

Homework3

刘喆骐 2020013163 探微化01

对于这种随机数的选取方法，一共有 $(n^3)^n = n^{3n}$ 种情况，而没有重复的情况总数为 $n^3(n^3 - 1) \dots (n^3 - n + 1)$ ，故没有重复数的概率P为 $\frac{n^3(n^3-1) \dots (n^3-n+1)}{n^{3n}} = (1 - \frac{1}{n^3})(1 - \frac{2}{n^3}) \dots (1 - \frac{n-1}{n^3})$ 。
而

$$\begin{aligned} P &= (1 - \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^6})(1 - \frac{3}{n^3}) \dots \frac{n-1}{n^3} \\ &> (1 - \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^3})(1 - \frac{3}{n^3}) \dots \frac{n-1}{n^3} \\ &= (1 - \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^3} + \frac{3}{n^3}(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3}))(1 - \frac{4}{n^3}) \dots (1 - \frac{n-1}{n^3}) \\ &> \dots > 1 - \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^3} - \frac{3}{n^3} - \dots - \frac{n-1}{n^3} \\ &= 1 - \frac{n(n-2)}{2n^3} = 1 - \frac{n-2}{2n^2} > 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

综上，没有重复数的概率 $> 1 - \frac{1}{n}$ 。