LAPORAN TUGAS INTEGER

KOMPUTASI NUMERIK KELAS

A

Dosen Pengampu :

Mula'ab, S.Si., M.Kom.

Disusun Oleh:

Abdul Aziz (180411100150)

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS TRUNOJOYOMADUR

INTEGRAL

1. Pengertian Integral

Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial),secara matematis dapat dirumuskan :

$$f' \ x \ dx = f \ x \ + C$$

dengan : $f'(x)$ = turunan $f(x)$

C = konstanta

1.1 Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah integral yang tidak ada batasnya .

- Contoh : $9x^2 dx$

→ Rumus – rumus integral tak tentu dari fungsi aljabar

1. $dx = x + C$
2. $a \, dx = ax + C$
3. $x^{\mathrm{n}} \, dx = \frac{1}{n+1} \, x^{\mathrm{n+1}} + C$
4. $ax^{\mathrm{n}} \, dx = \frac{1}{n+1} \, ax^{\mathrm{n+1}} + C$
5. $f \ x \ + g \ x \quad dx = \quad f \ x \ dx + \quad g \ x \ dx$
6. $f \ x \ - g \ x \quad dx = \quad f \ x \ dx - \quad g \ x \ dx$
7. $a \, f \ x \ dx = a \quad f \ x \ dx$

→ Rumus – rumus integral tak tentu fungsi trigonometri :

1. $\cos x \, dx = \sin x + C$
2. $\sin x \, dx = -\cos x + C$
3. $\tan x \, dx = \ln[\sec x] + C$
4. $\cos \ ax + b \ \ dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
5. $\sin \ ax + b \ dx = -\frac{1}{a} \cos \ ax + b \ + C$
6. $\sec^2 x \, dx = \tan x + C$
7. $\mathrm{cosec}^2 \, x \, dx = -\cot x + C$
8. $\tan x . secx \, dx = \sec x + C$
9. $\cot x . cosec \ x \, dx = -\mathrm{cosec} \, x + C$
10. $sin^{\mathrm{n}} \, x \, . \cos x \, dx = \frac{1}{\mathrm{n+1}} \sin^{\mathrm{n+1}} x + C$

- Contoh Soal :

$\int (6x + 6)\ dx =$ 1.

Jawab : $\int (6x + 6)\ dx = \int 6x\ dx + \int 6\ dx$

$= \frac{6}{1+1} x^{1+1} + 6x + C$

$= 3x^2 + 6x + C$

$f(x) = \sin(2x - 3)$, $\int f(x)\ dx = ..$

Jawab : $\int f(x)\ dx = \int \sin(2x - 3)\ dx$ 2.

$= -\frac{1}{2}\cos(2x - 3) + C$

1.2 Integral Tertentu

Integral tertentu adalah integral yang ada batasnya

- Contoh : $\int_1^4 2x^2\ dx$

Nilai 1 sebagai batas bawah

Nilai 4 sebagai batas atas → Rumus integral tertentu :

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(x) \mid_a^b = f(b) - f(a)$$

→

Sifat – sifat integral tertentu $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

1. $\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$

2.

- Contoh Soal :

1. $\int_{-1}^{1} x^2(x - 6)\ dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - 6x^2)\ dx$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3]\,{}^{1}_{-1}$$

$$= \frac{1}{4}\ 1^{\ 4} - \frac{1}{4}\ -1^{\ 4} \ - \ 2\ 1^{\ 3} - 2\ -1^{\ 3}$$

$$= 0 - 4$$

$$= -4$$

1.3 Integral Parsial

Integral parsial adalah cara menyelesaikan integral yang memuat perkalian fungsi , tetapi tidak dapat diselesaikan secara subtitusi biasa. →Rumus Integral Parsial :

$$u\ dv = uv - \quad v\ du$$

- Contoh Soal :

$16 \quad x + 3 \ \cos\,(2x - \pi)\ dx =$

u = $(x + 3)$ …….

du = dx

dv = $\cos(2x - \pi)\ dx$

v = $\quad \cos(2x - \pi)\ dx$

v = $\frac{1}{2}\sin(2x - \pi)$

$u\ dv$

$= uv - \quad v\ du$

$= 16 \quad x + 3\ .\frac{1}{2}\sin\ 2x - \pi\ - \quad \frac{1}{2}\sin\ 2x - \pi\ \ dx$

$= 16\ \ \frac{1}{2}\ \ x + 3\ .\sin\ 2x - \pi\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\sin\ 2x - \pi \quad + C$

$= 8\ \ x + 3\ \ \sin\ \ 2x - \pi\ \ + 4\cos\ \ 2x - \pi\ \ + C$

Sumber : Fahamsyah,Sandy.2009.*Rumus Pintar Matematika SMA*.Jakarta : Wahyumedia

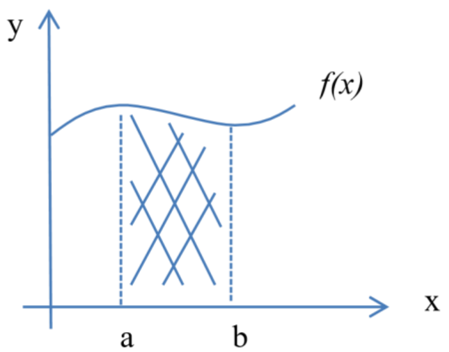
2. Aplikasi Integral

2.1 Aplikasi Integral Untuk Menghitung Luas Daerah

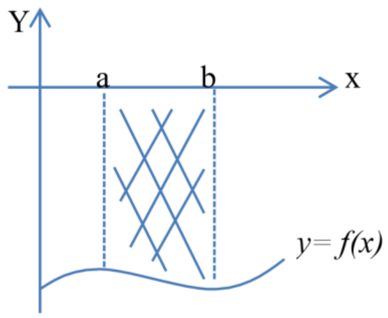
2.1.1 Luas Daerah yang Dibatasi oleh Kurva $y = f(x)$ dengan Sumbu –*x*

Langkah –langkah untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dengan sumbu –*x*,adalah sebagai berikut : a. Buatlah sketsa daerah yang akan dihitung luasnya

b. Jika $f(x) \geq 0$ untuk $x \in [a, b]$,gunakan rumus luas $L = \int_a^b f(x)\, dx$

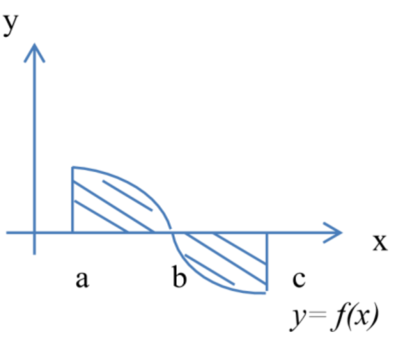


c. Jika $f(x) \leq 0$ untuk $x \in [a, b]$,gunakan rumus luas $L = -\int_a^b f(x)\, dx$



d. Jika $f(x) > 0$ untuk $f(x) < 0$,gunakan rumus luas

$$L = \int_a^b f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx$$

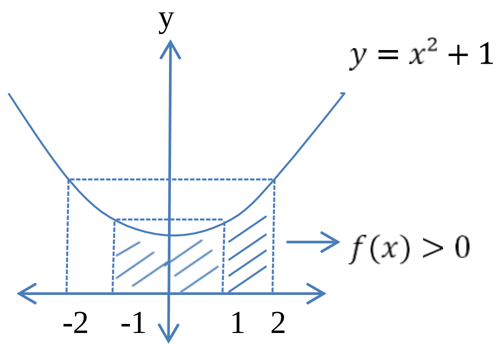


- Contoh Soal :

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$,garis x =*-1*,x=*2* dan sumbu x.

Jawab :

Gambar yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$,garis x = -1,x = 2 dan sumbu x dinyatakan oleh daerah yang diarsir berikut .



$$L = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1\right)$$

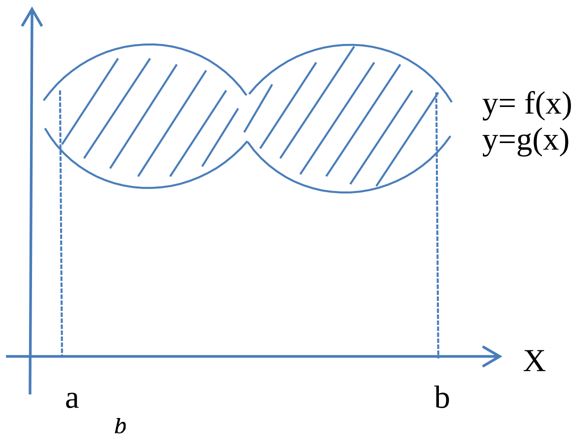
$$= \frac{18}{3}$$

$$= 6 \; satuan \; luas$$

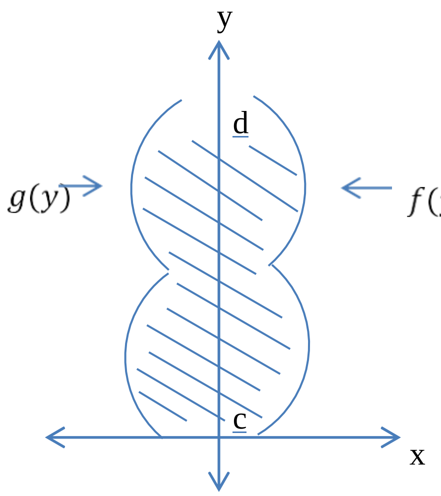
Jadi,luas daerah yang diarsir adalah 6 satuan luas .

2.1.2 Luas Daerah Yang Dibatasi Oleh Dua Kurva

y



$$L(A) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \,;\, a \le x \le b$$



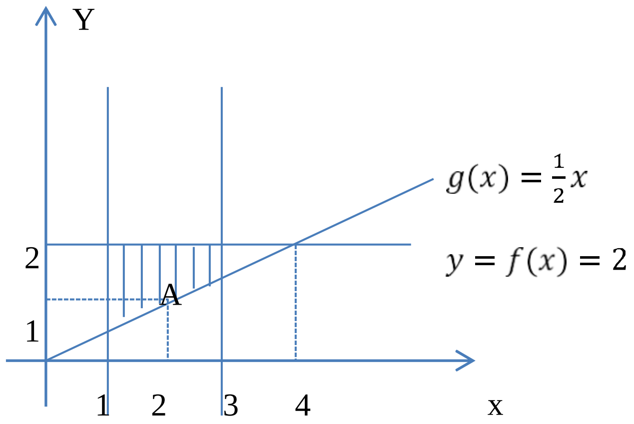
$$L = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy \,;\, c \le y \le d \text{ dan } f(y) > g(y)$$

- Contoh Soal :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \frac{1}{2}x, y = 2,$ garis $x = 1$ dan $x = 3$.

Jawab :

Gambar kurva $y = \frac{1}{2}x$ yang dibatasi garis $y = 2, x = 1$, dan $x = 3$ disajikan seperti berikut .



$$L(A) = \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_1^3 \left(2 - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^3$$

$$= \left(2(3) - \frac{1}{4}(3)^2\right) - \left(2(1) - \frac{1}{4}(1)^2\right)$$

$$= \left(6 - \frac{9}{4}\right) - \left(2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 6 - 2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 6 - 2 - 2$$

$$= 2 \; satuan \; luas$$

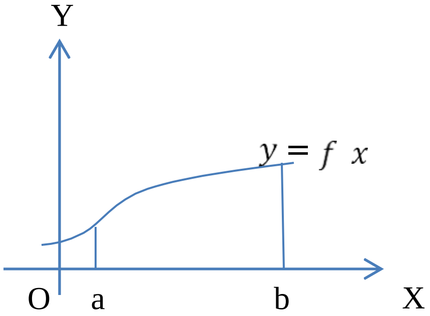
Jadi,luas daerah yang diarsir adalah 2 satuan luas .

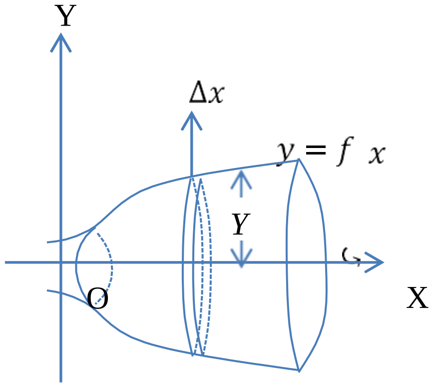
Sumber : Indriani,Gina.2006.*Think Smart Matematika*.Jakarta : Grafindo Media Pratama

2.2 Aplikasi Integral Untuk Menghitung Volume Benda Putar

2.2.1 Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu X

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x dan garis-garis $x = a$ dan $x = b$ dan diputar 360° mengelilingi sumbu x adalah sebagai berikut :



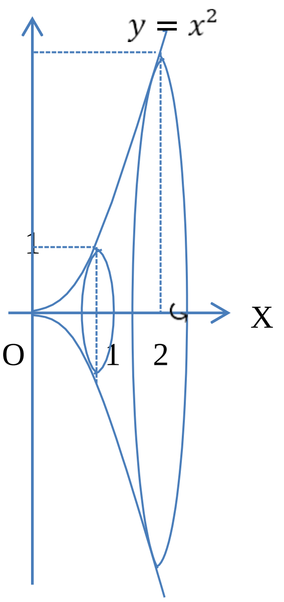


$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

- Contoh Soal :

Daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu X,dan garis $x = 1$ dan $x = 2$ diputar sejauh 360° terhadap sumbu X . Tentukan volume benda putar yang terbentuk .

Jawab :



$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

$$= \pi \int_1^2 (x^2)^2\, dx$$

$$= \pi \int_1^2 x^4\, dx$$

$$= \pi \int_1^2 x^4\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2$$

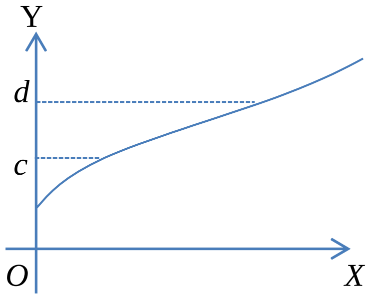
$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right)$$

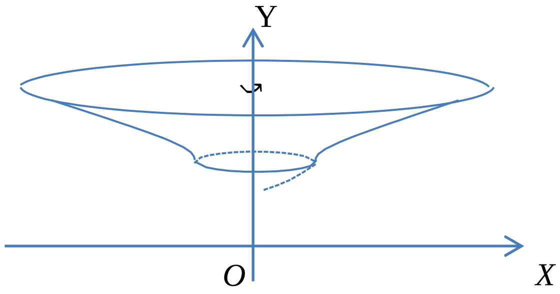
$$= \frac{31\pi}{5}\ satuan\ volume$$

Jadi,volume benda putarnya adalah $\frac{31\pi}{5}$ satuan volume.

2.2.2 Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu Y

Daerah yang dibatasi oleh kurva $x = f(y)$, sumbu x dan garis-garis $y = c$ dan $y = d$ diputar 360° mengelilingi sumbu y adalah sebagai berikut :



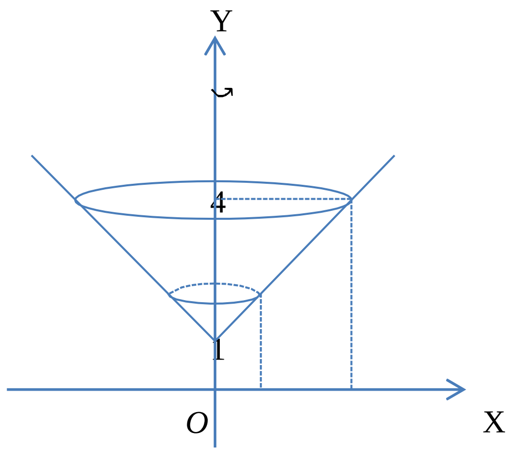


$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy = \pi \int_a^b x^2\, dy$$

- Contoh Soal :

Daerah yang dibatasi kurva $y = x + 1$, sumbu Y,dan garis y=2 dan y=4 diputar sejauh 360° terhadap sumbu Y. Tentukan volume benda putar yang terbentuk .

Jawab :



$$V = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

$$= \pi \int_2^4 (y-1)^2\, dy$$

$$= \pi \int_2^4 (y^2 - 2y + 1)\, dy$$

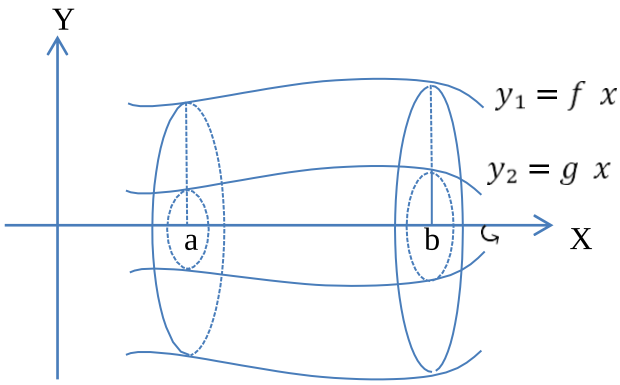
$$= \pi \left[\frac{1}{3}y^3 - y^2 + y\right]_2^4$$

$$= \pi \left[\left(\frac{64}{3} - 16 + 4\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right)\right]$$

$$= \frac{26\pi}{3}\ satuan\ volume$$

Jadi,volume benda putarnya adalah $\frac{26\pi}{3}$ satuan volume.

2.2.3 Volume Benda Putar Antara Dua Kurva Mengelilingi Sumbu X Daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ dan $x = a$, garis $x = b$ dan diputar 360º mengelilingi sumbu x dengan $y_1 = f(x) \geq y_2 = g(x)$ pada interval $[a, b]$ adalah sebagai berikut :



- Jika daerah tertutup yang dibatasi oleh $x = a$, kurva $y_1 = f(x)$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X,maka volumenya adalah

$$V_1 = x^5 \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

- Jika daerah tertutup yang dibatasi oleh $g = a$, kurva $y = g(x)$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X,maka volumenya adalah

$$V_2 = \pi \int_a^b (g(g))^2 \, dx$$

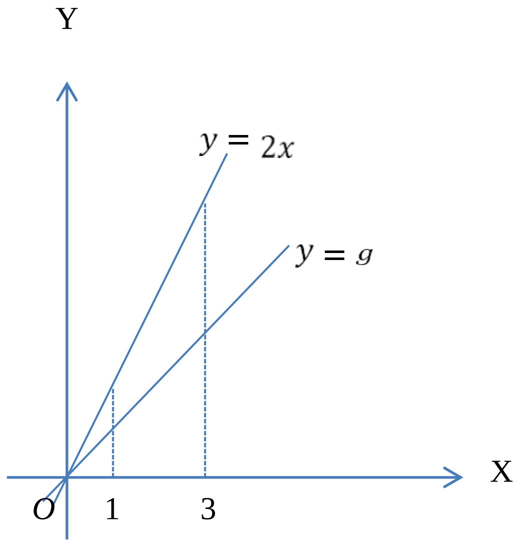
- Jika daerah tertutup yang dibatasi oleh $g = a$, kurva $y_1 = f(g)$, $y_2 = g(g)$, dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu X,maka volumenya adalah

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$$

- Contoh Soal :

Hitunglah volume benda putar yang terjadi,jika daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x$, $y = x$, $g = 1$ dan $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu X.

Jawab :



$$V = \pi \int_a^b (f^2(g) - g^2(x))\, dx$$

$$= \pi \int_1^3 ((2x)^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \int_1^3 3x^2\, dx$$

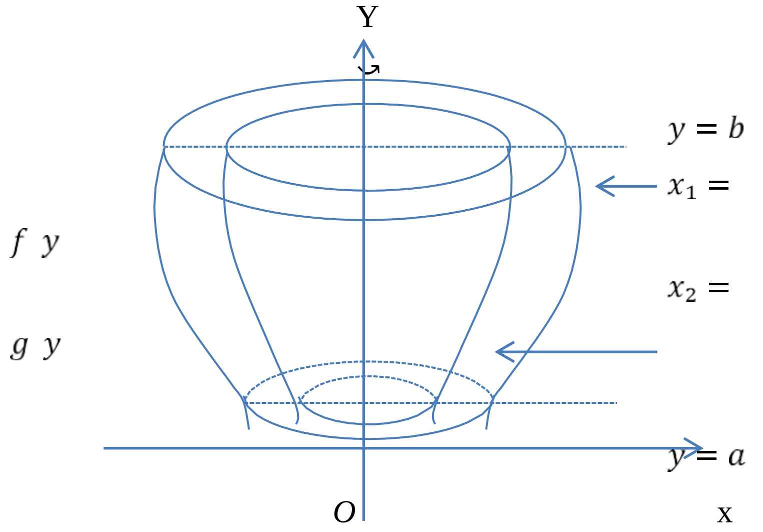
$$= \pi \left[x^3\right]_1^3$$

$$= 26\pi \text{ satuan volume}$$

Jadi,volume benda putarnya adalah 26π satuan volume.

Sumber : Kuntarti,dkk.2006.*Matematika SMA dan MA*.Jakarta : ESIS

2.2.4 Volume Benda Putar Antara Dua Kurva Mengelilingi Sumbu Y Daerah yang dibatasi oleh kurva $x_1 = f(y)$, $x_2 = g(y)$ dan $y = a$, garis $y = b$ dan diputar 360° mengelilingi sumbu y dengan $x_1 \geq x_2$, $f(y) \geq g(y)$ pada interval $[a, b]$ adalah sebagai berikut :



$$V = \pi \int_a^b f^2\ y\ - g^2\ y \quad \text{dan}$$

$$= \pi \int_a^b (x_1{}^2 - x_2{}^2)\, dy$$

- Contoh Soal :

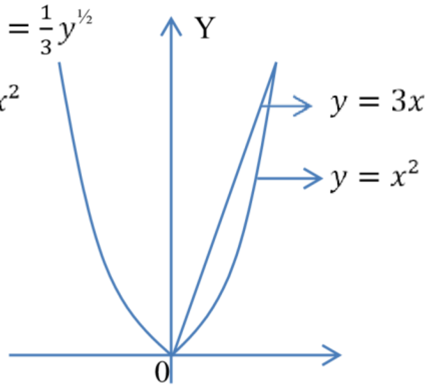
Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 3x$, diputar sejauh 360^o mengelilingi sumbu Y .Tentukan volume yang terbentuk .

Jawab :

Ordinat titik potong kurva $y = x^2$ dan $y = 3x$

$f(y) =$ kurva $y = x^2 \rightarrow x_1 = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$

$g(y) =$ garis $y = 3x \rightarrow x_2 = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{2}}$



Substitusi $x = \frac{1}{3} y$ ke $y = x^2$

$$y = \left(\frac{1}{3} y \right)^2$$

$$= \frac{1}{9} y^2$$

$$y^2 - 9y = 0$$

$$y(y - 9) = 0$$

$y = 0$ atau $y = 9$

Jika daerah yang diarsir pada gambar di atas diputar sejauh 360^o mengelilingi sumbu Y

$$V = \pi \int_a^b (x_1{}^2 - x_2{}^2)\; dy$$

$$= \pi \int_0^9 \{(y^{\frac{1}{2}})^2 - (\tfrac{1}{3}y)^2\} dy$$

$$= x^5 \int_0^9 \left(y - \frac{1}{9}y^2\right) dy$$

$$= x^5 \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{27}y^3\right]_0^9$$

$$= x^5 \left(\frac{1}{2}(9)^2 - \frac{1}{27}(9)^3\right)$$

$$= \pi \left(\frac{81}{2} - 27\right)$$

$$= 13\frac{1}{2}\pi \; satuan\ volume$$

Jadi,volume benda putarnya adalah $13\frac{1}{2}\pi$ satuan volume.