DAFTAR ISI

Lab 1
Polinomial dalam Sistem Kendali

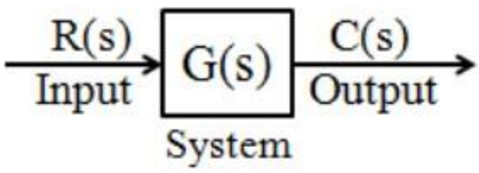
1.1 Tujuan Praktikum

Mengenalkan Matlab sebagai salah satu perangkat lunak dalam analisis maupun perancangan sistem kendali
Menguasai pemanfaatan polinomial dan simbol dalam Matlab sebagai dasar dari pemodelan suatu sistem kendali
Memahami model fungsi alih sistem dalam Matlab

1.2 Dasar Teori

1.2.1 Ranah frekuensi sebagai model sistem kendali konvensional

Dalam perancangan sistem kendali konvensional, suatu sistem kendali dinyatakan dalam ranah frekuensi setelah melalui tahapan transformasi Laplace. Model sistem yang secara fisis dinyatakan dalam ranah waktu dikenai transformasi Laplace dimana dalam ranah tersebut, sistem dapat dengan mudah dianalisis karena sifat-sifatnya beserta bentuknya yang jauh lebih sederhana. Dalam bentuk diagram blok, hubungan antara masukan dan luaran sistem beserta representasi sistem tersebut dapat dinyatakan dalam gambar berikut.



Dalam gambar tersebut, $R(s)$ merupakan masukan sistem, $C(s)$ adalah luaran sistem dan $H(s)$ adalah representasi sistem atau disebut sebagai fungsi alih (*transfer function*) sistem. Dalam bentuk matematik, fungsi alih $H(s)$ dinyatakan sebagai hubungan antara dua buah polinomial $b(s)$ dan $a(s)$ seperti ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$H(s) = \frac{\sum_m b_m s^m}{\sum_n a_n s^n}$$

1.2.2 Polinomial dalam Matlab

Dalam Matlab, suatu polinomial $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$ dapat dinyatakan dalam dua bentuk. Yang pertama adalah menyatakan koefisien-koefisien polinomial dalam vektor baris dan yang kedua adalah menyatakan secara langsung dalam bentuk persamaan dengan membuat sebuah simbol dalam Matlab sebagai variabel dari polinomial tersebut.

Sebagai contoh, suatu polinomial berikut:

$$p(t) = t^3 - t^2 - 4t + 4$$

Dalam bentuk matriks polinomial, suatu vektor diisi nilai yang mewakili koefisien vektor dari yang terbesar hingga terkecil.

```
p_poly = [1 -1 -4 4]    % vektor koefisien polinomial p(t)
p_4 = polyval(p,4)      % nilai p(t) pada t=4
r = roots(p)            % r sebagai akar-akar dari p(t)
```

Dalam bentuk simbolis, suatu variabel bertipe simbol, t, perlu didefinisikan untuk kemudian digunakan sebagai variabel dari polinomial yang akan dibuat.

```
syms t                  % t bertipe simbol dalam Matlab
p_sym = t^3-t^2-4*t+4 % deklarasi persamaan p(t)
```

Dua bentuk tersebut dapat saling dialih representasi sebagai berikut

```
p_sym = poly2sym(p_poly)     % polinomial ke simbolik
p_poly = sym2poly(p_sym)     % simbolik ke polinomial
koef = coeffs(p_sym)         % koefisien tak-nol polinomial
```

1.2.3 Polinomial sebagai representasi fungsi alih

Representasi sistem yang telah dinyatakan dalam bentuk fungsi alih $H(s)$ memiliki pondasi matematik dalam bentuk polinomial. Dalam hal ini $H(s)$ dinyatakan dalam bentuk dua buah polinomial $b(s)$ dan $a(s)$ yang masing-masing sebagai pembilang dan penyebut. Analisis fungsi alih yang sekaligus mewakili analisis dari suatu sistem tidak dapat dipisahkan dari bentuk matematik fungsi alih sehingga pemahaman mengenai bentuk-bentuk dari fungsi alih $H(s)$ perlu dikenal.

Misalkan suatu fungsi alih

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

Bentuk pecahan parsial merupakan bentuk yang penting karena menampilkan masing-masing kutub (*pole*) sebagai pecahan tersendiri. Bentuk ini direpresentasikan di Matlab dalam variabel-variabel *c*, *p*, dan *k* yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} + k_s$$

Dengan p_i adalah kutub-kutub, c_i adalah sisa hasil bagi (*residue*), dan k_s adalah hasil bagi (*quotient*).

```
num = [1 2]                  % koefisien pembilang
den = [1 4 3 0]              % koefisien penyebut
[c,p,k] = residue(num,den) % hasil bagi polinomial num oleh
den
[num,den] = residue(c,p,k) % pembilang dan penyebut dari c,p,k
```

Secara khusus dalam bentuk fungsi alih yang disediakan melalui *toolbox* dalam Matlab, disediakan fungsi untuk mengubah koefisien pembilang dan penyebut dari suatu fungsi alih menjadi variabel khusus bertipe *tf*.

```
sys_tf = tf(num,den)         % fungsi alih dinyatakan dalam tf
```

Dalam bentuk lain, fungsi alih dapat dinyatakan dalam bentuk model *zero-pole-gain* (model zpk) yang bersesuaian dengan bentuk persamaan berikut:

$$H(s) = K\,\frac{(s - z_1)\;\dots\;(s - z_m)}{(s - p_1)\;\dots\;(s - p_n)}$$

Bentuk tersebut disusun dengan fokus pada *pole* dan *zero* dari sistem yang dianalisis.

```
sys_zpk = zpk(z,p,k)    % fungsi alih berdasar zero-pole-gain
```

Dengan *z* merupakan vektor *zero*, *p* adalah vektor kutub (*pole*), dan *k* adalah penguat (*gain*).

Kedua bentuk tersebut dapat saling dialih bentuk sebagai berikut

```
[num,den] = zp2tf(z,p,k)
sys_tf = tf(num,den)
[z,p,k] = tf2zp(num,den)
sys_zpk = zpk(z,p,k)
```

Seperti halnya polinomial, fungsi alih juga dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan dengan membentuk suatu simbol. Dalam hal ini, simbol untuk fungsi alih harus didefinisikan khusus sebagai simbol dalam fungsi alih.

```
s = tf('s')        % s sebagai simbol fungsi alih kontinyu
sys = (s+2)/(s^3+4*s^2+3*s)
s = zpk('s')       % s sebagai simbol fungsi alih model z-p-k
sys = (s+2)/(s^3+4*s^2+3*s)
```

1.3 Praktikum

Nyatakan polinomial $p(s)$, $q(s)$ dan $r(s)$dalam bentuk matriks polinomial dan simbolis

$$p(s) = s^2 + 2s + 1$$
$$q(s) = s + 1$$

a. Tentukan polinomial $r(s) = p(s) \times q(s)$. (petunjuk: gunakan perkalian dalam bentuk simbolis atau gunakan matriks polinomial dan fungsi *conv* untuk konvolusi matriks *p* dengan *s*)
b. Tentukan akar-akar dari setiap polinomial tersebut

Perhatikan sistem yang direpresentasikan oleh $G(s)$ dan $H(s)$ berikut

$$G(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$
$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

c. Nyatakan kedua sistem dalam bentuk pecahan parsial.
d. Tentukan *zero*, *pole*, dan *gain* (z-p-k) dari kedua sistem tersebut.
e. Nyatakan kedua sistem dalam bentuk fungsi alih kontinyu.
f. Nyatakan kedua sistem dalam model zpk.

Lab 2
Representasi Ruang Keadaan dan Tanggap Sistem

2.1 Tujuan Praktikum

Memahami representasi ruang keadaan sebagai bentuk lain dari sistem.
Memahami hubungan antara representasi fungsi alih dan persamaan ruang keadaan dari suatu sistem.
Memahami tanggap sistem terhadap masukan impuls, fungsi langkah, maupun masukan lainnya.
Mampu menganalisis karakteristik sistem dan tanggapan sistem terhadap masukan tertentu.

2.2 Dasar Teori

2.2.1 Representasi Ruang Keadaan

Dalam teori sistem kendali, representasi Laplace dari sebuah sistem merupakan analisis konvensional yang mengandalkan analisis frekuensi. Karakteristik dan kestabilan sistem kendali diamati melalui fungsi alih $G(s)$ dengan s berada pada ranah frekuensi pada bidang Laplace. Pada pendekatan yang lebih terkini, selain melalui ranah frekuensi, analisis sistem dilakukan pada ranah waktu dengan memanfaatkan representasi *state-space* (ruang-keadaan).

Dalam representasi ruang keadaan, sebuah sistem direpresentasikan dalam bentuk persamaan berikut

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}\mathbf{u}(t)$$

$\mathbf{y}(t) =$ �$\mathbf{x}(t) + \mathrm{D}\mathbf{u}(t)$

Dimana

$\mathbf{x}(t)$: vektor keadaan
$\mathbf{u}(t)$: vektor masukan sistem atau vektor kendali
$\dot{\mathbf{x}}(t)$: perubahan keadaan
$\mathbf{y}(t)$: vektor luaran
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matriks sistem
$\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$: matriks masukan sistem atau vektor kendali
� $\in \mathbb{R}^{l\times n}$: matriks luaran
$\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{l\times m}$: matriks umpan maju

Persamaan pertama, yaitu $\dot{\mathbf{x}}(t)$ disebut sebagai persamaan keadaan dan persamaan kedua, yaitu $\mathbf{y}(t)$ adalah persamaan luaran.

Sebagai contoh, sebuah sistem direpresentasikan dalam bentuk ruang keadaan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Dalam Matlab, sistem dalam representasi ruang keadaan dinyatakan melalui

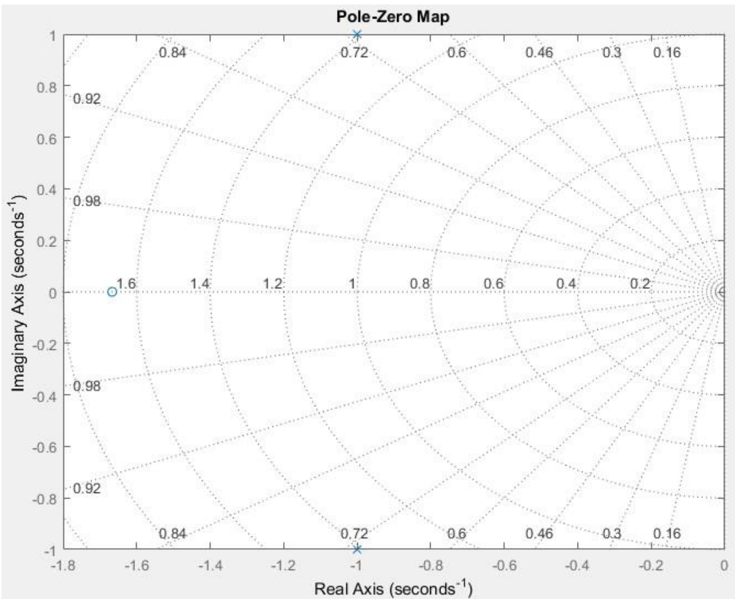
```
sys_ss = ss(A,B,C,D)   % persamaan sistem dalam ruang keadaan
```

Dalam beberapa kesempatan, analisis dengan persamaan ruang keadaan lebih mudah dilakukan daripada pada ranah frekuensi, begitu juga pada kesempatan lain. Karena asal-usul dari representasi ruang keadaan dan ranah frekuensi adalah pada satu persamaan ranah waktu yang sama, alih representasi dari bentuk satu ke bentuk yang lain dapat dilakukan.

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D); % alih representasi ke fungsi alih
[z,p,k] = ss2zp(A,B,C,D);    % alih representasi ke model z-p-k
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den); % alih representasi ke ruang
keadaan
[A,B,C,D] = zp2ss(z,p,k);    % alih representasi ke ruang
keadaan
```

2.2.2 Karakteristik sistem

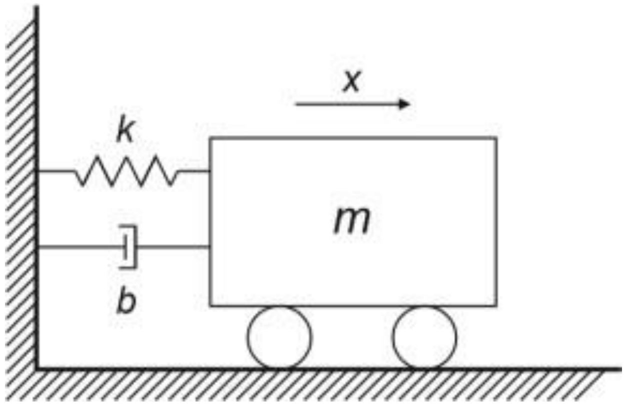
Sebuah sistem, baik dalam representasi Laplace maupun ruang keadaan memiliki karakteristik yang digunakan untuk analisis sistem. Karakteristik utama dari sebuah sistem ditentukan oleh letak pole dan zeronya. Letak pole dan zero sebuah sistem dapat digambarkan dalam gambar Pole-Zero Map.



Gambar 2.1 Grafik pole-zero

```
z = zero(sys);  % zero dari sistem dalam sebarang representasi
p = pole(sys); % pole dari sistem dalam sebarang representasi
pzmap(sys) % grafik pole-zero pada bidang Laplace
```

Perhatikan sistem fisis berikut



Gambar 2.2 Sistem pegas

Dalam ranah waktu, sistem tersebut dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$$

Dimana

$x(t)$: luaran sistem, yaitu simpangan balok
$u(t)$: masukan sistem, yaitu gaya dorong terhadap balok
m : massa balok
k : konstanta pegas
b : koefisien gesek

Dalam ranah frekuensi, melalui transformasi Laplace, fungsi alih dari sistem tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Sedangkan dalam representasi ruang keadaan, sistem tersebut dapat dinyatakan dalam dua persamaan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Dengan masukan sistem adalah gaya $u(t)$, vektor keadaan adalah $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ vektor perubahan keadaan $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$ dimana

$x_1(t) = x(t),$
$x_2(t) = \dot{x}(t),$

Maka, sistem tersebut direpresentasikan dalam persamaan ruang keadaan dengan masing-masing konstanta matriks A, B, C, dan D.

```
A = [0 1;-k/m -b/m];
B = [0;1/m];
C = [1 0];
D = [0];
```

2.2.3 *Step response* (tanggap fungsi langkah)

Ketika sebuah sistem diberi masukan, maka dihasilkan luaran yang dapat diamati dan disebut sebagai tanggap sistem, ketika masukan dari sistem tersebut berupa fungsi langkah (*unit step function*) $u(t)$, maka tanggapan dari sistem tersebut disebut sebagai tanggap fungsi langkah (*step response*). Demikian juga ketika masukan dari sistem berupa impuls (*impulse*) atau fungsi delta (*delta function*) $\delta(t)$, tanggapan dari sistem tersebut disebut sebagai tanggap impuls (*impulse response*).

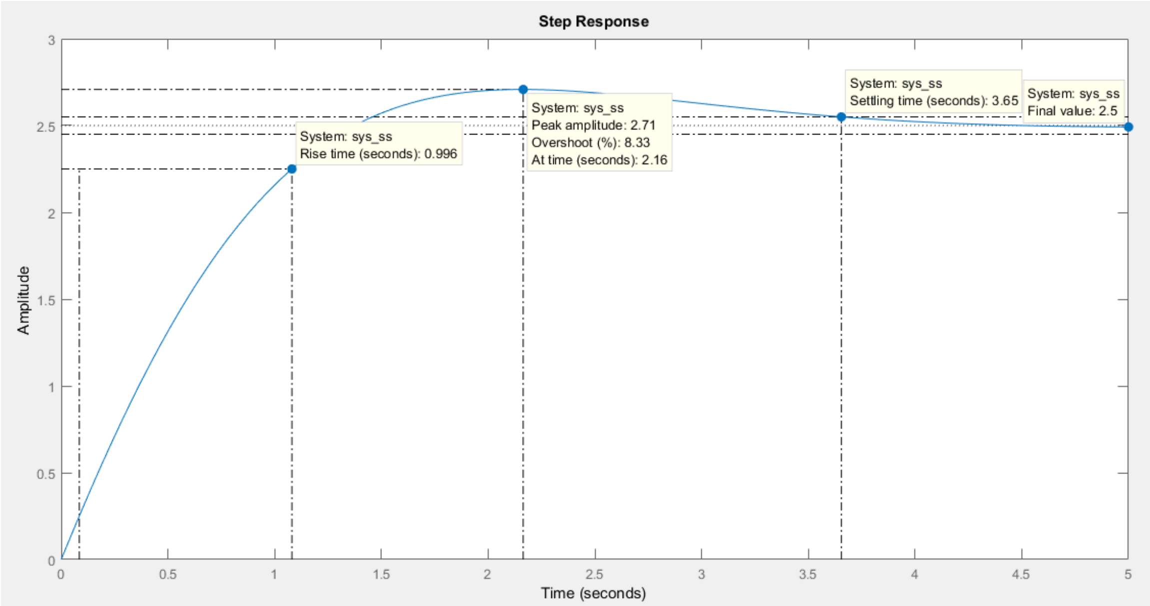
Dalam hal ini, fungsi langkah dan impulse adalah sebagai berikut

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t \neq 0 \end{cases}$$

Dalam analisis sistem kendali, tanggap fungsi langkah digunakan untuk menunjukkan karakteristik sistem dan kestabilan sistem. Fungsi langkah digunakan sebagai analisis dasar pada sistem kendali dimana sistem diharapkan untuk menuju satu nilai akhir tertentu sesuai dengan masukan sistem. Pada gambar di bawah, ditunjukkan tanggapan sistem yang berupa *rise time* t_r, *overshoot*, *settling time* t_s, dan nilai akhir *(final value*).

Dari representasi sistem dalam bentuk fungsi alih maupun persamaan ruang keadaan, seluruh karakteristik dari tanggap fungsi langkah tersebut dapat diamati. Sistem yang stabil akan memiliki grafik yang konvergen menuju nilai akhir.



Gambar 2.3 Karakteristik sistem dalam tanggap fungsi langkah

Sebagai contoh, perhatikan fungsi alih sistem berikut

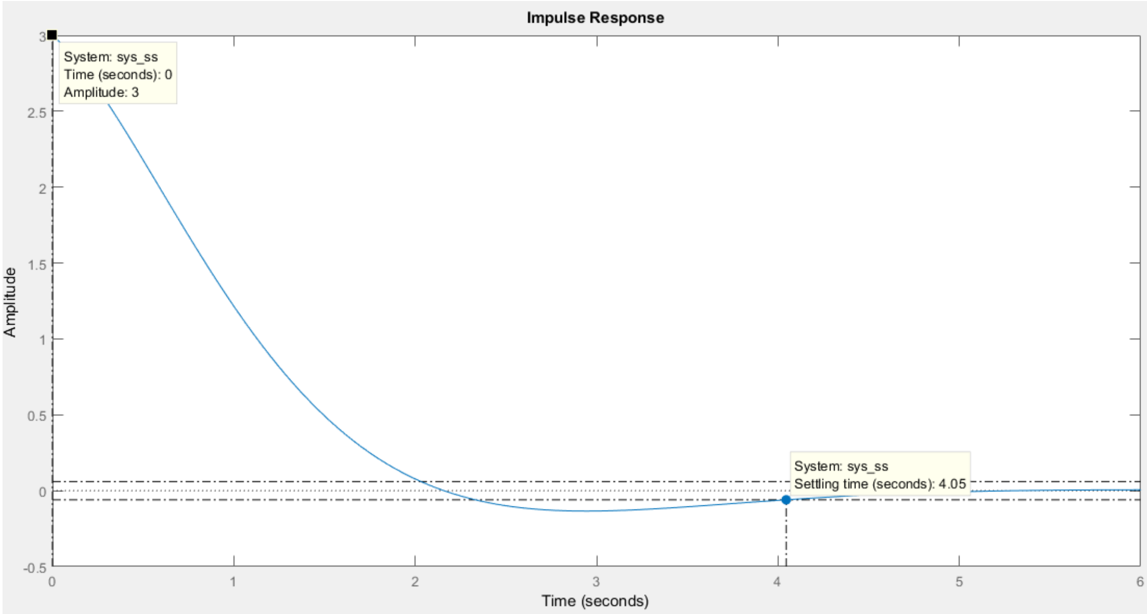
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

```
sys = tf(num,den);      % representasi fungsi alih dari G(s)
step(sys)               % tanggap fungsi langkah
step(sys,T)             % tanggap fungsi langkah sampai waktu T
data = stepinfo('sys')  % karakteristik tanggap fungsi langkah
```

2.2.4 *Impulse response* (Tanggap impulse)

Seperti halnya pada tanggap fungsi langkah, masukan sistem berupa impuls juga digunakan untuk melihat karakteristik kestabilan dari suatu sistem kendali. Pada tanggap impuls, karakteristik sistem yang diamati adalah tanggapan sistem ketika muncul gangguan yang hanya sesaat. Sistem kendali yang baik akan memiliki keadaan yang berangsur kembali ke kondisi asal setelah mendapatkan gangguan berupa impuls.

Pada gambar di bawah, ditunjukkan karakteristik sistem dalam tanggap impuls yang berupa amplitudo dan *settling time* t_s. Pada sistem yang stabil atau terkendali, luaran sistem akan konvergen kembali menuju nilai awal luaran sistem, atau simpangan sistem akan kembali menuju nol.

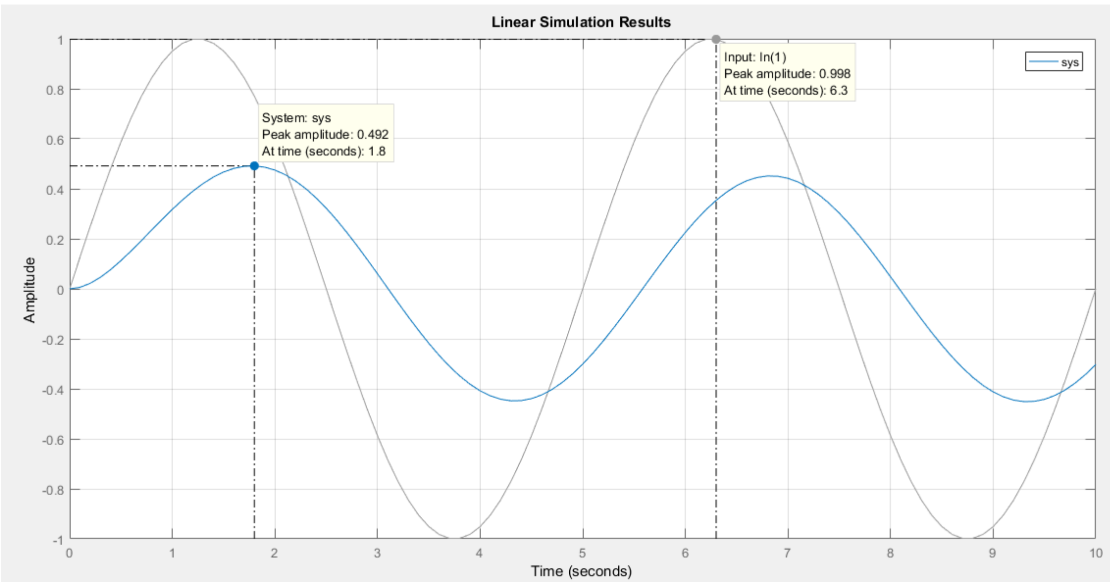


Gambar 2.4 Karakteristik sistem dalam tanggap impuls

```
sys = tf(num,den);      % representasi fungsi alih dari G(s)
impulse(sys)            % tanggap impuls
impulse(sys,T)          % tanggap impuls sampai waktu T
```

2.2.5 *Arbitrary response* (tanggap fungsi sebarang)

Secara general, selain berupa impuls dan fungsi langkah, masukan dari suatu sistem dapat berupa fungsi apapun atau bahkan tidak berbentuk persamaan tertentu. Dalam Matlab, jika masukan dari sistem berupa persamaan fungsi selain impuls dan fungsi langkah, luaran dari sistem tersebut juga dapat dianalisis.



Gambar 2.5 Karakteristik sistem dalam tanggap sinusoidal

Gambar di atas menunjukkan tanggap sinusoidal dari sistem $G(s)$, dimana luaran sistem akan mengikuti masukan dari sistem $u(t)$, yaitu berupa sinyal sinusoidal.

```
sys = tf(num,den);      % representasi fungsi alih dari G(s)
t = 0:0.1:1;            % durasi sinyal masukan t
u = sin(2*pi*0.2*t);    % sinyal sinus dengan frekuensi 0.2Hz
lsim(sys,u,t)           % tanggap sinusoidal
```

2.3 Praktikum

1. Perhatikan sistem yang diwakili oleh $G(s)$ berikut

$$G(s) = \frac{100}{(s+10)(s^2+4s+10)}$$

   a. Temukan zero, pole, dan gain dari sistem tersebut.
   b. Tunjukkan grafik yang menunjukkan lokasi pole dan zero dari sistem terebut.
   c. Nyatakan sistem tersebut dalam model pecahan parsial.
   d. Nyatakan sistem tersebut dalam representasi ruang keadaan.
   e. Tunjukkan karakteristik dari tanggap impuls.
   f. Tunjukkan karakteristik dari tanggap fungsi langkah.
   g. Tunjukkan karakteristik dari sistem tersebut ketika mendapatkan masukan berupa sinyal sinusoidal $u(t) = 1.5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ selama 5 detik pertama.

Sistem pegas yang ditunjukkan pada Gambar 2.2 memiliki spesifikasi sebagai berikut

Massa : $1kg$
Konstanta pegas : $1.5N/m$
Koefisien gesek : $0.25Ns/m$
Gaya masukan sistem : $1N$

   h. Nyatakan sistem tersebut dalam representasi ruang keadaan.
   i. Nyatakan fungsi alih dari sistem tersebut.
   j. Temukan zero, pole, dan gain dari sistem tersebut.
   k. Tunjukkan grafik yang menunjukkan lokasi pole dan zero dari sistem terebut.
   l. Nyatakan sistem tersebut dalam model pecahan parsial.
   m. Tunjukkan karakteristik dari tanggap impuls.
   n. Tunjukkan karakteristik dari tanggap fungsi langkah.

Lab 3
Interkoneksi Sistem dan Sikap Sistem Orde-1 dan Orde-2

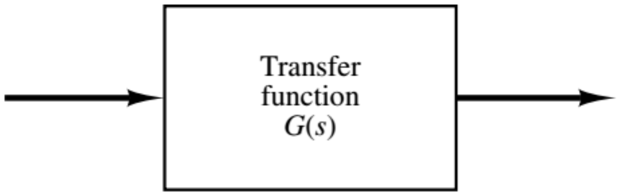
3.1 Tujuan Praktikum

1. Memahami berbagai interkoneksi subsistem
2. Menguasai teknik penyederhanaan fungsi alih dari sistem yang terdiri dari berbagai kombinasi subsistem
3. Memahami bentuk fungsi alih dalam bentuk persamaan orde-1 dan orde-2
4. Memahami teknik analisis dan karakteristik sistem dari sistem orde-1 dan orde-2

3.2 Dasar Teori

3.2.1 Sistem Kalang Terbuka dan Kalang Tertutup

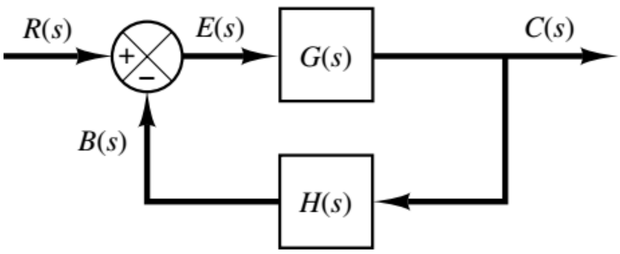
Secara umum, representasi sistem dapat dinyatakan dalam bentuk diagram blok. Konsep representasi diagram blok ini dapat diterapkan pada ranah frekuensi, yang dalam analisis kendali berupa ranah Laplace, karena transformasi Laplace memenuhi sifat *Linear and Time-Invariant* (LTI).



Gambar 3.1 Fungsi alih $G(s)$ dalam representasi diagram blok kalang terbuka

Pada ranah Laplace, representasi fungsi alih dapat dinyatakan dalam bentuk diagram blok kalang terbuka (*open loop*) ataupun kalang tertutup (*closed loop*). Sistem yang dinyatakan dengan diagram blok kalang terbuka adalah sistem dengan fungsi alih $G(s)$ yang hanya memiliki umpan maju, yaitu hanya mengolah sinyal masukan $R(s)$ untuk dihasilkan menjadi sinyal luaran $C(s)$.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$



Gambar 3.2 Diagram blok kalang tertutup dari sistem yang memiliki umpan balik $H(s)$

Pada sistem yang mengolah umpan balik dari sinyal luaran $C(s)$ dengan fungsi alih $H(s)$ dan menghasilkan sinyal $B(s)$ yang setara dengan masukan sistem $R(s)$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2, sistem tersebut digambarkan sebagai diagram blok kalang tertutup dengan fungsi alih $G(s)$ untuk mengolah umpan maju $E(s)$ yang merupakan selisih dari sinyal masukan $R(s)$ dan sinyal umpan balik $B(s)$ untuk dihasilkan sinyal luaran $C(s)$. Pada analisis sistem melalui representasi fungsi alih, sistem dengan umpan balik dapat disederhanakan menjadi fungsi alih tunggal sebagaimana sistem dengan umpan maju tanpa menggunakan umpan balik seperti ditunjukkan pada persamaan di bawah ini.

$$C(s) = G(s)E(s)$$

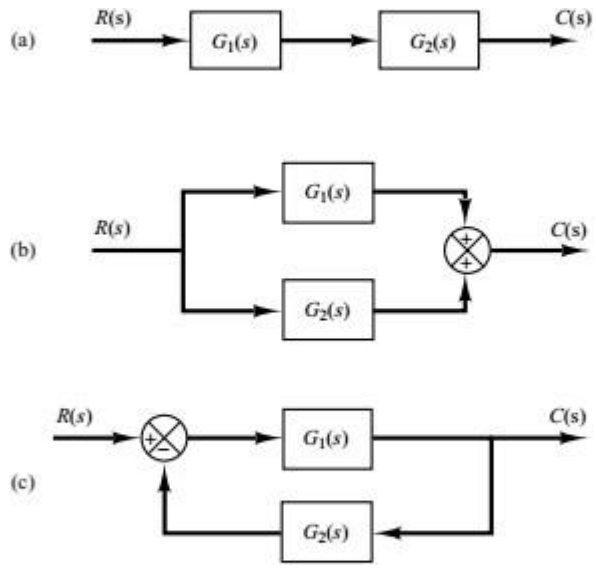
$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

3.2.2 Interkoneksi Sistem

Dengan memanfaatkan blok-blok fungsi alih untuk representasi setiap subsistem pada diagram blok sebuah sistem, hubungan antar subsistem tersebut dapat dikelompokkan menjadi tiga macam interkoneksi utama seperti ditunjukkan pada gambar Gambar 3.3 berikut. Interkoneksi serial sama dengan mengalikan kedua fungsi alih, interkoneksi paralel seperti halnya menambahkan kedua fungsi alih.



Gambar 3.3 Interkoneksi subsistem: (a) Serial (series/cascaded); (b) Paralel (jumlahan/parallel); (c) Umpan balik (feedback)

Sebagai contoh, perhatikan dua buah subsistem berikut

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

```
sys_s = series(G1,G2)         % subsistem G1 dilanjutkan G2
sys_p = parallel(G1,G2)       % luaran G1 ditambahkan dengan G2
sys_fneg = feedback(G1,G2) % sistem dengan umpan balik negatif
sys_fpos = feedback(G1,G2,1)% sistem dengan umpan balik positif
```

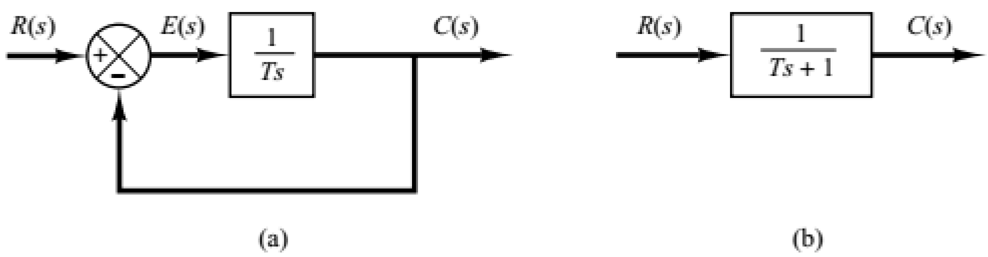
3.2.3 Sistem Orde-1

Representasi sistem dapat dinyatakan dalam persamaan ranah waktu yang berwujud persamaan diferensial. Persamaan diferensial tersebut dapat memiliki orde satu, dua, atau lebih (orde tinggi/*higher order*). Orde dari persamaan diferensial ditentukan oleh diferensial tertinggi dari persamaan tersebut. Semakin tinggi orde, sistem tersebut semakin kompleks, analisis sistem menjadi lebih tidak sederhana, dan tanggapan dari sistem juga akan berbeda.

Sistem orde-1 merupakan sistem dinamik yang paling sederhana. Sistem ini diperoleh dari persamaan sistem yang berupa persamaan diferensial dengan orde-1. Secara umum, persamaan dari fungsi alih dari sistem orde-1 ditunjukkan pada persamaan berikut

$$y' + ay = bu$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s+\ a}$$



Gambar 3.4 Diagram blok dari sistem orde-1. (a) Sistem dengan umpan balik langsung (*unity*); (b) sistem yang disederhanakan menjadi fungsi alih dari sistem umpan maju

Dalam diagram blok, sistem orde-1 dengan umpan balik langsung dengan penguatan tunggal dapat digambarkan seperti pada Gambar 3.4. Pada representasi seperti pada gambar tersebut, konstanta T adalah konstanta waktu yang dapat digunakan untuk analisis transien dari sistem.

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

Sebagai contoh, perhatikan fungsi alih sistem kalang terbuka orde-1 berikut

$$H(a) = \frac{a}{s+a}$$

Pengaruh penempatan pole pada sistem tersebut akan mempengaruhi tanggap impuls maupun tanggap fungsi langkah dari sistem tersebut.

```
sys_1 = zpk([],[-1],1) % sistem dengan pole pada titik -1
sys_2 = zpk([],[-2],2) % sistem dengan pole pada titik -2

figure(1)           % tanggap impuls dari kedua sistem
hold all
impulse(sys_1)
impulse(sys_2)
figure(2)           % tanggap fungsi langkah dari kedua sistem
hold all
step(sys_1)
step(sys_2)
```

3.2.4 Sistem orde-2

Sistem orde-2 bukan merupakan bentuk paling sederhana untuk representasi sistem, namun merupakan bentuk paling sederhana yang dapat digunakan untuk memodelkan sistem yang mengalami osilasi yang tidak dapat diwakili oleh model sistem orde-1. Sebagian besar model sistem disederhanakan dalam bentuk persamaan fungsi alih orde-1 atau orde-2 untuk memudahkan analisis dan perancangan. Secara umum, persamaan untuk sistem orde-2 akan memenuhi persamaan berikut

$$y'' + ay' + by = cu$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b}$$

Secara khusus untuk analisis osilasi yang dapat diwakili oleh sinyal dengan frekuensi tertentu ω_n, persamaan yang lebih umum untuk mewakili sistem orde-2 adalah sebagai berikut

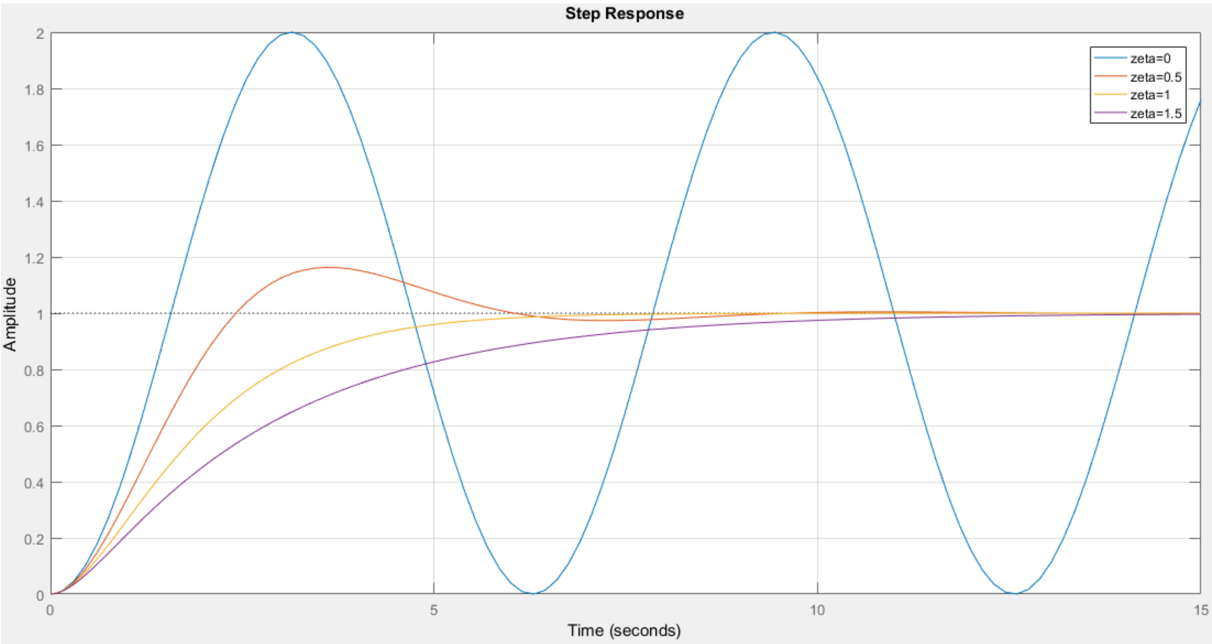
$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pada persamaan tersebut, ω_n adalah frekuensi natural dan ζ adalah faktor peredaman dimana sifat redaman sistem dapat dikategorikan sebagai berikut

$\zeta = 0$: tak teredam (*undamped*)	Sistem yang tidak teredam. Memiliki dua kutub imajiner
$0 < \zeta < 1$: redaman bawah (*under-damped*)	Sistem yang teredam dan memiliki dua kutub imajiner yang stabil. Stabil dengan cepat dan berosilasi.

$\zeta = 1$: redaman kritis (*critically damped*)	Memiliki dua akar nyata kembar. Sistem yang teredam tanpa mengalami osilasi dan menempuh waktu tercepat yang mungkin dicapai.
$\zeta > 1$: redaman atas (*over-damped*)	Memiliki dua akar nyata yang stabil. Sistem teredam dengan relatif lebih lambat namun tidak mengalami osilasi.

```
zeta = [0 0.5 1 1.5]    % variasi nilai faktor peredaman
wn = 1;                 % frekuensi natural = 1
figure
for i=1:4
 sys_zeta{i} = tf([wn^2],[1 2*zeta(i)*wn wn^2]);
                   % sistem dengan masing-masing faktor peredaman
 hold all
 step(sys_zeta{i},15)
                   % tanggap langkah dari masing-masing sistem
end
legend('zeta=0','zeta=0.5', 'zeta=1', 'zeta=1.5')
```



Gambar 3.5 Peredaman untuk variasi nilai zeta yang berbeda-beda

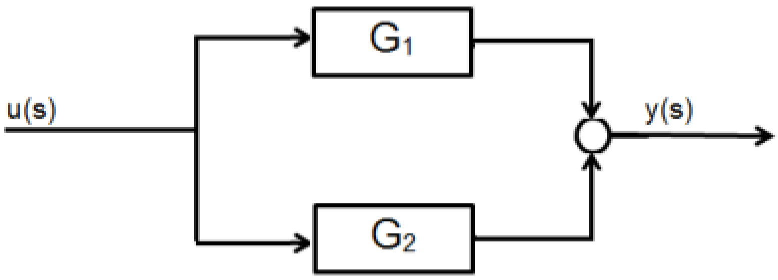
Pada sistem orde-2 ini, terkait dengan peredaman yang diharapakan muncul dari sistem yang diamati, terdapat beberapa karakteristik yang perlu dipahami, yaitu *overshoot*, *rise time*, *settling time*, dan *peak time*.

3.3 Praktikum

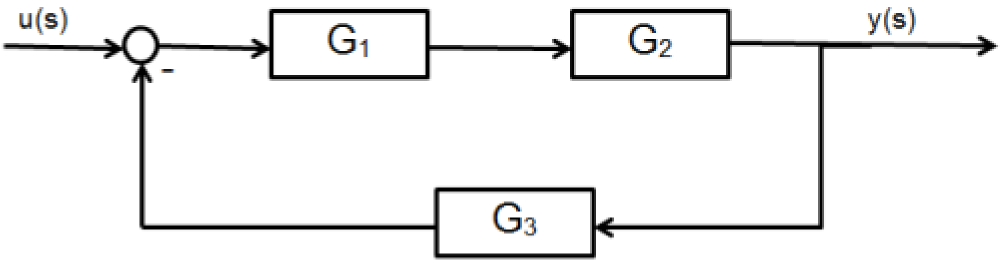
1. Sebuah sistem dengan masukan $U(s)$, luaran $Y(s)$ dan tiga subsistem dengan masing-masing fungsi alhnya adalah $G_1(s)$, $G_2(s)$, dan $G_3(s)$.

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$
$$G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$G_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

   a. Temukan persamaan fungsi alih sistem $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ pada kombinasi subsistem berikut.
      i. $H(s) = G_1(s)$
      ii. $H(s) = G_2(s)$
      iii. $H(s) = G_3(s)$



      iv.



      v.

   b. Bandingkan kelima tanggap fungsi langkah dan tanggap impulsnya. (gunakan perintah hold untuk kedua grafik tanggapan)

2. Sebuah sistem orde-1 yang memiliki konstanta waktu T dideskripsikan melalui fungsi alih $H(s)$ sebagai berikut

$$H(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

   Dengan variasi nilai $T = \{1,3,5,7\}$,
   a. Tuliskan masing-masing persamaan fungsi alih $H(s)$
   b. Bandingkan tanggap fungsi langkah dari masing-masing nilai T dari fungsi alih $H(s)$ tersebut dalam sebuah grafik tanggapan sistem.
   c. Bandingkan karakteristik tanggapan dari nilai T dari fungsi alih $H(s)$ tersebut.
   d. Tampilkan kutub-kutub (*poles*) dari masing-masing nilai T dari fungsi alih $H(s)$ tersebut dalam sebuah grafik pole-zero.

3. Sebuah sistem orde-2 yang memiliki dua akar imajiner dideskripsikan melalui fungsi alih $H(s)$ sebagai berikut

$$H(s) = \frac{|w + j2w|^2}{(s + w + j2w)(s + w - j2w)}$$

Dengan w adalah suatu bilangan nyata dan $j = \sqrt{-1}$.
Dengan variasi nilai $w = \{1,3,5,7\}$,
   a. Tuliskan masing-masing persamaan fungsi alih $H(s)$
   b. Bandingkan tanggap fungsi langkah dari masing-masing nilai w dari fungsi alih $H(s)$ tersebut dalam sebuah grafik tanggapan sistem.
   c. Bandingkan karakteristik tanggapan dari masing-masing nilai w dari fungsi alih $H(s)$ tersebut.
   d. Tampilkan kutub-kutub (*poles*) dari nilai masing-masing w dari fungsi alih $H(s)$ tersebut dalam sebuah grafik pole-zero.

Lab 4
Simulink untuk Pemodelan dan Analisis Sistem

4.1 Tujuan Praktikum

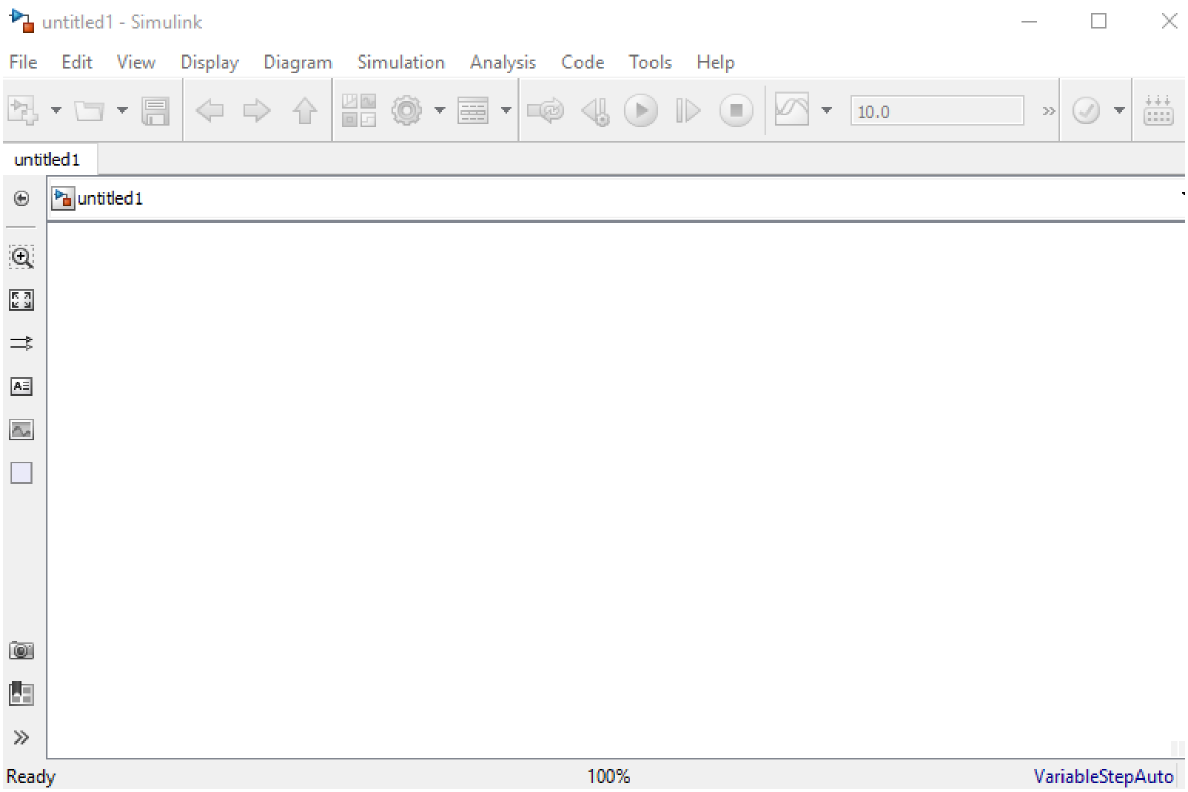
- Memahami pemanfaatan perangkat lunak Simulink untuk pemodelan sistem
- Mampu menggunakan Simulink untuk memodelkan dan menganalisis sifat sistem
- Mampu menggunakan Simulink untuk menyederhanakan model sistem

4.2 Dasar Teori

4.2.1 Pemodelan sistem dengan Simulink

Keunggulan dari sistem LTI adalah bahwa satu sistem ranah waktu secara keseluruhan dapat dinyatakan dalam bentuk blok-blok yang masing-masing mewakili subsistem dari sistem tersebut. Subsistem-subsistem tersebut dapat disusun sedemikian rupa sebagai susunan blok serial maupun paralel dalam ranah Laplace sebagai contohnya.

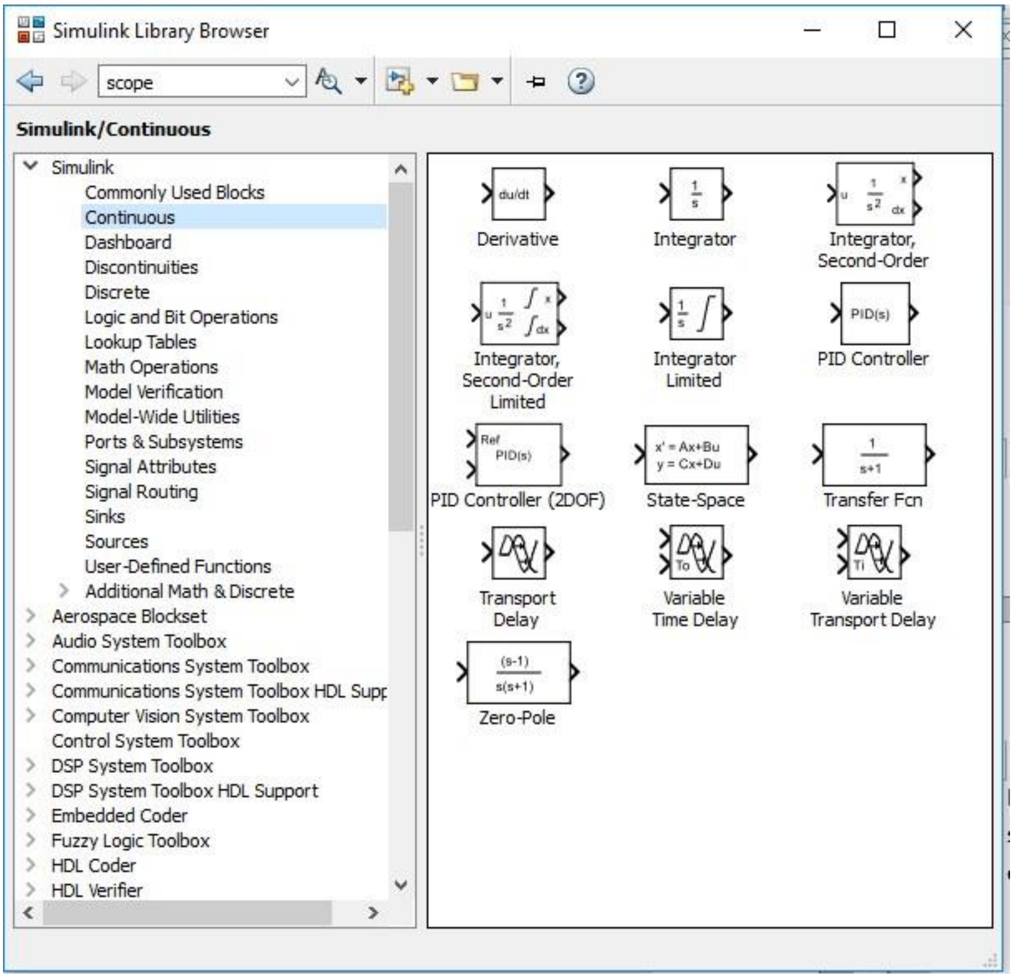
Simulink merupakan salah satu perangkat lunak yang memudahkan pemodelan dari suatu sistem dalam susunan blok-blok diagram. Blok-blok tersebut dapat berupa blok masukan, blok proses, blok representasi sistem, maupun blok luaran sistem. Pemodelan dalam simulink ini dilakukan melalui antarmuka grafis (GUI) yang memudahkan pengguna dalam menunjukkan hubungan antara satu subsistem dengan subsistem yang lainnya. GUI simulink dapat dipanggil melalui Matlab dan tampak seperti pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Jendela Simulink

Dalam simulink, blok-blok dikelompokkan dalam pustaka-pustaka (*libraries*) dengan kelas-kelas fungsi secara umum. Sebagai contoh, berikut beberapa pustaka untuk blok-blok dasar dalam analisis dan pemodelan sistem kendali seperti juga ditunjukkan pada Gambar 4.2 bawa.

5. *Math library* : fungsi-fungsi matematik seperti penjumlah dan penguat
6. *Continuous library* : integrator
7. *Source library* : konstanta, clock
8. *Sinks library* : scope, blok ke workspace



Gambar 4.2 Jendela *library browser* yang menampilkan blok-blok yang dapat digunakan

4.2.2 Penggunaan Simulink

Simulink dapat dipanggil melalui Matlab baik melalui jendela perintah dengan menuliskan simulink maupun dengan memilih dari papan perlengkapan pada jendela Matlab. Secara sederhana, konsep dari simulink adalah membentuk model sistem dengan blok-blok subsistem penyusunnya yang bisa diperoleh dari jendela pustaka. Setiap blok subsistem yang diambil dari jendela pustaka. Berikut adalah beberapa blok-blok yang paling sering digunakan dalam pemodelan sistem kendali.

- SUM

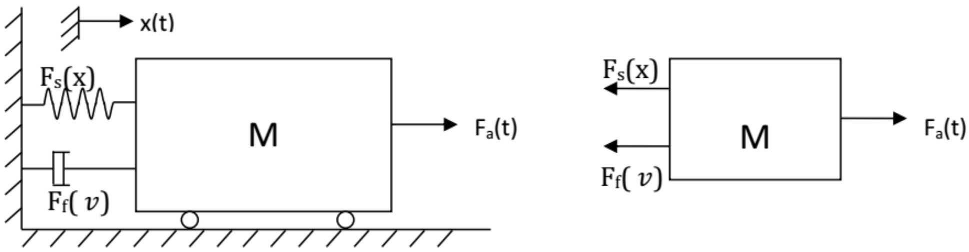
- GAIN
- INTEGRATOR
- CONSTANTS
- STEP
- SIGNAL GENERATOR
- SCOPE
- MUX
- CLOCK
- TO WORKSPACE

Dalam setiap blok di simulink, terdapat parameter blok terkait dengan fungsi dari masing-masing blok. Sebagai contoh, blok penguat (*gain*) memiliki parameter nilai penguatan, blok penjumlah (*sum*) memiliki parameter tanda-tanda (tambah atau kurang) dari beberapa masukan yang akan dijumlahkan. Untuk parameter yang berupa nilai variabel, parameter untuk setiap blok dapat langsung diisi dengan nilai ataupun diisi dengan nama variabel. Jika parameter diisi dengan nama variabel, nilai dari parameter tersebut akan disesuaikan dengan nilai dari variabel yang terdapat dalam *workspace* di Matlab.

Model sistem yang telah dirancang melalui simulink, dapat disimpan sebagai berkas dalam komputer. Model tersebut dapat dijalankan setelah setiap parameter diatur dan memiliki nilai, baik parameter tersebut diatur dengan nilai tertentu maupun parameter tersebut diisi dengan suatu nama variabel yang namanya dibangkitkan melalui jendela perintah dalam Matlab. Untuk menjalankan model tersebut dapat digunakan dua cara, yaitu secara langsung dengan menekan tombol *Run* atau menuliskan perintah melalui jendela perintah dalam Matlab seperti berikut

```
sim('massa_pegas') % menjalankan model yang bernama massa_pegas
```

4.2.3 Model sistem massa-pegas



Gambar 4.3 Sistem massa-pegas beserta besaran-besaran yang terkait

Gambar 4.3 menunjukkan model fisis dari sistem massa-pegas. Pada sistem massa pegas, sistem akan mengamati perpindahan balok yang memiliki massa m sejauh $x(t)$ yang terikat dengan pegas dengan konstanta k dan koefisien gesek b. Dengan masukan dari sistem tersebut berupa gaya $F(t)$ pada massa tersebut, hubungan dari masukan dan luaran sistem dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial berikut

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Dengan transformasi laplace, sistem tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan laplace

$$s^2X(s) + \frac{b}{m}sX(s) + \frac{k}{m}X(s) = \frac{1}{m}F(s)$$

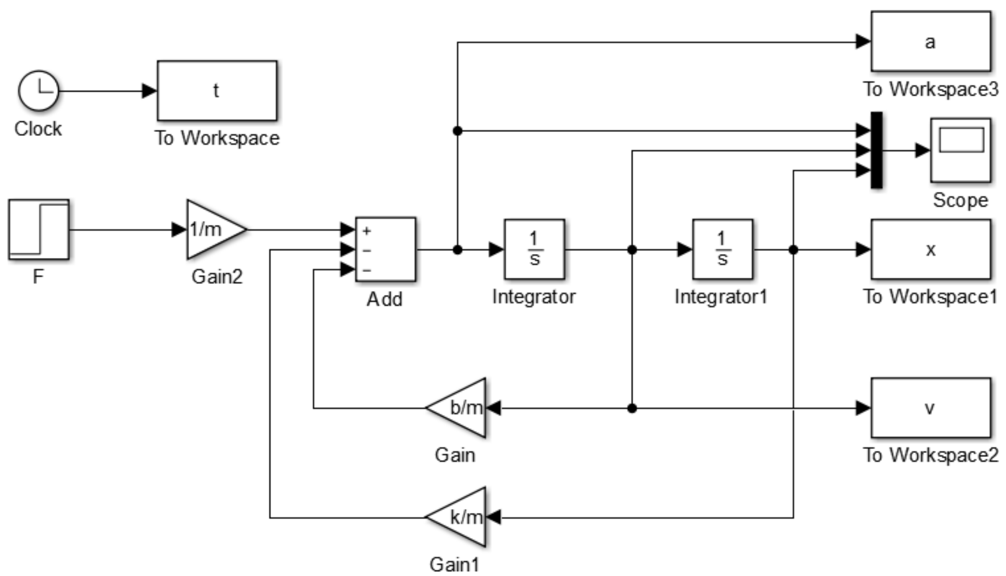
$$X(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{m}F(s) - \frac{k}{m}X(s) - \frac{b}{m}sX(s)\right)$$

Sesuai dengan persamaan di atas, blok-blok matematika yang digunakan antara lain adalah integrator ($\frac{1}{s}$), penguat (*gain*), dan penjumlah (*add* atau *sum*).

Sebagai contoh, anggap masing-masing parameter dari sistem tersebut adalah sebagai berikut:

- $m = 2$
- $b = 4$
- $k = 16$
- $F(t)$: fungsi langkah

Dalam simulink, dengan memanfaatkan blok-blok subsistem yang tersedia, sistem tersebut dapat disusun seperti pada Gambar 4.4. Seperti ditunjukkan pada gambar tersebut, masukan dari sistem berupa fungsi langkah $F(t)$ dalam blok *step*, dengan luaran sistem adalah simpangan $x(t)$. Hasil yang diamati dari sistem tersebut berupa luaran $x(t)$ beserta kedua turunannya, yaitu kecepatan simpangan $\dot{x}(t)$ atau $v(t)$ dan percepatan simpangan $\ddot{x}(t)$ atau $a(t)$ dalam blok *scope* setelah melalui *mux* untuk menghubungkan ketiga variabel dengan satu buah scope.

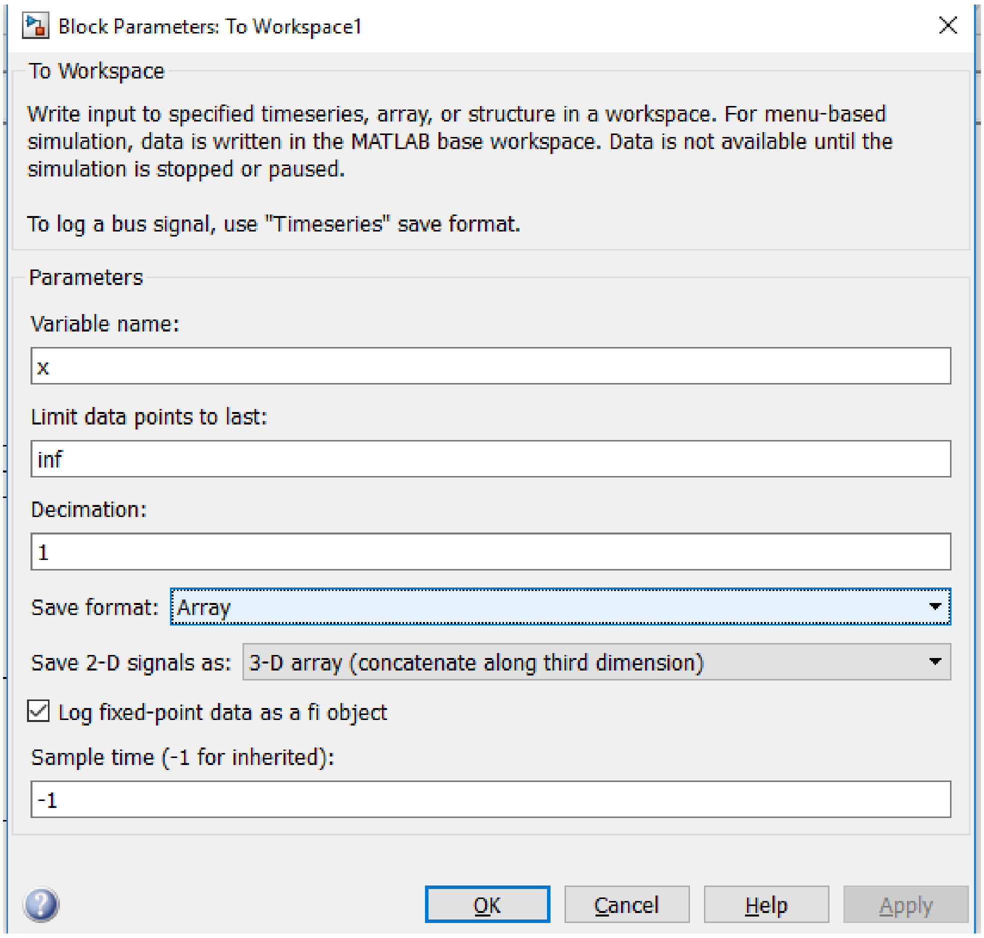


Gambar 4.4 Model sistem massa pegas dalam Simulink

Dalam Matlab, setiap variabel diinisiasi dengan nilai yang digunakan dan blok *to workspace* akan menyimpan setiap nilai dari besaran yang akan diamati.

```
m = 2        % massa balok
k = 16       % konstanta pegas
b = 4        % koefisien gesek
```

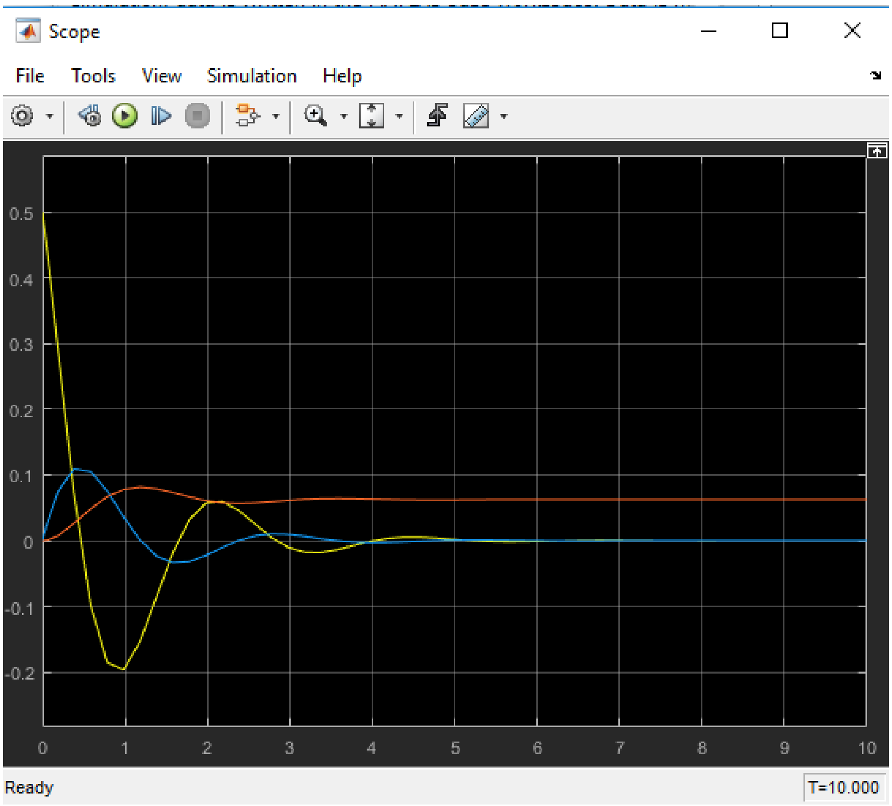
Untuk menyimpan nilai variabel dalam matlab, digunakan blok *to workspace*. Agar variabel yang tersimpan berbentuk larik yang pada umumnya digunakan untuk analisis dalam Matlab, parameter *save format* perlu diatur dalam mode *array* seperti ditunjukkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Paramter blok *to workspace*

Sebagai penampil grafik dari besaran yang diamati, digunakan blok *scope* dimana jika akan ditampilkan beberapa nilai dalam satu grafik yang sama, perlu digunakan blok *mux* sehingga akan tampil grafik bersama seperti pada Gambar 4.6. Namun demikian, penggunaan plot pada Matlab juga dapat dilakukan setelah mendapatkan nilai variabel pengamatan yang telah disimpan melalui blok *to workspace*.

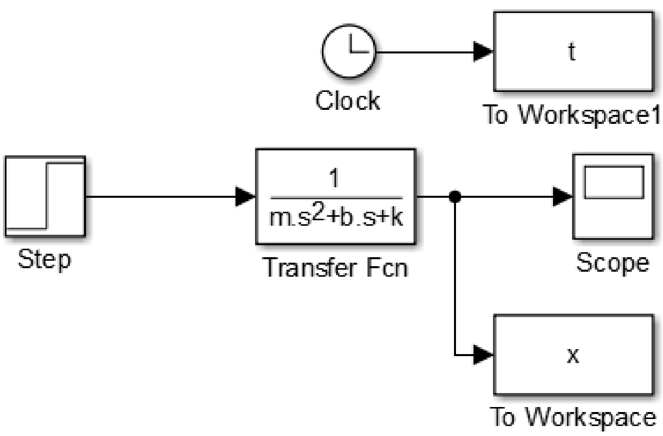
```
plot(t,x,t,v,t,a)                % grafik bersama
legend('simpangan','kecepatan simpangan','percepatan simpangan'
```



Gambar 4.6 Grafik pengamatan besaran dalam sistem melalui blok *scope*

Selain dalam bentuk blok diagram dari sistem kalang tertutup seperti pada persamaan sebelumnya, simulink juga menyediakan blok fungsi alih (*transfer function*) yang memungkinkan untuk menuliskan persamaan fungsi alih dalam suatu blok. Dalam contoh massa pegas ini, fungsi alih $H(s)$ didefinisikan dengan persamaan di bawah ini dan model dalam simulink ditunjukkan pada Gambar 4.7.

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

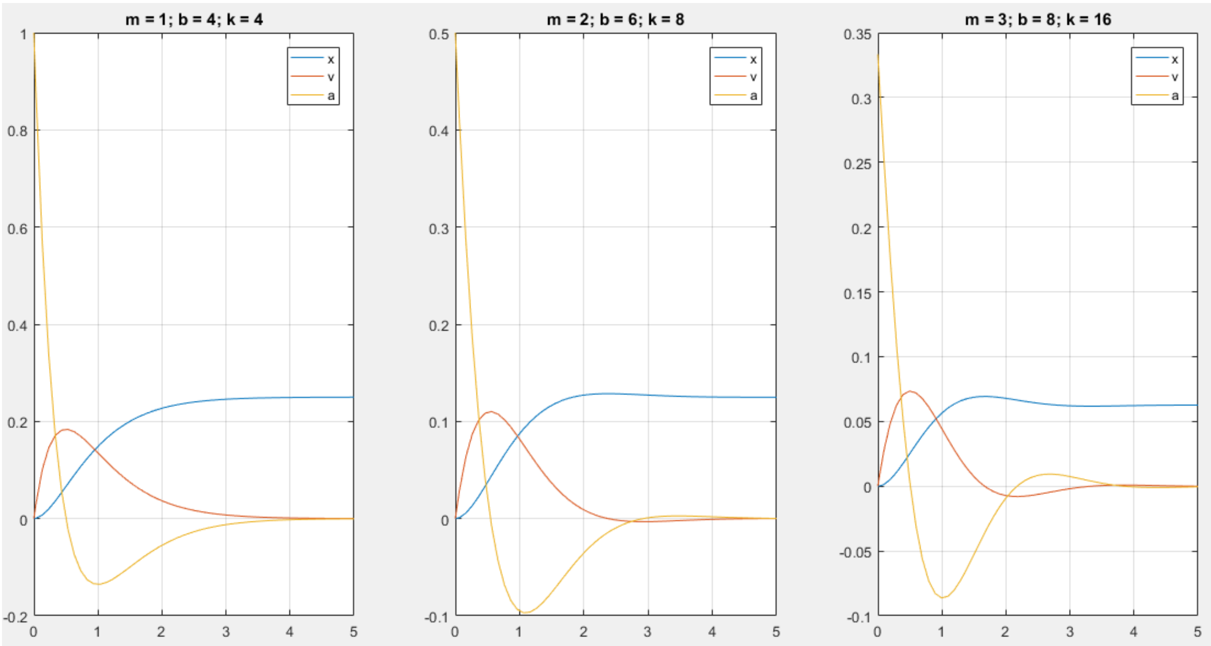


Gambar 4.7 Blok fungsi alih dalam simulink

4.2.4 Simulasi model melalui jendela perintah atau berkas .m

Keuntungan dari menjalankan model melalui perintah pada jendela perintah Matlab adalah pengguna dapat melakukan simulasi beberapa variasi nilai besaran pada satu model yang sama. Perintah simulasi dapat dijalankan melalui jendela perintah sebagaimana halnya dengan perintah melalui berkas .m. Sebagai contoh, berikut adalah simulasi dari model sistem massa pegas dengan nilai konstanta m, b, dan k yang divariasi dengan luaran berupa variabel untuk besaran x, v, dan a dengan hasil berupa grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.8.

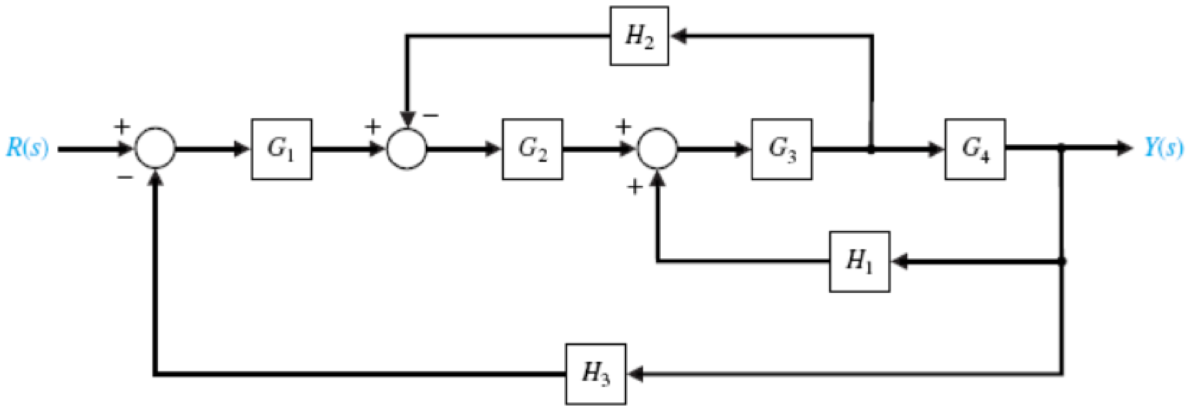
```
m_ = [1 2 3];           % variasi massa
b_ = [4 6 8];           % variasi konstanta b
k_ = [4 8 16];          % variasi konstanta k

for i=1:3               % tiga variasi simulasi
    m = m_(i); % massa ke-i
    b = b_(i); % b ke-i
    k  =  k_(i);  %  k  ke-i
    sim('massa_pegas')
    t_{i}  = t';    % simpan luaran t dalam t_
    x_{i}  = x';    % simpan luaran x dalam x_
    v_{i}  = v';    % simpan luaran v dalam v_
    a_{i} = a'; % simpan luaran a dalam a_
end

for i=1:3               % tampilkan grafik hasil simulasi ke-i
    subplot(1,3,i)
    plot(t_{i},x_{i},t_{i},v_{i},t_{i},a_{i})
    legend('x','v','a')
    title(sprintf('m = %d; b = %d; k = %d',m_(i),b_(i),k_(i)))
    grid
end
```



Gambar 4.8 Simulasi untuk tiga variasi nilai konstanta pada sistem massa pegas

4.3 Praktikum

1. Perhatikan blok suatu sistem berikut

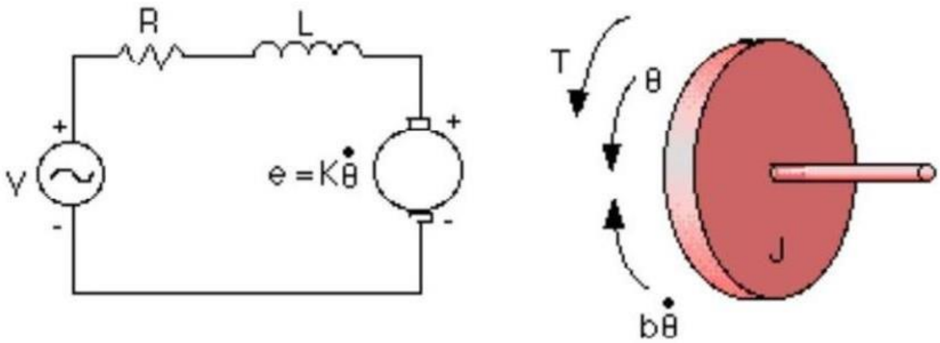


Jika diketahui blok umpan maju $G_1 = \frac{1}{s+10}$; $G_2 = \frac{1}{s+1}$; $G_3 = \frac{s+1}{s^2+4s+4}$; $G_4 = \frac{s+1}{s+6}$ dan blok umpan balik $H_1 = \frac{s+1}{s+2}$; $H_2 = 2$; $H_3 = 1$, maka

a. Tentukan fungsi alih sistem $F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ dengan menggunakan konsep interkoneksi sistem dalam Matlab. (fungsi series, parallel, dan feedback)
   Amati tanggap fungsi langkah dari fungsi alih $F(s)$.

b. Rancang model sistem tersebut dalam simulink, kemudian amati grafik tanggap fungsi langkah dari $y(t)$.

2. Suatu sistem motor DC dapat digambarkan dalam model berikut



Dalam ranah Laplace, hubungan antara kecepatan putar $\theta(t)$ dan tegangan masukan $v(t)$ dinyatakan dalam persamaan

$$\frac{\theta}{V} = \frac{K}{(Js+b)(\mathrm{L}s+R)+K^2}$$

a. Modelkan sistem tersebut dalam simulink. Amati putaran motor dalam besaran sudut $\theta(t)$ dan kecepatan sudut $\theta(t)$

b. Buatlah sebuah berkas .m untuk membantu melakukan simulasi motor DC tersebut jika digunakan dua variasi nilai berikut
   Momen inersia $J = \{0.01, 0.03\}$
   Rasio redaman $b = \{0.1, 0.5\}$

Konstanta gaya emf $K = \{0.01, 0.025\}$
Hambatan � $= \{5, 10\}$
Induktansi $H = \{1, 0.5\}$
Tegangan DC masukan $v = \{3,5\}$

c. Tampilkan grafik dari simulasi dengan kedua variasi nilai tersebut.

Lab 5
Metode Penempatan Kutub

5.1 Tujuan Praktikum

1. Memahami analisis kestabilan dari sistem dalam representasi ruang keadaan
2. Memahami prinsip keterkendalian dari sistem dalam representasi ruang keadaan
3. Mampu melakukan pengendalian sistem melalui matriks penguat dengan metode penempatan kutub

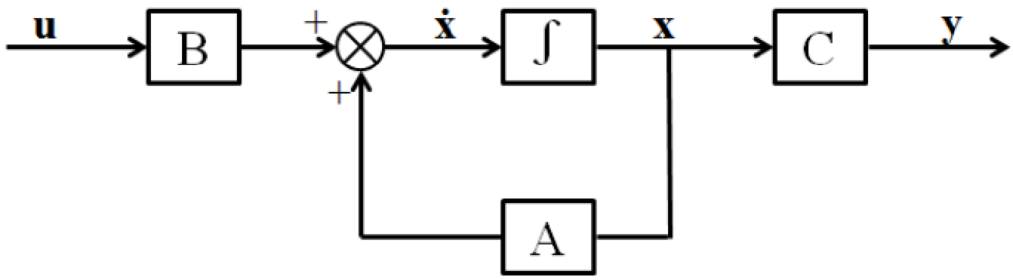
5.2 Dasar Teori

5.2.1 Kestabilan sistem

Secara umum, sistem dapat diamati sifat-sifatnya dalam hal kestabilan (*stability*), keterkendalian (*controllability*), maupun kemampuannya untuk dapat diamati (*observability*). Dalam representasi ruang keadaan, secara umum sistem dengan masukan tunggal dan luaran tunggal (*single input and single output* = SISO) dinyatakan dalam persamaan di bawah ini yang bersesuaian dengan diagram blok pada Gambar 5.1 dan melalui persamaan tersebut, sifat-sifat tersebut dapat diamati.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$



Gambar 5.1 Diagram blok sistem dalam representasi ruang keadaan

Dalam hal kestabilan, suatu sistem yang dirancang dapat berada pada salah satu dari tiga kondisi kestabilan berikut:

- Stabil asimtotik (*asymptotic stable*), dimana kutub-kutub dari sistem atau nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ berada pada sisi kiri bidang kompleks
- Kestabilan kritis (*critical stable*), dimana kutub-kutub dari sistem atau nilai eigen matriks $\mathbf{A}$ berada pada sumbu imajiner dan tidak ada yang berada pada sisi kanan bidang kompleks
- Tak stabil (*unstable*), dimana kutub-kutub dari sistem atau nilai eigen matriks $\mathbf{A}$ berada pada sisi kanan bidang kompleks atau terdapat kutub kembar pada sumbu imajiner.

Nilai eigen dari matriks persegi $\mathbf{A}$ dengan dimensi $n \times n$ dapat ditentukan melalui persamaan berikut

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Melalui persamaan tersebut, akan dihasilkan sebanyak n nilai eigen λ yang masing-masing mewakili kutub-kutub dari sistem. Dengan mengamati nilai dari λ, kestabilan dari sistem dapat diketahui. Dalam matlab, nilai eigen dapat diperoleh melalui fungsi berikut

```
lambda = eig(A)   % nilai-nilai eigen dari matriks A
```

Selain melalui pengamatan secara langsung dari nilai-nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$, kestabilan sistem juga dapat diamati dengan menggunakan fungsi berikut

```
stabil = isstable(sys) % mengetahui kestabilan dari sistem sys
```

Sebagai contoh, perhatikan sistem dalam representasi ruang keadaan berikut

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sistem tersebut dapat diamati kestabilannya dengan melihat nilai-nilai eigennya.

```
lambda = eig(A)        % nilai-nilai eigen
p = pole(sys)          % kutub-kutub sistem
stabil = isstable(sys) % kestabilan sistem
step(sys)
```

5.2.2 Keterkendalian

Pada representasi sistem dengan persamaan ruang keadaan, suatu sistem dikatakan terkendali jika pada waktu $t_0 > 0$, terdapat masukan $u(t)$ sedemikian rupa sehingga keadaan sistem dapat diarahkan menuju titik asal. Sistem yang terkendali berarti bahwa sistem tersebut dapat distabilkan. Secara matematis, untuk suatu keadaan awal sistem $\mathbf{x}(0) = \xi$, terdapat masukan sistem $u(t)$ yang membuat sistem menuju titik asal pada suatu waktu $t > 0$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$.

Untuk menganalisis keterkendalian suatu sistem, dibentuk suatu matriks keterkendalian Q dimana melalui matriks tersebut dapat diketahui apakah sistem tersebut dapat dikendalikan atau tidak. Untuk suatu sistem berorde-n, matriks keterkendalian Q adalah

$$\mathrm{Q} = [\mathrm{B} \;\vdots\; \mathbf{A}\mathrm{B} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; \mathbf{A}^{n-1}\mathrm{B}]$$

Jika sistem dalam persamaan ruang keadaan terkendali, maka *rank* dari matriks Q harus bernilai n.

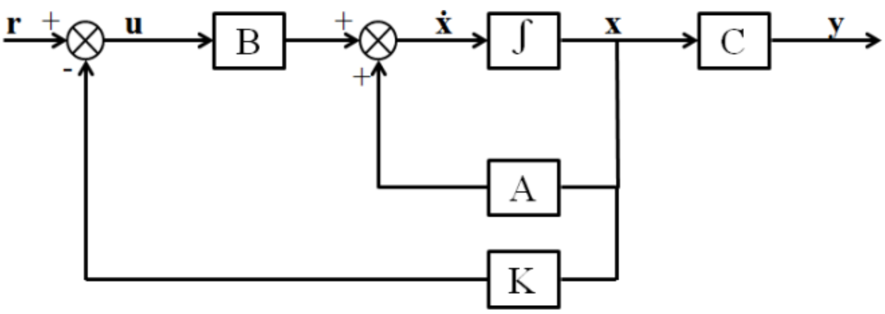
$$\mathrm{rank}(Q) = n$$

Dalam Matlab, matriks Q dapat dibentuk melalui persamaan di atas, maupun menggunakan fungsi yang disediakan oleh Matlab. Sebagai contoh, untuk sistem berorde-3 pada contoh sistem di atas

```
Q1 = [B A*B A*A*B] % persamaan matriks keterkendalian
Q2 = ctrb(sys)     % matriks keterkendalian dari sistem sys
rank(Q)            % rank dari matriks Q
```

5.2.3 Penempatan kutub melalui umpan balik keadaan

Suatu sistem yang tidak stabil namun terkendali, dapat distabilkan melalui analisis umpan balik dari sistem tersebut. Pada representasi ruang keadaan, matriks umpan balik $\mathbf{K}$ dapat dibentuk sebagai umpan balik dari keadaan $\mathbf{x}(t)$ untuk membentuk suatu masukan sistem baru $u(t)$ agar sistem tersebut stabil. Jika dikaitkan dengan diagram blok dari sistem seperti ditunjukkan pada Gambar 5.1, pembentukan matriks umpan balik $\mathbf{K}$ ditunjukkan pada diagram blok pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2 Representasi sistem ruang keadaan dengan umpan balik keadaan

Pada diagram blok Gambar 5.2, masukan sistem adalah $u(t)$ dan matriks umpan balik adalah $\mathbf{K}$. Sinyal $r(t)$ adalah masukan dari sistem kendali yang digunakan untuk membentuk masukan baru bagi sistem agar sistem tersebut terkendali. Dengan sinyal masukan kendali $r(t)$ diatur di luar sistem yang dikendalikan, masukan sistem yang baru dapat ditentukan melalui persamaan berikut

$$u(t) = -\mathbf{Kx}(t) + r(t), \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$u(t) = -[k_0 \quad k_1 \quad \dots \quad k_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + r(t)$$

$$u(t) = -k_0x_1 - k_1x_2 - \cdots - k_{n-1}x_n + r(t)$$

Dengan persamaan tersebut, koefisien k_i menjadi pengali dari variabel keadaan x_j, sehingga matriks $\mathbf{K}$ disebut sebagai matriks penguat (*gain*). Dengan menggantikan masukan sistem $u(t)$ dengan nilai baru setelah melalui umpan balik dan sinyal masukan kendali, persamaan ruang keadaan akan menjadi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + r(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathrm{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}r(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Dengan persamaan ruang keadaan yang memiliki umpan balik $\mathbf{K}$, kestabilan dari sistem tergantung pada nilai-nilai eigen dari matriks $(\mathbf{A} - \mathrm{B}\mathbf{K})$. Sebagai akibatnya, agar sistem stabil, maka diperlukan matriks $\mathbf{K}$ yang tepat sedemikian rupa sehingga nilai-nilai eigen yang dihasilkan akan berada pada sisi kiri bidang kompleks yang bersesuaian dengan sifat stabil dari suatu sistem.

Dalam Matlab, matriks $\mathbf{K}$ untuk suatu kutub p yang diinginkan dapat ditentukan melalui fungsi berikut

```
K = place(A,B,P) % matriks K untuk kutub-kutub p
```

Sebagai contoh, perhatikan persamaan ruang keadaan berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

```
eig(A)            % nilai-nilai eigen dari sistem
isstable(sys)     % kestabilan sistem
Q = ctrb(sys)     % matriks keterkendalian
R = rank(Q)       % rank dari matriks Q
P = [-2+4i,-2-4i -10]
                  % peletakan kutub-kutub baru
K = place(A,B,P) % matriks K untuk kutub-kutub P
sys_fb = ss(A-B*K,B,C-D*K,D)
                  % sistem setelah penempatan kutub
step(sys)
step(sys_fb)
```

5.3 Praktikum

1. Suatu sistem berorde-2 dinyatakan dengan persamaan ruang keadaan berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

   a. Tentukan kutub-kutub dari sistem tersebut.
   b. Tentukan matriks Q melalui persamaan pembentukan matriks.
   c. Tentukan apakah sistem tersebut stabil.

d. Tentukan matriks umpan balik K sedemikian rupa sehingga sistem kalang tertutup tersebut memiliki kutub-kutub
   i. $-1 \pm 2i$.
   ii. $\pm 3i$.
   iii. $2 \pm 4i$.

e. Amati tanggap fungsi langkah dari sistem yang baru tersebut.

2. Dalam keadaan tertentu, suatu pendekatan linier untuk sistem turbin dengan 3 bilah turbin dapat dilakukan. Untuk turbin yang memiliki jejari kerja $15m$ pada kecepatan angin sebesar $12\ ^{m}/_{s}$ untuk pembangkitan $220V$, persamaan ruang keadaan untuk sistem tersebut dinyatakan dengan

$$\begin{bmatrix} \beta' \\ \xi' \\ \xi'' \\ \omega_g' \\ \omega_{gm}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10{,}5229 & -1066{,}67 & -3{,}38028 & 23{,}5107 & 0 \\ 0 & 993{,}804 & 3{,}125 & -23{,}5107 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \xi \\ \xi' \\ \omega_g \\ \omega_{gm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1{,}223 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \xi \\ \xi' \\ \omega_g \\ \omega_{gm} \end{bmatrix}$$

Dimana

β : sudut bilah turbin

ξ : sudut relatif untuk poros sekunder

ω_g : kecepatan generator

ω_{gm} : kecepatan pengukuran generator

$u(t)$: sudut referensi

$y(t)$: daya aktif yang dibangkitkan

a. Temukan nilai-nilai eigen dari sistem tersebut.
b. Apakah sistem tersebut stabil?
c. Apakah sistem tersebut terkendali?
d. Melalui umpan balik keadaan, tentukan matriks $\mathbf{K}$ agar sistem tersebut mendekati sistem berorde-2 yang memiliki persamaan karakteristik $s^2 + 4s + 11 = 0$. Sistem tersebut hanya memiliki 2 kutub, sehingga tentukan 3 kutub lain yang minimal 10 kali lebih jauh dari kutub-kutub dari sistem berorde-2 yang ingin didekati,
e. Tentukan sistem baru dengan penempatan kelima kutub yang baru.
f. Amati tanggap fungsi alih sistem kalang terbuka dan kalang tertutup dari sistem dalam representasi ruang keadaan tersebut.

Lab 6
Analisis Root-Locus

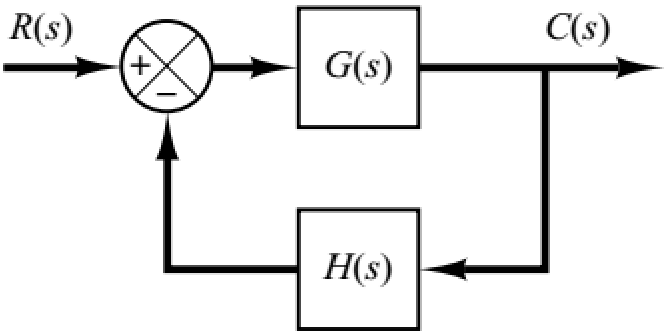
6.1 Tujuan Praktikum

1. Memahami pengaruh penguatan pada umpan balik sistem
2. Memahami grafik *root locus* sebagai representasi variasi penguatan dalam sistem kalang tertutup
3. Mampu melakukan perancangan sistem dengan metode *root locus* dengan pemilihan penguatan yang tepat sesuai dengan kriteria yang ingin dipenuhi

6.2 Dasar Teori

6.2.1 Karakteristik sistem dengan umpan balik

Secara umum, suatu sistem dengan fungsi alih kalang terbuka $G(s)$ dan memiliki umpan balik $H(s)$ dapat digambarkan dengan diagram blok kalang tertutup seperti pada Gambar 6.1. Sistem tersebut dapat disederhanakan menjadi sistem kalang terbuka.



Gambar 6.1 Sistem dengan umpan balik negatif

Sistem kalang terbuka dari sistem dengan umpan balik negatif seperti pada gambar di atas dapat dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Fungsi alih suatu sistem yang dinyatakan dalam ranah laplace memiliki persamaan karakteristik yang diperoleh dengan menganggap penyebut dari persamaan tersebut sama dengan nol. Dalam persamaan di atas, persamaan karakteristik sistem dapat dinyatakan dengan persamaan

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Dalam analisis sistem, lokasi dari kutub suatu sistem menentukan kestabilan dari sistem tersebut. Secara umum, sistem akan stabil kritis jika kutub berada pada sumbu imajiner dan akan stabil asimtotik jika kutub-kutub sistem berada pada sisi kiri bidang kompleks.

Sistem kendali yang pada umumnya memanfaatkan umpan balik dari sistem untuk kemudian dimanfaatkan untuk memanipulasi masukan ke sistem agar mencapai ke kondisi yang diinginkan, pada dasarnya akan membentuk kutub baru dari sistem kalang tertutup dari yang sebelumnya kutub-kutub yang ada hanya bersesuaian dengan kutub-kutub dari sistem kalang terbuka asalnya.

6.2.2 Metode *root locus* pada sistem umpan balik tunggal

Pada sistem yang memiliki penguatan (*gain*) K yang dapat divariasikan, lokasi kutub-kutub hasil dari variasi penguatan tersebut adalah tertentu. Pasangan dari nilai penguatan tertentu dan lokasi kutub-kutub sistem tersebut dapat digambarkan dengan representasi grafis yang disebut sebagai grafik *root locus*. Pada sistem dengan penguatan K, yaitu $KG(s)$ dan umpan balik negatif tunggal, fungsi alih sistem dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$F(s) = \frac{C(s)}{�(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Sebagai contoh, perhatikan fungsi alih sistem berikut

$$G(s) = \frac{K}{s + 5}$$

Kutub dari sistem tersebut adalah $s = -5$. Fungsi alih kalang tertutup dengan umpan balik negatif tunggal (gain K = 1) dari sistem tersebut adalah

$$\frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s + K + 5}$$

Persamaan karakteristik dari sistem tersebut adalah

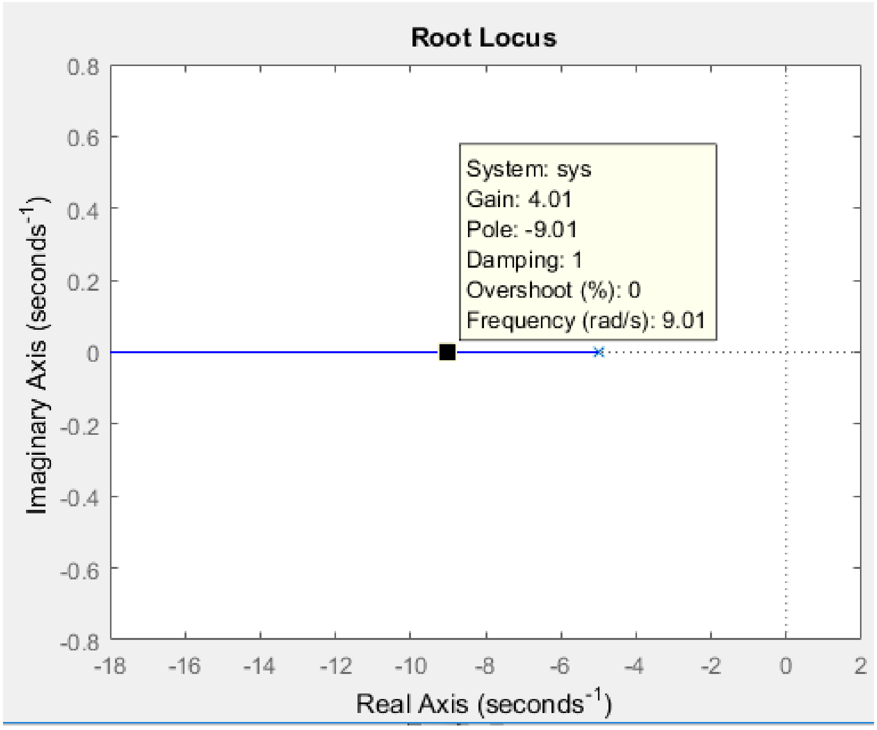
$$s + K + 5 = 0$$

Jika diinginkan kutub dari sistem tersebut adalah pada titik -6, maka penguatan yang diper lukan adalah $K = 1$. Begitu juga untuk kutub -8 akan bersesuaian dengan penguatan $K = 3$.

Pada Matlab, lokasi *root locus* secara grafik dapat digambarkan melalui fungsi rlocus() seperti ditunjukkan pada Gambar 6.2.

```
sys = tf([1],[1 5])      % sistem kalang terbuka G(s)
rlocus(sys)              % grafik root locus untuk penguatan
r = rlocus(sys,[0 2 4]) % kutub-kutub untuk K=0, 2, dan 4
```

Melalui grafik *root locus* pada Matlab, pada grafik yang tergambar terdapat informasi mengenai penguatan (*gain*), faktor peredaman (*damping*), *overshoot*, dan frekuensi sudut *frequency*) pada kutub (*pole*) yang bersesuaian.



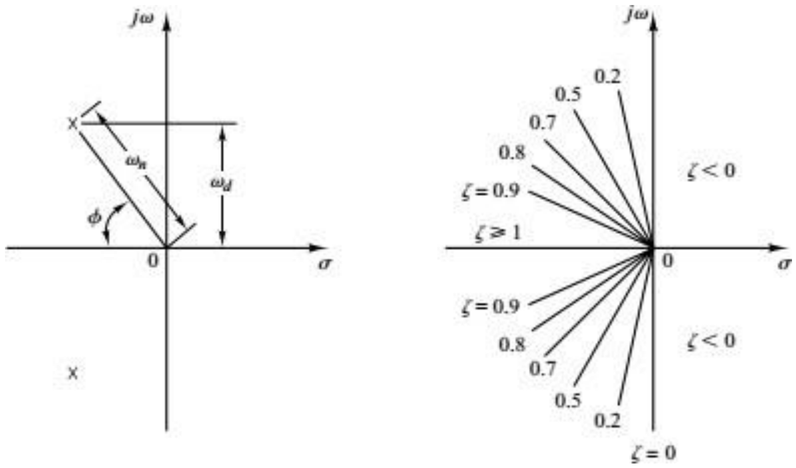
Gambar 6.2 Grafik *root locus* untuk sistem kalang tertutup $\frac{K}{s+K+5}$

6.2.3 Faktor peredaman ζ dan frekuensi sudut ω pada metode *root locus*

Pada sistem dengan orde yang lebih dari satu, kestabilan sistem akan tergantung pada faktor peredaman ζ dan osilasi dari sistem tersebut akan tergantung pada frekuensi sudut ω. Metode *root locus* merupakan metode grafis yang pada dasarnya untuk suatu lokasi kutub pada *root locus* bersesuaian dengan faktor peredaman dan frekuensi sudut dari sistem yang baru. Dalam hal ini, pemilihan kutub akan menghasilkan nilai penguatan K pada sistem kalang tertutup. Dengan kaitan matematis, pemilihan faktor peredaman atau frekuensi sudut juga dapat dilakukan melalui grafik tersebut.

Pada bidang kompleks, faktor peredaman ζ dapat digambarkan sebagai garis lurus dari titik � dengan sudut sebesar ϕ dari sumbu nyata negatif, dimana $\phi = \arccos \zeta$. Representasi ini dapat dipahami bahwa faktor peredaman hanya akan bernilai lebih besar sama dengan 0 untuk mendapatkan kestabilan sistem, kutub sistem harus berada pada sisi kiri bidang kompleks yang berarti jika kutub tersebut ditarik garis lurus ke titik � akan menghasilkan sudut ϕ yang kurang dari sama dengan 90^0 dari sumbu nyata negatif, dan bersesuaian dengan $\cos \phi \geq 0$.

Frekuensi sudut ω dari sistem dapat dipahami sebagai nilai pada sumbu imajiner $j\omega$, sehingga besar ω dari sistem dapat digambarkan sebagai lingkaran dengan jari-jari tertentu dengan pusat titik �. Gambaran dari ζ dan ω untuk mencapai kestabilan dari sistem digambarkan pada Gambar 6.3.



Gambar 6.3 Faktor peredaman dan frekuensi sudut pada grafik *root locus*

Pada Matlab, garis untuk faktor peredaman dan lingkaran frekuensi sudut tertentu dapat digambarkan melalui fungsi sgrid()

Sebagai contoh perhatikan sistem berorde dua berikut

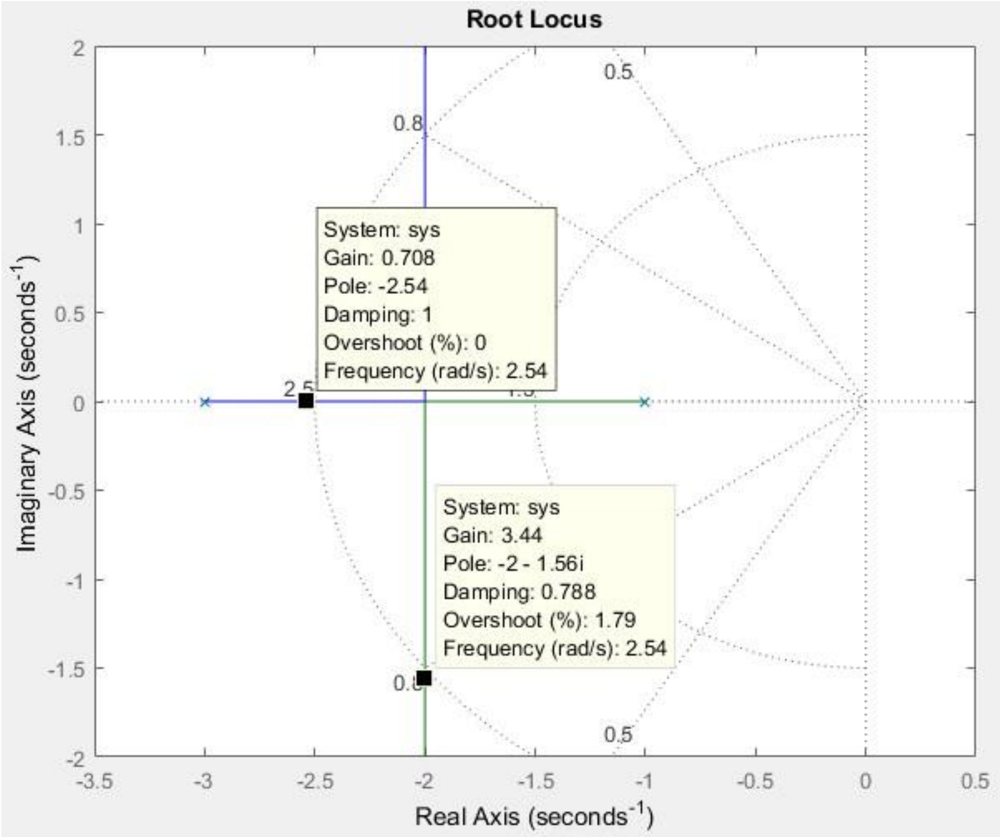
$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$$

Penguatan K yang bersesuaian degan faktor peredaman $\zeta = 0{,}788$ adalah $K = 3{,}44$ yang diperoleh dengan mengamati grafik *root locus* yang berpotongan dengan garis faktor peredaman.

```
step(sys)
rlocus(sys)       % grafik root locus
sgrid([0.5 0.8],[1.5 2.5])
                  % faktor peredaman dan frekuensi tertentu
K = 3.44
sys_cl=feedback(sys,K)
                  % sistem kalang tertutup dengan faktor
            peredaman = 0,788
step(sys_cl)
```

Penguatan K yang bersesuaian degan faktor peredaman $\omega = 2{,}54$ adalah $K = 0{,}708$ yang diperoleh dengan mengamati grafik *root locus* yang berpotongan dengan garis faktor peredaman.

```
K = 0.708
sys_cl=feedback(sys,K)
                  % sistem kalang tertutup dengan frekuensi
            sudut = 2.54
step(sys_cl)
```



Gambar 6.4 Grafik *root locus* dengan garis faktor peredaman 0,5 dan 0,8 serta lingkaran frekuensi sudut 1,5 dan 2,5

6.3 Praktikum

1. Suatu sistem dengan penguatan tunggal negatif (*negative feedback*) memiliki fungsi alih kalang terbuka sebagai berikut

$$G(s) = \frac{K(s-2)(s-4)}{s^2+6s+25}$$

   a. Gambarkan grafik *root locus* dari sistem tersebut.
   b. Tentukan nilai-nilai kutub untuk nilai-nilai penguatan $K = 1,3,5,7$
   c. Untuk penguatan K berapa sistem kalang tertutup akan mulai stabil. (kestabilan dimulai sejak stabil kritis. Sesuaikan dengan faktor peredaman pada saat stabil kritis)
   d. Tentukan fungsi alih kalang tertutup yang memiliki faktor peredaman sebesar 0,5. Tentukan juga penguatan K, kutub-kutub, dan frekuensi sudutnya. Amati tanggap fungsi langkahnya.
   e. Tentukan fungsi alih kalang tertutup yang memiliki frekuensi sudut sebesar 2. Tentukan juga penguatan K, kutub-kutub, dan faktor peredamannya. Amati tanggap fungsi langkahnya.

2. Metode *root locus* dapat diterapkan pada sistem dengan representasi ruang keadaan. Pada Matlab, metode ini dijalankan dengan langkah yang serupa dengan sistem dalam representasi fungsi alih Laplace.
   Perhatikan sistem berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

   a. Gambarkan grafik *root locus* dari sistem tersebut.
   b. Tentukan nilai-nilai kutub untuk nilai-nilai penguatan $K = 10{,}30{,}50{,}70$
   c. Untuk penguatan K berapa sistem kalang tertutup akan mulai stabil.
   d. Tentukan matriks $\mathbf{A}$ dari sistem kalang tertutup yang memiliki faktor peredaman sebesar 0,5. Tentukan juga penguatan K, kutub-kutub, dan frekuensi sudutnya. Amati tanggap fungsi langkahnya.
   e. Tentukan matriks $\mathbf{A}$ dari kalang tertutup yang memiliki frekuensi sudut sebesar 10. Tentukan juga penguatan K, kutub-kutub, dan faktor peredamannya. Amati tanggap fungsi langkahnya.
   f. Tentukan matriks $\mathbf{A}$ dari kalang tertutup yang memiliki *overshoot* minimum. Tentukan juga penguatan K, kutub-kutub, faktor peredaman, dan frekuensi sudutnya. Amati tanggap fungsi langkahnya.

Lab 7
Plot Nyquist

7.1 Tujuan Praktikum

1. Memahami peran diagram bode dalam analisis sistem dengan masukan sinusoidal
2. Memahami diagram Nyquist sebagai sebagai representasi lain dari tanggap frekuensi
3. Mampu membaca diagram Nyquist dan menerapkan kriteria kestabilan Nyquist melalui diagram tersebut
4. Mampu melakukan modifikasi penguatan K pada sistem umpan balik tunggal berdasarkan analisis Nyquist

7.2 Dasar Teori

7.2.1 Tanggap frekuensi $G(j\omega)$ dari fungsi alih $G(s)$

Fungsi alih sistem $G(s)$ memiliki variabel bidang kompleks $s = \sigma + j\omega$ dengan komponen nyata σ dapat menentukan kestabilan dan $j\omega$ merupakan frekuensi dari sistem. Hal ini dapat dipahami karena sinyal dasar dari analisis Laplace berupa sinyal $e^{st} = e^{\sigma t}e^{j\omega t}$.

Jika masukan dari suatu sistem berupa sinyal sinusoidal, maka sinyal masukan tersebut tidak konvergen maupun divergen. Dalam analisis sistem, tanggapan dari sistem terhadap sinyal sinusoidal tersebut dapat diamati dengan menganggap komponen nyata dari variabel kompleks s adalah nol ($\sigma = 0$). Pada analisis ini, maka fungsi alih sistem $G(s)$ digunakan untuk menganalisis frekuensi saja dan dapat dikatakan sebagai tanggap frekuensi $G(j\omega)$.

Sebagai contoh, suatu sistem dengan fungsi alih berikut

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Tanggap frekuensi dari sistem tersebut dapat dilakukan dengan mengatur $s = j\omega$. Tanggap frekuensi menghasilkan nilai dalam bentuk bilangan kompleks, sehingga dapat diamati magnitudo dan fase dari setiap frekuensi sinyal masukan yang diamati dari sistem tersebut.

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega T + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T\omega^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\arctan T\omega$$

Dalam sistem kendali, analisis tanggap frekuensi ini dapat digunakan untuk mengamati luaran keadaan tunak (*steady-state outputs*) ketika sistem mendapat masukan sinyal sinusoidal.

Dalam kaitannya dengan tanggap frekuensi dari suatu sistem, analisis grafik dapat dilakukan dengan berbagai metode, di antaranya adalah

- Bode plot
- Nyquist plot
- Nichols plot

7.2.2 Bode Plot

Seperti telah disebutkan sebelumnya, tanggap frekuensi $G(j\omega)$ merupakan variabel kompleks yang dapat diamati sebagai magnitudo dan fase. Kedua komponen tersebut bervariasi tergantung dari frekuensi ω. Salah satu cara untuk mengamati komponen tersebut, digunakan diagram bode yang merupakan grafik frekuensi ω - $|G(j\omega)|$ dan grafik ω - $\angle G(j\omega)$. Dalam diagram bode, frekuensi ω ditampilkan dalam skala logaritmik dan magnitudo ditampilkan dalam skala desibel dengan perhitungan sebagai berikut

$$dB = 20 \log|G(j\omega)|$$

Dalam analisis tanggap frekuensi dari fungsi alih sistem, penggambaran diagram bode dapat dikategorikan dalam empat kelompok, yaitu

- Penguatan (gain) K
- Faktor derivasi dan integral $j\omega$
- Faktor orde satu $(1 + j\omega T)$
- Faktor orde dua $[1 + 2\zeta\,(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (\frac{\omega}{\omega_n})^2]$

Masing-masing kelompok tersebut memiliki karakteristik grafik dalam diagram bode, yaitu kemiringannya. Dalam matlab, grafik bode dapat dimunculkan dengan memanfaatkan fungsi bode()

```
bode(sys)          % diagram bode dari fungsi alih
bode(num,denum)    % diagram bode dari koefisien fungsi alih
bode(A,B,C,D)      % diagram bode dari persamaan ruang keadaan
```

Sebagai contoh, perhatikan fungsi alih-fungsi alih berikut

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)((j\omega)^2 + j\omega + 2)}$$

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = j\omega + 3$$

$$G_3 = \frac{1}{j\omega}$$

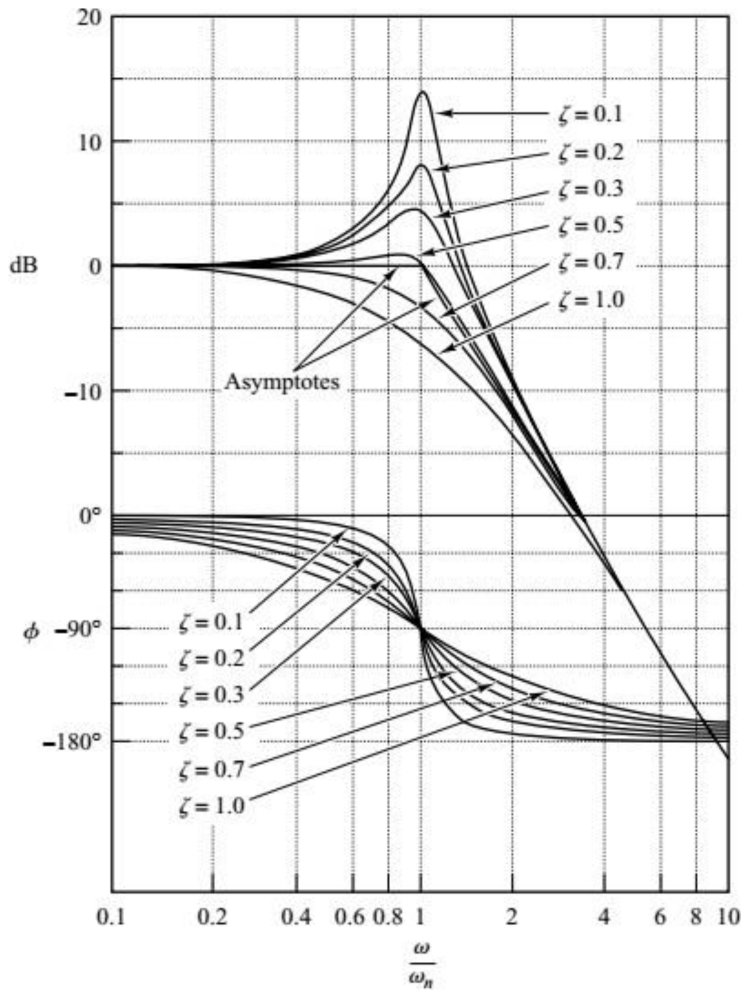
$$G_4 = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$G_5 = \frac{1}{(j\omega)^2}$$

$$G_6 = \frac{1}{((j\omega)^2 + j\omega + 2)}$$

Bode diagram dari satu fungsi alih dapat dianggap sebagai jumlahan dari beberapa fungsi alih-fungsi alih dasar yang memiliki tanggap frekuensi yang tertentu.

```
figure(1)
bode(G1)
hold all     % tampilkan seluruh grafik dalam satu jendela
bode(G2)
bode(G3)
bode(G4)
bode(G5)
bode(G6)
figure(2)
bode(G)
```



Gambar 7.1 Diagram bode untuk faktor orde dua pada frekuensi natural ω_n dengan variasi nilai ζ

Untuk faktor fungsi alih dasar dalam orde dua, faktor redaman ζ dan frekuensi natural ω_n memiliki hubungan tertentu seperti ditunjukkan pada Gambar 7.1. Seperti ditunjukkan pada gambar tersebut, untuk nilai faktor redaman kurang dari 1, terdapat puncak (*peak*) pada frekuensi natural ω_n. Secara umum, puncak tersebut disebut sebagai puncak resonan (*resonant peak*) �$_r$ pada frekuensi resonan (*resonant frequency*) ω_r. Pada sistem dengan orde yang lebih dari dua, kondisi resonan ini dapat dianalisis dari faktor orde dua dari sistem tersebut. Secara teori, kemunculan frekuensi resonan dapat dianalisis dengan persamaan berikut

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

7.2.3 Diagram Nyquist

Fungsi yang merepresentasikan tanggap frekuensi dari sistem, yaitu $G(j\omega)$ memiliki nilai dalam himpunan bilangan kompleks. Artinya, setiap nilai nyata frekuensi ω memiliki pasangan bilangan kompleks tertentu. Pasangan bilangan variabel frekuensi ω dengan bilangan kompleks $G(j\omega)$ ini dapat ditampilkan dalam satu grafik tunggal yang disebut sebagai grafik Nyquist. Bidang yang digunakan untuk menampilkan diagram Nyquist tersebut merupakan bidang kompleks dengan sumbu nyata dan imajiner dengan kurva yang tergambar merupakan hasil pemetaan dari nilai-nilai frekuensi ω yang diamati.

Sebagai contoh, perhatikan fungsi alih sistem berikut

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

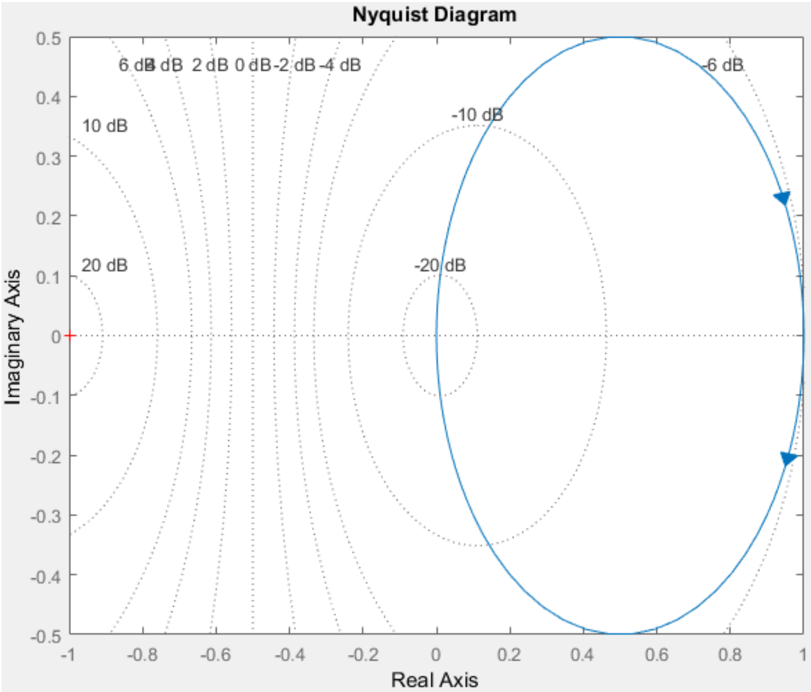
Nilai-nilai dari diagram Nyquist diperoleh dengan mengatur nilai $s = j\omega$ sehingga diperoleh persamaan tanggap frekuensi dalam bentuk bilang kompleks berikut

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$= \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \omega^2} - \frac{j\omega}{1 + \omega^2}$$

Dalam Matlab, diagram Nyquist dapat ditampilkan dengan fungsi Nyquist.

```
G = tf([1],[1 1])
nyquist(G)              % tampilkan grafik Nyquist
[re,im]=nyquist(G,2)    % tanggap frekuensi pada ω = 2
```



Gambar 7.2 Grafik Nyquist untuk sistem $G(s)$

7.2.4 Kriteria kestabilan Nyquist

Sebuah sistem dengan fungsi alih kalang terbuka $G(s)$ dan memiliki umpan balik $H(s)$ dapat direpresentasikan dengan persamaan kalang tertutup sistem

$$\frac{C(s)}{�(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Kestabilan dari sistem ditentukan oleh lokasi kutub-kutub dari sistem tersebut yang dalam fungsi alih kalang tersebut ditentukan oleh persamaan karakteristik

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

Pada persamaan karakteristik, nol atau akar-akar dari persamaan tersebut merupakan kutub dari sistem kalang tertutup, sehingga kestabilan sistem dapat dilakukan dengan mengamati persamaan karakteristik tersebut.

Jika diagram Nyquist diterapkan pada persamaan karakteristik sistem kalang tertutup $F(s)$, akan diperoleh grafik yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari sistem. Prinsip yang digunakan untuk analisis ini adalah bahwa pada sistem yang memiliki kutub berada pada sumbu imajiner bidang Laplace akan menghasilkan kurva pada diagram Nyquist yang melalui titik asal � sedang sistem dengan kutub berada pada sisi kanan bidang Laplace akan menghasilkan kurva pada diagram Nyquist yang mengelilingi titik asal �.

Analisis kondisi diagram Nyquist terhadap titik asal � dilakukan karena persamaan karakteristik adalah $1 + G(s)H(s) = 0$. Persamaan karakteristik tersebut dapat ditata ulang menjadi persamaan berikut

$$G(s)H(s) = -1$$

Berdasarkan persamaan tersebut, analisis diagram Nyquist dari $1 + G(s)H(s)$ terhadap titik asal � $= (0,0)$ dapat disetarakan dengan analisis diagram Nyquist dari $G(s)H(s)$ terhadap titik -1.

Dengan demikian, kriteria kestabilan Nyquist dapat dirumuskan dengan persamaan

$$Z = \text{�} + \text{�}$$

Dengan
Z : banyaknya nol dari $1 + G(s)H(s)$ (kutub dari sistem kalang tertutup) pada sisi kanan bidang kompleks
� : banyaknya pemutaran terhadap titik -1 pada diagram Nyquist
� : banyaknya kutub dari $G(s)H(s)$ berada pada sisi kanan bidang kompleks.
Agar sistem stabil, nilai dari Z harus 0

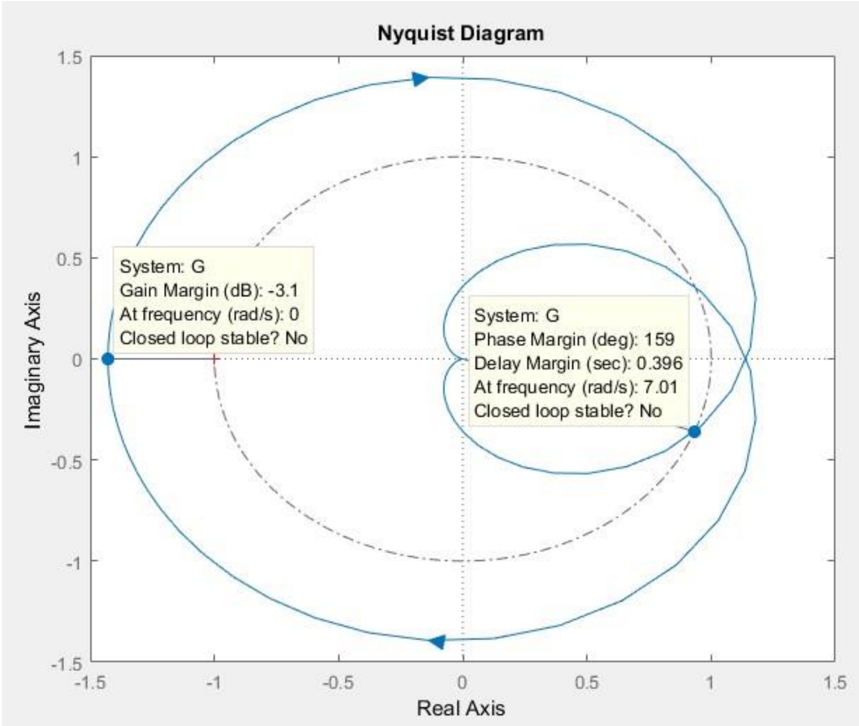
Sebagai contoh perhatikan persamaan fungsi alih dengan umpan balik tunggal berikut

$$G(s) = \frac{500(s-2)}{(s+2)(s+7)(s+50)}$$

Kriteria kestabilan Nyquist dapat diterapkan pada sistem di atas

```
G = zpk([2],[-2 -7 -50],500);
nyquist(G)
```

sistem tersebut memiliki � $= 0$, dan � $= 1$. Maka $Z = 1$ dan sistem tidak stabil.



Gambar 7.3 Diagram Nyquist dari sistem

7.2.5 Pengaturan penguatan K berdasarkan diagram Nyquist

Diagram Nyquist dapat digunakan untuk mengamati kestabilan berdasar pemutaran kurva terhadap titik -1. Berdasarkan hal tersebut, dapat dilakukan penguatan atau pelemahan pada sistem dengan memberikan penguatan K yang membuat diagram Nyquist tidak memutari titik tersebut.

Sebagai contoh, perhatikan diagram Nyquist pada Gambar 7.3. Sistem tersebut memiliki diagram Nyquist yang memutari titik -1 selama satu kali. Agar diagram tersebut tidak memutari titik -1, sistem dapat diberi penguatan K yang bertujuan untuk melemahkan tanggap frekuensi dari sistem tersebut. Penguatan K pada sistem yang tidak stabil tersebut memiliki jarak penguatan (*gain margin*) sebesar -3.1dB yang berarti bahwa sistem tersebut perlu dilemahkan dengan nilai lebih kecil faktor tersebut dalam skala linier.

```
K_margin = db2mag(-3.1) % margin K dalam skala linier -> 0.6998
G_margin = G*K_margin   % sistem dengan stabil kritis
G_2 = G*0.5             % sistem stabil dengan K lebih lemah
nyquist(G_margin)
nyquist(G_2)
G1_fb = feedback(G,1)
Gm_fb = feedback(G,K_margin)
G2_fb = feedback(G,0.5)
Step(G2_fb)
```

7.3 Praktikum

1. Perhatikan fungsi alih sistem kalang terbuka berikut

$$G(s) = \frac{20}{s(s+3)(s+2)}$$

   Sistem tersebut memiliki umpan balik tunggal $H(s) = 1$

   a. Tampilkan diagram bode dari tanggap frekuensi sistem tersebut
   b. Tampilkan diagram Nyquist dari fungsi alih tersebut.
   c. Tentukan kestabilan dari sistem kalang tertutup tersebut
   d. Tentukan batas penguatan dari sistem tersebut agar sistem tersebut stabil.
   e. Cobakan penguatan baru agar sistem berada pada kondisi batas penguatan, di atas batas penguatan, dan di bawah batas penguatan.
   f. Amati tanggap fungsi langkah dari fungsi alih kalang tertutup sistem tersebut.

2. Suatu sistem untuk menangani kemiringan pada penyimpanan data untuk Praktikum holografik memiliki fungsi alih �(s). Agar sistem penarikan informasi dari media penyimpanan tersebut lancar, ditambahkan sistem kendali $G_c(s)$. Luaran dari sistem kendali tersebut akan menjadi masukan bagi sistem �(s) yang bersama-sama memiliki umpan balik tunggal.

�$$(s) = \frac{1{,}163 \times 10^8}{s^3 + 962{,}5s^2 + 5{,}958 \times 10^5 s + 1{,}16 \times 10^8}$$

$$G_c(s) = \frac{78{,}575(s+436)^2}{(s+132)(s+8030)}$$

   a. Tampilkan diagram bode dari tanggap frekuensi sistem tersebut
   b. Tampilkan diagram Nyquist dari fungsi alih tersebut.
   c. Tentukan kestabilan dari sistem kalang tertutup tersebut
   d. Tentukan batas penguatan dari sistem tersebut agar sistem tersebut stabil.
   e. Cobakan penguatan baru agar sistem berada pada kondisi batas penguatan, di atas batas penguatan, dan di bawah batas penguatan.
   f. Amati tanggap fungsi langkah dari fungsi alih kalang tertutup sistem tersebut.

Lab 8
Kendali PID

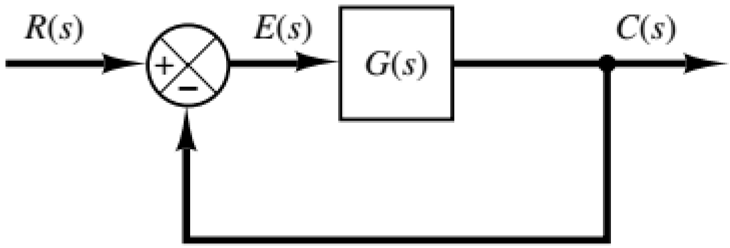
8.1 Tujuan Praktikum

1. Memahami kendali PID dalam mengatur karakteristik sistem
2. Memahami penalaan koefisien PID melalui metode Ziegler-Nichols

8.2 Dasar Teori

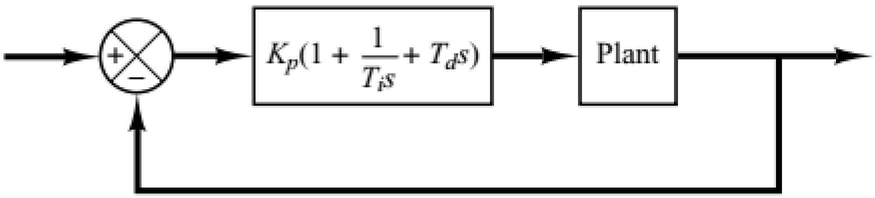
8.2.1 Kendali PID

Suatu sistem dengan pada dasarnya memberikan tanggapan terhadap masukan yang berupa luaran dari sistem itu sendiri. Karakteristik dari sistem menunjukkan bagaimana tanggapan dari sistem tersebut, terutama dalam hal kestabilan yang seharusnya dicapai. Suatu sistem kendali pada dasarnya memberikan masukan kepada sistem sedemikian rupa sehingga luaran dari sistem stabil.



Gambar 8.1 Diagram blok sistem kalang tertutup dengan umpan balik satuan

Pada sistem kalang tertutup, masukan kepada sistem dengan fungsi alih $G(s)$ diatur dengan memanipulasi luaran dari sistem yang diumpanbalikkan dan dibandingkan dengan suatu nilai referensi �(s) untuk menghasilkan nilai selisih $E(s)$ seperti ditunjukkan pada Gambar 8.1. Nilai selisih tersebut dapat digunakan langsung sebagai masukan sistem dan dianggap sebagai sinyal $U(s)$ bagi sistem tersebut, namun pada umumnya perlu disesuaikan dengan kondisi yang ingin dicapai dari sistem tersebut. Oleh karena itu, diperlukan suatu sistem kendali dengan fungsi alih $G_c(s)$ untuk menghasilkan sinyal masukan $u(t)$ bagi sistem yang dikendalikan.



Gambar 8.2 Diagram blok kendali PID pada untuk sebuah sistem dengan umpan balik satuan

Salah satu sistem kendali yang paling sederhana dan banyak dipakai adalah kendali PID (*proportional integral derivative*). Kendali ini bekerja berdasar analisis eror dari sistem dengan tiga macam perlakuan, yaitu penguat proporsional *P*, integrator *I*, dan derivator *D* seperti ditunjukkan pada Gambar 8.2. Kendali PID dapat dinyatakan dalam persamaan berikut

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt}\right)$$

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

Atau dapai dituliskan dalam bentuk persamaan

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Berdasar perlakuan terhadap eror sistem, PID memiliki sifat-sifat untuk setiap komponen. Komponen proporsional bersifat menguatkan tanggapan sistem, komponen integral bersifat memperbaiki tanggapan keadaan tunak, dan komponen derivasi bersifat memperbaiki tanggapan transien sistem. Secara keseluruhan, sifat tanggapan dirangkum pada Tabel 8.1.

Tabel 8.1 Sifat-sifat komponen pada kendali PID

Tanggapan sistem	*Rise time* t_r	*Overshoot*	*Settling time* t_s	*Steady-state error* e_{ss}
K_p	Turun	Naik	Sedikit	Turun
K_i	Turun	Naik	Naik	Hilang
K_d	Sedikit	Turun	Turun	Sedikit

Sesuai dengan kebutuhan dan sifat-sifatnya, kendali PID memiliki variasi, yaitu kendali P, kendali PD, dan kendali PI. Sebagai contoh perhatikan sistem massa-pegas kalang terbuka berikut.

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Sistem kalang tertutup dari sistem tersebut yang telah didahului dengan kendali PID akan memiliki persamaan fungsi alih

$$F(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

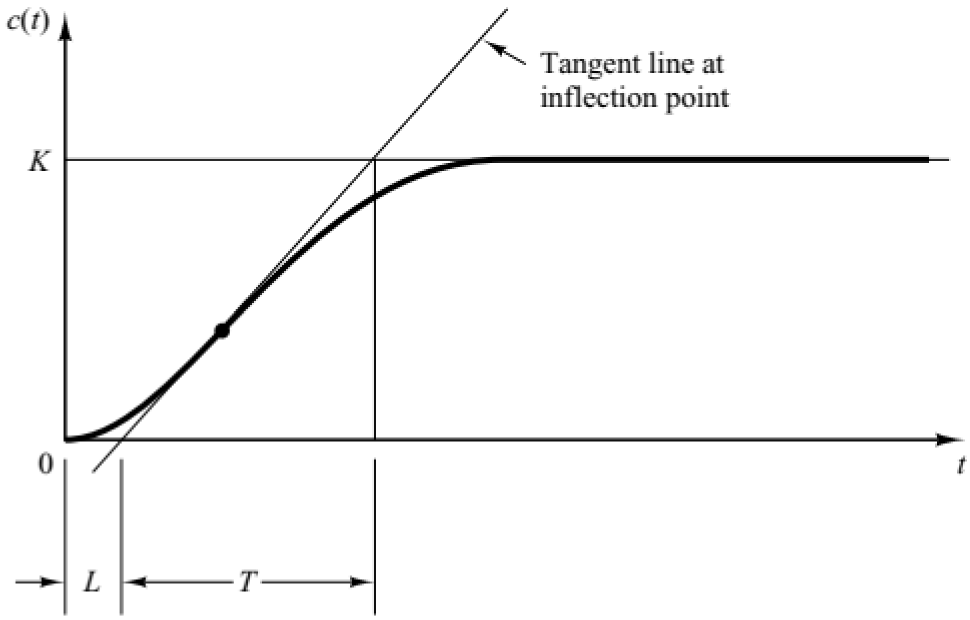
$$F(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{ms^3 + (b + K_d)s^2 + (k + K_p)s + K_i}$$

```
num = [1]
den = [1 10 20]
G = tf(num,den)   % fungsi alih kalang terbuka
step(G)
num = [Kd Kp Ki]
den = [1 10+Kd 20+Kp Ki]
F = tf(num,den)   % fungsi alih kalang tertutup dengan PID
step(F)
```

Sistem tersebut dapat dikompensasi dengan kendali PID dengan masing-masing nilai, misalnya kendali P ($K_d = 0$, $K_i = 0$), kendali PI ($K_d = 0$) maupun kendali PD ($K_i = 0$).

8.2.2 Penalaan Ziegler-Nichols metode pertama

Kendali PID sangat banyak digunakan karena sifatnya yang mengacu secara langsung dari eror sistem. Pada praktiknya, kendali ini juga bagus untuk suatu sistem yang tidak diketahui fungsi alihnya. Koefisien untuk masing-masing komponen pada kendali PID perlu diatur untuk mendapatkan tanggapan yang tepat. Penalaan dilakukan dengan metode-metode tertentu untuk mendapatkan keofisien K_p, T_i, dan T_d.



Gambar 8.3 Kurva tanggapan bentuk S (*S-shape*) dalam metode penalaan Ziegler-Nichols pertama

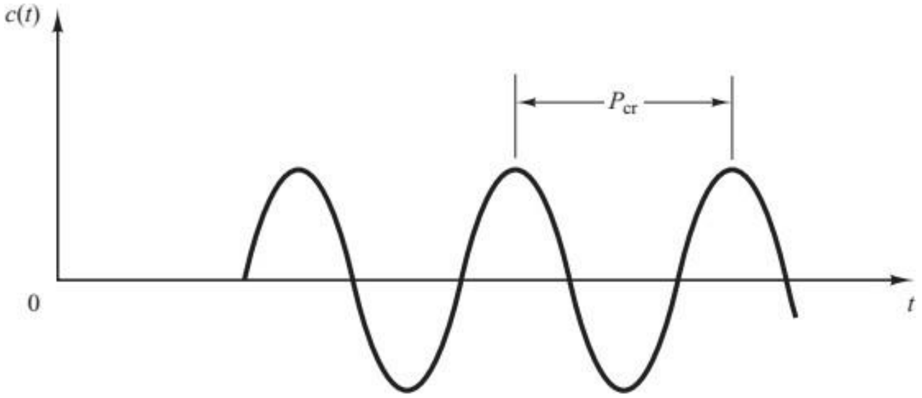
Ziegler dan Nichols mengusulkan metode penalaan yang cukup sederhana dengan mengamati tanggap fungsi langkah dari sistem. Seperti ditunjukkan pada Gambar 8.3, suatu tanggapan yang berbentuk S dapat digunakan secara langsung untuk menala koefisien PID dengan menentukan dua konstanta, yaitu waktu tunda atau waktu mati (*delay time, dead time*) *L* dan konstanta waktu (*time constant*) *T*. Konstanta *L* dan *T* diperoleh dengan membuat garis lurus dari garis singgung pada titik belok kurva. *L* adalah jarak perpotongan garis singgung dengan titik *O* sedang *T* adalah jarak antara perpotongan garis singgung dengan sumbu waktu $c(t) = 0$ dan garis $c(t) = K$. Konstanta *L* dan *T* tersebut kemudian digunakan untuk menentukan koefisien PID sesuai dengan Tabel 8.2.

Tabel 8.2 Penalaan PID berbasis tanggapan fungsi langkah pada metode pertama Ziegler-Nichols

Type of Controller	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

8.2.3 Penalaan Ziegler-Nichols metode kedua

Metode kedua penalaan Ziegler-Nichols dilakukan berdasarkan tanggapan sistem ketika pada saat kestabilan kritis (*critical stable*) ketika diberi suatu nilai penguatan tertentu K_{cr}. Pada keadaan ini, luaran sistem akan berosilasi dengan periode tertentu �$_{cr}$ seperti ditunjukkan pada Gambar 8.4. Grafik osilasi kestabilan kritis tersebut dapat diperoleh baik melalui uji coba tanpa mengetahui fungsi alih sistem maupun dengan menganalisis nilai penguatan kritis dari persamaan fungsi alih sistem. Nilai-nilai tersebut kemudian digunakan untuk menentukan koefisien PID sesuai dengan Tabel 8.3.



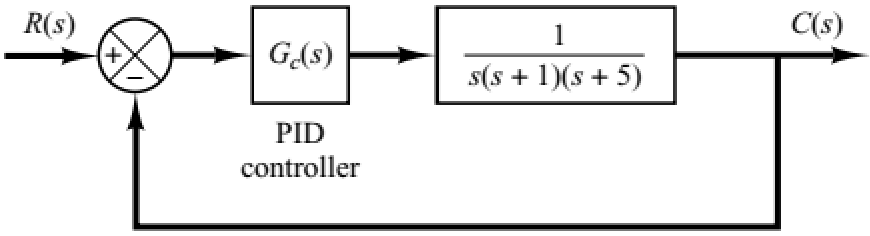
Gambar 8.4 Osilasi pada saat kestabilan kritis dengan periode �$_{cr}$

Tabel 8.3 Penalaan PID berbasis penguatan kritis pada metode kedua Ziegler-Nichols

Type of Controller	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Pada uji coba sistem tanpa menggunakan fungsi alih, penguatan K divariasi sedemikian rupa sehingga luaran sistem berbentuk osilasi sinusoidal. Nilai K pada saat tersebut dianggap sebagai penguatan kritis K_{cr}. Metode ini banyak diterapkan pada sistem yang tidak memiliki fungsi alih atau sulit untuk direpresentasikan fungsi alihnya.

Pada sistem yang memiliki fungsi alih, nilai penguatan kritis dapat diketahui dari beberapa cara, di antaranya adalah melalui pengamatan *root locus*, grafik Nyquist atau melalui kriteria kestabilan Routh. Sebagai contoh, perhatikan sistem kalang terbuka pada Gambar 8.5. Fungsi alih kalang terbuka dengan kendali *P* dan penguatan K_p adalah

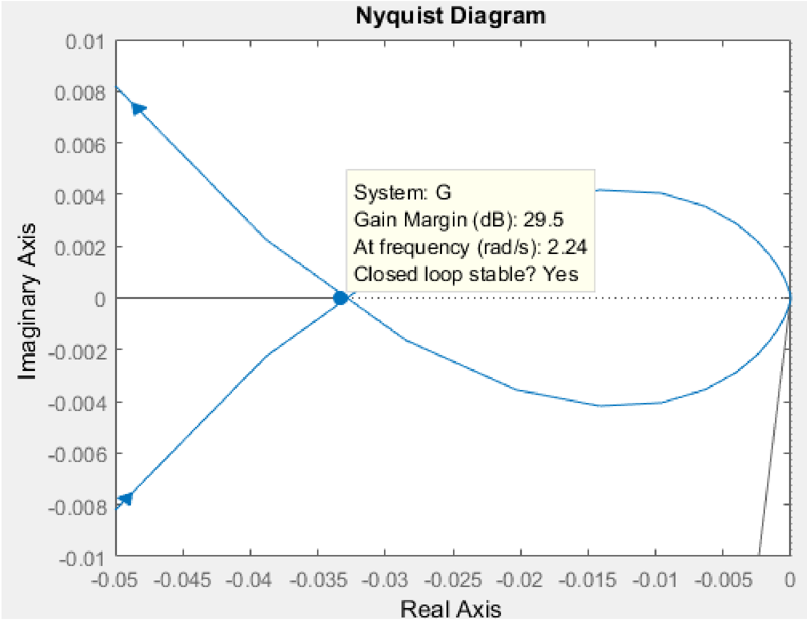


Gambar 8.5 Sistem dengan kendali PID

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p}$$

Penguatan kritis dapat diamati melalui grafik Nyquist seperti pada Gambar 8.6.

```
G = zpk([],[0 -1 -5],1)
nyquist(G)
axis([-0.05 0 -0.01 0.01])
Kcr = db2mag(29.5)     % kestabilan kritis Kcr ~ 30
```



Gambar 8.6 Penguatan kritis melalui grafik Nyquist

Dengan memanfaatkan kriteria kestablian Routh, nilai K_{cr} juga dapat diamati dengan membuat kolom pertama pada larik Routh menjadi 0 dari persamaan karakteristik fungsi alih kalang tertutup berikut

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s^3 + 6s^2 + 5s + K_p}$$

Larik Routh

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \dfrac{30 - K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

$$\frac{30 - K_p}{6} = 0 \Rightarrow K_{cr} = K_p = 30$$

Nilai periode diperoleh dengan persamaan karakteristik

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5j\omega + 30 = 0$$

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

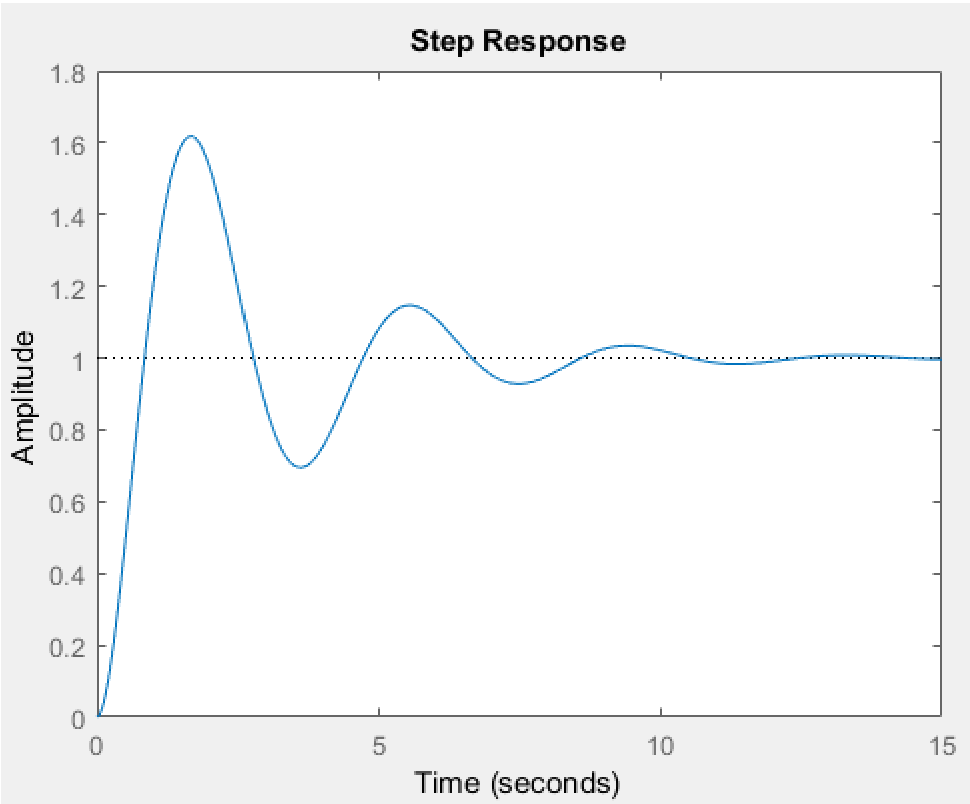
Persamaan tersebut akan menghasilkan

$$5 - \omega^2 = 0 \Longrightarrow \omega = \sqrt{5}$$

$$�_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2{,}8099$$

Dari pengamatan nilai penguatan kritis, koefisien PID dapat ditentukan sesuai tabel PID. Untuk kendali PID, tanggap fungsi alih ditunjukkan pada Gambar 8.7.

```
s = tf('s')
Kp = 0.6*Kcr
Ti = 0.5*Pcr
Td = 0.125*Pcr
Gc = Kp*(1+1/(Ti*s)+Td*s)
G_cl = feedback(Gc*G,1)
```



Gambar 8.7 Tanggapan sistem kalang tertutup dengan kendali PID

8.3 Praktikum

1. Suatu sistem memiliki fungsi alih berikut

$$G_{plant}(s) = \frac{s+20}{(s-1)(s+10)^2}$$

   a. Amati kestabilan kritis dari sistem tersebut melalui grafik Nyquist
   b. Tentukan periode dari kestabilan kritis sistem tersebut
   c. Rancang sistem kendali PD dan amati tanggapannya dengan metode kedua
   d. Rancang sistem kendali PI dan amati tanggapannya dengan metode kedua
   e. Rancang sistem kendali PID dan amati tanggapannya dengan metode kedua
   f. Rancang simulasi sistem tersebut beserta kendalinya dalam Simulink

g. Amati karakteristik tanggapan dari masing-masing sistem dengan kendali yang berbeda tersebut

2. Suatu sistem memiliki fungsi alih berikut

$$G_{plant}(s) = \frac{18(s+20)}{(s-3)(s+6)}$$

a. Amati kestabilan kritis dari sistem tersebut melalui grafik Nyquist
b. Tentukan periode dari kestabilan kritis sistem tersebut
c. Rancang sistem kendali PD dan amati tanggapannya dengan metode kedua
d. Rancang sistem kendali PI dan amati tanggapannya dengan metode kedua
e. Rancang sistem kendali PID dan amati tanggapannya dengan metode kedua
f. Rancang simulasi sistem tersebut beserta kendalinya dalam Simulink
g. Amati karakteristik tanggapan dari masing-masing sistem dengan kendali yang berbeda tersebut