdot 2^x$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

249. x-ро ёбед: $$\frac{2\frac{1}{3}-1}{4-x:7,5}=3$$

250. Системаро ҳал намоед:

$$\begin{cases}\frac{1+x}{5}-\frac{2x-y}{2}=3y-1,\\ \frac{5y-2}{2}+\frac{4x-5}{6}=8-2x.\end{cases}$$

251. Ҳисоб кунед: $\left(7\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}-5\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2$.

252. Исбот кунед, ки $\frac{a^2}{1+a^4}\le\frac{1}{2}$ аст (a - адади дилхоҳ).

253. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$8^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$$

22. ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ

Т е о р е м а и 2. **Функсияи $\frac{a^x}{\ln a}$ барои функсияи $y=a^x$ дар тири ададии $R=(-\infty;\infty)$ функсияи ибтидоӣ аст.**

Дар ҳақиқат, ℓna адади доимӣ аст, барои ҳамин мувофиқи формулаи (4) барои ҳар гуна қимати x

$$\left(\frac{a^x}{\ell na}\right)'=\frac{1}{\ell na}\left(a^x\right)'=\frac{1}{\ell na}\cdot a^x\ell na=a^x.$$

Ин баробарӣ нишон медиҳад, ки функсияи $\frac{a^x}{\ell na}$ барои a^x функсияи ибтидоӣ аст.

Ҳамин тариқ, мувофиқи теоремаи 6.2 намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $y=a^x$ чунин аст:

$$F(x)=\frac{a^x}{\ell na}+C,$$

ки ин ҷо C доимии дилхоҳ мебошад.

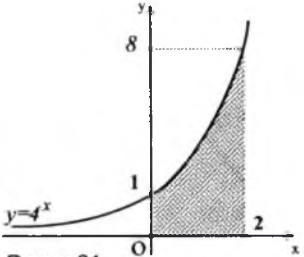
Э з о ҳ. Аз баробарии (5): $(e^x)'=e^x$ бармеояд, ки функсияи e^x+C **намуди умумии функсияи ибтидоии функсияи e^x аст.**

М и с о л и 1. Функсияи ибтидоии функсияи зеринро меёбем:
а) $f(x)=3^x$; б) $g(x)=4\cdot 2^x$; в) $h(x)=2e^{5x}-10\cdot 0{,}7^x$.

Аз теоремаи 2 ва қоидаҳои ёфтани функсияи ибтидоӣ (6.4) истифода мекунем:

а) $F(x)=\dfrac{3^x}{\ell n3}+C$; б) $G(x)=4\cdot\dfrac{2^x}{\ell n2}+C=\dfrac{2^{x+2}}{\ell n2}+C$.

в) $H(x)=\dfrac{2e^{5x}}{5}-10\cdot\dfrac{0{,}7^x}{\ell n0{,}7}+C$.



Расми 31.

М и с о л и 2. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y=4^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ маҳдудбударо меёбем.

Ҳ а л. Графикҳоро схемавӣ кашида, мебинем, ки фигураи додашуда трапетсияи каҷхаттаи дар расми 31 тасвир кардашуда мебошад. Бинобар ин S - масоҳати онро аз рӯйи формулаи масоҳати трапетсияи каҷхатта меёбем.

$$S=\int_0^2 4^x dx=\frac{4^x}{\ell n4}\Bigg|_0^2=\frac{16}{\ell n4}-\frac{1}{\ell n4}=\frac{15}{\ell n4}.$$

254. Интегралро ҳисоб кунед:

а) $\int_0^1 0{,}5e^x dx$; б) $\int_0^1 e^{3x}dx$; в) $\int_2^4 2^x dx$; г) $\int_{0,5}^2 4^x dx$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ёбед (255-256):

255. а) $y=e^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$;

б) $y=2^x$, $y=4^x$, $x=1$;

в) $y=3^x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;

г) $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$.

256. а) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y=2$, $x=0$;

б) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=e$;

в) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $x=-1$, $y=1$;

г) $y=e^{4x}$, $x=1$, $y=1$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

257. Муодиларо ҳал кунед: $\sin 3x \cos 3x = -\frac{1}{4}$.

258. Чор адад, ки се тараф ва периметри секунҷаро ифода мекунанд, прогрессияи арифметикиро ташкил карда метавонанд?

259. Бригадаи каргарон бояд дар мӯҳлати муайян 260 детал тайёр мекард. Ҳар рӯз аз миқдори зарурӣ 6-деталӣ зиёд истеҳсол карда, бригада се рӯз пеш аз мӯҳлат супоришро иҷро намуд. Бригада чанд рӯз кор кардааст? Агар бригада супоришро барзиёд иҷро намекард, вай бояд ҳар рӯз чанддеталӣ истеҳсол менамуд?

260. Соҳаеро, ки дар ҳамворӣ бо нобаробарии зерин муайян меша-вад, тасвир кунед:

а) $x^2+y^2 \le 9$ б) $x+y \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

261. Ҳисоб кунед: $2\frac{3}{7}-3\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}\cdot 2$.

262. Аз ифода аз рӯйи асоси дилхоҳ логарифм гиред:

а) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a}}}{2ab}$; б) $\left(\frac{2}{3}c^{\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

23. ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ

Ҳосилаи функсияи логарифми натуралии $y=\ell nx$-ро ҳисоб мекунем. Исбот мекунем, ки барои дилхоҳ x-и калон аз нул формулаи

$$(\ell nx)'=\frac{1}{x} \qquad (6)$$

дуруст аст. Мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ барои ҳар гуна $x>0$ $x=e^{\ell nx}$. Пас, ҳангоми $x>0$ будан ҳосилаҳои функсияҳои $y=x$ ва $y=e^{\ell nx}$ ба ҳам баробаранд, яъне

$$(x)'=(e^{\ell nx})' \qquad (7)$$

аст. Маълум, ки $(x)'=1$. Ҳосилаи $e^{\ell nx}$-ро аз рӯйи қоидаи ёфтан ҳосилаи функсияи мураккаб ва формулаи (5)-и б.21 ҳисоб мекунем:

$$(e^{\ell nx})'=e^{\ell nx}\cdot(\ell nx)'=x(\ell nx)'.$$

Ҳамин тариқ, аз ин ҷо ва аз (7) бармеояд, ки $1=x(\ell nx)'$. Ва да охир аз ин ҷо баробарии (6) ҳосил мешавад.

Инак, функсияи логарифми натуралӣ дар $R_+=(0;\infty)$ доро ҳосила буда, ҳосилааш бо формулаи (6) ҳисоб карда мешавад. И функсия дар R_+ ҳамчунин функсияи дифферентсиронидашаванд бефосила аст.

Э з о ҳ и 1. Ҳосилаи функсияи $y=\ell og_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ аз рӯй формулаи

$$(\ell og_a x)=\frac{1}{x\ell na} \qquad (8)$$

ҳисоб карда мешавад. Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи гузариш $\ell og_a x=\dfrac{\ell nx}{\ell na}$. Аз ин ҷо $(\ell og_a x)'=\dfrac{1}{\ell na}(\ell nx)'=\dfrac{1}{x\ell na}$.

Э з о ҳ и 2. Функсияи $F(x)=x(\ell nx-1)+C$ барои функсия $y=\ell nx$ функсияи ибтидоӣ мебошад (тарзи ҳосил кардани $F(x)$ а доираи математикаи мактабӣ берун аст). Дар ҳақиқат,

$$F'(x)=\left[x(\ell nx-1)+C\right]'=x'(\ell nx-1)+x(\ell nx-1)'+C'=$$

$$=\ell nx-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ell nx.$$

Мувофиқан намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсия $y=\ell og_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ чунин аст:

$$F(x)=\frac{x(\ell nx-1)}{\ell na}+C.$$

М и с о л и 1. Ҳосилаи функсияи зеринро меёбем:

а) $y=\ell n(4+3x)$; б) $y=\ell og_3(x^2+1)$.

Мувофиқи формулаҳои (6) ва (8), инчунин қоидаҳои ҳосилагирӣ дорем:

а) $y'=\left[\ell n(4+3x)\right]'=\dfrac{1}{4+3x}\cdot(4+3x)'=\dfrac{3}{4+3x}$;

б) $y' = \left[\ell og_3(x^2+1)\right]' = \dfrac{\left[\ell n(x^2+1)\right]'}{\ell n3} = \dfrac{1}{(x^2+1)\ell n3}\cdot(x^2+1)' = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ell n3}$.

М и с о л и 2. Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x) = \ell nx + 3$ дар нуқтаи абсиссааш $x_0 = 1$ менависем.

Чуноне ки медонем, муодилаи расанда дар нуқтаи $x = a$ ба графики функсияи $y = f(x)$ намуди зеринро дорад:

$$y - f(x) = f'(a)(x-a).$$

Дорем $f'(x) = (\ell nx + 3)' = \dfrac{1}{x}$, пас $f'(1) = 1$, инчунин $f(1) = \ell n1 + 3 = 3$. Ҳамин тариқ, муодилаи расандаи матлуб

$$y - 3 = x - 1 \quad ё \quad y - x - 2 = 0$$

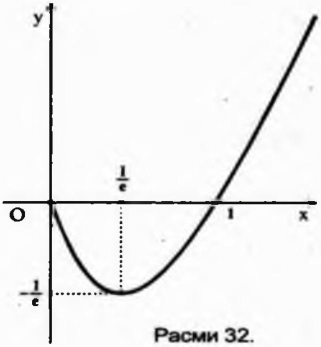
аст.

М и с о л и 3. Функсияи $f(x) = x\ell nx$-ро оид ба афзуншавӣ, камшавӣ ва экстремум тадқиқ намуда графикашро схемавӣ месозем.

Функсия ҳангоми $x > 0$ будан муайян аст. Ҳосиларо меёбем:

$$f'(x) = \ell nx + 1.$$

Нобаробарии $f'(x) > 0$ ё $\ell nx + 1 > 0$ ҳангоми $x > e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ будан



Расми 32.

ҷой дорад. Яъне, дар $\left(\dfrac{1}{e}; \infty\right)$ функсия меафзояд; дар $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$ ҳосила манфӣ аст, бинобар ин дар фосилаи $\left(0; \dfrac{1}{e}\right)$ функсия кам мешавад. Пас, нуқтаи $x_0 = \dfrac{1}{e}$ нуқтаи минимум аст:

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ell n\frac{1}{e} = \frac{1}{e}(\ell n1 - \ell ne) = \frac{1}{e}(0-1) = -\frac{1}{e}.$$

Графикро схемавӣ аз баробариҳои $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-e^{-1}$ $f(1)=0$ истифода карда мекашем (расми 32).

?

1. Формулаеро, ки бо он ҳосилаи функсияи логарифмӣ ифода мешавад, нависед. **2.** Чаро функсияи логарифмӣ дар маҷмӯи R_+ бефосила аст?

Ҳосилаи функсияро ёбед (263-265):

263. а) $y=\ell n(2+5x)$; б) $y=\ell og_{0,2}(x+4)$;

в) $y=\ell g\,x-\sin x$; г) $y=\ell og_3(2x+1)$.

264. а) $y=x\bullet\ell n\,x$; б) $y=x^2\ell n\,x$;

в) $y=\dfrac{\ell n\,x}{x}$; г) $y=\dfrac{x}{\ell n\,x}$.

265. а) $y=\dfrac{\ell n(x+3)}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{x}{\ell n(1-x)}$;

в) $y=\dfrac{x^2}{\ell n 3x}$; г) $y=\dfrac{\ell og_4 x}{x+1}$.

266. Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи абсиссааш x_0 нависед:

а) $f(x)=\ell n(x+1),\ x_0=0$; б) $f(x)=2\ell n\,x+1,\ x_0=1$;

в) $f(x)=3\ell n\,x,\ x_0=\dfrac{1}{e}$; г) $f(x)=\ell og_2(x+1),\ x_0=0$.

267. Функсияи зеринро оид ба афзуншавӣ, камшавӣ ва экстремум тадқиқ кунед:

а) $f(x)=\sqrt{x}\,\ell n\,x$; б) $f(x)=\dfrac{\ell n\,x}{x}$;

в) $f(x)=x-\ell n\,x$; г) $f(x)=x^2\ell n\,x$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

268. Масоҳати фигураеро, ки бо хатҳои $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ маҳдуд аст, ёбед.

269. Муодилаи нишондиҳандагиро ҳал намоед:

$$2^{x^2+x-0,5}=2\sqrt{2}.$$

270. Ҳосилаи функсияи $y=3^{tgx}$ -ро ёбед.

271. Ифодаи

$$\frac{x-9x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{1}{2}}}$$

-ро сода кунед.

272. Фарқи ду адад ба 5 баробар буда, ҳосили зарби онҳо 84 аст. Ин ададҳоро ёбед.

24. ҲОСИЛА ВА ФУНКСИЯИ ИБТИДОИИ ФУНКСИЯИ ДАРАҶАГӢ

Ҳосила ва функсияи ибтидоии функсияи дараҷагии $y=x^{\alpha}$-ро ҳангоми ратсионалӣ будани α медонем (масалан, ниг. ба ҷадвали функсияҳои ибтидоӣ, ки дар б.3 омадааст). Онҳоро беисбот оварда, дар ҳалли чандин масъалаҳо истифода кардаем. (Масалан, ниг. ба мисоли 7-и б. 4.)

Акнун дараҷаи α-ро адади дилхоҳи ҳақиқӣ ҳисоб карда, формулаҳои ҳосила ва намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи дараҷагиро комилан исбот менамоем.

I. Ҳосилаи функсияи дараҷагӣ дар $R_+=(0;\infty)$ бо формулаи

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \qquad (9)$$

ифода карда мешавад.

Дар ҳақиқат, азбаски мувофиқи айнияти асосии логарифмӣ $x^{\ell nx}=x\ (x>0)$ аст, пас $x^{\alpha}=(e^{\ell nx})^{\alpha}=e^{\alpha\ell nx}$. Аз ин ҷо

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ell n x})' = e^{\alpha \ell n x} \cdot (\alpha \ell n x)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Формулаи (9) исбот шуд. Формула нишон медиҳад, ки ҳосилаи функсияи дараҷагӣ низ дараҷагӣ аст.

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияи:

а) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2}$; б) $y = x^{-\sqrt{10}}$

-ро меёбем.

Мувофиқи формулаи (9) дорем:

а) $y' = \left[\left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2}\right]' = \ell n 2 \left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2 - 1} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' = \frac{\ell n 2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\ell n 2 - 1}$;

б) $y' = \left(x^{-\sqrt{10}}\right)' = -\sqrt{10}\, x^{-\sqrt{10}-1} = -\frac{\sqrt{10}}{x^{1+\sqrt{10}}}$.

II. Ба ёфтани намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи дараҷагӣ шурӯъ мекунем. Ду ҳолатро дида мебароем.

А) $\alpha \neq -1$. Барои ин ҳолат функсияҳои матлуб бо формулаи

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ифода мешаванд.

Дар ҳақиқат, мувофиқи формулаи (9)

$$F'(x) = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' + C' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha}.$$

Б) $\alpha = -1$. Формулаи (6) нишон медиҳад, ки барои функсияи $y = \frac{1}{x}$ дар фосилаи $(0;\infty)$ намуди умумии функсияи ибтидоӣ $\ell n x + C$ аст.

Функсияи $\frac{1}{x}$ дар фосилаи $(-\infty;0)$ низ функсияи ибтидоӣ дорад, ки ин функсияи $\ell n(-x)$ мебошад. Дар ҳақиқат,

$$(\ell n(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Ҳамин тариқ, намуди умумии функсияҳои ибтидоӣ барои $y=\dfrac{1}{x}$ ҳангоми $x>0$ будан $\ell n x+C$ ва ҳангоми $x<0$ будан $\ell n(-x)+C$ аст. Таърифи қимати мутлақро барои ифодаи x истифода карда ба хулоса меоем, ки ҳангоми $x\neq 0$ будан намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $\dfrac{1}{x}$ чунин аст:

$$F(x)=\ell n|x|+C .$$

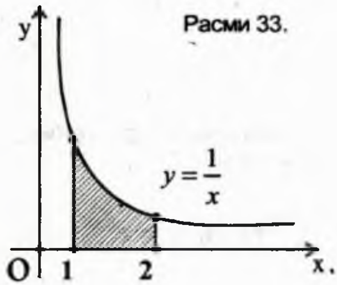
Мисоли 2. Функсияи ибтидоиро барои функсияи $y=\dfrac{1}{2x+3}$ меёбем. (Дар назар дошта мешавад, ки соҳаи муайянии ин функсия фосилаест, ки он нуқтаи $x=-\dfrac{3}{2}$-ро дарбар намегирад.)

Ба осонӣ дидан мумкин аст, ки барои ҳар гуна нуқтаи фосилаи муайянӣ ва барои адади дилхоҳи C функсияи

$$F(x)=\frac{1}{2}\ell n|2x+3|+C$$

функсияи ибтидоӣ аст.

Умуман, барои функсияи $y=\dfrac{1}{ax+b}$ функсияи $F(x)=\dfrac{1}{a}\ell n|ax+b|+C$ функсияи ибтидоӣ мебошад, агар $x\neq-\dfrac{b}{a}$ бошад.



Расми 33.

Мисоли 3. Масоҳати фигураи бо хатҳои $y=\dfrac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$ ва $x=2$ маҳдудбударо меёбем (расми 33).

Аз рӯйи формулаи масоҳати трапетсияи каҷхатта меёбем:

$$S=\int_1^2\frac{dx}{x}=\ell n|x|\Big|_1^2=\ell n2-\ell n1=\ell n2 .$$

?

1. Формулаи ҳосилаи функсияи дараҷагиро истифода карда нишон диҳед, ки вай ҳангоми $\alpha > 0$ будан афзуншаванда ва ҳангоми $\alpha < 0$ будан камшаванда аст. **2.** Маълум, ки функсияи дараҷагии $y = x^{\alpha}$ дар тамоми тири ададӣ бефосила аст. Нишон диҳед, ки $\alpha > -1$ мебошад.

Ҳосилаи функсияро ёбед (273-274):

273. а) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; б) $y = x^{\sqrt{6}}$; в) $y = x^{\frac{4}{5}}$; г) $y = x^{-\sqrt{7}}$.

274. а) $y = x^{-e}$; б) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\ln 4}$; в) $y = (3x)^{\ln 2}$; г) $y = x^{\pi}$.

Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияро ёбед (275-276):

275. а) $y = \frac{1}{2}x^{\sqrt{2}}$; б) $y = x^{3\sqrt{2}}$; в) $y = x^{e}$; г) $y = -\frac{1}{5}x^{-\sqrt{5}}$.

276. а) $y = \frac{2}{x+3}$; б) $y = \frac{1}{x+1}$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+4}$.

277. Интеґралҳоро ҳисоб кунед:

а) $\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx$; б) $\int_1^2 \frac{2dx}{x^{\frac{1}{2}}}$; в) $\int_0^1 6x^{\frac{1}{5}}dx$; г) $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ҳисоб кунед (278-279):

278. а) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = 0$, $x = 1$; б) $y = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$;

в) $y = x^{0,4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$;

г). $y = x^{-0,2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$.

279. а) $y = \frac{2}{x} + 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

б) $y=-\dfrac{3}{x}$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$;

в) $y=\dfrac{1}{2x}$, $y=0$, $x=\dfrac{1}{4}$, $x=2$;

г) $y=4-\dfrac{1}{x}$, $y=0$, $x=-4$, $x=-2$.

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

280. Соҳаи муайянии функсияи $y=\ell n(x^2+x+6)$-ро ёбед.

281. x-ро ёбед: $\ell og_3 x=\dfrac{1}{2}\ell og_3 16+3\ell og_3 0{,}5$.

282. Барои 4 қалам ва 3 дафтар 70 дирам ва барои 2 қаламу 1 дафтар 28 дирам доданд. Қалам ва дафтар чанддирамӣ арзиш дорад?

283. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$-ро дар порчаи $\left[-2;\ -\dfrac{1}{2}\right]$ ёбед.

284. Нишон диҳед, ки $\dfrac{\sin 15^0+\sin 75^0}{\cos 15^0-\cos 75^0}=\sqrt{3}$ аст.

25. МАФҲУМИ МУОДИЛАИ ДИФФЕРЕНТСИАЛӢ

То ҳол ба муоинаи муодилаҳое машғул будем, ки ҳаллашон адад буд. Акнун муодилаҳоеро дида мебароем, ки ҳалли онҳо функсия аст. Агар чунин муодила ғайри худи функсия боз ҳосилаи функсияи матлубро доро бошад, он гоҳ онро муодилаи *дифферентсиалӣ* меноманд.

Ҳалли бисёр масъалаҳои илм ва техника ба ёфтани ҳалли муодилаи дифферентсиалии

$$f'(x)=kf(x), \tag{10}$$

ки ин ҷо k адади доимӣ буда, $y=f(x)$ функсияи матлуб аст, оварда мешавад. Маънои муодилаи (баробарии) (10) ин аст, ки суръати тағйирёбии функсия дар нуқтаи x ба қимати функсия дар ҳамин нуқта мутаносиб мебошад.

Барои тасдиқи ин гуфтаҳо протсесҳои зерини воқеиро ҳамчун мисол меорем.

М и с о л и 1. **(Таҷзияи радиоактивӣ)**. Амалан муқаррар кард шудааст, ки суръати таҷзияи радиоактивии модда бо мурури вақт ба миқдори модда $m(t)$ мутаносиб аст, яъне

$$m'(t) = b\,m(t).$$

Дар ин ҷо b коэффитсиенти мутаносибӣ буда, шиддатноки таҷзияро муайян менамояд. Ҳангоми таҷзия миқдори модда ка мешавад. Бо ибораи дигар, функсияи $m(t)$ камшаванда аст, яън $m'(t) \le 0$. Бо мақсади бо параметри мусбат сару кор дошта $b = -\alpha > 0$ гузошта, вобастагиро дар намуди

$$m'(t) = -\alpha\, m(t) \qquad (11$$

менависанд.

М и с о л и 2. **(Афзоиши аҳолӣ)**. Ҳангоми омӯзиши афзоиш аҳолии ин ё он мамлакат фарз мекунанд, ки суръати афзоиши аҳол ба миқдори аҳолӣ мутаносиб аст. Агар дар лаҳзаи вақти t миқдор аҳолиро бо $N(t)$ ишорат кунем, он гоҳ

$$N'(t) = \beta N(t), \qquad (12$$

ки $\beta > 0$ буда, шиддатнокии афзоиши аҳолиро ифода мекунад.

М и с о л и 3. **(Қонуни тағйирёбии фишори атмосферӣ)**. Да ҳудуди баландиҳои аз сатҳи баҳр яххела, ки дар онҳо ҳарорати ҳав амалан доимӣ аст, суръати камшавии фишори атмосферӣ ба худ фишор мутаносиб аст. Яъне, агар бо $P(h)$ фишорро дар баланди h ишорат кунем, он гоҳ

$$P'(h) = -\gamma P(h), \qquad (13$$

ки дар ин ҷо $\gamma > 0$ мебошад.

Муодилаҳои (11)-(13) муодилаҳои дифферентсиалӣ буд намуди (10)-ро доранд. Дар онҳо бузургиҳои мусбат α, β ва коэффитсиентҳои мутаносибӣ, функсияҳои $m(t)$, $N(t)$, $P(h)$ матлубанд.

Акнун ба муодилаи (10) бармегардем. Дар он k адади маълу буда, функсияи $f(x)$ матлуб аст. Формулаи ҳосилаи функсия нишондиҳандагиро ба хотир оварда (ниг. ба б. 21) мебинем, ки бар ҳар гуна адади C функсияи намуди

$$f(x) = Ce^{kx} \qquad (14$$

ҳалли муодилаи (10) аст. Дар ҳақиқат,

$$f'(x) = C(e^{kx})' = Cke^{kx} = kf(x).$$

Нишон медиҳем, ки муодилаи (10) ғайр аз функсияҳои намуди (14) ҳалҳои дигар надорад. Барои ин функсияи $f(x)$-ро, ки ҳалли дилхоҳи (10) аст, гирифта функсияи ёрирасони

$$g(x) = f(x)e^{-kx}$$

-ро тартиб медиҳем. Дорем

$$g'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

Дар ин ҷо ба ҷойи $f'(x)$ қиматаш $kf(x)$-ро аз муодилаи (10) гузошта, ҳосил мекунем:

$$g'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

Аз айнан нол будани ҳосилаи $g(x)$ бармеояд, ки вай барои тамоми қиматҳои x доимӣ аст (ниг. ба леммаи б. 2): $g(x) = C$. Акнун баробарии $g(x) = f(x)e^{-kx}$-ро истифода карда пайдо мекунем:

$$f(x)e^{-kx} = C \quad \text{ва аз ин ҷо} \quad f(x) = Ce^{kx}.$$

Инак, ҳар гуна ҳалли (10) намуди (14)-ро дорад. Бо ибораи дигар, ҳалли ***умумии*** муодилаи (10) бо формулаи (14) ифода карда мешавад. (Ҳалли умумии муодила гуфта, ҳаллеро меноманд, ки аз он ҳалли дилхоҳи мушаххасро ҷудо карда гирифтан мумкин аст.)

Намуди ҳалли умумии муодилаи (10) (формулаи (14)) нишон медиҳад, ки вай аз як параметри доимии C вобаста аст. Ин бошад ба хулоса меорад, ки ҳангоми дода шудани қимати ҳал дар як нуқтаи $x = x_0$, яъне дода шудани $f(x_0)$, ҳалли (10) яққимата муайян мегардад. Шарти $f(x_0) = f_0$ шарти *аввала* ё *ибтидоӣ* номида мешавад. Ҳангоми дода шудани f_0 функсияи

$$f(x) = f_0 e^{k(x-x_0)}, \tag{15}$$

ҳалли (10) буда, шарти $f(x_0) = f_0$-ро қаноат мекунонад. Дурустии ин тасдиқ бевосита санҷида мешавад.

Ба муоинаи протсесҳое, ки онҳоро дар боло бо муодилаи дифферентсиалӣ ифода кардем бармегардем. Ҳалли муодилаҳоро ёфта, қиматҳои ададии коэффитсиентҳоро ҳосил мекунем.

Таҷзияи радиоактивӣ. Бигузор дар лаҳзаи қайди вақти t_0 миқдори модда ба m_0 баробар аст, яъне $m(t_0) = m_0$. Барои муайянӣ

$t_0 = 0$ қабул карда, ҳалли муодилаи (11)-ро бо шарти ибтидоии $m(0) = m_0$ аз рӯйи формулаи (15) меёбем $(f_0 = m_0,\ x_0 = 0)$:

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}.$$

Дар бисёр ҳолатҳо тавсифи моддаи радиоактивӣ *даври нимтаҷзия* T - вақте, ки дар муддати он миқдори модда ду маротиба кам мешавад, мебошад. Даври нимтаҷзия барои бисёр моддаҳои радиоактивӣ хеле калон аст. Масалан, барои радий $T = 1590$ сол, барои уран $T = 4{,}56$ миллиард сол мебошад. Дар ҳақиқат, аз баробариҳои

$$2 = \frac{m_0}{T} = \frac{m_0}{m_0 e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}$$

баробарии $T = \dfrac{1}{\alpha}\ell n2$ ё $\alpha = \dfrac{\ell n2}{T}$ бармеояд. Барои радий $\alpha = \dfrac{\ell n2}{1590} \approx 0{,}000446 = 4{,}46 \cdot 10^{-6}$.

Афзоиши аҳолӣ. Агар бо $N_0 = N(0)$ миқдори ҳозираи аҳолиро ишорат кунем, он гоҳ пас аз t сол миқдори аҳолӣ мувофиқи формулаи (15) ба

$$N(t) = N_0 e^{\beta t}$$

баробар мешавад, ки ин функсия ҳалли муодилаи (12) аст. Коэффитсиенти β–ро дар асоси додашудаҳои оморӣ муайян кардан мумкин аст. Масалан, бигузор маълум бошад, ки дар муддати 10 сол миқдори аҳолӣ 1,2 маротиба афзудааст. Дар ин ҳолат

$$\frac{N(10)}{N(0)} = 1{,}2; \quad \frac{N_0 e^{10\beta}}{N_0} = 1{,}2; \quad e^{10\beta} = 1{,}2.$$

Аз ин ҷо $10\beta = \ell n1{,}2$ ва $\beta = \dfrac{1}{10}\ell n1{,}2 \approx 0{,}0182$.

Ҳамин тариқ, $N(t) = N_0 e^{\frac{\ell n1{,}2}{10}t} \approx N_0 e^{0{,}0182t}$. Ин баробарӣ имконият медиҳад, ки миқдори аҳолиро баъди 20 сол ҳисоб кунем ё кай ду маротиба зиёд шудани онро донем ва ғайра.

Қонуни тағйирёбии фишори атмосферӣ. Агар $P_0 = P(h_0)$

бузургии фишор дар баландии $h = h_0$ бошад, он гоҳ ҳалли муодилаи (13) мувофиқи формулаи (15) функсияи

$$P(h) = P_0 e^{-\gamma(h-h_0)}$$

аст, ки он бузургии фишорро дар баланди h ифода менамояд. Агар $h_0 = 0$ гузорем, он гоҳ

$$P(h) = P_0 e^{-\gamma h}.$$

$P(h)$-ро дар ягон баландии h_1 дониста коэффитсиенти мутаносибии γ-ро меёбем:

$$\gamma = \frac{1}{h_1}(\ell n P_0 - \ell n P(h_1)).$$

Мисолҳои овардашуда ба хулоса меоранд, ки муодилаҳои дифферентсиалӣ олоти тавонои тадқиқ мебошанд. Ин аст, ки тадқиқотчиён қонунҳоеро, ки онҳо ба ягон протсес хосанд, бо воситаи чунин муодилаҳо ифода карда, рафти инкишофи ин протсесро бо мурури вақт ҳамчун ҳалли ин муодилаҳо меомӯзанд. Ба ин мисолҳои овардашуда, ки онҳо мисоли татбиқи математика дар амалия ҳастанд, далел шуда метавонанд.

?

1. Чӣ гуна муодиларо муодилаи дифферентсиалӣ мегӯянд?. 2. Ҳалли умумии муодилаи дифферентсиалӣ чист? Вай бо кадом формула ифода меёбад? 3. Мазмуни шарти ибтидоиро фаҳмонед. 4. Даври нимтаҷзияи модда чист ва он чӣ тавр муайян карда мешавад?

---

285. Нишон диҳед, ки функсияи $f(x) = 6e^{4x}$ ҳалли муодилаи $f'(x) = 4f(x)$ аст.

286. Нишон диҳед, ки функсияи $y = 2e^{-3x}$ ҳалли муодилаи $y' = -3y$ мебошад.

287. Даври нимтаҷзияи моддаи радиоактивӣ муайян карда шавад, агар маълум бошад, ки дар муддати 2 сол ин модда якуним маротиба кам шудааст.

288. Баъди як соат аз 50 гр. моддаи радиоактивӣ 47 гр. боқӣ монд. Баъди 5 соат чӣ қадари ин модда боқӣ мемонад?

289. Даври нимтаҷзияи радий 1590 сол аст. Баъди чанд сол миқдори радий 10 маротиба кам мешавад?

290. Дар муддати 10 сол аҳолии мамлакат 10% афзудааст. Дар 20 соли пасоянд аҳолӣ чанд маротиба меафзояд?

291. Дар муддати 15 сол аҳолии ҷумҳурӣ 20% зиёд шудааст. Пас аз чанд сол миқдори аҳолӣ ду маротиба зиёд мешавад?

292. Аз сатҳи баҳр чӣ қадар баланд баромадан даркор аст, то ки фишори ҳаво 40% кам шавад, агар маълум бошад, ки ҳангоми ба баландии 1000 м баромадан фишор 20% кам мешавад?

МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОР

293. Ифодаи $2y-3y^2+y^3$-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед.

294. Сода намоед: $\cos(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$.

295. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 13 см аст. Катетҳоро ёбед, агар фарқи онҳо 7 см бошад.

296. Муодилаи $\ell og_4(x^2-x)=1+\ell og_4 5$-ро ҳал кунед.

297. Масоҳати фигурае, ки бо хатҳои $y=x(2-x)$, $y=0$ маҳдуд аст, ҳисоб кунед.

Маълумоти таърихӣ

Дар охири асри XVII кори дохил кардани дараҷа дар шакли ҳозира аз тарафи олимони англис Ҷон Валлис (1616-1703) ва Исаак Нютон (1643-1727) ба субут расонида шуда буд. Валлис дар соли 1665 аввалин шуда истифодаи нишондиҳандаҳои манфӣ ва касриро мувофиқи мақсад ҳисоб намуд. И.Нютон дар яке аз мактубҳои худ дар соли 1676 навишта буд: «Чи тавре алгебрадонон ба ҷойи АА, ААА ва ғайра, $А^2$, $А^3$ ва ғайра менависанд, ман ҳам ҳамчунин ба ҷойи $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ ва ғайра, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} ва ғайра менависам».

Ба тадриҷ васеъ кардани мафҳуми дараҷа дар илм ҳамин хел буд, ки мафҳумҳои нав – дараҷаҳои нолӣ, касрӣ ва манфӣ ба таърифҳои дараҷа, ки пештар қабул шуда буданд, зиддият надоштанд. Онҳо ба ҳамон қоидаҳое, ки онҳоро дараҷаи натуралӣ қонеъ мекард, итоат менамуданд. Дар охири асри XVII аз сабаби мураккаб гардидани масъалаҳои математикӣ зарурияти таъҷилии паҳн кардани таърифи нишондиҳандаи дараҷа барои ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ ба миён омад. Умумӣ кардани дараҷа имконият дод, ки функсияи нишондиҳандагии $y=a^x$ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ муоина карда шавад. Назарияи ниҳоят ба ҳозира наздики функсияи нишондиҳандагӣ дар ду боби китоби Леонард Эйлер (1707-1783) «Муқаддима ба анализ» дарҷ гардидааст. Вобастагии байни функсияи нишондиҳандагӣ ва функсияҳои тригонометриро, ки онро Л.Эйлер дар ин китоб пешниҳод кардааст, яке аз умдатарин натиҷаҳои илми математика аст. Афсус, дониши мактабӣ казоӣ намекунад, то он вобастагиро орем.

Калимаи *логарифм* юнонӣ буда, чун нисбати ададҳо тарҷума мешавад. Кашфи логарифмҳо (соли 1594), номи онҳо ва аввалин ҷадвали логарифмҳо ба олими шотландӣ, дӯстдори математика Ҷ о н Н е п е р (1550-1617) тааллуқ дорад. Сабаби чунин номгузорӣ он буд, ки логарифмҳо ҳангоми муқоиса кардани ду адад, ки яке аъзои прогрессияи арифметикӣ ва дигаре аъзои прогрессияи геометрӣ мебошад, пайдо шудаанд. Завқманди дигари математика – соатсоз ва устои асбобҳои нуҷумӣ, швейтсарӣ И. Б ю р г и (1552-1632), ки ёрдамчии нуҷумшиноси машҳур И. К е п л е р (1571-1630) шуда кор мекард, аз Ҷ. Непер пештар ҷадвалҳои логарифмҳоро тартиб дода буд. Вале ҷадвалҳои Бюрги соли 1620 чоп шуданд, ҳол он ки ҷадвалҳои Непер соли 1614 чоп шуда буданд. Аз ҳамин сабаб дар кашфи логарифмҳо аввалият ба Непер дода шудааст.

Ғояе, ки ба он кашфи логарифмҳо асос карда шудааст, математики немис М. Ш т и ф е л (1487-1567) пешниҳод карда буд: Фарз карда буд, ки дар баробарии $x = a^y$ паси ҳам y қиматҳои

$$1, 2, 3, 4, \dots, y, y+1 \tag{16}$$

қабул мекунад. Он гоҳ x ин тавр ифода мешавад:

$$1, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots, a^y, a^{y+1}. \tag{17}$$

Ададҳои дар қатори (16) буда прогрессияи арифметикӣ ва ададҳои дар қатори (17) буда прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд. Зоҳиран фаҳмост, ки ададҳои дар (16) буда, логарифми ададҳои дар (17) буда аз рӯйи асоси a ҳастанд. Пурсида мешавад, қимати a-ро чанд гирем, ки ададҳои дар қатори (17) буда ба қадри имкон зич (ду аъзои ҳамсоя ба ҳам наздик) бошанд. Дараҷаи дилхоҳи 1 ба 1 баробар буданро дониста, Непер ва Бюрги, новобаста аз ҳамдигар, мувофиқан $a = 1 - 10^{-7}$ ва $a = 1 + 10^{-4}$ қабул карда буданд.

И. Бюрги соли 1603 ҳисобкуниҳои худро оғоз карда, соли 1611 онҳоро анҷом дода буд. Вале чи тавре дар боло қайд шуд, ҷадвалҳои ӯ аз сабаби дер чоп шуданашон ба эътирофи ҳамагон сазовор нагаштанд. Баръакс, ҷадвалҳои Непер, ки пештар дарҷ гардида буданд, қабули ҳамагон гашта васеъ истифода шуданд.

Логарифми асосаш e-ро математики англис С п е й д е л дохил кардааст. Соли 1620 вай ҷадвали логарифмҳои натуралии ададҳои аз 1 то 1000-ро чоп карда буд. Ҷадвали ба таври кофӣ пурраи логарифмҳои натуралӣ танҳо соли 1770 пайдо шудаанд.

Ҷадвалҳои логарифмии Непер заҳмати ҳисоббарорро хеле сабук карда бошанд ҳам, онҳо мукаммал набуданд. Бинобар ин вай ҳамроҳи дӯст ва ҳамкори худ Г. Б р и г г с (1561-1630) ба тартиб додани ҷадвали логарифмҳои даҳӣ машғул шуд. Баъди фавти

Непер, Бриггс соли 1624 ҷадвали логарифмҳои даҳии чорраҳамаро нашр кард, ки логарифмҳои ададҳои бутуни аз 1 то 2000-ро дарбар мегирифт.

Заҳмати чандинсолаи математикҳои забардаст барабас нарафт. Онҳо кори ҳисоббароронро ҳазорҳо маротиба осон намуда буданд. Бояд гуфт, ки ҳаҷми кори ҳисоббарорӣ маҳз дар асри XVII ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногуни ба амалия алоқаманд, дар навбати аввал масъалаҳои амалии илми нуҷум (аз ҷумла, муайян кардани мавқеи киштиҳо аз рӯйи ситораҳо ва Офтоб) хеле афзуда буд. Кашф карда шудани логарифмҳо, ки зарб ва тақсими ададҳоро ба ҷамъ ва тарҳи логарифмҳои онҳо меоваранд, ба гуфти Л а п л а с (1749-1827) умри ҳисоббароронро дароз кард.

Ҷадвали логарифмҳо ва хаткашаки логарифмӣ, ки онро В. О у т р е д (1574-1660) ихтироъ карда буд, зиёда аз 350 сол ҳамчун олоти боэътимоди ҳисоббарориҳои тақрибӣ хизмат карданд ва ба сатҳи баланди инкишофи илм ва прогресси техникӣ расидани инсоният кӯмак расониданд. Вале бо пайдоиши микрокалкуляторҳо ва компютерҳо, ки онҳо суръати ҳисоббарориро миллионҳо маротиба зиёд кардаанд, амалан ҷадвалҳои логарифмӣ қимати худро ҳамчун олоти ҳисоббарорӣ гум карданд.

Логарифмҳои натуралӣ (табиӣ) на танҳо аҳамияти амалӣ, балки аҳамияти назариявӣ доштанд ва ҳоло ҳам доранд. Дертар маълум шуд, ки қаторҳоро истифода карда бо саҳеҳии дилхоҳ қимати тақрибии бузургиҳои гуногунро ёфтан мумкин аст. Инчунин нишон дода шуд, ки дуаъзогии дараҷагӣ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ки ба сифати асоси логарифми натуралӣ гирифта мешавад, ҳангоми $n \to \infty$ ба адади муайян майл мекунад. Маҳз ин адад адади e аст. Бо истифодаи қатори ададӣ нишон дода шуд, ки $e = 2{,}718281183...$ аст. Ламберт (1728-1777) соли 1766 аз вобастагии байни функсияи нишондиҳандагӣ ва функсияҳои тригонометрии Л.Эйлер, ки мо роҷеъ ба он дар аввал сухан ронда будем, истифода карда исбот намуд, ки ададҳои π ва e ирратсионалианд.

Авҷи инкишофи анализи математикӣ ба асри XVII рост меояд. Дар ин кор ададҳои π ва e роли махсусро мебозанд. Диққати махсус ба ин ададҳо зоҳир-кардани математикҳоро бо ҳамин шарҳ додан мумкин аст. Ин ададҳо дар формулаҳои гуногун дохил мешаванд. Логарифмҳои асосашон e имконият медиҳанд, ки вобастагиҳои гуногуни математикиро, ки онҳо протсесҳои гуногуни табиат ва илмро тавсиф менамоянд, бо воситаи чунин логарифмҳо ифода шаванд (ниг. ба б.25). Аҷаб нест, ки сабаби натуралӣ, яъне табиӣ номгузорӣ кардани ин логарифмҳо дар ҳамин бошад. Истилоҳи «логарифмҳои натуралӣ»-ро П. Менголи соли 1659 дохил карда буд. Баъди вай соли 1668 аз ин истилоҳ Н. Меркатор (1620-1687) истифода кардааст. Таърифи ҳозиразамони логарифми натуралиро дар корҳои Л. Эйлер дарёфт кардан мумкин аст. Ба шарафи ӯ ададе, ки ба он $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ҳангоми ба беохир майл кардани n майл мекунад, бо ҳарфи e ишорат карда шуда, худи ададро ба шарафи Непер «адади неперӣ» меноманд.

МАШҚҲОИ ИЛОВАГӢ

Ба параграфи 3

298. Графики функсияро созед:

а) $y=6^x$; б) $y=\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$; в) $y=8^x$; г) $y=\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$.

299. Кадоме аз ин ду адад калон аст:

а) $3^{0,4}$ ё $3^{\frac{\sqrt{3}}{5}}$; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ ё $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

в) $1,4^{-\sqrt{7}}$ ё $1,4^{\sqrt{5}}$; г) $0,2^{-\pi}$ ё $0,2^{-3}$?

Ба параграфи 4

Муодиларо ҳал кунед (300-301):

300. а) $16^x=2^{\frac{1}{7}}$; б) $3^{x+1}+3^{x+2}=36$;

в) $4^{x-2}=5^{x-2}$; г) $7^{2x+3}=\dfrac{1}{49}$.

301. а) $9^{x+1}+3^{x+2}=18$; б) $e^x-1=\dfrac{6}{e^x}$;

в) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; г) $2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2=0$.

Нобаробариҳоро ҳал намоед (302 - 303):

302. а) $5^{x-1} > 25$; б) $6^{2x} < \frac{1}{6}$;

в) $0{,}5^{2x+3} \le 1$; г) $0{,}7^{4x+3} \ge 0{,}49$.

303. а) $0{,}2^{2-x^2} < 5$; б) $2^{2x^2-x} > 1$;

в) $0{,}1^{x} - 0{,}1^{2x} \le 0$; г) $\pi^{2x} - \pi^{x} \ge 0$.

304. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} 2^{x-2y} = \frac{1}{4}, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4^{3x-4y} = 0{,}25, \\ 4^{x+2y} = 64; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{2x+y} = 1, \\ xy = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{x} + 3^{y} = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

Ба параграфи 5

305. Ҳисоб намоед:

а) $\log_3 9\sqrt{3}$; б) $\log_{0,2} 125$; в) $\lg 0{,}01$; г) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$.

306. Айнияти асосии логарифмро истифода карда, қимати ифодаро ёбед:

а) $2^{3+\log_2 5}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1+\log_3 2}$; в) $5^{-1+\log_5 2}$; г) $0{,}1^{1+\log_{0,1} 3}$.

307. Аз ифода аз рӯйи асоси a логарифм гиред $(b > 0, c > 0)$:

а) $9b^4\sqrt[5]{c}$ ҳангоми $a = 3$ будан;

б) $\dfrac{c^5}{\sqrt[3]{100b^2}}$ ҳангоми $a = 10$ будан;

в) $\dfrac{0{,}25\sqrt{b}}{c^3}$ ҳангоми $a = 5$ будан;

г) $\dfrac{0{,}16b^2}{c^4\sqrt{c}}$ ҳангоми $a = 0{,}4$ будан.

308. Аз баробарии зерин x -ро ёбед:

а) $\ell og_7 x = \ell og_7 196 - 2\ell og_7 2$;

б) $\ell og_4 x = 2\ell og_4 3 + \frac{1}{2}\ell og_4 49$;

в) $\ell g x = 1 + 3\ell g 4 - 2\ell g 6$;

г) $\ell og_{0,3} x = \ell og_{0,3} 9 - 2\ell og_{0,3} 10$.

309. Графики функсияро созед:

а) $y = \ell og_5 x$; б) $y = \ell og_{0,5} x$.

310. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \ell og_7(3x-1)$; б) $y = \ell og_\pi(7-x)$;

в) $y = \ell og_{0,4}(9-x^2)$; г) $y = \ell og_3(6+x-x^2)$.

311. Кадоме аз ададҳои зерин калон аст:

а) $\ell g 8$ ё $2\ell g 3$; б) $\ell og_{\frac{1}{4}} 3$ ё $\ell og_{\frac{1}{4}} 7$;

в) $\ell og_3 5$ ё $\ell og_7 4$; г) $\ell og_{0,3} 2$ ё $\ell og_5 3$?

Ба параграфи 6

Муодиларо ҳал кунед (312-315):

312. а) $2^x = 5$; б) $0,3^{x+1} = 0,2$; в) $4^{x+1} = 5^x$; г) $3^{x-1} = 6^{x+2}$.

313. а) $\ell og_6(2x-1) = 2$; б) $\ell n(3x-5) = 0$;

в) $\ell og_{\sqrt{2}}(5x-1) = 2$; г) $\ell og_3(7x-2) = 1$.

314. а) $\ell og_3^2 x - 3\ell og_3 x + 2 = 0$; б) $2\ell og_{0,5} x = \ell og_{0,5}(2x^2 - x)$;

в) $\ell og_4(x^2 - x) = 1 + \ell og_4 5$; г) $\ell og_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 3) = -2$.

315. а) $\ell og_x 4 = 2$; б) $\ell og_x(6 - x^2) = 1$;

в) $\ell og_2(1,5 - 2^x) = x - 1$; г) $\sqrt{x}^{\,\lg\sqrt{x}} = 10$.

Нобаробариро ҳал кунед (316-317):

316. а) $\ell og_{\frac{1}{2}}(x-3) \le 3$; б) $\ell g(4x-1) \ge 1$;

в) $\ell n(3x+2) < 0$; г) $\ell og_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \ell og_{\frac{1}{3}}(x+2)$.

317. а) $\ell og_3(12-2x-x^2) > 2$; б) $\ell og_2(x^2-x-4) \le 3$;

в) $\ell g(x+1) + \ell gx < \ell g2$; г) $\ell g^2 x + 2\ell gx \ge 3$.

318. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} x+y=7, \\ \ell gx + \ell gy = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{x-2y} = 1, \\ \ell og_2 x + \ell og_2(2y+7) = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ell og_3(4x+y) = 2, \\ xy = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \ell og_{\sqrt{2}}(y-x) = 2. \end{cases}$

Ба параграфи 7

319. Ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $y = 2 - 3e^{5-2x}$; б) $y = 4 \cdot 7^{4x-1}$;

в) $y = \left(\dfrac{1}{e^{2x}}\right)^7$; г) $y = 5^{-3x}$.

320. Барои функсияҳои зерин намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $y = e^{4x} - 3e^{-2x}$; б) $y = 3e^{0,5x}$;

в) $y = 4^x$; г) $y = 0{,}3^x$.

321. Ҳосилаи функсияро ҳисоб кунед:

а) $y = x\ell g5x$; б) $y = \ell n(\sin x)$;

в) $y = \ell og_2(3x+1)$; г) $y = \ell og_{0,2}(x^2+1)$.

322. Барои функсияҳои зерин ҳосила ва намуди умумии функсияҳои ибтидоиро нависед:

а) $y = x^{5\sqrt{3}}$; б) $y = x^{-e}$; в) $y = x^{\frac{1}{\pi}}$; г) $y = x^{\sqrt{23}}$.

323. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияро нависед:

а) $y = \dfrac{1}{x+3}$; б) $y = \dfrac{4}{x}$;

в) $y = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+3}$; г) $y = \dfrac{3}{2x+1}$.

324. Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ҳисоб намоед:

а) $y = 5^x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$

б) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1;$

в) $y = \dfrac{1}{5x},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 10;$

г) $y = x^{\sqrt{5}},\ y = 0,\ x = 1.$

ҶАВОБҲО

94. Якум ва чорумаш. **98.** $[0;\ 2{,}5]$. **99.** а) 9; б) 1. **100.** $\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a} - 2\right)\left(\sqrt[4]{a} + 2\right)$; б) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)$. **101.** 2,25. **102.** а), б) $x > y$; в), г) $x < y$. **103.** а), б), г) $a < 1$; в) $a > 1$. **105.** а) $(1;\infty)$; б) в) $(-\infty;0)$; г) $(-5;\infty)$; д) $(-2;\infty)$; е) $[2;+\infty)$; ж) $[0;\infty)$; з) $[1;\infty)$. **106.** а) $y_{mm} = 0{,}5$, $y_{\max} = 2$; б) $y_{\min} = 2$, $y_{\max} = 10$; в) $y_{\min} = \dfrac{1}{4}$, $y_{\max} = 4$; г) $y_{\min} = -\dfrac{5}{6}$, $y_{\max} = 0$. **107.** а) +; б) +; в) -; г) -. **108.** а) 2; б) 1; в) –1; г) 0. Н и ш о н д о д. Графики функсияҳои $y = 3^x$ ва $y = 1 - x$-ро дар як системаи координатавӣ кашида пайхас менамоем, ки абсиссаи нуқтаи буриш $x = 0$ аст. Исбот мекунем, ки графикҳо дигар нуқтаи буриш надоранд. Барои ин аз хосиятҳои мувофиқи функсияҳои нишондиҳандагӣ ва хаттӣ истифода мебарем.

Ҳангоми $x > 0$ будан функсияи $y = 3^x$ қиматҳои аз 1 калонро қабул мекунад, вале функсияи $y = 1 - x$ мувофиқан қиматҳои аз 1 хурдтарро. (Ҳангоми $x < 0$ будан функсияҳо мувофиқан қиматҳои аз 1 хурд ва аз 1 калонро қабул менамоянд.) Хулоса, графикҳо дар дигар нуқтаҳо ҳамдигарро намебуранд. **109.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 2. **110.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(3; \infty)$. **111.** а), б) $(0; \infty)$ (ниг. ба нишондоди машқи 108). **112.** а) 9; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{7}{3}$; г) $\sqrt{1,6}$. **113.** а) $x + y$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}+4}$; в) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; г) $\sqrt[3]{x} - 2$. **114.** а) якумаш; б) дуюмаш. **115.** а) $\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{1}{x^2}$. **116.** а) $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; б) $\frac{2}{3}\pi + 4n\pi$, $n \in Z$. **117.** а) 5; б) –4; в) 3,5; г) 4. **118.** а) 2; б) –1; в) 2,5; г) –2,25. **119.** а) –1,5; б) –2,5; в) -4; г) –5. **120.** а) 3; б) 0; в) $-\frac{2}{3}$; г) 3. **121.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 2. **122.** а) 2; б) 1; в) 3; г) $\frac{1}{2}$. **123.** а) 1; б) 1; в) –1; г) 3. **124.** а) 4; б) –1; в) -0,5; г) –2. **125.** а) 1 ва 3; б) 0; в) 3 ва 4; г) 2. **126.** а) 17; б) 0 ва $\frac{1}{2}$; в) 2; г) 0. **127.** x калон аст. **128.** 1. **129.** $1\frac{1}{3}$. **130.** 28 ва 20. **131.** а) $[-1; \infty)$; б) $(5; \infty)$; в) $[-4; -\infty)$; г) $(-\infty; 0]$. **132.** а) $(-2; \infty)$; б) $(-2, \infty)$; в) $\left[\frac{3}{2}; \infty\right)$; г) $(-\infty; 0]$. **133.** а) $(0,25; \infty)$; б) $(3; \infty)$; в) $\left[\frac{2}{3}; \infty\right)$; г) $(-\infty; 1]$. **134.** а) $[\frac{1}{3}; 3]$; б) $(-\infty; \frac{1}{5}] \cup [3; +\infty)$; в) $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [4; \infty)$; г) $(0; 2)$. **135.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; 4,5)$; в) $(-2; -1]$; г) $(-\infty; -1) \cup [2; \infty)$. **136.** а) $(0; \infty]$; б) $(-2; +\infty)$; в) $(-2; 1)$; г) $[0; \infty)$. **137.** $y_{\max} = 1$, ҳангоми $x=0$ будан. **138.** (-3; -5) ва (5; 3). **139.** а) $\frac{1}{4}$; б) –1. **140.** 2. **141.** $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $tg\alpha=2{,}4$. **142.** а) 1. **143.** а) (3; -1); б) $\left(\frac{3}{14};-\frac{1}{14}\right)$; в) (2; -1); г) (0; 1). **144.** а) (1; 1); б) (1; 1); в) (5; 3); г) (25; 16) ва (16; 25). **145.** $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi,\quad n\in Z$. **146.** 200. **147.** $f_{\min}=0$ ҳангоми $x=0$, $f_{\max}=\frac{1}{2}$ ҳангоми $x=-0{,}5$. **148.** а) $20\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}(\pi+2)$. **149.** а) $x\neq 1$; б) $[-2;2]$. **153.** а) 5; -3; 1,5; $\frac{2}{3}$. б) 3; -1; 0,5; 0,4. в) 2; -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$. **154.** а) 3; б) 2; в) $\frac{1}{10}$; г) $\sqrt[3]{3^5}$. **155.** а) $\frac{1}{2}$; б) 25; в) 16; г) $\frac{1}{36}$. **156.** а) $\frac{1}{81}$; б) 1; в) $\frac{1}{7}$; г) 32. **157.** а) $\log_4 16$; $\log_4\frac{1}{16}$; $\log_4 4$; $\log_4 1$. б) $\log_2 2$; $\log_2\frac{1}{2}$; $\log_2 1$; $\log_2 16$. в) $\log_3 81$; $\log_3\frac{1}{3}$; $\log_3 3$; $\log_3 9$. г) $\log_5\frac{1}{125}$; $\log_5\frac{1}{25}$; $\log_5 25$; $\log_5 5$. **158.** а) 3; б) 3,14; в) 1; г) 1, 4. **159.** а) 12; б) $3\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **160.** а) 4; б) $\frac{1}{16}$; в) 4; г) 1. **161.** $\left[-\frac{2}{7};\infty\right)$. **162.** 16%. **163.** 4905. **164.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$. **165.** 1. **166.** б) $-0{,}2\left[2(1+\log_2 a))-\frac{3}{7}\log_2|b|\right]$. **167.** б) $1-2\lg a-\lg b-3\lg c$. **168.** а) 3; б)-1; в) –4; г) 2. **169.** а) $1+a+b$; б) $1+b$; в) $3a+b$; г) $2+a$.

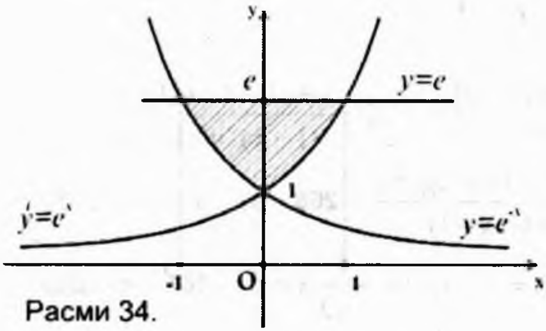
170. а) 2; б) 4; в) 2; г) –1. **171.** а) 6; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 2. **172.** а) 7,5; б) $4\frac{4}{9}$; в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$; г) $\frac{1}{4}$. **173.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 2; г) 2. **174.** а) 49; б) 5; в) 3; г) 27. **175.** а) –3; б) $\frac{1}{2}$; в) –1; г) 1. **178.** 3. **179.** $-\frac{1}{3}$. **181.** $1+a$. **182.** $1+\sqrt{3}$. **184.** а) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$; б) $(-4;4)$; в) $[0;9)$; г) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **185.** а) $\left(-\infty;-\frac{7}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; б) $(-3;1)$; в) $\left(\frac{2}{3};1\right)$; г) $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$. **186.** а) $(2\pi n;2\pi n+\pi)$, $n\in Z$; б) $(0;\infty)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; г) $(-\infty;0)$. **187.** а) Дуюмаш калон; б), в), г) якумаш калон; д), е) дуюмаш калон. **188.** а), б), в), г) якумаш калон; д), е) дуюмаш калон. **189.** а) Хурд; б) калон; в) хурд; г) калон. **190.** а) –1; б) 2; в) 0; г) 0. **191.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{81}$; в) 25; г) $\frac{1}{\pi^2}$. **192.** а) $f_{min}=-\frac{1}{2}$, ҳангоми $x=2$; $f_{max}=2$, ҳангоми $x=\frac{1}{16}$; б) $f_{min}=0$ ҳангоми $x=1$, $f_{max}=2$ ҳангоми $x=4$. **193.** $\frac{5}{2}$. **194.** Ҳ а л. Ҳангоми $x<1$ будан қисми чапи нобаробарӣ манфӣ буда, қисми росташ мусбат аст. Бинобар ин вай ҷой надорад. Ҳангоми $x>2$ будан, чи тавре возеҳ аст, нобаробарӣ дуруст мебошад. Агар $1<x<2$ бошад, он гоҳ нобаробарии мазкур ба нобаробарии $2-x>2(x-1)$ ё ба $x<\frac{4}{3}$ баробарқувва аст. Ҷ а в о б. $\left(1;\frac{4}{3}\right)\cup(2;\infty)$. **195.** 10 ва 20 китоб. **196.** $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. **197.** 126. **199.** а) 2; б) –3; в) 4; г) $-\frac{1}{2}$. **200.** а) 0,4; б) 0,1. **201.** а), б) Дуюмаш калон; в) якумаш калон; г) дуюмаш калон. **202.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $6\frac{1}{4}$; г) $\varnothing$. **203.** а) $\left[\frac{5}{3}; \infty\right)$; б) $(4; \infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $(0; \infty)$. **204.** Н и ш о н д о д. Аз формулаи гузариш ва баробарии $10^M = e$, ки $M = 0{,}4343$ аст, истифода баред. **205.** 6. **206.** 10. **207.** $b-a$. **208.** $\frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **209.** $(0; 2]$. **210.** а) $\ell og_8 0{,}4$; б) $\ell og_{0,2} 4$; в) $\ell og_3 7$; г) $\ell og_9 e$. **211.** а) $1 + \ell og_{0,3} 2$; б) $\pm\sqrt{\ell og_4 5}$; в) $\frac{\ell g 6}{2}$; г) $\frac{2 - \ell n 2}{5}$. **212.** а) 9; б) 5; в) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; г) e^2. **213.** а) 5; б) –3 ва 1; в) 3; г) 4,5. **214.** а) $\frac{4}{25}$; б) 10; в) 18; г) 14. **215.** а) $\frac{9}{2}$; б) 100 ва 1000; в) 10; г) 2. **216.** а) 3 ва 9; б) e^{-2} ва e; в) $\sqrt{3}$ ва 27; г) 0 ва 9. **217.** а) 4; б) $\frac{1}{7}$; в) 32; г) –21. **218.** а) $\frac{16}{5}$; б) 9; в) 32; г) $\frac{1}{2}$ ва 4. **219.** а) 0 ва 2; б) 2; в) 0,1 ва 100; г) 10 ва 100. **220.** 2. **221.** $25ab$. **222.** 36 ва 40 км/соат; **223.** 0,003. **224.** о ва $\frac{9}{4}$. **225.** а) $(2; \infty)$; б) $\left(\frac{1}{16}; \infty\right)$; в) $(0{,}6; \infty)$; г) $\left(\frac{25}{4}; \infty\right)$. **226.** а) $(2; 11)$; б) $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; в) $\left(8\frac{2}{3}; \infty\right)$; г) $(5; \infty)$. **227.** а) $(4; \infty)$; б) $[5; \infty)$; в) $\varnothing$; г) $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$. **228.** а) (0; 1); б) (1; 3]; в) (-4; -3)$\cup$(4;5); г) $(-3; 2)$. **229.** а) $[1; e]$; б) $(0; 5^{-\sqrt{3}}) \cup (5^{\sqrt{3}}; \infty)$; в) $(0; 10^{-4}) \cup (10; \infty)$; г) $[5^{-5}; 5^5]$. **230.** а) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; б) $[e; e^3]$; в) $\left[-\frac{7\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right]$, $n \in Z$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}; 10\right)$. **231.** $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ **232.** 1. **233.** Дар $(-\infty; 3)$ афзуда, дар $(3; \infty)$ кам мешавад. $f_{\max} = 1$ ҳангоми $x = 3$ будан. **234.** $3 - a$. **235.** 16 ва

24. **236.** а) (53; 28); б) (4; 16); в) (6; 2); г) (6; 8). **237.** а) (1; 4); б) (5; 2); в) (25; 36); г) (9; 6). **238.** а) (100; 10); б) (2; 18) ва (18; 2); в) (4; 2); г) (50; -49). **239.** $\frac{5}{5-a}$. **240.** $(2; 3{,}5]$. **241.** 12 км/соат. **242.** Ҳ а л. Аз ду тарафи муодила аз рӯйи асоси x $(x \neq 1,\ x > 0)$ логарифм гирифта муодилаи $\ell og_x 16 \cdot \ell og_x 2 = \ell og_x 8 + 1$-ро ҳосил мекунем. Агар хосиятҳои логарифмро истифода кунем, он гоҳ муодиларо дар намуди $4\ell og_x^{\,2} 2 = 3\ell og_x 2 - 1$ навишта метавонем. Гузориши $t = \ell og_x 2$-ро истифода карда ба муодилаи квадратии $4t^2 - 3t - 1 = 0$ соҳиб мешавем. $t_1 = -\frac{1}{4}$ ва $t_2 = 1$ решаҳои ин муодилаанд. Аз баробариҳои $\ell og_x 2 = 1$ ва $\ell og_x 2 = -\frac{1}{4}$ ҳалли матлубро меёбем. Ҷ а в о б: $\frac{1}{16}$ *ва* 2. **244.** а) $2e^x$; б) $3 - 5e^{-x}$; в) $-\frac{1}{3}e^x$; г) $-5e^{-x} + 2x$. **245.** а) $e^x(\sin x + \cos x)$; б) $2e^x + 3$; в) $8x - 4^x \ell n4$; г) $x \cdot 3^x(2 + x\ell n3)$. **246.** а) $e^{x^2}\left(2x \cdot \cos\frac{x}{2} - 0{,}5\sin\frac{x}{2}\right)$; б) $6^{\frac{x}{2}}\left(\frac{\ell n6 \cdot tg4x}{2} + \frac{4}{\cos^2 4x}\right)$; в) $\frac{(2+2^x)\ell n2}{(1+2^{-x})^2}$; г) $-\frac{0{,}2^{-x}(1+\ell n0{,}2)}{(x+1)^2}$.
247. а) $y - x - 1 = 0$; б) $y - 2x\ell n2 - 2 + 2\ell n2 = 0$; в) $y + x - 1 = 0$; г) $3y + x\ell n3 - \ell n3 - 1 = 0$. **248.** а) Дар $\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ афзуда, дар $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ кам мешавад. $f_{\min} = -\frac{1}{3e}$ ҳангоми $x = -\frac{1}{3}$ будан; б) дар $\left(0; \frac{2}{\ell n4}\right)$ афзуда, дар $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{\ell n4}; \infty\right)$ кам мешавад. $f_{\min} = 0$ ҳангоми $x = 0$ ва $f_{\max} = \left(\frac{2}{\ell n4}\right)^2 \cdot 4^{-\frac{2}{\ell n4}}$ ҳангоми $x = \frac{2}{\ell n4}$

будан; в) дар $(-\infty; -1)$ кам шуда, дар $(-1; \infty)$ меафзояд. $f_{\min} = -\frac{1}{e}$ ҳангоми $x = -1$ будан; г) Ҳ а л. $f'(x) = x \cdot 2^x(2 + x\ell n2)$, $f'(x) > 0$ агар $x > 0$ ё $x < -\frac{2}{\ell n2}$ бошад. $f'(x) < 0$ агар $-\frac{2}{\ell n2} < x < 0$ бошад. Ҳамин тариқ, дар $\left(-\infty; -\frac{2}{\ell n2}\right) \cup (0; \infty)$ функсия афзуда, дар $\left(-\frac{2}{\ell n2}; 0\right)$ кам мешавад. $f_{\min} = 0$ ҳангоми $x = 0$ ва $f_{\max} = \left(\frac{2}{\ell n2}\right)^2 \cdot 2^{-\frac{2}{\ell n2}}$ мебошад. **249.** $26\frac{2}{3}$. **250.** $\left(\frac{37}{8}; -1\right)$.

251. 0. **252.** Ҳ а л. $\frac{2a^2}{1+a^4} - 1 = \frac{2a^2 - 1 - a^4}{1+a^4} = -\frac{(a^2-1)^2}{1+a^4} \le 0$. **253.** 8.

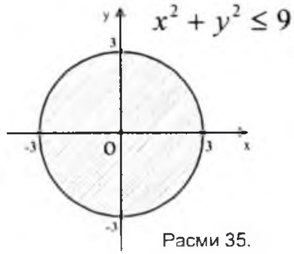
254. а) $0{,}5(e-1)$; б) $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$; в) $\frac{12}{\ell n2}$; г) $\frac{14}{\ell n4}$. **255.** а) $\frac{e^2-1}{e}$; б) $\frac{3}{\ell n4} - \frac{1}{\ell n2}$; в) $\frac{6}{\ell n3}$; г) $\frac{e^2+1}{2} - e$. **256.** а) $2 - \frac{1}{\ell n2}$; б) Ҳ а л. Графики функсияҳои додашударо схемавӣ месозем (расми 34). Соҳаеро, ки масоҳати онро ёфтан зарур аст, бо хати рах-рах қайд мекунем. Аз нақша дида мешавад, ки масоҳати матлуб



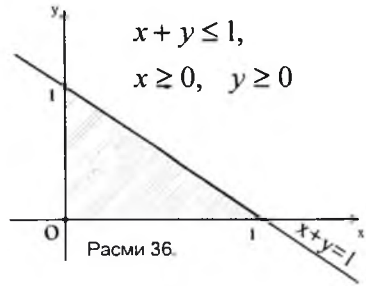
Расми 34.

$$S = 2e - \int_{-1}^{0} e^{-x}dx - \int_{0}^{1} e^{x}dx = 2e + e^{-x}\Big|_{-1}^{0} -$$

$-e^x\Big|_0^1 = 2e+1-e-e+1=2$; в) $\frac{e^4-5}{4}$; г) $\frac{3}{\ell n4}-1$; **257.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{36}+\frac{n\pi}{6}$, $n\in Z$. **258.** Не. **259.** 10 рӯз. **260.** а) Расми 35; б) Расми 36.



Расми 35.



Расми 36.

261. $-3\frac{4}{7}$. **262.** а) $-(\frac{1}{4}\ell oga+\ell ogb+\log 2)$;

б) $-\frac{1}{2}(\log 2-\log 3+\frac{1}{3}\log c-\frac{1}{2}\ell ogd)$. **263.** а) $\frac{5}{2+5x}$;

б) $\frac{1}{(x+4)\ell n0{,}2}$; в) $\frac{1}{x\ell n10}-\cos x$; г) $\frac{2}{(2x+1)\ell n3}$. **264.** а) $1+\ell nx$;

б) $x(2\ell nx+1)$; в) $\frac{1-\ell nx}{x^2}$; г) $\frac{\ell nx-1}{\ell n^2x}$.

265. а) $\frac{1+x[x-2(x+3)\ell n(x+3)]}{(x+3)(x^2+1)^2}$; б) $\frac{x+(1-x)\ell n(1-x)}{(1-x)\ell n^2(1-x)}$;

в) $\frac{x(2\ell n3x-1)}{\ell n^2 3x}$; г) $\frac{1+x(1-\ell n4\ell og_4 x)}{x\ell n4\cdot(x+1)^2}$. **266.** а) $y-x=0$; б) $y-2x+1=0$; в) $y-3ex+6=0$; г) $y-\frac{1}{\ell n2}x=0$. **267.** а) дар $(0;\ e^{-2})$ кам шуда, дар $(e^{-2};\ \infty)$ меафзояд. $f_{\text{mm}}=-\frac{2}{e}$ ҳангоми $x=e^{-2}$ будан; б) дар $(0;\ e)$ кам шуда, дар $(e;\ \infty)$ меафзояд.

$f_{\min}=\frac{1}{e}$ ҳангоми $x=e$ будан; в) дар $(0; 1)$ кам шуда, дар $(1; \infty)$ меафзояд. $f_{\min}=1$ ҳангоми $x=1$ будан; г) дар $(0; \frac{1}{\sqrt{e}})$ кам шуда, дар $(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty)$ меафзояд. $f_{\min}=\frac{1}{2e}$ ҳангоми $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ будан **268.** $e-1$. **269.** –2 ва 1. **270.** $\frac{3^{tgx}\ell n3}{\cos^2 x}$. **271.** $\sqrt[4]{x}-3$. **272.** (7; 12) ва (-12; -7).

273. а) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$; б) $\sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$; в) $\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$; г) $-\sqrt{7}x^{-\sqrt{7}-1}$. **274.** а) $-e\cdot x^{-e-1}$; б) $\frac{1}{2}\ell n4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\ell n4-1}$; в) $3\ell n2\cdot(3x)^{\ell n2-1}$; г) $\pi x^{\pi-1}$. **275.** а) $\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{2(1+\sqrt{2})}+C$; б) $\frac{x^{3\sqrt{2}+1}}{1+3\sqrt{2}}+C$; в) $\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$; г) $\frac{x^{1-\sqrt{5}}}{5(\sqrt{5}-1)}+C$. **276.** а) $2\ell n|x+3|+C$; б) $\ell n|x+1|+C$; в) $2\ell n|x|+C$; г) $\ell n\frac{x^2}{|x+4|}+C$. **277.** а) $\frac{62}{5}$; б) $4(\sqrt{2}-1)$; в) 5; г) 4. **278.** а) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\left(1-2^{-\sqrt{2}-2}\right)$; в) $90\frac{5}{7}$; г) $18\frac{3}{4}$. **279.** а) $2+\ell n4$; б) $3\ell n3$; в) $1{,}5\ell n2$; г) $8+\ell n2$. **280.** $(-\infty; \infty)$. **281.** 0,5. **282.** Нархи қалам 7 дир. ва нархи дафтар 14 дир. аст. **283.** $f_{\min}=-2{,}5$ ҳангоми $x=-2$ ва $f_{\max}=-2$ ҳангоми $x=-1$ будан. **284.** Н и ш о н д о д. Аз формулаи суммаи синусҳо ва фарқи косинусҳои ду кунҷ истифода кунед. **287.** $\approx 3{,}4$ *сол*. **288.** $\approx 36{,}7$ *сол*. **289.** ≈ 5280 *сол*. **290.** 1,21 маротиба. **291.** Тахминан баъди 57 сол. **292.** $\frac{1000\ell n0{,}6}{\ell n0{,}8}$. **293.** $y(y-1)(y-2)$. **294.** $-(\sin\alpha+\cos\alpha)$. **295.** 12 см ва 5 см. **296.** –4 ва 5. **297.** $\frac{4}{3}$. **299.** а), г) Якумаш; б), в) дуюмаш. **300.** а) $\frac{1}{28}$; б) 1; в) 2; г) $-\frac{5}{2}$. **301.** а) 0; б) $\ell n3$; в) 0 ва 1; г) –1 ва

1. **302**. а) $(3;\infty)$; б) $(-\infty;-0,5)$; в) $[-1,5;\infty)$; г) $(-\infty;-0,25\ ]$. **303**. а) $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$; б) $(-\infty;0)\cup(\frac{1}{2};\infty)$ в) $(-\infty;0]$; г) $[\ 0;\infty)$. **304**. а) (0; 1); б) (1; 1); в) $(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\sqrt{2})$ ва $(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2})$; г) (2; 1) ва (1; 2). **305**. а) 2,5; б) –3; в) –2; г) $-\frac{1}{2}$. **306**. а) 40; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,4; г) 0,3. **307**. б) $5\ell gc-\frac{2}{3}(1+\ell gb)$; г) $2(1+\ell og_{0,4}b)-4,5\ell og_{0,4}c$. **308**. а) 49; б) 63; в) $17\frac{7}{9}$; г) 0,09. **310**. а) $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$; б) $(-\infty;7)$; в) (-3; 3); г) (-2; 3). **311**. б), в) якумаш; а), г) дуюмаш. **312**. а) $\ell og_2 5$; б) $\ell og_{0,3}\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{\ell og_4 1,25}$; г) $-\frac{\ell og_3 108}{\ell og_3 2}$. **313**. а) 18,5; б) 2; в) 0,6; г) $\frac{5}{7}$. **314**. а) 3 ва 9; б) 1; в) – 4 ва 5; г) $-\sqrt{6}$ ва $\sqrt{6}$. **315**. а) 2; б) 2; в) 0; г) 100 ва 0,01. **316**. а) $\left[3\frac{1}{8};\infty\right)$; б) $\left[\frac{11}{4};\ \infty\right)$; в) $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$; г) $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$. **317**. а) (-3; 1); б) $\left[-3;\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};4\right]$; в) (0; 1); г) $(0,\ 0,001]\cup[10,\ \infty)$. **318**. а) (2; 5) ва (5; 2); б) $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{4};\ 8\right)$ ва (2; 1); г) (2; 4). **319**. а) $6e^{5-2x}$; б) $16\cdot 7^{4x-1}\ell n7$; в) $-14e^{-14x}$; г) $-3\cdot 5^{-3x}\ell n5$. **320**. а) $\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{3}{2}e^{-2x}+C$; б) $6e^{0,5x}+C$; в) $\frac{4^x}{\ell n4}+C$; г) $\frac{0,3^x}{\ell n0,3}+C$. **321**. а) $1+\lg 5x$; б) $ctgx$; в) $\frac{3}{(3x+1)\ell n2}$; г) $\frac{2x}{(x^2+1)\ell n0,2}$. **322**. а) $5\sqrt{3}x^{5\sqrt{3}-1}$ ва $\frac{x^{5\sqrt{3}+1}}{5\sqrt{3}+1}+C$;

б) $-ex^{-e-1}$ *ва* $\frac{x^{1-e}}{1-e}+C$; *в)* $\frac{1}{\pi}x^{\frac{1}{\pi}-1}$ *ва* $\frac{\pi x^{\frac{1}{\pi}+1}}{\pi+1}+C$; *г)* $\sqrt{23}x^{\sqrt{23}-1}$ *ва* $\frac{x^{\sqrt{23}+1}}{\sqrt{23}+1}+C$. **323.** а) $\ell n|x+3|+C$; б) $4\ell n|x|+C$; в) $\ell n\frac{\sqrt{|x|}}{|x+3|}+C$; г) $\frac{3}{2}\ell n|2x+1|+C$. **324.** а) $\frac{20}{\ell n5}$; б) $e-1$; в) $\frac{\ell n5}{5}$; г) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$.

ТАКРОР

Дар поён мисолу масъалаҳое гирд оварда шудаанд, ки ҳалли онҳо зарурияти истифодаи тамоми паҳлӯҳои маводи назариявиро аз курсҳои «Математика»-и синфҳои IV-VI ва «Алгебра»-и синфҳои VII-XI инъикос мекунанд. Маводи ин боб барои тайёрӣ ва бомуваффақият супурдани имтиҳони хатмкунӣ пешбинӣ мешавад.

§8. АДАДҲОИ ҲАҚИҚӢ

26. Ададҳои ратсионалӣ ва ирратсионалӣ

325. Исбот кунед, ки ҳосили зарби се адади пай дар пайи дилхоҳи натуралӣ ҳам ба 2 ва ҳам ба 3 тақсим мешавад.

326. Исбот кунед, ки адади шумораи нолҳояш ҷуфти 1000...0001 ба адади 11 тақсим мешавад.

327. Исбот кунед, ки барои ҳеҷ гуна қимати натуралии n, ифодаи n^2+1 ба 3 тақсим намешавад.

328 Дар адади 642... ба ҷои нуқтаҳо ду рақамро чунон нависед, ки адади ҳосилшудаи панҷрақама: а) ба 3 ва ба 5; б) ба 4 ва ба 9 тақсим шавад.

329. Суммаи се адади тоқи пай дар пай ба 75 баробар аст. Адади аввалинашро ёбед.

330. Суммаи чор адади ҷуфти пай дар пай ба 84 баробар аст. Адади охиринашро ёбед.

331. Исбот кунед, ки

а) $|a| = |-a|$; б) $a \le |a|$; в) $|a|^2 = a^2$.

332. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\left(5{,}05 : \dfrac{1}{40} - 2{,}8 \cdot \dfrac{5}{6}\right) \cdot 3 + 1{,}6 \cdot 0{,}1875$;

б) $\left(\dfrac{1}{2} + 0{,}125 - \dfrac{1}{6}\right) \cdot \left(6{,}4 : \dfrac{80}{3}\right) + \dfrac{1}{8}$;

в) $\left(6\dfrac{3}{5} : 6 - 8{,}016 \cdot 0{,}125 + \dfrac{2}{15} \cdot 0{,}03\right) \cdot 2\dfrac{3}{4}$;

г) $\left(9\dfrac{3}{20} - 1{,}24\right) : 2\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{3}{4} + 2\dfrac{5}{8}\right) : 0{,}625$.

333. Ҳисоб кунед:

а) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot 1{,}8\cdot 1\frac{1}{5}:0{,}07}{\frac{1}{5}:0{,}49\cdot 2\frac{5}{8}}$; б) $\dfrac{12{,}75\cdot \frac{4}{25}\cdot 1{,}8}{1\frac{1}{2}\cdot 2{,}04:20}$;

в) $\dfrac{0{,}2\cdot (6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9)}{\cdot 2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22\cdot 0{,}1}$; г) $\dfrac{(1{,}75\cdot \frac{2}{5}+1{,}75:1\frac{1}{8})\cdot 1\frac{5}{7}}{\frac{17}{40}-0{,}325):\frac{1}{5}\cdot 0{,}4}$.

334. КТУ-и ададҳои: а) 180 ва 120; б) 72 ва 90-ро ёбед.

335. ХКУ-и ададҳои: а) 180 ва 140; б) 32 ва 48-ро ёбед.

336. Маълум, ки $a\approx 9{,}6$ ва $b\approx 4{,}2$ аст. Қимати тақрибии ифодаро ёбед: а) $4a+b$; б) $a-2b$; в) $a\cdot b$; г) $\dfrac{a}{b}$.

337. Ба намуди касри одӣ нависед:

а) 1, (4); б) 0, (37); в) 1, 0(7); г) 1, 2(62); д) 1, (26).

338. Нишон диҳед, ки ададҳои $\sqrt{3}$ ва $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ададҳои ирратсионалианд.

339. Ададҳоро бо тартиби афзуншавӣ ҷойгир кунед. Аз байни онҳо ададҳои ирратсионалиро нишон диҳед:

а) $\sqrt{3}$; -2; -1,8; $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\log_2 5$; -2; $\dfrac{5}{8}$; $-\sqrt{5}$.

в) 0, (1); $\dfrac{5}{6}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{e}{2}$; г) e; -1, (4); $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

340. Ададҳоро муқоиса намоед:

а) $\dfrac{2}{\lg\frac{1}{3}}$ ва $\dfrac{3}{2\lg\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{3}+2$ ва $\sqrt{15}$;

в) $\log_2 5$ ва $\log_5 2$;　　　г) $8^{\log_3 6}$ ва $6^{\log_3 8}$;

д) $\cos 2{,}3$ ва $\cos 6{,}4$;　　　е) $\sqrt{3}+\sqrt{8}$ ва $\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

341. Ратсионалӣ (бутун) будани ададҳоро нишон диҳед:

а) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}$;　　　б) $(\sqrt{3}+1)^2+(1-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$;

в) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}-0{,}8\sqrt{6}$;　　　г) $(2\sqrt{8}-4\sqrt{18}+\sqrt{32}):\sqrt{2}$;

д) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}+4}$;　　　е) $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}$.

27. Фоизҳо ва таносубҳо

342. p - фоизи адади a - ро ёбед, агар: а) $p=12$, $a=18$; б) $p=35$, $a=64$; в) $p=24$, $a=48$; г) $p=105$, $a=120$ бошад.

343. p - фоизи адад ба a баробар аст. Ададро ёбед, агар:

а) $p=4$, $a=7$;　　б) $p=36$, $a=16$;　　в) $p=22$, $a=68$; г) $p=18$, $a=46$ бошад.

344. Адади a нисбати адади b чанд фоизро ташкил мекунад, агар: а) $a=40$, $b=50$; б) $a=75$, $b=35$; в) $a=160$, $b=365$; г) $a=14$, $b=92$?

345. Доя аз 16 сар гов 96 л, дояи дигар аз 14 сар гов 84,28 л шир дӯшиданд. Маҳсулнокии кори кадоме аз дояҳо хубтар аст?

346. Аъзои номаълуми таносубро ёбед:

а) $5\dfrac{3}{5}:3\dfrac{1}{3}=x:5\dfrac{1}{4}$;　　　б) $3\dfrac{1}{6}:4\dfrac{1}{2}=1:x$;

в) $\dfrac{x}{2{,}1}=\dfrac{7{,}4}{15}$;　　　г) $\dfrac{0{,}4}{x}=\dfrac{14}{3\frac{1}{6}}$.

347. Бузургии x аз таносуби зерин ёфта шавад:

а) $$\frac{x}{3\frac{1}{2}\cdot(3\frac{1}{4}-2{,}2)}=12:\frac{\frac{1}{2}-0{,}3}{2+1\frac{3}{5}};$$

б) $$\frac{16{,}2\cdot 0{,}25-7{,}4:\frac{37}{2}}{x}=9:(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9).$$

348. Аз ду маҳал, ки масофаашон 31 км аст, дар як вақт ду савора ба роҳ баромаданд. Суръати ҳаракати яке аз савораҳо 12 км/соат, суръати ҳаракати дигар 15 км/соат буд. Баъди чанде онҳо бо ҳам вомехӯранд. То лаҳзаи вохӯрӣ ҳар кадоме аз савораҳо кадом масофаро тай кардааст?

349. Фарқи ду каср ба $\frac{2}{9}$ баробар буда, сурати онҳо ҳамчун 4:1 ва махраҷҳои мувофиқи онҳо ҳамчун 3:1 нисбат доранд. Ин касрҳоро ёбед.

28. Прогрессияҳои арифметикӣ ва геометрӣ

350. Суммаи аъзоҳои сеюм ва нуҳуми прогрессияи арифметикӣ ба 8 баробар аст. Суммаи 11 аъзои аввалаи ин прогрессияро ёбед.

351. Аъзои якум ва чоруми прогрессияи арифметикӣ мувофиқан ба 1,2 ва 1,8 баробаранд. Суммаи шаш аъзои аввалаи онро ёбед.

352. Ҳисоб кунед: 7,5+9,8+12,1+…+53,5

353. Суммаи ҳамаи ададҳои дурақамаро ҳисоб кунед.

354. Дар байни 3 ва 33 сето чунин ададро ёбед, ки онҳо бо ин ададҳо дар ҳамҷоягӣ прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд.

355. Дар прогрессияи арифметикӣ аъзои даҳум ба 13 ва аъзои панҷум ба 18 баробар аст. Фарқи прогрессияро ёбед.

356. Прогрессияи арифметикии (a_n)–ро ёбед, агар $a_1+a_5=24$ ва $a_2\cdot a_3=60$ бошад.

357. Барои кадом қимати x ададҳои $\ell g2$, $\ell g(3^x-3)$, $\ell g(3^x+9)$ прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд?

358. Махраҷи прогрессияи геометрӣ ба –2, суммаи панҷ аъзои аввалаи он ба 5,5 баробар аст. Аъзои панҷуми ин прогрессияро ёбед.

359. Махраҷи прогрессияи геометрии (b_n)–ро ёбед, агар $b_1 + b_4 = 14$ ва $b_2 + b_5 = 42$ бошад.

360. Аъзои якуми прогрессияи геометрии (b_n)–ро ёбед, агар:

а) $b_6 = -\frac{4}{27}$, $q = -\frac{1}{3}$; б) $b_6 = \frac{243}{64}$, $q = 1{,}5$ бошад.

361. Аъзои якуми прогрессияи геометрӣ 150, чорумаш 1,2 мебошад. Аъзои панҷуми прогрессияро ёбед.

362. Ҳисоб кунед:

$$32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + \ldots$$

363. Аъзои сеюми прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед, агар суммаи он ба 1,6 ва аъзои дуюмаш ба – 0,5 баробар бошад.

364. Суммаи аъзоёни прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед, агар аъзои сеюм 2 ва аъзои шашум $\frac{1}{4}$ бошад.

365. Касри даврии беохирро дар шакли касри одӣ нависед:

а) 0,2(31); б) 0,11(3); в) 8,4(1); г) 2,(02).

§9. ТАБДИЛДИҲИИ АЙНИЯТИИ ИФОДАҲО

29. Ифодаҳои алгебравӣ

366. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $a^4 - 1$; б) $4xy + 12y - 4x - 12$;

в) $a^3 + a^2b + a^2 + ab$; г) $x^2 - y^2 - x - y$.

367. Амалҳоро иҷро кунед:

а) $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$; б) $\frac{4}{a-2} + \frac{8}{2a-a^2}$;

в) $\dfrac{m^2}{m^2-25}\cdot(m^2+5m)$; г) $\dfrac{1}{a^2+ab}:\dfrac{1}{a^2-ab}$.

368. Ифодаро сода кунед:

а) $\dfrac{x+y}{2xy-y^2}\cdot\left(x+y-\dfrac{x^2}{x+y}\right)$; б) $\dfrac{2x^2-2y^2}{x}\cdot\dfrac{4x}{x-y}-\dfrac{16xy}{x+y}$;

в) $\left(\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{a}\right)\cdot\dfrac{ab}{b^2-a^2}-\dfrac{2}{a+b}$;

г) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+9}-\dfrac{x}{9+3x}:\left(\dfrac{9}{x^3-9x}+\dfrac{1}{x+3}\right)$.

369. Ифодаро сода намоед:

а) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}$;

б) $\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y^3}{x^3}-\dfrac{y^4}{x^4}\right)\right)\right)$;

в) $\left(\dfrac{x}{y^2+xy}+\dfrac{x-y}{x^2-xy}\right):\left(\dfrac{y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{1}{x-y}\right)$;

г) $\dfrac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\dfrac{a^4-16}{a^2+4}$.

30. Ифодаҳое, ки дорои радикалҳо ва дараҷаҳои нишондиҳандаашон касрианд

370. Махраҷро аз иррационалӣ озод намоед:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{17}}$; г) $\dfrac{4}{7-\sqrt{3}}$.

371. Сурати касрро аз иррационалӣ озод кунед:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{3}$; в) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$; г) $\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$.

372. Ҳисоб кунед:

а) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+810000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+(0,63)^{0}$;

б) $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$;

г) $2\sqrt{5}-2\sqrt{45}+2\sqrt{20}$.

373. Ифодаро сода кунед:

а) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{25}b^{\frac{2}{3}}-4}{\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}+2}-\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}$;

в) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$;

г) $\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$.

374. Ифодаро сода карда, қиматашро барои қиматҳои додашудаи параметрҳо ёбед:

а) $\frac{\sqrt{(b+2)^{2}-8b}}{\sqrt{b}-\frac{2}{\sqrt{b}}}$ ҳангоми $b=0,0025$;

б) $\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1}$ ҳангоми $x=4$;

в) $\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}:\left(\sqrt{abc}+2\right)$ ҳангоми $a=0{,}04$;

г) $\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2-ab\right)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ ҳангоми $a=1{,}2$ ва $b=0{,}6$ будан.

31. Ифодаҳои тригонометрӣ

Ифодаро сода кунед (375-376):

375. а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}$; б) $\frac{4\sin 25^0\sin 65^0}{\cos 40^0}$;

в) $\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{\pi}{8}-\cos^4\frac{\pi}{8}\right)$; г) $\cos 2\gamma+2\sin(\gamma+30^0)\sin(\gamma-30^0)$.

376. а) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$; б) $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}-\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$;

в) $\frac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha+\cos 3\alpha\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}$;

г) $\frac{1+\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\,\sin^2\beta}-ctg^2\alpha-ctg^2\beta$.

377. Ёбед: а) $tg\alpha$ -ро, агар $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ бошад;

б) $ctg\alpha$ -ро, агар $\cos 2\alpha=-\frac{5}{13}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ бошад;

в) $\sin\alpha$ -ро, агар $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$ бошад;

г) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ -ро, агар $tg\alpha=\frac{2}{3}$ бошад.

378. Ҳисоб кунед:

а) $\cos 15^0 - \sin 15^0$;

б) $\dfrac{\sin 120^0}{1+\cos 120^0} \cdot \dfrac{\cos 60^0}{1+\cos 60^0}$;

в) $2\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{24} - \sin^2\dfrac{\pi}{24}\right)$;

г) $\dfrac{\sin 20^0 \sin 50^0 \sin 70^0}{\sin 80^0}$.

379. Ҳисоб намоед:

а) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$;

б) $\dfrac{10\sin 40^0 \sin 50^0}{\cos 10^0}$;

в) $\dfrac{\pi}{12}\left[arc\cos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + arc\sin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg\left(-\sqrt{3}\right)\right]$;

г) $\cos^2\left(\dfrac{7}{8}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{3}{8}\pi + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - \alpha\right)$.

380. Ҳисоб кунед:

а) $tg\beta$ -ро, агар $tg\alpha = 1$ ва $tg(\alpha - \beta) = -2$;

б) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$-ро, агар $tgx = 2$;

в) $\sin(2\alpha + 3\pi)$ -ро, агар $tg\alpha = \dfrac{2}{3}$;

г) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ -ро, агар $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$ бошад.

32. Ифодаҳое, ки дараҷаҳо ва логарифмҳоро дар бар мегиранд

Ададҳоро муқоиса намоед (381-382):

381. а) 2^{400} ва 3^{200}; б) $-\log_4\frac{1}{4}$ ва $8^{\log_3 1}$;

в) 5^{200} ва 2^{500}; г) $\log_5\sqrt{2}$ ва $\log_3\frac{1}{27}$.

382. а) $\log_3 4+\log_3 6$ ва $\log_3(4+6)$;

б) $\log_8 9-\log_8 7$ ва $\log_8(9-7)$;

в) $4\log_6 2$ ва $\log_6(4-2)$;

г) $\log_2 1{,}5+\log_2 3$ ва $\log_2 1{,}5^2$.

383. Ифодаро сода кунед:

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}$; б) $2^{4\log_4 a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}a}$.

384. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\frac{\lg 2+\lg 16}{2\lg 2+\lg 4}$; б) $\log_3\log_4\sqrt[9]{4}$;

в) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}$; г) $\frac{2}{5}\left(\log_3 81+16^{\log_2 3}\right)^{\log_{85}25}$.

385. Аз баробарӣ x-ро ёбед:

а) $\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}}5$; б) $\lg x=\lg 6+\lg 2$;

в) $\log_4 x=\log_2 3+\log_2\frac{\sqrt{2}}{3}$; г) $\log_3 x=\frac{1}{2}\log_3 16+3\log_3 0{,}5$.

386. Ҳисоб кунед:

а) $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}}b\sqrt{a}$ -ро, агар $\log_a b=14$;

б) $\log_{\sqrt[4]{ab}}\frac{b}{\sqrt{a}}+\log_{\sqrt[4]{ab}}\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ -ро, агар $\log_a b=3$ бошад.

387. Қимати ифодаро ёбед:

а) $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $2^{\frac{1}{2\log_5 2}} \cdot 5^{\log_5^2 2} - \sqrt{5} \cdot 2^{\log_5 2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 25}$.

§10. ФУНКСИЯҲО

33. Функсияҳои ратсионалӣ

388. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \frac{x-2}{x^2 - x}$; б) $y = x^2 - \frac{1}{x+1}$;

в) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$; г) $y = \frac{1}{4x^2 - 2x - 2}$.

389. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян намоед:

а) $y = x^3 - 2x$; б) $y = \frac{4x^2}{1-x^2}$; в) $y = 4x^4 - 2x^2 + 7$;

г) $y = -\frac{4}{x^3}$; д) $y = \frac{2}{x^2} + 3$; е) $y = x^5 - 2x^3$.

390. Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

а) $y = \frac{x-2}{3x}$; б) $y = \frac{x^2 - 9}{4 - x^2}$; в) $y = 1 - \frac{x-3}{5x+2}$ г) $y = -x^2 + 3x - 2$.

391. Фосилаҳои афзуншавӣ (камшавӣ) ва нуқтаҳои экстремалии функсияро (агар чунин нуқтаҳо вуҷуд дошта бошанд) ёбед:

а) $y = 2x^2 + 3x + 1$; б) $y = 1 - \frac{1}{x}$; в) $y = (x-1)^4 - 1$; г) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

392. Функсияро тадқиқ намуда, графикашро созед:

а) $y = x^2 - 5$; б) $y = 2x^2 - 7x + 3$;

в) $y = -x^2 + 4x - 3$; г) $y = -3 + (x+1)^2$.

393. Магар графики функсияҳои:

а) $y = x^2$ ва $y = x + 12$;	б) $y = -\frac{2}{x^2}$ ва $y = x^2 - 2$

нуқтаҳои умумӣ доранд?

34. Функсияҳои тригонометрӣ

394. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = \frac{4}{\sin^2 x}$;	б) $y = \frac{1}{1 + \cos 2x}$;

в) $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}}$;	г) $y = \frac{x^2}{\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}$.

395. Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y = 2 - \cos^2\frac{x}{2}$;	б) $y = 2\sin x\, ctgx$;

в) $y = |\cos x| - 1$;	г) $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$.

396. Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

а) $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;	б) $y = 1 - tg2x$;

в) $y = 1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$;	г) $y = 2 + \cos 2x$.

397. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян намоед:

а) $y = \frac{x}{\sin x} - \cos x$;	б) $y = \frac{\cos x \sin^2 x}{x}$;

в) $y = tg4x - ctg2x$;	г) $y = \frac{\cos 2x}{x^2}$.

398. Даври функсияро ёбед:

а) $y = \sin 4x$; б) $y = 2\,ctgx$; в) $y = 1 - \cos 6x$; г) $y = 3\,tg\frac{x}{2}$.

399. Экстремали функсияро ёбед:

а) $y = 2 + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

в) $y = 0{,}25\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$; г) $y = \cos^2(5x - \pi)$.

400. Экстремуми функсияро муайян намоед:

а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; б) $y = 2 - 6\cos 2x$;

в) $y = 1 + |\cos 2x|$; г) $y = 1 + 2|tgx|$.

35. Функсияҳои дараҷагӣ, нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

401. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y = 8x - x^2$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; в) $y = \sqrt[8]{4 - x^2}$;

г) $y = \sqrt{x \cdot 4^x - 4^{x+1}}$; д) $y = \sqrt[10]{2^{\cos x} - 1}$;

е) $y = \ell og_3(1 + 4x - x^2)$; ж) $y = \ell og_3 \cos x$;

з) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\ell g(x + 10)^2}$; и) $y = \sqrt[4]{\ell g(4x^2 - x)}$.

402. Соҳаи қиматҳои функсияро ёбед:

а) $y = 3\sqrt{x + 1}$; б) $y = 4^{3-x} - 1$; в) $y = 1 - \sqrt[4]{x}$; г) $y = 1 + |\ell og_3 x|$.

403. Фосилаҳои доималоматии функсияро ёбед:

а) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 2$; б) $y = 4 - 5^x$;

в) $y = \ell og_3(x + 2)$; г) $y = \ell og_2(x - 3) - 2$.

404. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян намоед:

а) $y = 2^x + 2^{-x}$; б) $y = \ell og_4(1 - x^2)$;

в) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ г) $y = x^{\frac{3}{5}}$.

405. Экстремуми функсияро ёбед:

а) $y=\sqrt{25-x^2}$; б) $y=5^{\frac{1}{x^2+1}}$; в) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$; г) $y=2^{\sin x}$.

§11. МУОДИЛАҲО ВА НОБАРОБАРИҲО. СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО ВА НОБАРОБАРИҲО

36. Муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ

Муодиларо ҳал кунед (406-407):

406. а) $2(x-1)-7=4-(6x+2)$; б) $2-8(x+2)=3\cdot(x-1)-7$;

в) $\dfrac{2x+1}{5}=7-\dfrac{5(x+4)}{2}$; г) $2-\dfrac{x-4}{3}=x-\dfrac{4(5+2x)}{9}$.

407. а) $|2x-3|=5$; б) $|2-7x|=8$;

в) $\left|1-\dfrac{x+3}{2}\right|=2$; г) $\left|\dfrac{4x-1}{5}-2\right|=1$.

408. Барои кадом қимати a муодилаи:

а) $ax-2x=4(x-2)$ ҳалли ягона дорад;

б) $a(1-x)+3=3x+ax$ ҳал надорад;

в) $1+2(x+3a)=(a-1)x+19$ ҳалҳои бешумор дорад?

Нобаробариро ҳал намоед (409-410):

409. а) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{9}{10}x>\dfrac{1}{10}-x$; б) $x-\dfrac{x+4}{4}+\dfrac{3x-1}{2}<3$;

в) $\dfrac{12x-1}{3}<4x-3$; г) $\dfrac{3x-2}{4}<2(x-1)-\dfrac{x}{8}$.

410. а) $|2x-3|<1$; б) $|4x+3|\ge 2$;

в) $(x-1)|5-3x|<2$; г) $(x-2)|2x+1|\le 0$.

411. Муодиларо ҳал намоед:

а) $x^2-2x-8=0$; б) $3x^2+2x=0$

в) $\frac{4x^2-1}{3}=x(10x-9)$; г) $\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{5}$.

412. Барои кадом қимати k муодилаи:

а) $(k-1)x^2+(k+4)x+(k+7)=0$ дуто ҳалли гуногун дорад;

б) $9x^2-2x+k=6-kx$ дуто ҳалли якхела дорад;

в) $3kx^2-6x+k-2=0$ ҳал надорад?

413. Муодилаи $2x^2-8x-11=0$-ро ҳал накарда: а) суммаи решаҳо; б) ҳосили зарби решаҳо; в) суммаи чаппаи решаҳо; г) суммаи квадрати решаҳоро ёбед.

Муодиларо ҳал кунед (414-415):

414. а) $\frac{x^2-16}{x+3}=0$; б) $\frac{x}{2x+3}=\frac{1}{x}$;

в) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$; г) $\frac{4}{x-1}-x=2$.

415. а) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}$; б) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$;

в) $\frac{14x^2}{16-x^2}+\frac{11}{x-4}=\frac{49}{x+4}$; г) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$.

416. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $2x^2+13x-7<0$; б) $-2x^2-5x+18\geq 0$;

в) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\geq 0$; г) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$.

37. Муодилаҳо ва нобаробариҳои ирратсионалӣ

Муодиларо ҳал кунед (417-419):

417. а) $\sqrt{x+2}=x$; б) $(x-5)(x+2)\sqrt{x-7}=0$;

в) $2\sqrt{x+5}=x+2$; г) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.

418. а) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$; б) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;

в) $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$; г) $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-1}}=x-1$.

419. а) $\sqrt{\dfrac{10+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{10-x}{x}}=\sqrt{6}$; б) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$;

в) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$; г) $\sqrt[3]{5+\sqrt{x+15}}=1$.

Нобаробариро ҳал намоед (420-421):

420. а) $\sqrt{x-5}<1$; б) $\sqrt{-x}\cdot(x+1)>0$;

в) $\sqrt{9x-20}<x$; г) $\sqrt{x+61}<x+5$.

421. а) $\sqrt{5-x}>\sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{x^2+x+2}<2$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x-1}\geq 0$; г) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\leq 0$.

38. Муодила ва нобаробариҳои тригонометрӣ

Муодиларо ҳал кунед (422-424):

422. а) $2\sin x-\sqrt{3}=0$; б) $tg2x-1=0$;

в) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$; г) $3ctg\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

423. а) $\cos^2 x-\sin^2 x=1$; б) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$;

в) $2\cos 2x+5\sin x-3=0$; г) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

424. а) $2\sin^2 3x+5\sin 3x=0$; б) $\sin(15^0+x)+\sin(45^0-x)=0$;

в) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$; г) $1-\cos x-2\cos\frac{x}{2}=0$.

425. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\sin x>\frac{1}{2}$; б) $2\cos 2x\le\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}tg2x\le 1$; г) $tgx+ctgx\ge 0$.

39. Муодилаҳо ва нобаробариҳои нишондиҳандагӣ

Муодилаҳо ҳал намоед (426-429):

426. а) $\left(\frac{5}{2}\right)^x=\left(\frac{4}{25}\right)^2$; б) $\sqrt[4]{125^{3-2x}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$;

в) $2^{5x+1}=4^{2x}$; г) $2^{x-2}=1$.

427. а) $\left(\frac{11}{2}\right)^{8x^2+5x}=\left(\frac{2}{11}\right)^{-2x^2-8x}$; б) $\left(\frac{33}{16}\right)^{\frac{11}{\sqrt{x+1}}+5}=\left(\frac{16}{33}\right)^{\frac{7}{\sqrt{x+1}}-8}$;

в) $7\cdot 5^x-5^{x+1}=2\cdot 5^{-3}$; г) $2\cdot 4^{x+1}-2^{x+1}-1=0$.

428. а) $6^{x-2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-2}{2}}=66$;

б) $3^{2x+3}+\sqrt{9^{2x+1}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}=91$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3}+49^{x-1}+7^{2x-1}=399$;

г) $4^{2-x}-4^{-(x-1)}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}-\frac{1}{\sqrt{16^{x-1}}}=516$.

429. а) $2\cdot 5^{\frac{2}{\sqrt{x}}}-3\cdot 10^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-5\cdot 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}}=0$;

б) $9\cdot 256^{\sqrt{x}}-6\cdot 144^{\sqrt{x}}-8\cdot 81^{\sqrt{x}}=0$;

в) $9\cdot 16^{x}-7\cdot 12^{x}-16\cdot 9^{x}=0$; г) $11-3^{x}=\sqrt{3^{x}-5}$.

430. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\frac{\sqrt{32}}{16}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$; б) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x}>\frac{1}{9}$;

в) $4^{x}-10\cdot 2^{x}+16<0$; г) $4{,}2^{x^2+2x-15}>1$.

40. Муодилаҳо ва нобаробариҳои логарифмӣ

Муодиларо ҳал кунед (431-433):

431. а) $\log_5(x+1)=\log_5(4x-5)$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_3\frac{1}{x+3}$;

в) $2\log_{0,5}x=\log_{0,5}(2x^2-x)$;

г) $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$.

432. а) $\log_6(2x^2-x)=1-\log_6 2$; б) $2\log_3^2x-7\log_3 x+3=0$;

в) $\log_{\frac{3}{5}}\frac{2x+3}{x-2}=1$; г) $\log_{3-x}5-\frac{1}{2}=0$.

433. а) $\log_{0,1}[x(x-7)]-\log_{0,1}\frac{9(x-7)}{x}=0$;

б) $\log_4 x+\log_2 x=3$;

в) $\log_3 x+\log_x\frac{1}{9}=1$; г) $\log_{\frac{3}{5}}x+4\log_{\frac{5}{3}}x=3$.

434. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\ell og_{\frac{1}{2}}(6-x) > -2$; б) $\ell g(3x-2) \geq 1$;

в) $\ell og_2(3-2x) - \ell og_2 13 < 0$; г) $\ell g(x^2+x+4) < 1$.

41. Системаи муодилаҳо ва нобаробариҳои ратсионалӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал намоед (435-436):

435. а) $\begin{cases} 3x+5y=21, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y=1, \\ 3x-5y=-5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x-3y=-4, \\ 4y-10x=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x-8y=0, \\ x-1{,}5y=2. \end{cases}$

436. а) $\begin{cases} x^2-y^2=14, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y=6, \\ x+y^2=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2-xy=12, \\ x^2-xy=-3. \end{cases}$

437. Барои кадом қимати a системаи муодилаҳои:

а) $\begin{cases} ax+y=1, \\ x-5y=7 \end{cases}$ ҳалли ягона дорад;

б) $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=2a \end{cases}$ ҳал надорад;

в) $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3 \end{cases}$ ҳалҳои бешумор дорад.

438. Системаи нобаробариҳоро ҳал намоед:

а) $\begin{cases} x-4>5-2x, \\ 3-2x<7+x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-\dfrac{3x-1}{2}>\dfrac{2}{3}, \\ 10x-2>1+4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 17(3x-1)-50x+1<2(x+4), \\ 12-11x<11x+10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x-2}\le 0, \\ x(x-5)<0. \end{cases}$

42. Системаи муодилаҳои иррационалӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал намоед (439-440):

439. а) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2, \\ 4\sqrt{x}+2\sqrt{y}=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ xy=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6, \\ x-y=12. \end{cases}$

440. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ x+y=35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ xy=27; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2, \\ x-2y+1=0. \end{cases}$

43. Системаи муодилаҳои тригонометрӣ

441. Ҳалли системаи муодилаҳоро дар фосилаи додашуда ёбед:

а) $\begin{cases} 2\sin x=\sqrt{2}\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\sin y \end{cases}$ дар $(0;2\pi)$;

б) $\begin{cases} \sin(x+y)=1, \\ \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ дар $(0;\pi)$;

в) $\begin{cases} \sin x+\cos y=1, \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1 \end{cases}$ дар $(0;2\pi)$;

г) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{9}, \\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ дар $(0;\pi)$.

44. Системаи муодилаҳои нишондиҳандагӣ ва логарифмӣ

Системаи муодилаҳоро ҳал намоед (442-445):

442. а) $\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\cdot 3^{x-1}-3\cdot 2^y=-1, \\ 3^{x+1}+5\cdot 2^{y-1}=14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 5^y=11, \\ 5\cdot 4^x+4\cdot 5^y=24; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^x-2^y=-1, \\ 2^{3x}-2^{3y}=-7. \end{cases}$

443. а) $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=12, \\ 2^y\cdot 3^x=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2x}-2^y=725, \\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ell og_4 x-\ell og_2 y=0, \\ x^2-2y^2-8=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \ell og_{\frac{1}{9}}(x+y)=-2, \\ \ell og_5(x-y)=2. \end{cases}$

444. а) $\begin{cases} \ell og_2 x - \ell og_2 y = 1, \\ \ell og_2 xy = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \ell og_2(x+14) + \ell og_2(x+y) = 6, \\ \ell og_4(x+y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\ell g x - \ell g 4}{\ell g y - \ell g 3} = -1, \\ \ell og_2(x-y) = 5 - \ell og_2(x+y); \end{cases}$

г) $\begin{cases} \ell g x - \ell g y = 7, \\ \ell g x + \ell g y = 5. \end{cases}$

445. а) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \ell og_{\sqrt{2}}(y-x) = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \ell og_3(2x+y^2) = 1, \\ 2^{x+y^2} - 4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ell og_5(\ell og_3 x - \ell og_3 y) = 0, \\ 4^{x-y} = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \ell og_9 x - \ell og_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

45. Масъалаҳои матнӣ

446. Аз ду қишлоқ дар як вақт ба пешвози ҳамдигар автобус ва мошини боркаш ба ҳаракат сар карданд. Баъди ним соат онҳо вохӯрданд. Масофаи байни қишлоқҳоро ёбед, агар маълум бошад, ки суръати автобус ба 60 км/соат ва суръати мошини боркаш ба 48 км/соат баробар аст.

447. Ҳавз ҳангоми кушодани 4 ҷумак дар 45 дақиқа бо об пур мешавад. Агар 6-то ҳамин ҳел ҷумакро якбора кушоем, ҳавз дар чанд дақиқа бо об пур мешавад?

448. Аз 48 кг тухмӣ $\frac{3}{4}$ ҳиссаашро барои кишт истифода бурданд. Ёбед, ки чӣ қадар тухмӣ боқӣ мондааст?

449. Трактор 24 га заминро, ки 15%-и масоҳати майдонро ташкил медод, шудгор кард. Масоҳати майдонро ёбед?

450. Падар аз писар 24 сол калон аст. Баъд аз 5 сол ӯ назар ба писараш 5 баробар калон мешавад. Ҳозир падар чандсола аст?

451. Се хонаи баландошёна 540 тиреза дорад. Хонаи дуюм назар ба хонаи якум 2 баробар бештар ва назар ба хонаи сеюм 40 тиреза камтар дорад. Шумораи тирезаҳои ҳар як хонаро ёбед?

452. Агар ба болои суммаи солҳои се писар адади 5-ро илова намоем, синни падар ҳосил мешавад. Синни писари калонӣ баъд аз 6 сол, синни писари мобайнӣ баъд аз 9 сол ва синни писари хурдӣ баъд аз 10 сол ба нисфи синни падарашон баробар хоҳад шуд. Ҳозир падар ва ҳар як писар чандсола мебошад?

453. Дар 9 соат қаиқи мотордор ба самти ҷараёни дарё ва дар 11 соат ба муқобили ҷараёни дарё масофаи якхеларо тай менамояд. Суръати қаиқро дар оби ором ёбед, агар маълум бошад, ки суръати дарё 2 км/соат аст.

454. Дар тахтаи синф ададе навишта шудааст. Яке аз талабаҳо ба он 23-ро зам намуда, дигарӣ аз он 1-ро тарҳ кард. Натиҷаи замкунӣ аз натиҷаи тарҳкунӣ 7 маротиба зиёд шуд. Дар тахта кадом адад навишта шуда буд?

455. Як тарбуз аз дигарӣ 2 кг ва аз сеюмӣ 5 маротиба сабук аст. Тарбузҳои якум ва сеюм якҷоя аз дуюм 3 маротиба вазнин мебошанд. Вазни ҳар як тарбуз чанд килограмм аст?

456. Барои 600 г конфет ва 1,5 кг кулчаҳои қандин 4,62 сомонӣ доданд. Як килограмм кулчаи қандин нисбат ба конфет 1,4 сомонӣ арзон аст. Нархи 1 кг конфет ва 1 кг кулчаи қандин чанд сомонӣ аст?

457. Дар 4 соат бо мошин ва дар 7 соат бо қатора сайёҳон 640 км масофаро тай намуданд. Суръати қатора ва мошинро ёбед, агар маълум бошад, ки суръати қатора аз суръати мошин 5 км/соат зиёд аст?

458. Суммаи рақамҳои адади дурақама ба 12 баробар аст. Миқдори даҳиҳои ин адад аз худи адад 12 маротиба хурд аст. Ададро ёбед.

459. Ду нафар барои иҷрои кор 117 сомонӣ музд гирифтанд. Шахси якум 15 рӯз ва дуюм 14 рӯз кор карда буданд. Дар як рӯз ҳар кадоми онҳо чанд сомонӣ музд мегирифтанд, агар маълум бошад, ки шахси якум дар 4 рӯз нисбат ба шахси дуюм дар 3 рӯз 11 сомонӣ зиёд музд гирифтааст.

460. Аз пункти **А** ба пункти **В** пиёдагард равон шуд. Баъди 1 соату 24 дақиқа ба ҳамон самт аз пункти **А** велосипедрон равон шуд ва пас аз як соати ҳаракаташ масофаи ӯ ва пиёдагард 1 км –ро ташкил медод. Баъди боз як соати ҳаракат кардани ҳарду, велосипедронро зарур буд, ки барои ба пункти **B** расидан масофаи нисбат ба пиёдагард 2 маротиба камтарро тай кунад. Суръати пиёдагард ва велосипедронро ёбед, агар маълум бошад, ки масофаи байни пункти **A** ва **B** 27 км аст.

461. Масоҳати секунҷаи росткунҷа 180 $см^2$ аст. Катетҳои ин секунҷаро ёбед, агар яке аз онҳо аз дигараш 31 см зиёд бошад.

462. Ду адади натуралии пай дар пайро ёбед, ки суммаи квадрати онҳо ба 61 баробар бошад.

463. Дар толори синамо 320 ҷой буд. Баъди он ки миқдори ҷойҳои ҳар як қаторро 4-то зиёд ва боз як қатори дигар илова карданд, миқдори ҷойҳо 420-то шуд. Дар толор дар аввал чанд қатор ва дар ҳар як қатор чанд ҷой буд?

464. Қатора барои бартараф кардани ақибмонии 1 соата суръаташро дар тӯли 720 км назар ба суръати аввалааш 10 км/соат зиёд намуд. Суръати аввалаи қатораро ёбед.

465*. Баъди 4 соати сар додани ҷумаки якум ҷумаки дуюмро кушоданд. Онҳо якҷоя дар 8 соат ҳавзро аз об пур карданд. Ҳар кадом ҷумак дар алоҳидагӣ ҳавзро дар чанд соат аз об пур мекунад, агар маълум бошад, ки барои ин ба ҷумаки якум 8 соат вақти зиёд лозим аст?

466*. Аз маркази ноҳияи Айнӣ ба сӯи шаҳри Душанбе автобус бо суръати 40 км/соат равон шуд ва баъди 15 дақиқа бо мошини сабукрави аз шаҳри Душанбе меомада вохӯрд. Мошини сабукрав ба маркази ноҳияи Айнӣ расида, баъди 16,5 дақиқа боз ба сӯи Душанбе равон шуд. Вай дар масофаи 20 км аз Душанбе бо автобус ҳамшафат шуд ва аз он гузашта рафт. Агар суръати мошини сабукрав 50 км/соат бошад, масофаи байни маркази ноҳияи Айнӣ ва шаҳри Душанбе чӣ қадар аст?

§12. ҲОСИЛА, ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ, ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚИ ОНҲО

46. Ҳосила

467. Аз таърифи ҳосила истифода карда, ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ёбед:

а) $f(x)=2-3x$, $x_0=4$; б) $f(x)=2x^2$, $x_0=3$;

в) $f(x)=2x-4$, $x_0=1$; г) $f(x)=x^3+2$, $x_0=-1$.

Ҳосилаи функсияро ёбед (468-471):

468. а) $f(x)=\frac{2}{5}x^5+2x^3-x+1$; б) $f(x)=(1-x)cosx$;

в) $f(x)=(x^2+3)(x^2-4x)$; г) $f(x)=\frac{\sin x}{x-2}$.

469. а) $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$; б) $f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)tgx$;

в) $f(x)=\frac{x-x^3}{1-2x}$; г) $f(x)=\frac{\sin x}{1-2\cos x}$.

470. а) $f(x)=x^2\cdot 5^x$; б) $f(x)=3^x+\ell nx$;

в) $f(x)=e^{-2x}+\ell og_2 3x$; г) $f(x)=\frac{\ell nx}{e^x+2}$.

471. а) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$; б) $f(x)=\sqrt[6]{2+x^2}-\frac{1}{(2x-1)^2}$;

в) $f(x)=\left(2-3x^2\right)^7$; г) $f(x)=\ell g4x-e^{2x}$.

472. Қимати ҳосилаи функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед:

а) $f(x)=\left(1+2x^2\right)^3$, $x_0=4$; б) $f(x)=2e^{-x}+\ell n(x+1)$, $x_0=0$;

в) $f(x)=2tgx-\cos x$, $x_0=0$; г) $f(x)=2x\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

473. Маълум, ки ҳосилаи функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$: а) мусбат; б) манфӣ аст. Нисбати рафтори ин функсия дар ин фосила чӣ гуфтан мумкин аст? Агар: в) ғайриманфӣ; г) ғайримусбат бошадчӣ?

47. Татбиқи ҳосила

474. Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)$ дар нуқтаи x_0 нависед:

а) $f(x)=x^2$, $x_0=2$; б) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2+7}}$, $x_0=5$; г) $f(x)=\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

475. Қимати тақрибии функсияи $f(x)$-ро дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x$, $x_0=2{,}0043$;

б) $f(x)=1+x^2-\dfrac{1}{3}x^3$, $x_0=1{,}98$.

476. Қимати тақрибии ифодаро ҳисоб намоед:

а) $\sqrt{15{,}84}$; б) $\cos 61^0$; в) $0{,}998^{20}$; г) $\sqrt[3]{8{,}008}$.

477. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ, нуқтаҳои экстремалии функсияро ёбед:

а) $y=x^3+2x+1$; б) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$;

в) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$; г) $f(x)=x^2e^{x+1}$.

Функсияро тадқиқ намуда графикашро созед (478-481):

478. а) $f(x)=x(3-x^2)$; б) $f(x)=x^3-3x^2+2$;

в) $f(x)=x^2(x-3)$; г) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^3$.

479. а) $f(x)=4x^2-2x$; б) $f(x)=x^3-3x^2$;

в) $f(x)=2x^3-x^2-x$; г) $f(x)=-x^4+8x^2$.

480*. а) $f(x)=1-2\sin 2x$; б) $f(x)=\cos 2x-1$;

в) $f(x)=\sin^2 x-\sin x$; г) $f(x)=1-\sin\dfrac{x}{2}$.

481*. а) $f(x)=x-\ell nx$; б) $f(x)=x\ell nx$;

в) $f(x)=2^{x^2-x}$; г) $f(x)=xe^{-x}$.

Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияи $f(x)$-ро дар фосилаи додашуда ёбед (482-484):

482. а) $f(x)=\frac{8}{3}x^3-18x^2+28x$, $[0;\ 1{,}5]$;

б) $f(x)=x^2\sqrt{3-x}$, $[1;\ 3]$;

в) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$, $[0{,}5;\ 1]$;

г) $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$, $[1;\ 3]$.

483. а) $f(x)=-x^3-6x^2+9$, $[-2;\ 2]$;

б) $f(x)=x^3+3x^2-12x$, $[-1;\ 3]$.

484. а) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

б) $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(x)=3\sin x+4\cos x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $f(x)=x+\cos^2 x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

485. Адади 10-ро ба намуди ду ҷамъшаванда тавре ифода намоед, ки суммаи дучандаи квадрати ҷамъшавандаи якум ва сечандаи квадрати ҷамъшавандаи дуюм хурдтарин бошад.

486. Адади 18-ро ба намуди суммаи се ҷамъшавандаи мусбат тавре ифода намоед, ки ҷамъшавандаи якум ба ҷамъшавандаи сеюм баробар бошад ва суммаи квадратҳои ҳамаи се ҷамъшаванда хурдтарин бошад.

487. Суммаи дарозиҳои катети секунҷаи росткунҷа ба 30 см баробар аст. Барои он ки масоҳати ин секунҷа калонтарин бошад, ҳар як катеташ бояд ба чанд баробар бошад?

488. Аз росткунҷаҳое, ки периметрашон ба p баробар аст, ҳамонашро ёбед, ки дорои масоҳати калонтарин аст.

489. Дар параболаи $y=x^2$ нуқтаеро ёбед, ки масофааш то нуқтаи А(2; 0) хурдтарин аст.

490. Нуқта аз рӯйи қонуни $s(t)=2t^2+12t+1$ ростхатта ҳаракат мекунад (масофа бо метрҳо, вақт бо сонияҳо чен мешавад). Суръат ва шитоби ҳаракатро ёбед. Дар кадом лаҳза суръати ҳаракат 36 м/сония мешавад?

491. Ҷисм аз баландии 20 м бо суръати аввалаи 50 м/сония ба боло амудӣ партофта шудааст: а) баъди 4 сония вай аз сатҳи замин дар кадом баландӣ воқеъ мешавад? б) баъд аз чанд сония ҷисм ба нуқтаи баландтарин мерасад ва дар кадом масофа аз замин ҷойгир мешавад ($g=10$ м/сония^2 қабул кунед).

492. Дар кадом нуқтаи параболаи $y=-\dfrac{x^2}{2}-1$ расандаи он ба тири абсиссаҳо дар таҳти кунҷи 45^0 моил аст?

493. Ҷисм амудӣ бо суръати аввалаи $\vartheta_0=100$ м/сония ба боло партофта шудааст. Қонуни ҳаракати он $S=\vartheta_0 t-4{,}9t^2$ аст. Суръатро дар охири сонияи 5-ум ёбед.

494. Нуқта ростхатта аз рӯйи қонуни $S=3t^3-t^2+t$ ҳаракат мекунад (вақти t бо соат, масофаи S бо метр ҳисоб карда мешавад). Суръат ва шитобро дар охири соати 2-юм ёбед?

48. Функсияи ибтидоӣ

495. Намуди умумии функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)$-ро ёбед:

а) $f(x)=2\sin x+\cos 6x$;　　б) $f(x)=x^3+x^{-7}+x^{1+\sqrt{2}}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+3$;　　г) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+\dfrac{3}{\sin^2 x}$.

496. Барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоиеро ёбед, ки графикаш аз нуқтаи M мегузарад:

а) $f(x)=\frac{3}{x}$, $M\left(\frac{1}{e};4\right)$; б) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}+\sin x$, $M(0;2)$;

в) $f(x)=x^{-4}$, $M\left(2;\frac{1}{3}\right)$; г) $f(x)=\cos 2x$, $M(0;1)$.

497. Функсияеро ёбед, ки ҳосилааш дар нуқтаи дилхоҳи x ба $4x-1$ баробар буда, қиматаш дар нуқтаи 2 ба 3 баробар аст.

498. Маълум, ки $f'(x)=4-x^3$ ва $f(1)=2$ аст. Функсияи $f(x)$-ро ёбед.

499. Нуқтаи моддӣ бо суръати $\vartheta(t)=2t+1$ ростхатта ҳаракат мекунад. Муодилаи ҳаракатро ёбед, агар маълум бошад, ки ҳангоми $t=3$ будан координатаи ин нуқта ба 5 баробар аст.

49. Интеграл

Ҳисоб кунед (500-501):

500. а) $\int\limits_{-2}^{1}(x^2-2x+3)\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(2x+\frac{\pi}{4})\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1}(4e^{4x}+2)\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{1}(3^x \ln 3+1)\,dx$.

501. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 4x+\frac{2}{\pi}\right)dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-x\right)dx$ г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin^2\frac{x}{2}-1\right)dx$.

Масоҳати фигураи бо хатҳои зерин маҳдудбударо ҳисоб кунед (502-503):

502*. а) $y=4x-x^2$, $y=5$, $x=0$, $x=3$;

б) $y=\frac{4}{x}$, $y=-x^2+4x+1$, $(x>0)$;

в) $y=-x^2-4x+4$, $y=10$, $x=-3$, $x=0$;

г) $y=-x+2$, $y=\sqrt{x}$, $y=0$.

503*. а) $y=x^2$, $y=5x^2-1$;

б) $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=(x-3)^2$, $y=9-2x$;

г) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$ $x=4$, $x=9$.

504*. Масоҳати фигураи бо хати $y=x^2-2x+2$ ва расандаи он дар нуқтаи абсиссааш баробари 3, хатҳои $x=0$ ва $y=0$ маҳдудбударо ёбед.

505*. Масоҳати фигураи бо параболаи $y=-x^2+4x-3$ ва расандаҳои он дар нуқтаҳои $M_1(0;-3)$ ва $M(3;0)$ маҳдудбударо ёбед.

506*. Барои кадом қимати $a>0$ масоҳати фигурае, ки бо хатҳои

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{2a}{x^2}+1,\quad y=0,\quad x=a,\quad x=2a$$

маҳдуд аст, калонтарин мешавад?

507*. Барои кадом қимати $a>0$ масоҳати фигураи бо хатҳои

$$y=\frac{x}{6}+\frac{1}{x^2},\quad y=0,\quad x=a,\quad x=2a$$

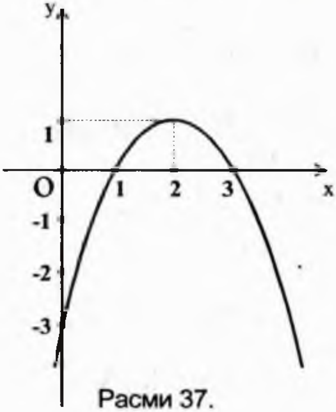
маҳдуд, хурдтарин мешавад?

ҶАВОБҲО

328. Масалан: а) 64215; б) 64224. **329.** 23. **330.** 24. **332.** а) 599,3; б) 0,235; в) 0,2805; г) 8,79. **333.** а) 21,6; б) 24; в) $1\frac{182}{203}$; г) $19\frac{1}{3}$. **334.** а) 60; б) 18. **335.** а) 1260; б) 96. **336.** в) 40,3; г) 2,3. **337.** а) $1\frac{4}{9}$; б) $\frac{37}{99}$; в) $1\frac{7}{90}$; г) $1\frac{26}{99}$; д) $1\frac{26}{99}$. **338.** а) Н и ш о н д о д: Баръаксашро фарз карда, барои зиддият ҳосил кардан аз тасдиқи зерин истифода намоед: агар квадрати адад ба 3 тақсим шавад, он гоҳ худи адад ба 3 тақсим мешавад. **339.** г) –1,(4), $\ell g100$, e, $\sqrt{10}$. Ададҳои e ва $\sqrt{10}$ ирратсионалианд. **340.** а) Якумаш калон; б) дуюмаш калон. **341.** а) 2; б) 4; в) $\frac{11}{5}$; г) –4; д) 4; е) 10. **342.** а) 2,16; б) 22,4; в) 11,52; г) 126. **343.** а) 175; б) $44\frac{4}{9}$; в) $309\frac{1}{11}$; г) $255\frac{5}{9}$. **344.** а) 80; б) $214\frac{2}{7}$; в) $43\frac{6}{73}$; г) $15\frac{5}{23}$. **345.** Дуюмаш. **346.** а) $8\frac{41}{50}$; б) $1\frac{8}{19}$; в) 1,036; г) $\frac{19}{210}$. **347.** а) 793, 8; б) $\frac{73}{360}$. **348.** $13\frac{7}{9}$ км ва $17\frac{2}{9}$ км. **349.** $\frac{8}{9}$ ва $\frac{2}{3}$. **350.** 44. **351.** 10,2. **352.** 640,5. **353.** 4905. **354.** 3; 10,5; 18; 25,5; 33. **355.** –1. **356.** –2, 5, 12, 19, 26,... **357.** Барои $x=2$. **358.** 8. **359.** 3. **360.** а) 36; б) $\frac{1}{2}$. **361.** 0,24. **362.** 20. **363.** 0,125. **364.** 16. **365.** а) $\frac{229}{990}$; б) $\frac{102}{900}$; в) $8\frac{37}{90}$; г) $2\frac{2}{99}$. **366.** а) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$; б) $4(x+3)(y-1)$; в) $a(a+1)(a+b)$; г) $(x+y)(x-y-1)$. **367.** а) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; б) $\frac{4}{a}$; в) $\frac{m^3}{m-5}$; г) $\frac{a-b}{a+b}$. **368.** а) $\frac{2x+y}{2x-y}$; б) $\frac{8(x^2+y^2)}{x+y}$; в) $-\frac{1}{b}$; г) $\frac{(x-3)(3-x^2)}{3(x^2-3x+9)}$. **369.** а) 1; б) $\frac{x-y}{x}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) 8. **370.** а) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot(\sqrt{5}+2)$; в) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$; г) $\frac{2}{23}(7+\sqrt{3})$. **371.** а) $\frac{1}{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$; б) $\frac{2}{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$; в) $\frac{7}{\sqrt{14}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{7}+2}$. **372.** а) 37,5; б) –6; в) 3; г) 0. **373.** а) 1; б) –2; в) 0; г) $\frac{(x+y)^2}{4xy}$. **374.** а) 0,05; б) $-\frac{1}{3}$; в) 5; г) 2,52. **375.** а) 1; б) 2; в) -1; г) $\frac{1}{2}$. **376.** а) 1; б) 0; в) 0,75; г) 0. **377.**

а) 0,75; б) $\frac{3}{2}$; в) –0,96; г) $-\frac{1}{5}$. **378.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) 0,25; г) 0,25.

379. а) $\frac{\pi}{3}$; б) 5; в) $\frac{1}{34}$; г) 1. **380.** а) –3; б) –7; в) $-\frac{12}{13}$; г) 0,28. **381.** а), г) Якумаш калон; б) ҳар ду баробар; в) дуюмаш калон. **382.** а), в), г) Якумаш калон; б) дуюмаш калон. **383.** а) $4\frac{3}{4}$; б) $a(a-1)$. **384.** а) 1,25; б) –2; в) 2; г) 10. **385.** а) 0,2; б) 12; в) 2; г) 0,5. **386.** а) 0,125; б) 2. **387.** а) 4; б) –0,04. **388.** а) Ҳамаи қиматҳо ғайр аз 0 ва 1; г) ҳамаи қиматҳо ғайр аз –0,5 ва 1. **389.** а), г), е) тоқ; б), в), д) ҷуфт. **390.** а) Дар $(2;\ \infty)$ *ва* $(-\infty;\ 0)$ мусбат аст; б) дар $(-3;\ -2)$ *ва* $(2;\ 3)$ мусбат аст; в) дар $(-\infty;\ -1{,}25)$ ва $(-0{,}4;\ \infty)$ мусбат аст; г) дар $(1;\ 2)$ мусбат аст. **391.** а) дар $(-\infty;\ -0{,}75)$ кам шуда, -0,75 нуқтаи экстремалӣ мебошад; б) Бо истиснои нуқтаи 0 дар тамоми тири ададӣ афзуншаванда аст. Нуқтаи экстремалӣ надорад: в) дар $(-\infty;\ 1)$ кам шуда, нуқтаи $x=1$ экстремалӣ аст. **392.** в) Ҳ а л. *Схемаи умумии* татбиқи функсияи дилхоҳро истифода намуда, графикро месозем: 1) Соҳаи муайянии функсияи мазкур маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, яъне фосилаи $(-\infty;\ \infty)$ аст; 2) Функсия на ҷуфт, на тоқ ва на даврӣ аст; 3) Ҳосилаи тартиби якуми функсияро ёфта, онро ба нул баробар карда решаҳояшро меёбем, яъне $y'=-2x+4$, $y'=0$ ё ин ки $-2x+4=0$, аз ин ҷо $x=2$ нуқтаи критикӣ аст; 4) Нобаробариҳои $y'>0$ ва $y'<0$-ро ҳал мекунем. Маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии $-2x+4<0$ фосилаи $(2;\ \infty)$ аст. Бинобар ин дар ин фосила функсия камшаванда аст. Маҷмӯи ҳалҳои $-2x+4>0$ фосилаи $(-\infty;\ 2)$-ро ташкил медиҳад. Дар ин фосила функсия афзуншаванда аст; 5) Барои ёфтани нуқтаҳои экстремалӣ ҷадвал тартиб медиҳем:



Расми 37.

Функсия дар нуқтаи $x=2$ дорои максимум будааст. Қимати максимум 1 аст; 6) Азбаски ададҳои 1 ва

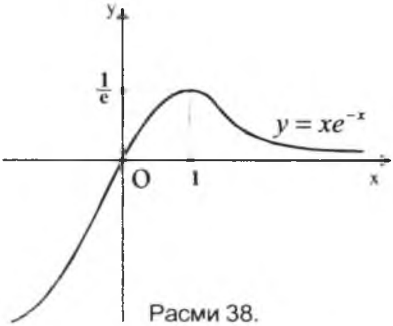
x	$(-\infty;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
y'	+	**0**	–
y	↗	**1**	↘
		max	

3 решаҳои муодилаи $-x^2+4x-3=0$ мебошанд, пас графики функсия тири абсиссаро дар нуқтаҳои (1; 0) ва (3; 0) мебурад; 7) Зоҳиран фаҳмост, ки $y(0)=-3$ аст, пас график тири ординатаро дар нуқтаи (0; -3) мебурад; 8) Ҳангоми беохир афзудан ё кам шудани аргумент функсия беохир кам мешавад, ё чи тавре мегӯянд ба $-\infty$ майл мекунад; 9) Фосилаҳои доималоматии функсия чунинанд: дар (1; 3) мусбат буда, дар $(-\infty;\ 1)$ *ва* $(3;\ \infty)$ манфӣ аст. Натиҷаҳои тадқиқро ба ҳисоб гирифта, графики функсияро месозем (расми 37). **393.** а) Ҳа, нуқтаҳои абсиссаашон $x=-3$ ва $x=4$; б) не. **394.** а) $x\neq n\pi$, $n\in Z$; б) $x\neq\dfrac{2n+1}{2}\pi$, $n\in Z$; в) $x\neq\pm\dfrac{\pi}{6}+2n\pi$, $n\in Z$; г) $x\neq 2n\pi$, $n\in Z$. **395.** а) $[1;\ 2]$; б) $[-2;\ 2]$; в) $[-1;\ 0]$; г) $[0;\ \sqrt{2}]$. **396.** а) дар $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)$, $n\in Z$ мусбат аст. **397.** а) Ҷуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) ҷуфт. **398.** а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) π; в) $\dfrac{\pi}{3}$; г) 2π. **399.** а) $-\dfrac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$; б) $\dfrac{n\pi}{2}$, $n\in Z$; в) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{(2n+1)\pi}{4}$, $n\in Z$; г) $\dfrac{\pi(n+2)}{10}$, $n\in Z$. **400.** а) $y_{max}=y_{min}=1$; б) $y_{min}=-4$, $y_{max}=8$; в) $y_{min}=1$, $y_{max}=2$; г) $y_{min}=1$, y_{max} вуҷуд надорад. **401.** а) $(-\infty;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ \infty)$; в) $[-2;2]$; г) $[4;\infty)$; д) $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $n\in Z$; е) $(2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5})$; ж) ниг ба д); з) $(-\infty;\ -10)\cup(-10;2\ ]\cup[3;\infty)$; и) $(-\infty;\ 0)\cup(0{,}25;\ \infty)$. **402.** а) $[0;\infty)$; б) $(-1;\ \infty)$; в) $(-\infty;1]$; г) $[1;\infty)$.
403. а) Дар $(-\infty;\ -1)$ мусбат аст; б) дар $(-\infty;\ \log_5 4)$ мусбат аст; в) дар $(-1;\ \infty)$ мусбат аст; г) дар $(7;\ \infty)$ мусбат аст.

404. а) Ҷуфт; б) ҷуфт; в) тоқ; г) тоқ. **405.** а) $y_{\max}=y(0)=5$; б) $y_{\max}=y(0)=5$; в) $y_{\max}=y(0)=0$; г) $y_{\min}=y\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)=0{,}5$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=2$, $n,k\in Z$. **406.** а) $1\frac{3}{8}$; б) $-\frac{4}{11}$; в) $-1\frac{3}{29}$; г) 12,5. **407.** а) –1 ва 4; б) $-\frac{6}{7}$ ва $1\frac{3}{7}$; в) –5 ва 3; г) 1,5 ва 4. **408.** а) Барои $a\neq 6$; б) барои $a=-1{,}5$; в) барои $a=3$. **409.** а) $(-3;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 2)$; в) $\varnothing$; г) $\left(1\frac{1}{3};\ \infty\right)$. **410.** а) (1; 2); б) $\left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right]\cup\left[-\frac{1}{4};\ \infty\right)$; **411.** а) –2 ва 4; б) $-\frac{2}{3}$ ва 0; в) $\frac{1}{26}$ ва 1; г) 1 ва 4. **412.** а) Барои $k\in\left(-7\frac{1}{3};\ 2\right)$ ва $k\neq 1$; б) барои $k=20\pm 2\sqrt{45}$; в) барои $k\notin(-1;\ 3)$. **413.** а) 4; б) –5,5; в) $-\frac{8}{11}$; г) 27. **414.** а) –4 ва 4; б) –1 ва 3; в) 11 ва 13; г) –3 ва 2. **415.** а) 8,4 ва 24; б) –3; в) $-5\frac{5}{7}$ ва 3; г) –3 ва 7. **416.** а) (-7; 0,5); б) $[-4{,}5\ ;2]$; в) $[1;\ 2]\cup(3;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ 2)\cup(3;\ 5)$. **417.** а) 2; б) 7; в) 4; г) 6. **418.** а) 1; б) $-\frac{27}{8}$ ва 1; в) 30 ва –61; г) $\frac{5}{4}$. **419.** а) 6; б) 25; в) 3; г) $\varnothing$. **420.** а) $[5;\ 6)$; б) (-1; 0); в) $\left[2\frac{2}{9};\ 4\right)\cup(5;\ \infty)$; г) $(3;\ \infty)$. **421.** а) $[-1;\ 2)$; б) (-2;1); в) $(-\infty;\ -1)\cup(0{,}5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;-1\ ]\cup\ \{x=2\}$. **422.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi$, $n\in Z$; б) $\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$, $n\in Z$; в) $2n\pi-\frac{\pi}{6}$, $n\in Z$; г) $-\frac{1}{18}\pi+\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$. **423.** а) $n\pi$, $n\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$; в)

$(-1)^n \arcsin\frac{1}{4}+n\pi$ ва $(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k,n\in Z$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in Z$. **424.** а) $\frac{n\pi}{3}$, $n\in Z$; б) $105^0+180^0 n, n\in Z$; в) $\frac{n\pi}{5}$ ва $\frac{k\pi}{7}$, $k,n\in Z$; г) $\pm 2\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+4n\pi$, $n\in Z$. **425.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$, $n\in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{12}+2n\pi;\ \frac{11\pi}{12}+2n\pi\right)$, $n\in Z$; в) $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}\right]$, $n\in Z$; г) $\left(n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, $n\in Z$. **426.** а) –4; б) 1; в) –1; г) 2. **427.** а) 0 ва $\frac{1}{2}$; б) 35; в) –3; г) –1. **428.** а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) –3. **429.** а) 1; б) 0,25; в) 2; г) 2. **430.** а) $(-\infty;-1{,}5]$; б) $\left(-1\frac{1}{3};\ \infty\right)$; в) (1; 3); г) $(-\infty;\ -5)\cup(3;\ \infty)$. **431.** а) 2; б) 4; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$. **432.** а) –1 ва 1,5; б) $\sqrt{3}$ ва 27; в) –3; г) –22. **433.** а) –3; б) 4; в) $\frac{1}{3}$ ва 9; г) $\frac{5}{3}$. **434.** а) (2; 6); б) $[4;\infty)$; в) $\left(-5;\ \frac{3}{2}\right)$; г) (-3; 2). **435.** а) (2; 3); б) $\left(26\frac{2}{3};\ 17\right)$; в) (0,5; 2); г) (32; 20). **436.** а) $\varnothing$; б) (4; 2); (2; 4) ва (-2; -4); в) (2; 2); г) (1; 4) ва (-1; -4). **437.** а) Барои $a\neq -0{,}2$; б) барои $a=\pm 1$; в) барои $a=3$. **438.** а) $(3;\ \infty)$; б) $(0{,}5;\ \infty)$; в) $\left(\frac{1}{11};\ \infty\right)$; г) $(0;\ 2)$. **439.** а) (16; 4); б) (4; 1) ва (1; 4); в) (9; 1) ва (1; 9); г) (16; 4). **440.** а) (4; 1) ва (1; 4); б) (27; 8) ва (8; 27); в) (27; 1) ва (1; 27); г) (1; 1). **441.** а) $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$; в)

$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\left(\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right)$. **442.** а) (3; 2); б) (1; 1); в) (1; 0) ва (0; 1); г) (0; 1). **443.** а) (2; 1); б) (3; 2); в) (4; 2); г) (53; 28). **444.** а) (4; 2); б) (50; -49); в) (6; 2); г) (10^6; 10^{-1}). **445.** а) (2; 4); б) (1; 1) ва (1; -1); в) (3; 1); г) (1; 1). **446.** 54 км. **447.** Дар 30 дақиқа. **448.** 12 кг. **449.** 160 га. **450.** 25-сола. **451.** 100, 200, 240. **452.** 40, 14, 11 ва 10-сола. **453.** 20 км/соат. **454.** 5. **455.** 2,4 ва 10 кг. **456.** 3,2 ва 1,8 сомонӣ. **457.** 60 км/соат ва 55 км/соат. **458.** 48. **459.** 5 ва 3 сомонӣ. **460.** 5 км/соат ва 11 км/соат. **461.** 9 ва 40 см. **462.** 5 ва 6. **463.** 16 қатор ва дар ҳар як қатор 20 ҷой. **464.** 80 км/соат. **465.** 24 соат ва 16 соат. **466.** 165 км. **467.** а) –3; б) 12; в) 2; г) 3. **468.** а) $2x^4+6x^2-1$; б) $-\cos x-(1-x)\sin x$; в) $2(2x^3-6x^2+3x-6)$; г) $\frac{(x-2)\cos x-\sin x}{(x-2)^2}$. **469.** а) $2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\frac{tgx}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\cos^2 x}$; в) $\frac{4x^3-3x^2+1}{(1-2x)^2}$. **470.** а) $x\cdot 5^x(2+x\ell n5)$; б) $3^x\ell n3+\frac{1}{x}$; в) $-2e^{-2x}+\frac{1}{x\ell n2}$; г) $\frac{2+e^x(1-x\ell nx)}{x(e^x+2)^2}$. **471.** а) $2\cos 2x-3\sin 3x$; б) $\frac{1}{3\sqrt[6]{(2+x^2)^5}}+\frac{4}{(2x-1)^3}$; в) $-42x(2-3x^2)^6$; г) $\frac{1}{x\ell n10}-2e^{2x}$. **472.** а) 52272; б) –1; в) 2; г) 2. **473.** а) Функсия афзуншаванда аст; б) функсия камшаванда аст; в) функсия камшаванда нест; г) функсия афзуншаванда нест. **474.** а) $y-4x+4=0$; б) $y-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=0$; в) $32y+x-21=0$; г) $2y+2\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{6})-1=0$. **475.** а) 0,0043; б) 2,3333. **476.** а) 3,995; б) 0,495; в) 0,96; г) 2,00067. **477.** г) Дар $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ \infty)$ афзуншаванда аст, нуқтаҳои 0 ва –2 экстремалианд. **481.** г) Ҳ а л. Схемаи умумии тадқиқро татбиқ менамоем: 1) Соҳаи муайянии функсия - фосилаи $(-\infty;\ \infty)$; 2) Функсия на ҷуфт, на тоқ ва на даврӣ мебошад; 3) Ҳосиларо ёфта, онро ба нул баробар карда решаҳояшро меёбем: $y' = (xe^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = (1-x)e^{-x}$, $y' = 0$, $(1-x)e^{-x} = 0$, $x = 1$-нуқтаи критикӣ; 4) Нобаробариҳои $y' > 0$ ва $y' < 0$-ро ҳал мекунем. Аз $y' > 0$ ё $(1-x)e^{-x} > 0$ бармеояд, ки $1 - x > 0$ ё $x < 1$. Мувофиқан аз $y' < 0$ $x > 1$ бармеояд. Инак, дар фосилаи $(-\infty;\ 1)$ функсия афзуншаванда буда, дар фосилаи $(1;\ \infty)$ камшаванда мебошад. Барои ёфтани нуқтаҳои экстремалӣ ҷадвал тартиб медиҳем:



Расми 38.

Аз ҷадвал аён аст, ки функ-сия дар нуқтаи $x = 1$ дорои максимум аст. Қимати максимум ба e^{-1} баробар аст; 6) График тири абсис-саро дар нуқтаи $x = 0$ мебурад; 7) График тири ординатаро намебурад; 8) Ҳангоми беохир кам шудани аргумент функсия беохир кам шуда, ҳангоми беохир афзудани аргумент ба нол наздик мешавад; 9) Дар $(-\infty;\ 0)$ манфӣ буда, дар $(0;\ \infty)$ мусбат аст. Бо назардошти натиҷаҳои тадқиқ графикро месозем (расми 38).

x	$(-\infty;\ 1)$	2	$(1;\ \infty)$
y'	$\nearrow$	**0**	$\searrow$
		max	

483. а) Ҳ а л. (аз имтиҳони хатмкунии соли хониши 2001-2002) 1) Нуқтаҳои критикиро, ки ба $[-2;\ 2]$ тааллуқ доранд, меёбем: $f'(x) = -3x^2 - 12x = -3x(x+4)$, $f'(x) = 0$, $-3x(x+4) = 0$. $x = 0$ ва $x = -4$ решаҳои ин муодилаанд. Аз онҳо танҳо $x = 0$ ба $[-2;\ 2]$ тааллуқ дорад; 2) Қиматҳои функсияро дар ин нуқта ва дар охирҳои порча ҳисоб мекунем: $f(-2) = 8 - 6 \cdot 4 + 9 = -7$, $f(0) = 9$, $f(2) = -8 - 6 \cdot 4 + 9 = -23$; 3) Калонтарини ин қиматҳо 9 буда, хурдтаринаш –23 аст. Ҷ а в о б. $f_{\max} = f(0) = 9$, $f_{\min} = f(2) = -23$.

485. 6 ва 4. **486.** 6,6 ва 6. **487.** 15 см ва 15 см. **488.** Квадрати тарафаш $\frac{p}{4}$. **489.** M(1; 1). **490.** $\vartheta(t)=s'(t)=4t+12$, $a(t)=4$, ҳангоми $t=6$ с $\vartheta=36$ метр/сония аст. **491.** а) 140 м; б) 5 сония, 145 м. **492.** Дар нуқтаи M(-1; -1,5). **493.** 51 метр/сония. **494.** 20 метр/соат, 22 метр/соат^2. **495.** а) $-2\cos x+\frac{1}{6}\sin 6x+C$; б) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^{-6}+\frac{x^{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}+C$; в) $\ell n|x-1|+3x+C$; г) $tg2x-3ctgx+C$. **496.** а) $3\ell n|x|+7$; б) $-\frac{1}{2(x+1)^2}-\cos x+3\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{3x^3}+\frac{3}{8}$; г) $\frac{\sin 2x}{2}+1$. **497.** $2x^2-x-3$. **498.** $4x-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{4}$. **499.** t^2+t-7. **500.** а) 15; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) e^4+1; г) 3. **501.** а) 1,5; б) 0,5; в) 05; г) –1. **502.** а) 6; б) $4(3-\ell n4)$; в) 9; г) $\frac{7}{6}$. **503.** а) $\frac{2}{3}$; б) $4\frac{2}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) $25\frac{1}{3}$. **504.** $2\frac{15}{16}$. **505.** 2,25. **506.** Барои $a=\frac{2}{3}$, $S_{\max}=\frac{4}{3}$. **507.** Барои $a=1$, $S_{\min}=\frac{3}{4}$.

МАСЪАЛАҲОИ ҲАЛЛАШОН НИСБАТАН МУРАККАБ

Дар поён якчанд масъалаҳо оварда мешаванд, ки ҳаллашон нисбатан мураккаб аст ё чӣ тавре мегӯянд, ғайристандартӣ мебошад. Ин масъалаҳо ба маводи назариявии синфҳои 6-11 такя мекунанд. Як қисми онҳо худсоз буда, қисми дигарашон аз озмунҳо ва олимпиадаҳои ноҳиявӣ, минтақавӣ ва ҷумҳуриявӣ гирифта шудаанд. Мақсади пешниҳоди ин мавод дар кори тайёрӣ ба чунин озмунҳо кӯмак намудан аст. (Барои гирифтани маълумоти пурра доир ба чунин масъалаҳо китоби Асадулло Шарифзода «Масъалаҳои озмунҳо ва олимпиадаҳои математикӣ» (Душанбе, «Офсет», 2011) тавсия мешавад.)

508. Ададҳои x_2 ва x_2 решаҳои муодилаи $x^2-2x-1=0$ мебошанд. Муодилаи квадратие тартиб диҳед, ки решаҳояш x_1+2x_2 ва x_2+2x_1 бошанд.

509. Исбот кунед, ки агар решаҳои муодилаи $x^2+px+g=0$ ҳақиқӣ бошанд, он гоҳ решаҳои муодилаи $x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)px+g\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=0$ низ ҳақиқианд.

510. Бигузор $S_n=\alpha^n+\beta^n$ бошад, ки дар ин ҷо α ва β решаҳои муодилаи $ax^2+bx+c=0$ мебошанд. Вобастагии байни S_n, S_{n-1} ва S_{n+2} -ро ёбед.

511. Барои кадом қиматҳои a нобаробарии $2x+a>0$ хулосаи нобаробарии $x+1>3a$ аст?

512. Ҳамаи он қиматҳои x -ро ёбед, ки барои ҳар гуна қимати параметри a -и ба фосилаи (1;2) тааллуқдошта нобаробарии $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ -ро қаноат менамоянд.

513. Барои ҳар кадом қимати a миқдори ҳалҳои муодилаи $\sqrt{2|x|-x^2}=a$ -ро муайян намоед.

514. Муодиларо ҳал намоед: $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=a$.

515. Муайян кунед, ки барои кадом қиматҳои a муодилаи $a\left(2^x+2^{-x}\right)=5$ решаи ягона дорад ва ин решаро ёбед.

516. Ифодаро сода кунед:

а) $\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}$;   б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

517. Исбот кунед, ки қимати ифодаи $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ аз радикал вобаста нест.

518. Ҳисоб кунед: $\cos 84^0\cdot\cos 24^0\cdot\cos 48^0\cdot\cos 12^0$.

519. Муодиларо ҳал намоед:

а) $\left(x^2+3x-4\right)^3+\left(2x^2-5x+3\right)^3=\left(3x^2-2x-1\right)^3$;

б) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$;

в) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$;   г) $1+7+13+...+x=280$.

520. Ҳалли ҳақиқии муодиларо ёбед:

а) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$;   б) $(x+2)^4+x^4=82$.

521. Муодилаи зеринро ҳал кунед:

$$\log_2\left(\cos^2 xy+\frac{1}{\cos^2 xy}\right)=\frac{1}{y^2-2y+1}.$$

522. Муодиларо ҳал кунед:

а) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$;

б) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$;

в) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

г) $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt[4]{x^4-16}-y+5$.

523. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

а) $x\left(y^2-z^2\right)+y\left(x^2-z^2\right)+z\left(x^2-y^2\right)$;

б) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;

в) x^8+x^7+1;   г) x^8+3x^4+4.

524. Нобаробариро ҳал кунед:

а) $\sqrt[4]{\frac{4-x}{x-5}}\geq\sqrt{\frac{x-4}{x}}$;   б) $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\leq 0$;

в) $\sqrt{x^2-x-12}<x$;   г) $\log_{0,4}\log_6\left(\frac{x^2-4x}{x-4}\right)<0$;

д) $(8,4)^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}}<1$;   е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}}>\frac{1}{\sqrt{27}}$.

525. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

а) $y=\frac{1}{\lg\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$;   б) $y=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{4-x^2}$.

526. Нобаробариро исбот намоед:

а) $\frac{a^3+b^6}{2}\geq 3ab^2-4$, $a\geq 0$;   б) $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\geq ab-ac+2bc$;

в) $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$;   с) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

527. Системаро ҳал кунед:

а) $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2} = x+3, \\ \sqrt{(x-3)^2} = 3-x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} + \dfrac{xy}{x+y} = a + \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{xy}{x-y} = c + \dfrac{1}{c}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x + xy + y = b. \end{cases}$

528. Системаи сеномаълумаи ғайрихаттӣ ҳал карда шавад:

а) $\begin{cases} a(yz - zx - xy) = xyz, \\ b(zx - xy - yz) = xyz, \\ c(xy - yz - zx) = xyz; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72, \\ (y+z)(x+y+z) = 120, \\ (z+x)(x+y+z) = 96. \end{cases}$

529. Қимати хурдтарини функсияро ёбед

а) $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$; б) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

530. Суммаи се аъзои пайдарпайии прогрессияи геометрӣ 114 аст. Агар ин се ададро ҳамчун аъзоҳои прогрессияи арифметикӣ ҳисоб кунем, он гоҳ онҳо мувофиқан аъзоҳои 1-ум, 4-ум ва 25-ум мешаванд. Ин ададҳоро ёбед.

531. Ададҳои a^2, b^2, c^2 ПА-анд. Исбот кунед, ки ададҳои $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ низ ПА мебошанд.

532. Агар решаҳои $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ПА-ро ташкил диҳанд, пас коэффитсиентҳо кадом шартро қаноат мекунонанд?

533. Суммаи ПГ-и беохир камшаванда ба 4 ва суммаи кубҳои аъзоҳои ҳамин прогрессия ба 192 баробар аст. Аъзои якум ва махраҷи ин прогрессияро ёбед.

534. Маълум, ки суммаҳои m ва n аъзоҳои ПА бо ҳам баробаранд, яъне $S_m = S_n$ аст. Исбот кунед, ки $S_{m+n} = 0$ аст.

535. Муодилаи расандаи умумии параболаҳои $y = x^2 + 4x + 8$ ва $y = x^2 + 8x + 4$ -ро тартиб диҳед.

536. Ҳамаи қиматҳои a-ро, ки барояшон функсияи зерин дар R афзуншаванда аст, ёбед: $y = \dfrac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 5$

537. Баробарии $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}$ дода шудааст. Қимати суммаи $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$ -ро ҳисоб кунед.

538. Адади дурақамаеро ёбед, ки он ба суммаи рақами якум ва квадрати рақами дуюмаш баробар бошад.

539. Ду адади серақамаро ёбед, ки сумаи онҳо ба 498 ва ҳосили тақсимашон ба 5 каратӣ бошад.

540. Суммаро ҳисоб кунед:

а) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+...+\frac{n}{3^{n-1}}$;

б) $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2$;

в) $S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}$;

г) $S_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+...+n\cdot2^n$.

541. Ҳосили зарбро ёбед: $P_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{257}{256}\cdot...\cdot\frac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}}$.

542. Айниятро исбот намоед:

а) $3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1$;

б) $arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{8}+arctg\frac{1}{18}+....+arctg\frac{1}{2n^2}=arctg\frac{n}{n+1}$;

в) $tgx+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+....+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-2ctg2x$;

г) $1^4+2^4+3^4+4^4+....+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

543. Қимати калонтарини функсияи $y=\sin x+\sqrt{2}\cos x$ -ро ёбед.

544. Соҳаи қиматҳои функсияи $y=\cos^3x-\cos x$ -ро ёбед.

545. Муодилаи функсионалии $f(f(x))+f(x)=2x+1$ -ро ҳал кунед.

546. Нишон диҳед, ки қимати ифодаи 7^n+3n-1, барои қимати дилхоҳи натуралии n, ба адади 9 тақсим мешавад.

547. $\sqrt{2^{\sqrt{3}}}$ калон аст ё $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}$?

548. Агар $\cos\alpha=tg\beta$, $\cos\beta=tg\gamma$, $\cos\gamma=tg\alpha$ бошад, $\sin\alpha$ -ро ёбед.

549. Маълум, ки $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ аст. Исбот кунед, ки $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$ аст.

550. Мошин аз шаҳри А ба шаҳри Б бо суръати $50\frac{км}{соат}$ ва аз Б ба А бо суръати $30\frac{км}{соат}$ ҳаракат кард. Суръати миёнаи мошин ҳангоми рафтану бозгаштанаш чанд аст?

551. Соати 12-и рӯз ақрабакҳои соат ва дақиқа болои ҳамдигар мехобанд. Баъди ин боз кай аввалин маротиба онҳо чунин мавқеъро ишғол менамоянд?

552. Ду қатора дар як вақт аз ду пункт ба муқобили ҳамдигар бо суръати $65\frac{км}{соат}$ ва $75\frac{км}{соат}$ равон шуданд. Баъди чанд соат масофаи байни онҳо ба 70 км баробар мешавад, агар масофаи байни пунктҳо 350 км бошад?

ҶАВОБҲО

508. x^2-6x+7. **510**. $S_n=-\frac{a}{c}S_{n+2}-\frac{b}{c}S_{n+1}$. **511**. Барои $a\geq\frac{2}{7}$. **512**. $(-1;2]$. **513**. Агар $a<0$ ё $a>1$ бошад, муодила ҳал надорад; агар $a=0$ бошад, сето ҳал дорад; агар $a=1$ бошад, муодила дуто реша дорад. **514**. $x=a^2-a; a\geq 0$. **515**. $a=\frac{5}{2}; x=0$. **516**. а) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+2+\sqrt{2})$; б) 2. **518**. $\frac{1}{16}$. **519**. а) $\left\{-4;-\frac{1}{3};1;1,5\right\}$. б) -2 ва 2; в) $2\frac{1}{4}$; г) 55. **520**. а) -8 ва 4; б) -3 ва 1; **521**. Нишондод: Тарафи рости муодила аз 1 калон набуда, тарафи чапаш аз 1 хурд нест. Онҳоро баробари 1 гирифта, системаи ҳосилшударо ҳал карда мебинем, ки $(2\pi k,1)$ ва $((2k+1)\pi;1), k\in Z$ ҳал мебошанд. **522**. а) $\{-1-\sqrt{8};-1+\sqrt{8};2;-4\}$, б) -1; в) $[5;10]$, г) $(2;1,5)$. **523**. а) $(x-z)(y+x)(y+z)$; б) $3(b+c)(a+b)(a+c)$. в) $(x^2+x+1)\cdot(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$, г) $(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)$. **524**. а) $[4;5)$, б) $\left[-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{5};\infty\right)$, в) $[4;+\infty)$, г) $(6;\infty)$, д) $(-\infty;3)$, е) $(-\infty;-1)\cup(0;2)$. **525**. а) $(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$, б) $[-2;2]$. **527**. а) $[-3;3]$. б) агар $\frac{x+y}{xy}=u$, $\frac{x-y}{xy}=\vartheta$ гузорем, он гоҳ u ва ϑ-ро ёфта баъд x ва y -ро бо осонӣ меёбем, в) $\left(1;1;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$; г) $x+y=u, xy=\vartheta$ гузорем, x ва y-ро ёфта метавонем. **528**. $\left\{(0;0;z);(0;y;0);(x;0;0);x=-\frac{2bc}{b+c};y=-\frac{2ac}{a+c};z=-\frac{2ab}{a+b}\right\}$ б) $\{(2;4;6);(-2;-4;-6)\}$. **529**. а) $y_{min}=-1$ ҳангоми $x^2+3x+1=0$; б) $Y_{min}=-1$ ҳангоми x=0 будан. **530**. 2;14; 98. **532**. $2\cdot\left(\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3d}{b}=\frac{c}{a}$ **533**. $g=-\frac{1}{2}, b_1=6$. **535**. $y=8x+4$. **536**. Барои $a\in(-\infty;-3)\cup[1;\infty)$. **537**. -100. **538**. 89. **539**. 166 ва 830. **540**. а) $S_n=\frac{9}{4}\left(1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}\right)$; б) $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; в) $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$; г) $S_n=2^{n+1}(n-1)+2$. **541**. $2-\frac{1}{2^{4n-1}}$. **543**. $\sqrt{3}$. **544**. $\left[-\frac{1}{4};2\right]$. **545**. $f(x)=x+\frac{1}{3}$. **547**. Дуюмаш калон. **548**. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **550**. 37,5 $\frac{км}{соат}$. **551**. Баъди $65\frac{5}{11}$ дақ. **552**. Ҳам баъди 2 соат ва ҳам баъди 3 соат.

МУНДАРИҶА