Homework2

刘喆骐 2020013163 探微化01

T1

1.

令$m = logn$, 则

$$T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + 1.$$

令$S(m) = T(x^m)$, 则

$$S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + 1.$$

由主定理, $m^{log2} > 1$, $S(m) = \Theta(m)$,
故

$$T(n) = \Theta(logn).$$

2.

使用数学归纳法证明$T(n) = \Theta(1)$
先证明$T(n) = O(1)$.
显然,$T(1) = 1$。
假设对于$n = k-1, T(n) = O(1)$,也就是存在c_1,使得对任意$n < k, T(n) \leq c_1$.取c为大于1的常数，那么当$n = k$时，

$$T(n) = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n}T(n-1) \leq \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n}c = c - \frac{2}{n}(c-1) < c$$

故对于$n = k, T(n) = O(1)$,于是对于任意n，$T(n) = O(1)$。

然后证明$T(n) = \Omega(1)$.
显然,$T(1) = 1$。
假设对于$n = k-1, T(n) = \Omega(1)$,也就是存在$c_1$,使得对任意$n < k, T(n) \geq c_1$.取c为小于1的常数，那么当$n = k$时，

$$T(n) = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n}T(n-1) \geq \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n}c = c - \frac{2}{n}(c-1) > c$$

故对于$n = k, T(n) = \Omega(1)$,于是对于任意n，$T(n) = \Omega(1)$。

由于$T(n) = O(1), T(n) = \Omega(1)$,故$T(n) = \Theta(1)$。