Logika Matematika

Bab 1: Aljabar Boolean

Andrian Rakhmatsyah
Teknik Informatika IT Telkom

Referensi

- Rosen, Kenneth H.,*Discrete Mathematic and Its Applications*, 4th edition, McGraw Hill International Editions, 1999
- Munir, Rinaldi., *Matematika Diskrit*, Penerbit Informatika, Bandung, 2001
- Korfhage, Robert R., *Logic and Algorithms With Application to theComputer and Information Sciences*, John Wiley and Sons, Inc., US, 1966.
- Tinder, Richard F., *Digital Engineering Design A Modern Approach*, Prentice-Hall International, Inc., 1991

Teori himpunan-pengertian

- Himpunan adalah kumpulan obyek yang berbeda tetapi memiliki sifat yang serupa,
- Sifat serupa ini menjadi syarat keanggotaan himpunan,
- Elemen himpunan merupakan anggota dari suatu himpunan,
- Himpunan direpresentasikan dengan huruf kapital A, B, C, dan seterusnya,
- Elemen himpunan direpresentasikan dengan huruf kecil a, b, c, dan seterusnya,
- Simbol dari elemen A ditulis sebagai $1 \in A$, $0 \in A$,
- Simbol dari bukan elemen A ditulis sebagai $x \notin A$,

Teori himpunan-representasi

Terdapat 4 metoda untuk merepresentasikan himpunan, yaitu.

1. **Enumerasi**

   Dengan menyebutkan semua (satu per satu) elemen himpunan

   Contoh,

   B = {1, 2, 3, 4, 5}

   D = {apel, mangga, jambu}

2. **Notasi khusus himpunan atau simbol standar**

   Dengan simbol-simbol standar yang biasa digunakan untuk mewakili suatu himpunan, contoh

   P = himpunan bilangan integer positif = {1 , 2, 3, …}

   Q = himpunan bilangan natural = {0 , 1, 2, …}

   Z = himpunan bilangan rasional = {… , -2, -1, 0, 1, 2, …}

Teori himpunan-representasi

3. **Notasi pembentuk himpunan**

Dengan menyebutkan sifat atau syarat keanggotaan dari himpunan.

Contoh, $B = \{ x \mid x \leq 5 , x \in A \}$

Aturan dalam penulisan syarat keanggotaan himpunan :

- bagian kiri tanda '|' melambangkan elemen himpunan,
- tanda '|' dibaca sebagai *dimana* atau *sedemikian sehingga,*
- bagian di kanan tanda '|' menunjukkan syarat keanggotaan himpunan,
- setiap tanda ',' dibaca sebagai *dan.*

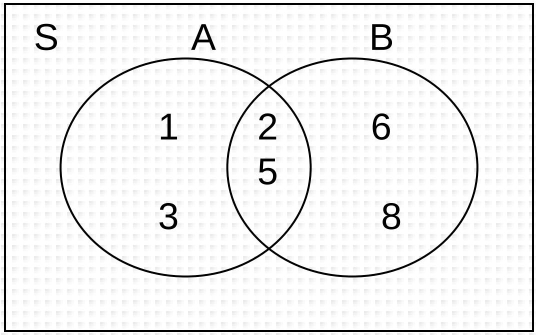
Teori himpunan-representasi

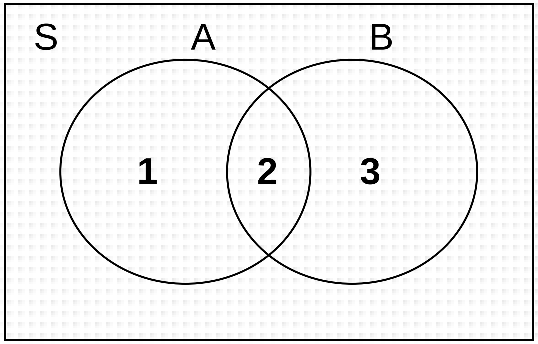
4. **Diagram venn**

Dengan menggambarkan keberadaan himpunan terhadap himpunan lain. Himpunan Semesta (S) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lain digambarkan sebagai lingkaran.

Contoh,

S = { 1,2, … , 7, 8 }; A = { 1,2,3,5 }; B = { 2,5,6,8 }





Himpunan	Area
A	1,2
B	2,3
A ∩ B	2
A ∪ B	1, 2, 3

Teori himpunan-kardinalitas

- Untuk menyatakan banyaknya elemen suatu himpunan berhingga,
- Jumlah elemen A disebut kardinalitas dari himpunan A,
- Simbol : $|A| = 3$ atau $|K| = 0$.

Himpunan-himpunan khusus

- **Himpunan semesta/*universal***
  Simbol : S atau U

- **Himpunan kosong (*Null Set*)**
  Adalah himpunan yang tidak memiliki elemen
  Simbol : { } atau $\varnothing$
  Contoh : $F = \{ x \mid x < x \}$

- **Himpunan bagian (*Subset*)**
  A adalah subset dari B jika dan hanya jika setiap elemen A juga merupakan elemen B.
  Simbol : $A \subseteq B$
  Contoh :
  $A = \{ (x,y) \mid x + y < 4 \}$ dan $B = \{ (x,y) \mid 2x + y < 4 \}$
  Maka $A \subseteq B$

  Catatan :
  $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$
  $\varnothing$ dan A dikatakan sebagai himpunan bagian tak sebenarnya (*improver subset*) dari himpunan A.

Himpunan-himpunan khusus

- **Himpunan bagian yang sebenarnya (*proper subset*)**
  Jika $A \subseteq B$ dimana $B \neq \varnothing$ dan $B \neq A$, maka B dikatakan himpunan bagian sebenarnya dari A

- **Himpunan yang sama**
  Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B juga merupakan elemen A.
  Simbol : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

- **Himpunan yang ekivalen**
  Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himupunan tersebut sama.
  Simbol : $A \sim B$

- **Himpunan saling lepas (*disjoint*)**
  Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika tidak memiliki elemen yang sama.
  Contoh :
  $A = \{ x \mid x < 8, x \in P \}$; $B = \{ 10, 20, 30, \dots \}$
  Maka A dan B adalah himpunan yang saling lepas.

Teori himpunan-operasi

- **Irisan (*intersection*)**

  Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B.

  Simbol, $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

  Contoh :

  $A = \{ 3, 5, 9 \}$

  $B = \{ -2, 6 \}$

  $A \cap B = \{ \}$

- **Gabungan (*Union*)**

  Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B atau anggota keduanya.

  Simbol : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

Teori himpunan-operasi

- **Komplemen suatu himpunan**

  Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen S yang bukan elemen A.

  Simbol : $A' = \{ x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A \} = S - A$

- **Selisih**

  Selisih dari 2 buah himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen A dan bukan elemen B. Selisih antara A dan B dapat juga dikatakan sebagai komplemen himpunan B relatif terhadap himpunan A

  Simbol : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap B'$

Teori himpunan-operasi

- **Perbedaan simetris (** ***Symmetric Difference*** **)**

Perbedaan simetris dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himupunan A atau B tetapi tidak pada keduanya.

Simbol :

$A \quad B = A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh :

$A = \{ 2, 4, 6 \}$; $B = \{ 2, 3, 5 \}$

$A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Aljabar himpunan

Aljabar himpunan mempunyai sifat yang analogi dengan aljabar aritmetika. Operasi pada aljabar aritmetika adalah penambahan (+) dan perkalian (•).

Sifat-sifat operasi pada aljbar aritmetika, misal a, b, c, adalah sembarang bilangan.

- **Tertutup (*Closure*)**

  A1 : a + b adalah bilangan

  M1 : a • b adalah bilangan

- **Assosiatif**

  A2 : (a + b) + c = a + (b + c)

  M2 : (a • b) • c = a • (b • c)

Aljabar himpunan

- **Identitas**

  A3 : Ada sebuah bilangan unik yaitu nol (0) sedemikian sehingga untuk semua bilangan berlaku bahwa

  $a + 0 = 0 + a = a$

  M3 : Ada sebuah bilangan unik yaitu 1 sedemikian sehingga untuk semua bilangan berlaku bahwa

  $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$

- **Invers**

  A4 : Untuk setiap bilangan a terdapat bilangan unik (-a) sedemikian sehingga berlaku

  $a + (-a) = (-a) + a = 0$

  M4 : Untuk setiap bilangan $a \neq 0$, terdapat bilangan unik (a 1) sedemikian sehingga berlaku

  $a \bullet\ a\,1 = a\,1 \bullet\ a = 1$

- **Komutatif**

  A5 : $a + b = b + a$

  M6 : $a \bullet b = b \bullet a$

- **Distributif**

  A6 : $a \bullet (b + c) = (a\,b) + (a\,c)$

  M6 : $(a + b) \bullet c = (a\,c) + (b\,c)$

Aljabar himpunan

Sifat-sifat tersebut berlaku pula pada aljabar himpunan dimana terdapat perubahan.

- Operator penjumlahan (+) diganti dengan operator perbedaan simetris (Δ),
- Operator perkalian (•) diganti dengan operator irisan (∩),
- Sifat M4 bilangan unik nol (0) diganti himpunan ∅, bilangan unik 1 diganti himpunan semesta S,
- A4 Bilangan unik (-a) diganti dengan A', sedemikian sehingga berlaku,

  $A \, \Delta \, A' = S \qquad A \cap A' = \varnothing$

Transisi dari himpunan ke logika

Pada dasarnya Aljabar Boolean memberikan perantaraan antara Aljabar himpunan dan logika sebagai berikut :

- operasi-operasi dasar dalam aljabar himpunan dengan 2 elemen yaitu $\varnothing$ dan A

	$\varnothing$	A
$\varnothing$	$\varnothing$	A
A	A	A

$\alpha \cup \beta$

	$\varnothing$	A
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A

$\alpha \cap \beta$

Jika diinterpretasikan sebagai aljabar boolean maka kedua elemen pada aljabar himpunan berkorespodensi dengan elemen pada aljabar Boolean yaitu 0 dan 1.

Transisi dari himpunan ke logika

- operasi-operasi dasar dalam aljabar boolean dengan 2 elemen yaitu, 0 dan 1,

	0	1
0	0	1
1	1	1

$\alpha + \beta$

	0	1
0	0	0
1	0	1

$\alpha \bullet \beta$

- operasi-operasi dasar dalam logika (kalkulus proposisi) melibatkan elemen *false* dan *true*,

	False	True
False	False	True
True	True	True

$\alpha \vee \beta$

	False	True
False	False	True
True	False	True

$\alpha \wedge \beta$

Aljabar boolean-definisi

Sistem aljabar dengan dua operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.) yang didefinisikan sehingga memenuhi ketentuan berikut ini :

- aturan A1 sampai dengan A5, M1 sampai M3, M5, D1, dan D2,
- setiap elemen a, b, c dari S mempunyai sifat-sifat atau aksioma-aksioma berikut ini.

Aljabar boolean-definisi

A_1	$a + b \in S$	< closure >
M_2	$a.b \in S$	< closure >
A_2	$a + (b + c) = (a + b) + c$	< asosiatif >
M_2	$a \,.\, (b.c) = (a.b).c$	< asosiatif >
A_3	Jika $0 \in S$ maka untuk setiap $a \in S$, adalah $a + 0 = 0 + a = a$	< identitias >
M_3	Jika $1 \in S$ maka untuk setiap $a \in S$, adalah $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$	< identitas >
A_5	$a + b = b + a$	< komutatif >
M_5	$a.b = b.a$	< komutatif >
D_1	$a.(b+c) = a.b + a.c$	< distributif >
D_2	$(a + b) \,.\, c = a.c + b.c$	< distributif >
D_3	$a + (b.c) = (a + b) \,.\, (a + c)$	< distributif >
D_4	$(a.b) + c = (a + c) \,.\, (b + c)$	< distributif >
C_1	Untuk setiap $a \in S$, dan $a' \in S$, maka $a + a' = 1$ dan $a \,.\, a' = 0$	< komplemen >

Prinsip dualitas

- **Teorema 2.1**
  Untuk setiap elemen a, berlaku : $a + a = a$ dan $a . a = a$

<u>Bukti</u>

$a + a$	$= (a + a)(1)$	identitas
	$= (a + a)(a + a')$	komplemen
	$= a + (a . a')$	distributif
	$= a + 0$	komplemen
	$= a$	identitas

$a.a$	$= a.a + 0$	identitas
	$= a.a + a.a'$	komplemen
	$= a.(a + a')$	distributif
	$= a.1$	komplemen
	$= a$	identitas

Prinsip dualitas

- **Teorema 2.2**
  Untuk setiap elemen a, berlaku : $a + 1 = 1$ dan $a.0 = 0$

<u>Bukti</u>

$a + 1$	$= a + (a + a')$	komplemen
	$= (a + a) + a'$	asosiatif
	$= a + a'$	teorema 1a
	$= 1$	komplemen
$a . 0$	$= a.(a.a')$	komplemen
	$= (a.a) .a'$	asosiatif
	$= a . a'$	idempoten
	$= 0$	komplemen

Prinsip dualitas

- **Teorema 2.3 (Hukum Penyerapan)**
  Untuk setiap elemen a dan b, berlaku : $a + a \cdot b = a$ dan $a \cdot (a+b) = a$

<u>Bukti</u>

$a+ab$	$= a.1 + a.b$	Identitas
	$= a \cdot (1 + b)$	distributif
	$= a + 1$	teorema 2a
	$= a$	identitas
$a.\ (a+b)$	$= a.a + a.b$	distributif
	$= a + ab$	idempoten
	$= a.1 + ab$	identitas
	$= a.\ (1 + b)$	distributif
	$= a \cdot 1$	teorema 2a
	$= a$	identitas

Prinsip dualitas

- **Teorema 2.4 (Hukum de Morgan)**
  Untuk setiap elemen a dan b, berlaku : (a . b)’ = a’ + b’ dan (a+b)’ = a’b’

<u>Bukti</u>

(a.b)’ = a’ + b’

Diketahui	: (ab) (ab)’	= 0
Diperlihatkan	: (ab) (a’+b’)	= 0
(ab) (a’+b’)	= aba’ + abb’	distributif
	= 0.b + a.0	komplemen
	= 0 + 0	teorema 2b
	= 0	identitas

(a + b)’ = a’b’

Diketahui	: (ab) + (ab)’	= 1
Diperlihatkan	: ab + a’ + b’	= 1
ab + (a’ + b’)	= (a + a’ + b’) (b + a’ + b’)	distributif
	= (1 + b’) (1 + a’)	kompleman
	= 1 . 1	teorema 2a
	= 1	identitas

Prinsip dualitas

- **Teorema 2.4 (Hukum de Morgan)**
  Untuk setiap elemen a dan b, berlaku : $(a \cdot b)' = a' + b'$ dan $(a+b)' = a'b'$

- **Teorema 2.5**
  $0' = 1$ dan $1' = 0$

- **Teorema 2.6**
  Jika suatu Aljabar Boolean berisi paling sedikit dua elemen yang berbeda, maka $0 \neq 1$

Fungsi boolean

Misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ merupakan variabel-variabel aljabar Boolean. Fungsi Boolean dengan n variabel adalah fungsi yang dapat dibentuk dari aturan-aturan berikut :

- fungsi konstan

  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = a$
- fungsi proyeksi

  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$
- fungsi komplemen

  $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n))'$
- fungsi gabungan

  $h(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

  $h(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Bentuk fungsi boolean

Suatu fungsi Boolean dapat dinyatakan dalam bentuk yang berbeda tetapi memiliki arti yang sama

Contoh :

$f_1(x,y) = x' \cdot y'$

$f_2(x,y) = (x + y)'$

f_1 dan f_2 merupakan bentuk fungsi boolean yang sama, yaitu dengan menggunakan Hukum De Morgan.

Nilai fungsi

Fungsi Boolean dinyatakan nilainya pada setiap variabel yaitu pada setiap kombinasi (0,1).

Contoh : Fungsi Boolean

f(x,y)

x	y	x'y	xy'	y'	f(x,y)
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Cara representasi

Aljabar

- Contoh : fungsi f(x,y,z)=xyz’
- Representasi secara aljabar adalah f(x,y,z) = xyz’

Tabel Kebenaran

- **Contoh : fungsi f(x,y,z)=xyz’**
- Jumlah elemen dalam tabel kebenaran adalah jumlah kombinasi dari nilai-nilai variabelnya, yaitu sejumlah 2n, dimana n adalah banyaknya variabel biner

Konversi fungsi boolean

x	y	z	f(x,y,z)	
0	0	0	0	←POS
0	0	1	**1**	←SOP
0	1	0	0	←POS
0	1	1	0	
1	0	0	**1**	←SOP
1	0	1	0	←POS
1	1	0	0	
1	1	1	**1**	←SOP

→ **SOP *(Sum of product)***

1). $f_1(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + xyz$

$= m_1 + m_4 + m_7$

$f_1'(x,y,z) = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$

→ **POS (*Product of sum*)**

2). $f_2(x,y,z) = (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z')$

$(x'+y'+z)$

$= (f_1'(x,y,z))'$

$= M_0\ M_2\ M_3\ M_5\ M_6$

$\therefore F = m_1 + m_4 + m_7 = M_0 . M_2 . M_3 . M_5 . M_6$

Konversi fungsi boolean

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	0

1). $f_1(x,y,z) = x'y'z' + x'y'z + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$ ← **SOP**

$= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6$

$f_1'(x,y,z) = xy'z + xyz$

2). $f_2(x,y,z) = (x' + y + z')(x' + y' + z')$ ←**POS**

$= (f_1'(x,y,z))'$

$= M_5\ M_7$

$\therefore F = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 = M_5 . M_7$

Konversi fungsi boolean

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

1). $f_1(x,y,z) = x'yz' + x'yz + xyz' + xyz$ ← **SOP**

$= m_2 + m_3 + m_6 + m_7$

$f_1'(x,y,z) = x'y'z' + x'y'z + xy'z' + xy'z$

2). $f_2(x,y,z) = (x + y + z)(x + y + z')(x' + y + z)$
$(x' + y + z')$ ← **POS**

$= (f_1'(x,y,z))'$

$= M_0\, M_1\, M_4\, M_5$

$\therefore$ **F = $m_2 + m_3 + m_6 + m_7 = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_5$**

Bentuk standar/kanonik

- Jika f adalah fungsi boolean satu variabel maka untuk semua nilai x berlaku :

$$f\ (x) = f\ (1)\ .\ x + f\ (0)\ .\ x'$$

- Jika f adalah fungsi boolean dua variabel maka untuk semua nilai x berlaku :

$$f(x,y) = f(0,0)\ .\ x'y' + f(0,1)\ .\ x'y + f(1,0)\ .\ xy' + f(1,1)\ .\ xy$$

- Jika f adalah fungsi boolean tiga variabel maka untuk semua nilai x berlaku :

$$f(x,y,z) = f(0,0,0)\ .\ x'y'\ z' + f(0,0,1)\ .\ x'y'z + f(0,1,0)\ .\ x'yz' +$$
$$f(0,1,1)\ .\ x'yz + f(1,0,0)\ .\ xy'z' + f(1,0,1)\ .\ xy'z' + f(1,1,0)\ .\ xyz' + f(1,1,1)\ .\ xyz$$

Bentuk standar/kanonik

x	y	Minterm		Maxterm	
		Term	Nilai	Term	nilai
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	xy	m_3	$x' + y'$	M_3

Bentuk standar/kanonik

x	y	z	Minterm		Maxterm	
			Term	Nilai	Term	Nilai
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'yz$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y$ ‘$+ z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y'' + z'$	M_7

Konversi ke bentuk standar/kanonik

1. Cari bentuk standar dari $f(x,y) = x'$

Jawab :

$f(x,y) = x' . 1$ identitas

$= x' . (y+y')$ komplemen

$= x'y + x'y'$ distributif

$= \sum m(0, 1)$

$\therefore$ Bentuk Standar : $f(x,y) = x'y + x'y'$ ← bentuk SOP

$\therefore$ Bentuk Kanonik : $f(x,y) = \sum m(0, 1)$

dengan $m_j' = M_j$

$f'(x,y) = x . 1$ identitas

$= x .(y+y')$ komplemen

$= xy + xy'$ distributif

$(f'(x,y))' = (x'+y')(x'+y)$

$= \Pi M(2, 3)$

$\therefore$ Bentuk Standar : $f(x,y) = (x'+y')(x'+y)$ ← bentuk POS

$\therefore$ Bentuk Kanonik : $f(x,y) = \Pi M(2, 3)$

Konversi ke bentuk standar/kanonik

2. Cari bentuk standar dari f(x,y,z) = y' + xy + x'yz'

Jawab :

f(x,y,z) = y' + xy + x'yz' ← lengkapi literal pada tiap suku

= y'(x+x')(z+z') + xy(z+z') + x'yz'

= (xy' + x'y')(z+z') + xyz + xyz' + x'yz'

f(x,y,z) = xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz'

= $m_5 + m_4 + m_1 + m_0 + m_7 + m_6 + m_2$

→ SOP

∴ Bentuk Standar : f(x,y,z)= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz'

∴ Bentuk Kanonik : f(x,y) = $\sum$m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 7)

atau

→ POS

∴ Bentuk Standar : f(x,y,z) = x + y' + z'

∴ Bentuk Kanonik : f(x,y) = ΠM(3)

Latihan

1. Cari bentuk standar dari :

   a. $f(x,y,z) = x + z$,

   b. $f(x,y,z) = z'$

2. Cari bentuk Kanonik dari :

   a. $f(x,y) = x'y + xy'$

   b. $f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + xyz$

Konversi ke bentuk SOP

1. Nyatakan Fungsi Boolean $f(x,y,z) = x + y'z$ dalam SOP

Jawab :

Lengkapi literal untuk setiap suku agar sama

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x \cdot (y+y').(z+z') + (x+x') \cdot y'z \\
&= (xy+xy')(z+z') + xy'z + x'y'z \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z \\
&= m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_1 \\
&= \sum m(1, 4, 5, 6, 7)
\end{aligned}
$$

Konversi ke bentuk SOP

2. Nyatakan Fungsi Boolean $f(x,y,z) = x'y'z + xz + yz$ dalam SOP

Jawab :

Lengkapi literal untuk setiap suku agar sama

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x'y'z + xz + yz \\
&= x'y'z + x.\,(y+y')\,.\,z + (x+x')\,.\,yz \\
&= x'y'z + \mathbf{xyz} + xy'z + \mathbf{xyz} + x'yz \\
&= m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \\
&= \sum m(1, 3, 5, 7)
\end{aligned}
$$

Konversi ke bentuk SOP

3. Nyatakan Fungsi Boolean $f(w,x,y,z) = wxy + yz + xy$ dalam SOP

Jawab;

Lengkapi literal untuk setiap suku agar sama

$$
\begin{aligned}
f(w,x,y,z) &= wxy + yz + xy \\
&= wxy \cdot (z+z') + (w+w')(x+x') \cdot yz + (w+w') \cdot xy \cdot (z+z') \\
&= wxyz + wxyz' + (wx+wx'+w'x+w'x')yz + (wxy+w'xy)(z+z') \\
&= wxyz + wxyz' + wxyz + wx'yz + w'xyz + w'x'yz + wxyz + \\
&\quad wxyz' + w'xyz + w'xyz' \\
&= w'x'yz + w'xyz' + w'xyz + wx'yz + wxyz' + wxyz \\
&= \sum m(3, 6, 7, 10, 14, 15)
\end{aligned}
$$

Konversi ke bentuk POS

1. Nyatakan Fungsi Boolean f(x,y,z) = x y+ x'z dalam POS

Jawab :

Bentuk fungsi ke POS

f(x,y,z)	= xy + x'z	
	= (xy + x')(xy + z)	distributif
	= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z)	distributif
	= (x' + y)(x + z)(y + z)	komplemen, identitas

Lengkapi literal untuk setiap suku agar sama

Suku-1 → x' + y	= x' + y + zz'
	= (x' + y + z)(x' + y + z')
Suku-2 → x + z	= x + z + yy'
	= (x + y + z)(x + y' + z)
Suku-3 → y + z	= xx' + y + z
	= (x + y + z)(x' + y + z)

Semua suku dengan literal lengkap :

f(x,y,z) = (xy + x')(xy + z)
= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z)
= (x' + y)(x + z)(y + z)
= (x'+y+z)(x'+y+z')(x+y+z)(x+y'+z)(x+y+z)(x'+y+z)
= (x+y+z)(x+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z')
= $M_0 . M_2 . M_4 . M_5$
= $\Pi M(0, 2, 4, 5)$

Konversi ke bentuk POS

2. Nyatakan Fungsi Boolean $f(x,y,z) = (x+z)(y'+z')$ dalam POS

Jawab :

Fungsi Boolean asumsi sudah dalam bentuk POS

$f(x,y,z) = (x+z)(y'+z')$ ← lengkapi literal pada tiap suku

$= (x+yy'+z)(xx'+y'+z')$ Identitas, Komplemen

$= (x+y+z)(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y'+z')$ distributif

$= M_0 . M_2 . M_3 . M_7$

Penyederhanaan fungsi boolean

Asumsi yang dipakai dalam penyederhanaan :

- bentuk fungsi boolean paling sederhana adalah SOP,
- operasi yang digunakan adalah operasi penjumlahan (+), perkalian (.) dan komplemen (‘).

ALJABAR	PETA KARNAUGH	QUINE-MCLUSKEY
• Bersifat *trial and error* tidak ada pegangan, • Dalam menyederhanakannya menggunakan aksioma-aksioma dan teorema-teorema yang ada pada aljabar boolean.	• Mengacu pada diagram venn, • Menggunakan bentuk-bentuk peta karnaugh.	• penyederhanaan didasarkan pada hukum distribusi, • Eliminasi *Prime Implicant Redundant*.

Penyederhanaan-aljabar

1. Sederhanakanlah fungsi Boolean
   $f(x,y) = x'y + xy' + xy$

Jawab :

$f(x,y)$	$= x'y + \mathbf{xy' + xy}$	
	$= x'y + x \cdot (\mathbf{y'+y})$	Distributif
	$= x'y + \mathbf{x \cdot 1}$	Komplemen
	$= \mathbf{x'y} + \mathbf{x}$	Identitas
	$= \mathbf{(x'+x)(x+y)}$	Distributif
	$= \mathbf{1 \cdot (x+y)}$	Komplemen
	$= \mathbf{(x+y)}$	Identitas

Penyederhanaan-aljabar

2. Sederhanakanlah fungsi Boolean dibawah ini :
   $f(x,y,z) = x'y'z' + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z' + xyz'$

Jawab :

$f(x,y,z)$	$= \mathbf{x'y'z' + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z' + xyz'}$	
	$= x'.(\mathbf{y'z'+y'z+yz+yz'}) + x . (\mathbf{y'z'+yz'})$	Distributif
	$= x'.((y'(\mathbf{z+z'}) + y(\mathbf{z+z'})) + x . ((\mathbf{y'+y})z')$	Distributif
	$= x'.(\mathbf{y' .1 + y.1}) + x(\mathbf{1 . z'})$	Komplemen
	$= x'.(\mathbf{y'+y}) + xz'$	Identitas
	$= \mathbf{x' .1} + xz'$	Komplemen
	$= \mathbf{x' + xz'}$	Identitas
	$= (\mathbf{x'+x})(x'+z')$	Distributif
	$= \mathbf{1. (x'+z')}$	Komplemen
	$= x' + z'$	Identitas

Penyederhanaan-aljabar

3. Sederhanakanlah fungsi Boolean : f(x,y) = x + xy’ + y’

Jawab :

f(x,y)	= x + **xy’ + y’**	
	= x . (**1 + y’**) + y’	Distributif
	= **x .1** + y’	Teorema 2
	= x + y’	Identitas

atau

f(x,y)	= x + **xy’ + y’**	
	= x + (**x + 1**) . y’	Distributif
	= x + **1 . y’**	Teorema 2.
	= x + y’	Identitas

Penyederhanaan-aljabar

4. Sederhanakanlah fungsi Boolean : $f(x,y,z) = xy + xy'z + y(x'+z) + y'z'$

Jawab :

$f(x,y,z) = \mathbf{xy + xy'z} + y(x'+z) + y'z'$	
$= x(\mathbf{y+y'z}) + \mathbf{y(x'+z)} + y'z'$	Distributif
$= x(\mathbf{(y+y')}(y+z)) + x'y + yz + y'z'$	Distributif
$= x(\mathbf{1 . (y+z)}) + x'y + yz + y'z'$	Komplemen
$= \mathbf{x . (y+z)} + x'y + yz + y'z'$	Identitas
$= \mathbf{xy} + xz + \mathbf{x'y} + yz + y'z'$	Distributif
$= y(\mathbf{x+x'}) + xz + yz + y'z'$	Distributif
$= \mathbf{y . 1} + xz + yz + y'z'$	Komplemen
$= \mathbf{y} + xz + yz + \mathbf{y'z'}$	Identitas
$= (\mathbf{y+y'})(y+z') + xz + yz$	Distributif
$= 1.(\mathbf{y+z'}) + xz + yz$	Komplemen
$= \mathbf{y + yz} + \mathbf{xz + z'}$	Identitas
$= y\ (\mathbf{1 + z}) + (x+z')(z+z')$	Distibutif
$= \mathbf{y . 1} + (x+z')(z+z')$	Teorema 2
$= y + (x+z')(\mathbf{z+z'})$	Identitas
$= y + \mathbf{(x + z') . 1}$	Komplemen
$= x + y + z'$	Identitas

Penyederhanaan-k'map

a). K'Map 2 variabel

x \ y	0	1
0	x'y'	x'y
1	xy'	xy

x \ y	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

b) K'Map 3 variabel

x \ yz	00	01	11	10
0	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
1	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'

x \ yz	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

c) K'Map 4 variabel

wx \ yz	00	01	11	10
00	w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz	w'x'yz'
01	w'xy'z'	w'xy'z	w'xyz	w'xyz'
11	Wxy'z'	wxy'z	wxyz	wxyz'
10	wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz	wx'yz'

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Penyederhanaan-k'map

1. Place the following four-variable Canonical SOP function in a truth table and represent it in a fourth-order K-map
   $f(w,x, y,z) = \Sigma m(0, 1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 13)$

Solution

The truth table is constructed by placing a logic 1 in the *f* coulumn for each MINTERM represented by the function above.

The absence of MINTERM is a MAXTERM , which accordingly, is assigned logic 0. The K-map is a graphical representation of the canonical truth table and is constructed directly from the truth table as shown below

Penyederhanaan-k’map

$$f(w,x, y,z) = \Sigma m(0, 1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 13)$$

Truth T

W	X	Y	Z	f	W	X	Y	Z	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

Penyederhanaan-k’map

fourth-order K-map

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	1	0	1
11	0	1	0	0
10	1	1	0	1

Penyederhanaan-k'map

2. Place the following three-variable CANONICAL POS function in a truth table and represent it in a thirs-order K-Map.

$$f(A,B,C) = (A+B'+C)(A'+B'+C')(A+B+C)(A'+B+C)(A'+B+C')$$

Solution

The procedure is similar to that followed in example 1 except that, in this case, a logic 0 is placed in the f coulumn and K-map cell each Maxterm

Penyederhanaan-k’map

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1

Penyederhanaan-k’map

3. Convert the reduced SOP function given in this example to canonical SOP and POS form by using a fourth-order K-map. Represent the canonical expression by using both literal and coded notation

$$f(A,B,C,D) = ABCD + AD' + B'C'D' + A'B'C + A'BC'D + BCD' + A'B'D'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	0	1	1
10	1	0	0	1

Penyederhanaan-k'map

Sederhanakanlah persamaan,

$$f(x,y) = x'y + xy' + xy = m1 + m2 + m3$$

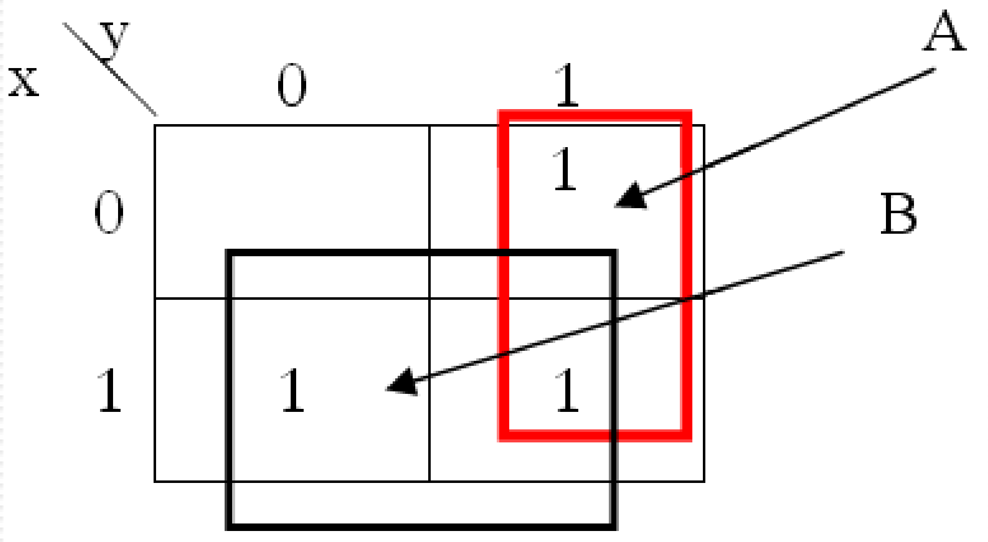
Jawab :

Sesuai dengan bentuk minterm, maka 3 kotak dalam K'Map 2 dimensi, diisi dengan 1 :

x \ y	0	1
0		1
1	1	1

Penyederhanaan-k'map

Selanjutnya pengelompokkan semua 1 yang ada dengan membuat kumpulan kotak atau persegi panjang dentgan jumlah bujursangkar kecil 2^n. Buatlah kelompok yang sebesar-besarnya.



Penyederhanaan-k'map

Cara menentukan bentuk sederhana dari hasil pengelompokkan adalah :

- Carilah variabel yang memiliki nilai yang sama dalam kelompok tersebut, sebagai contoh kelompok A.
  Pada kelompok A adalah variabel y dengan harga 1
  Pada kelompok B adalah variabel x dengan harga 1

- Menentukan bentuk hasil pengelompokkan.
  Kelompok A adalah y, dan
  Kelompok B adalah x, sehingga
  Hasil bentuk sederhana dari contoh diatas

$$A + B = y + x$$

Penyederhanaan-k'map

2. Sederhanakanlah persamaan :

   f(x,y,z) = x'y'z' + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z' + xyz'

X'

Z'

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1			1

$$\therefore f(x,y,z) = z' + x'$$

Penyederhanaan-k'map

3. Sederhanakanlah fungsi Boolean berikut :

$f(w,x,y,z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$

Jaw

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1			1
11	1	1		1
10	1	1	1	1

x'

z'

wy'

$\therefore f(w,x,y,z) = x' + z' + wy'$

Penyederhanaan-k'map

4. Sederhanakanlah fungsi Boolean :

   $f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'yz' + xy'z' + x'y'z'$

   dengan menggunakan K'Map

x \ yz	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1	1	1	1

z'

y

x

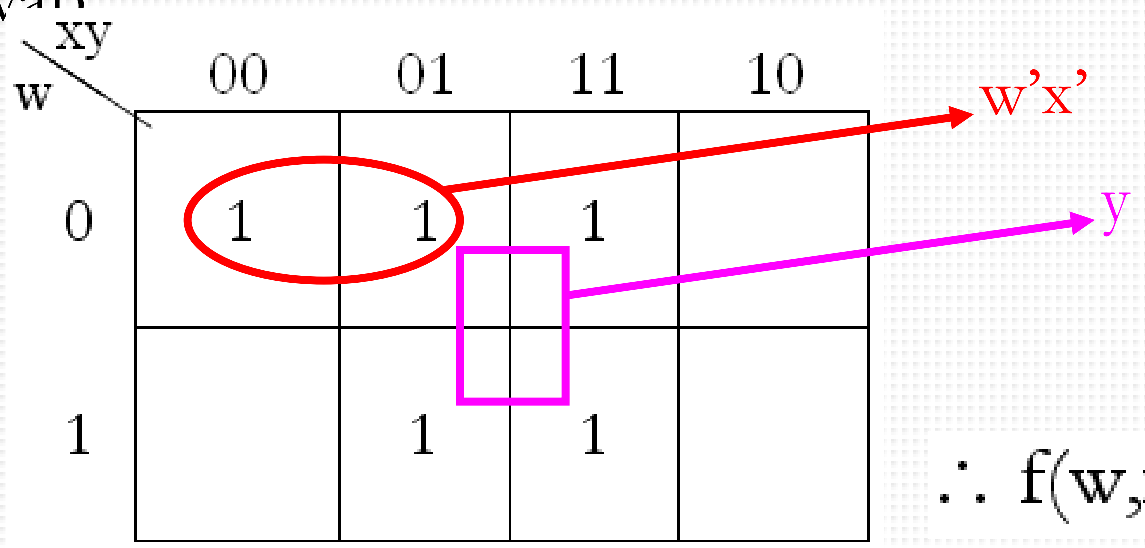
$\therefore f(x,y,z) = x + y + z'$

Penyederhanaan-k'map

Sederhanakanlah fungsi Boolean :

$$f(w,x,y) = \sum m(0, 1, 3, 5, 7)$$

Jawab :



$\therefore f(w,x,y) = w'x' + y$

Penyederhanaan-k'map

6. Sederhanakanlah fungsi Boolean :

f(w,x,y,z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wx'yz + w'x'yz + w'x'yz' + w'xyz' + w'xy'z' + w'xy'z

Jawab :

wx \ yz	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1		1
11	1	1	1	
10			1	

Soal Latihan

1. Sederhanakanlah Fungsi Boolean dibawah ini dengan menggunakan CARA ALJABAR :

a. $xy + xy'z + y(x' + z) + y'z'$

b. $wx + xy + yz + zw + w'x'yz' + w'x'y'z$

c. $wxy'z' + wxy'z + wxyz + wx'yz + w'x'yz + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz' + w'xy'z' + w'xy'z$

d. $A'B'CE' + A'B'C'D' + B'D'E' + B'CD' + CDE' + BDE'$

Soal Latihan

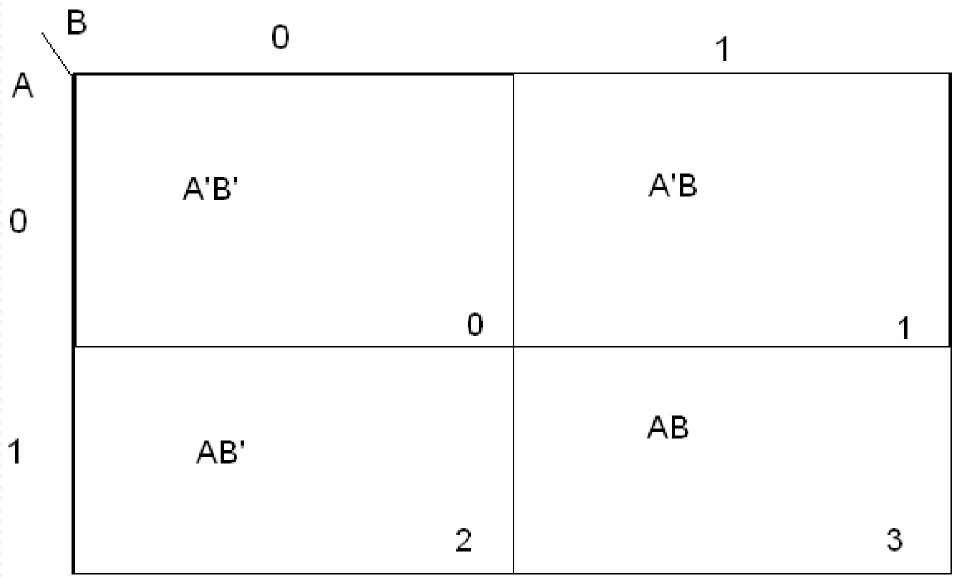
2. Sederhanakanlah Fungsi Boolean dibawah ini dengan menggunakan PETA KAURNAUGH :

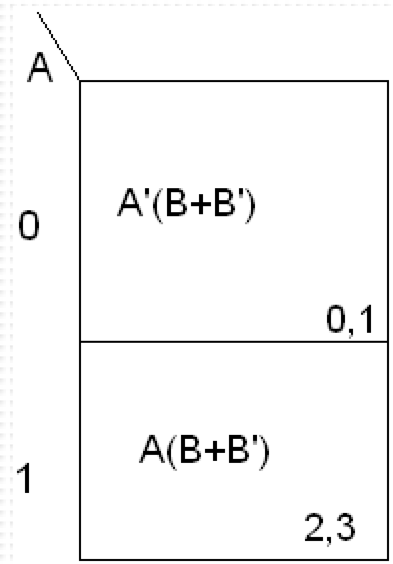
a. F = BDE + B'C'D + CDE + A'B'CE + A'B'C + B'C'D'E'

b. wx + xy + yz + zw + w'x'yz' + w'x'y'z

c. wxy'z' + wxy'z + wxyz + wx'yz + w'x'yz + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz' + w'xy'z' + w'xy'z

Kompresi K-Map





Kompresi K-Map

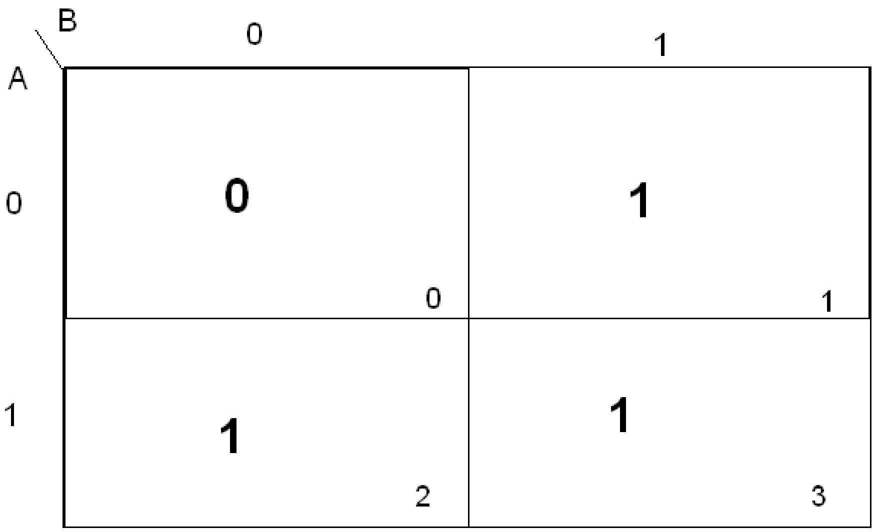
BC

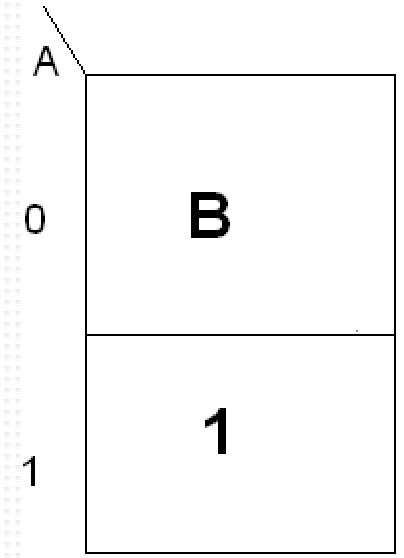
A \ B	0	1
0	A'B' (C' + C') 0,1	A'B (C' + C) 2,3
1	AB' (C' + C) 4,5	AB (C' + C) 6,7

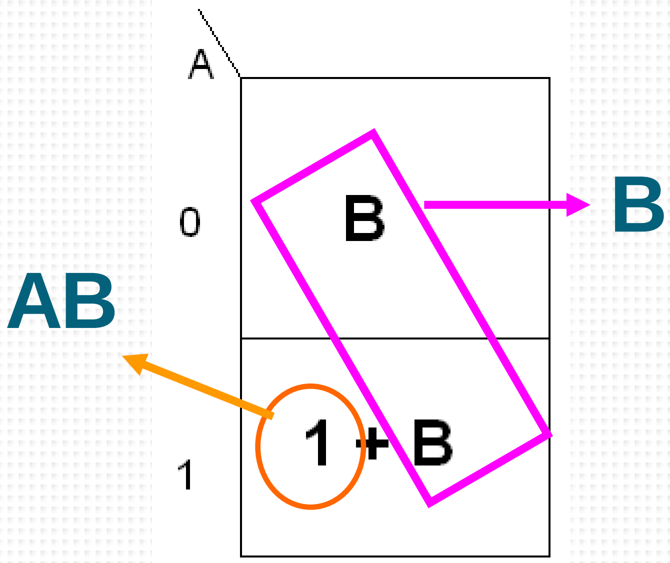
Kompresi K-Map

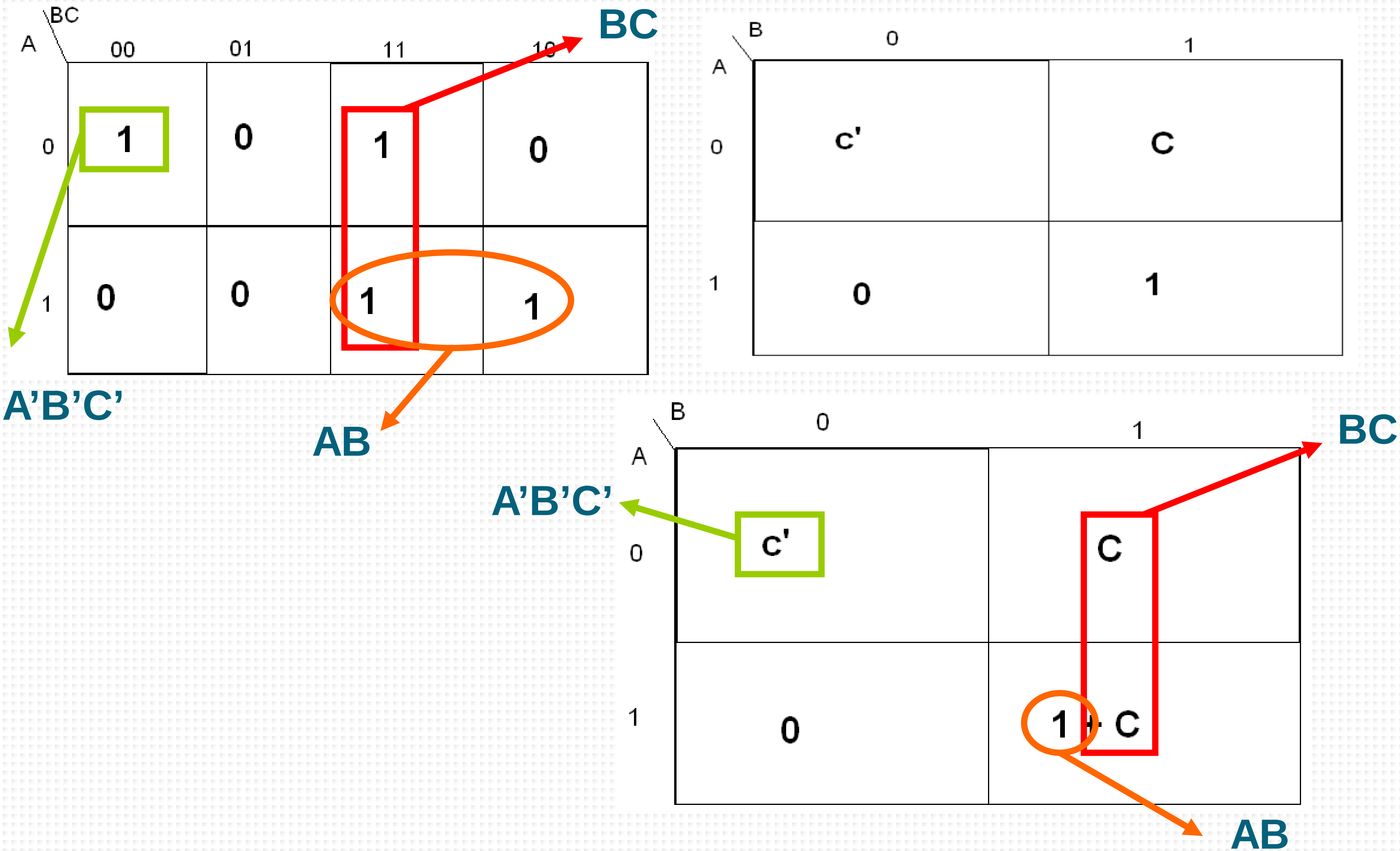
AB \ CD	00	01	11	10
A \ BC	**00**	**01**	**11**	**10**
0	A'B'C'(D'+D) 0,1	A'B'C(D'+D) 2,3	A'BC(D'+D) 6,7	A'BC'(D'+D) 4,5
1	AB'C'(D'+D) 8,9	AB'C(D'+D) 10,11	ABC(D'+D) 14,15	ABC'(D'+D) 12,13

Kompresi K-Map








BC
A
00
01
11
10
0
1
1
0
1
0
0
0
1
1
BC
A'B'C'
AB
B
A
0
1
c'
C
0
1
B
A
0
1
BC
A'B'C'
c'
C
0
1
0
1 + C
AB

Latihan

Tentukan fungsi boolean dibaawah ini :

1

W \ XY

1	1	Z'	1
Z	Z	Z'	Z'

2

X \ Y

1	Z
1	1

3

W \ XY

1	Z'	0	1
Z	1	1	Z

4

X \ Y

Z	Z
Z	Z'

Penyederhanaan-McCluskey

Metoda Quine McCluskey digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean dengan 4 atau lebih variabel

Algoritma :

1. nyatakan variabel komplemen dengan ‘0’, sebaliknya ‘1’,
2. kelompokkan suku-suku berdasarkan jumlah ‘1’,
3. kombinasikan suku-suku tersebut dengan kelompok lain yang jumlah ‘1’-nya berbeda satu,→ diperoleh bentuk prime yang lebih sederhana
4. mencari *prime-implicant*, term yang menjadi calon yang terdapat dalam fungsi sederhana,
5. memilih *prime-implicant* yang mempunyai jumlah literal paling sedikit

Penyederhanaan-McCluskey

Contoh :

Sederhanakanlah fungsi Boolean dibawah ini :

$F = \sum m(0, 1, 2, 8, 10, 11, 14, 15)$

1. kelompokkan representasi biner untuk tiap minterm menurut jumlah digit 1

Desimal	Biner
0	0000
1	0001
2	0010
8	1000
10	1010
11	1011
14	1110
15	1111

Penyederhanaan-McCluskey

Dari tabel konversi tersebut dapat dilihat bahwa jumlah digit adalah

Jumlah Digit 1	Desimal
0	0
1	1, 2, 8
2	10
3	11, 14
4	15

	w	x	y	z
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
8	1	0	0	0
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Penyederhanaan-McCluskey

	w	x	y	z	
0	0	0	0	0	√
1	0	0	0	1	√
2	0	0	1	0	√
8	1	0	0	0	√
10	1	0	1	0	√
11	1	0	1	1	√
14	1	1	1	0	√
15	1	1	1	1	√

	w	x	y	z
0, 1	0	0	0	–
0, 2	0	0	–	0
0, 8	–	0	0	0
2, 10	–	0	1	0
8, 10	1	0	–	0
10, 11	1	0	1	–
10, 14	1	–	1	0
11, 15	1	–	1	1
14, 15	1	1	1	–

Penyederhanaan-McCluskey

3. Kelompokkan hasil minterm tahap 2) seperti tahap 1) kemudian lakukan seperti pada tahap 2)

	w	x	y	z	
0, 1	0	0	0	-	√
0, 2	0	0	-	0	√
0, 8	-	0	0	0	√
2, 10	-	0	1	0	√
8, 10	1	0	-	0	√
10, 11	1	0	1	-	√
10, 14	1	-	1	0	√
11, 15	1	-	1	1	√
14, 15	1	1	1	-	√

	w	x	y	z
0, 2, 8, 10	-	0	-	0
0, 8, 2, 10	-	0	-	0
10, 11, 14, 15	1	-	1	-
10, 14, 11, 15	1	-	1	-

Penyederhanaan-McCluskey

4. mencari *prime-implicant*, term yang menjadi calon yang terdapat dalam fungsi sederhana,

	w	x	y	z	
0, 1	0	0	0	-	A
0, 2	0	0	-	0	√
0, 8	-	0	0	0	√
2, 10	-	0	1	0	√
8, 10	1	0	-	0	√
10, 11	1	0	1	-	√
10, 14	1	-	1	0	√
11, 15	1	-	1	1	√
14, 15	1	1	1	-	√

	w	x	y	z	
0, 2, 8, 10	-	0	-	0	B
0, 8, 2, 10	-	0	-	0	
10, 11, 14, 15	1	-	1	-	C
10, 14, 11, 15	1	-	1	-	

Penyederhanaan-McCluskey

5. Memilih Prime-Implicant

	w	x	y	z	
0, 1	0	0	0	-	A
0, 2	0	0	-	0	√
0, 8	-	0	0	0	√
2, 10	-	0	1	0	√
8, 10	1	0	-	0	√
10, 11	1	0	1	-	√
10, 14	1	-	1	0	√
11, 15	1	-	1	1	√
14, 15	1	1	1	-	√

	w	x	y	z	
0, 2, 8, 10	-	0	-	0	B
0, 8, 2, 10	-	0	-	0	
10, 11, 14, 15	1	-	1	-	C
10, 14, 11, 15	1	-	1	-	

	0	1	2	8	10	11	14	15
A	x	x						
B	x		x	x	x			
C					x	x	x	x

Penyederhanaan-McCluskey

	0	1	2	8	10	11	14	15
	√	√	√	√	√	√	√	√
A	x	⊗						
B	⊗		⊗	⊗	x			
C					⊗	⊗	⊗	⊗

	w	x	y	z
10, 11, 14, 15	1	-	1	-
0, 2, 8, 10	-	0	-	0
0, 1	0	0	0	-

$$F = C + B + A$$

$$= wy + x'z' + w'x'y'$$

Penyederhanaan-McCluskey

Langkah 2,

	w	x	y	z	
0	0	0	0	0	√
2	0	0	1	0	√
4	0	1	0	0	√
8	1	0	0	0	√
5	0	1	0	1	√
6	0	1	1	0	√
10	1	0	1	0	√
11	1	0	1	1	√
13	1	1	0	1	√

	w	x	y	z
0, 2	0	0	–	0
0, 4	0	–	0	0
0, 8	–	0	0	0
2,6	0	–	1	0
2,10	–	0	1	0
4, 5	0	1	0	–
4, 6	0	1	–	0
8,10	1	0	–	0
5, 13	–	1	0	1
10, 11	1	0	1	–

z
0
D
0
E

z
0
0
0
0

Penyederhanaan-McCluskeyA

	w	x	y	z	
0,2,4,6	0	-	-	0	**D**
0,2,8,10	-	0	-	0	**E**

4, 5	0	1	0	-	**B**
5, 13	-	1	0	1	
10, 11	1	0	1	-	**C**

Langkah 5,

	√	√	√	√	√	√	√	√	√
	0	2	4	5	6	8	10	11	13
A			x	x					
B				⊗					⊗
C							x	⊗	
D	⊗	⊗	⊗		⊗				
E	x	x				⊗	⊗		

Penyederhanaan-McCluskey

4, 5	0	1	0	-	A
5, 13	-	1	0	1	B
10, 11	1	0	1	-	C
0,2,4,6	0	-	-	0	D
0,2,8,10	-	0	-	0	E

$$
\begin{aligned}
f(w,x,y,z) &= \sum m(0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13) \\
&= B + C + D + E \\
&= xy'z + wx'y + w'z' + x'z'
\end{aligned}
$$