Graf

Tri Brotoharsono

Telkom University

March 24, 2023

Pendahuluan

- Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari *simpul* dan *sisi* yang menghubungkan simpul-simpul ini.
- Ada berbagai jenis graf dilihat dari:
  - apakah sisinya berarah atau tidak
  - apakah dibolehkan ada sisi ganda yang menghubungkan satu pasang simpul atau tidak
  - apakah *kalang* diperbolehkan.
- Banyak sekali permasahalan yang bisa diselesaikan dengan teori graf.

Graf dan Model Graf

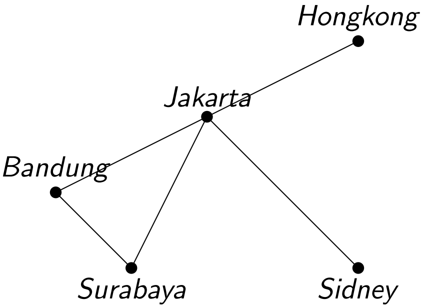
Definisi

Sebuah Graf $G = (V, E)$ terdiri dari V, himpunan tidak kosong simpul atau node, dan E sebuah himpunan dari sisi-sisi. Setiap sisi mempunyai satu atau dua simpul yang terasosiasi dengannya, dinamakan titik akhir. Dikatakan sebuah sisi menyambungkan titik-titik akhirnya.

Catatan

Himpunan simpul-simpul V dari suatu graf G bisa jadi tak terhingga. Sebuah graf dengan simpul tak terhingga atau sisi-sisi tak terhingga disebut sebagai graf tak terhingga. Dalam kuliah ini kita hanya membahas graf terhingga.

Contoh Graf



Graf ini menggambarkan jaringan komputer yang berupa data center di suatu kota dan disambungkan dengan suatu jaringan ke kota lain.

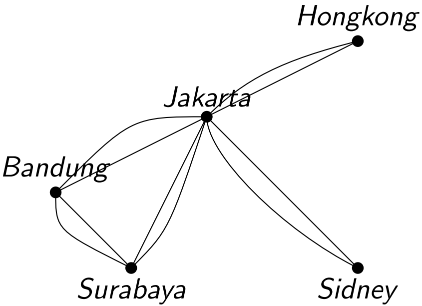
Graf Sederhana

Pada contoh graf sebelumnya, setiap sisi menghubungkan dua buah simpul, dan tidak ada sisi ganda yang menghubungkan sebuah pasang simpul, juga tidak ada sisi yang tersambung hanya dengan sebuah simpul.

Definisi

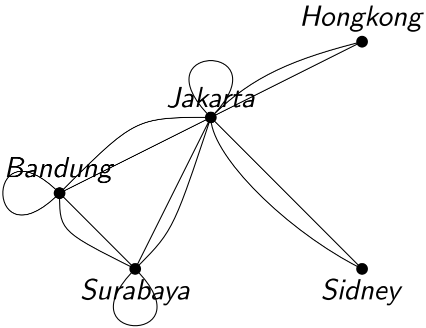
Graf yang tidak mengandung sisi ganda dan tidak ada gelung disebut sebagai graf sederhana

Multigraf



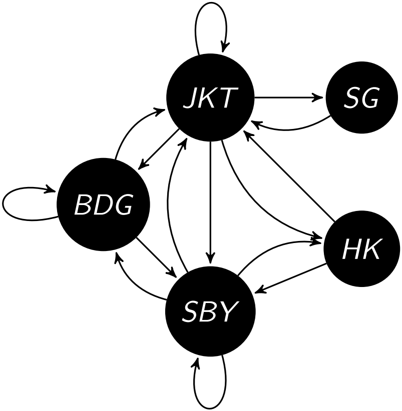
Graf yang menggambarkan jaringan komputer dengan jalur ganda antar titiknya.

Pseudograf



Graf yang menggambarkan jaringan komputer dengan jalur diagnostik, digambarkan sebagai gelung (sisi yang menghubungkan satu titik saja).

Graf Berarah



Graf yang menggambarkan jaringan komputer dengan jalur komunikasi satu arah, digambarkan sebagai graf dengan sisi berarah.

Graf Berarah

Definisi

Sebuah graf berarah atau digraph (V, E) *terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul* V *dan sebuah himpunan sisi-sisi berarah atau busur* E. *Setiap sisi berarah dinyatakan dengan pasangan berurut simpul. Sisi berarah yang bersesuaian dengan pasangan simpul* (u, v) *disebut bermula pada* u *dan berakhir pada* v.

- Jika graf berarah tidak memiliki gelung dan tidak memiliki sisi ganda maka disebut sebagai graf berarah sederhana
- Jika graf berarah memiliki sisi berarah dari sebuah simpul lebih dari satu maka disebut sebagai multigraf berarah. Pada saat ada m sisi berarah pada suatu pasangan simpul (u, v), maka (u, v) adalah sisi dengan *multiplicity* m.

Tetangga

Definisi

Dua simpul u *dan* v *dari graf tidak berarah* G *disebut* bersisian *atau* bertetanggaan *dalam*G *jika* u *dan* v *adalah* titik akhir *sebuah sisi* e *dalam* G . *Sisi* e *disebut* bersisian *dengan* u *dan* v *dan* e menghubungkan u *dengan* v.

Definisi

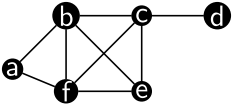
Himpunan semua tetanga suatu simpul v dari suatu graf G(V,E), dinyatakan dengan N(v), disebut tetangga dari v. Jika A adalah himpunan bagian dari V, maka N(A) adalah adalah himpunan dari semua simpul dalam G yang bersisian setidaknya dengan sebuah simpul di A. Sehingga $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$

Derajat Simpul

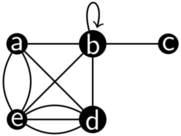
Definisi

Derajat dari suatu simpul dalam graf tidak berarah *adalah banyaknya busur yang* bersisian *dengan simpul tersebut, kecuali* gelung *pada suatu simpul menambahkan dua pada derajat simpul tersebut. Derajat dari suatu simpul v dinyatakan dengan deg(v).*

Tentukan derajat setiap simpul dalam graf berikut!



a=2, b=4, c=4, d=1, e=3, f=4



a=4, b=6, c=1, d=5, e=6

Teorema Jabat Tangan

Teorema

Teorema Jabat Tangan

Jika G=(V,E) adalah graf tak berarah dengan jumlah sisi m. Maka:

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Contoh:

Berapa jumlah sisi suatu graf tidak berarah dengan jumlah simpul 10 dan masing-masing berderajat 6?

Solusi:

Karena ada 10 simpul dan masing-berderajat 6, maka

$2m = 10 \times 6 = 60,\ m = \frac{60}{2} = 30$

Derajat Masuk dan Derajat Keluar

Definisi

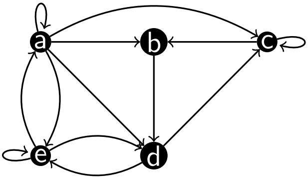
Jika (u,v) adalah sisi dari suatu graf G dengan sisi berarah, u disebut sebagai simpul asal dan v disebut sebagai simpul akhir. Simpul asal dan simpul akhir dari suatu gelung adalah sama.

Definisi

Dalam suatu graf dengan sisi berarah, derajat masuk dari suatu simpul v, *dinyatakan dengan* $deg^{-}(v)$ *adalah jumlah sisi dengan v adalah simpul akhir.* Derajat keluar dari suatu simpul v, *dinyatakan dengan* $deg^{+}(v)$ *adalah jumlah sisi dengan v sebagai simpul awal.*

Derajat Masuk dan Derajat Keluar

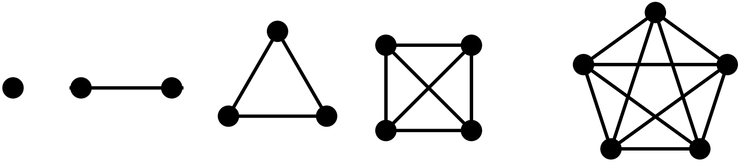
Tentukan nilai derajat masuk dan derajat keluar dari graf berikut ini!



Derajat masuk: a=2, b=2, c=3, d=3, e=3
Derajat keluar: a=5, b=1, c=2, d=2, e=3

Graf khusus

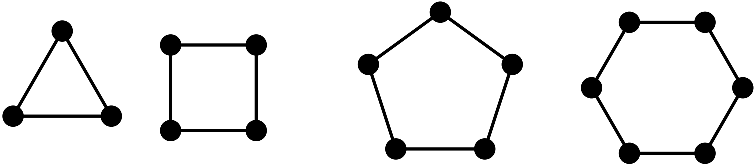
Graf Lengkap. Sebuah graf lengkap pada n simpul, dinyatakan dengan K_n, adalah sebuah graf sederhana yang mempunyai hanya satu sisi untuk setiap pasangan titiknya.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Graf khusus

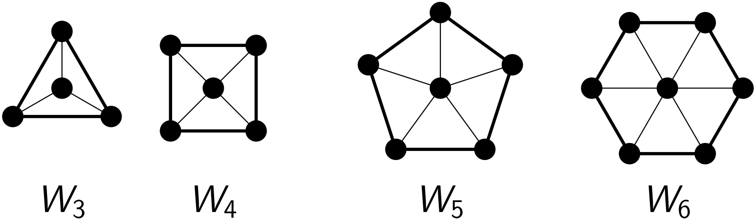
Siklus. Sebuah **siklus** C_n, $n \geq 3$, Mempunyai n simpul-simpul $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan sisi-sisi $v_1, v_2, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$



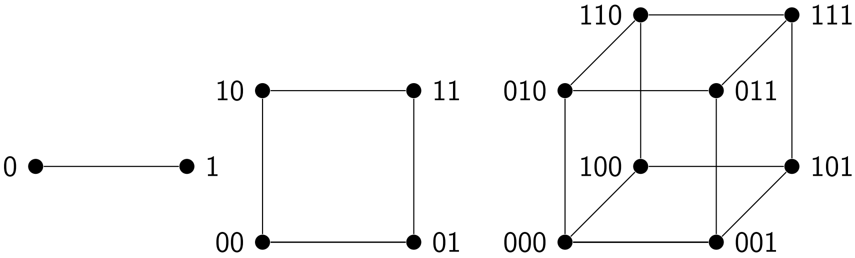
C_3 C_4 C_5 C_6

Graf khusus

Roda. Sebuah **Roda** W_n, bisa didapatkan dengan menambahkan sebuah simpul ke C_n dan mengubungkan simpul ini dengan n simpul di C_n



n-**Cubes**. Sebuah **hypercube dimensi n**, atau *n*-**cube**, dinyatakan dengan Q_n, adalah graf yang mempunyai simpul yang merepresentasikan bit string dengan panjang n sebanyak 2^n. Dua simpul bertetangga hanya jika kedua bit string berbeda hanya satu bit.

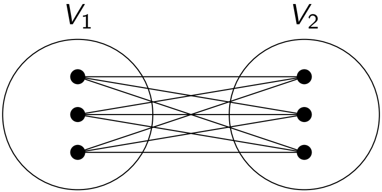


Q_1 Q_2 Q_3

Graf Bipartit

Definisi

Sebuah graf sederhana G disebut bipartit jika himpunan simpulnya V bisa dibagi menjadi dua himpunan saling terpisah V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi di graf terhubung sebuah simpul di V_1 dengan sebuah simpul di V_2 (sehingga tidak ada sisi yang menghubungkan antar simpul di V_1 atau di V_2

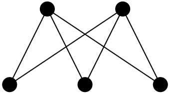


Graf Bipartit

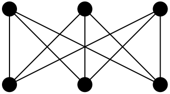
Teorema

Sebuah graf sederhana bipartit jika dan hanya jika dimungkinkan mewarnai satu dari dua warna ke setiap simpul sehingga tidak ada simpul yang berdekatan berwarna sama.

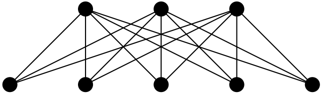
Graf Bipartit Lengkap. Sebuah **graf bipartit lengkap** $K_{m,n}$ adalah graf yang apabila himpunan simpulnya dipecah menjadi dua himpunan bagian dari m dan n simpul, dan setiap sisi menghubungkan simpul dari kedua himpunan bagian.



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$

Graf baru dari graf lama

Dimungkinkan untuk membuat graf dari bagian suatu graf yang sudah ada.

Definisi

Sebuah graf bagian dari graf G=(V,E) adalah graf H=(W,F), dimana $W \subseteq V$ *dan* $F \subseteq E$. *Graf bagian H dari G adalah graf bagian sebenarnya dari G jika* $H \neq G$.

Definisi

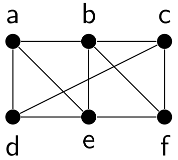
Jika G=(V,E) adalah graf sederhana. Subgraf terinduksi *oleh sebuah himpunan bagian W dari himpunan simpul V adalah graf (W,F), dimana himpunan simpul F berisi sebuah sisi di E jika dan hanya jika dua simpul akhir sisi ini ada di W*

Lintasan

Definisi

Untuk n integer non negatif dan G adalah graf tidak berarah. Sebuah lintasan dengan panjang *n dari u ke v di G adalah urutan dari n sisi $e_1, \ldots, e_n$ dari G dimana ada urutan $x_0 = u, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$ dari simpul yang dimiliki e_i, untuk $i = 1, \ldots, n$, titik akhir x_{i-1} and x_i. Jika graf sederhana, lintasan ini dinyatakan dengan urutan simpul $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Suatu lintasan adalah* sirkuit *jika bermula dan berakhir pada simpul yang sama, yaitu jika $u = v$, dan memiliki panjang lebih besar dari nol. Lintasan dikatakan melalui simpul-simpul $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ atau menelusuri sisi-sisi $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Sebuah lintasan atau sirkuit dikatakan sederhana jika tidak mengandung sisi yang sama lebih dari satu kali.*

Contoh Lintasan

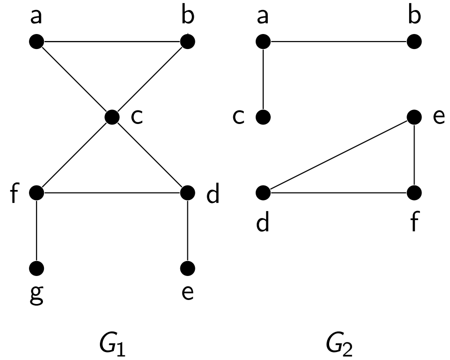


a, d, c, f, e adalah lintasan sederhana dengan panjang 4, karena {a,d},{d,c},{c,f},{f,e} semua adalah sisi. Tetapi d, e, c, a bukan suatu lintasan, karena $\{e, c\}$ bukan sebuah sisi. b, c, f, e, b adalah sirkuit dengan panjang 4 karena {b,c},{c,f},{f,e},{e,b} adalah sisi-sisi, dan lintasan ini berawal dan berakhir di b. Lintasan a, b, e, d, a, b dengan panjang 5 bukanlah lintasan sederhana karena mengandung sisi $\{a, b\}$ dua kali.

Keterhubungan

Definisi

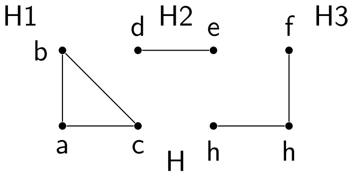
Sebuah graf sederhana dikatakan terhubung, *jika ada lintasan antara setiap pasangan simpul yang berbeda dalam graf tersebut. Graf sederhana yang tidak terhubung disebut terpisah. Disebut memisahkan sebuah graf kalau menghilangkan sisi atau simpul atau keduanya, mengakibatkan subgraf yang terpisah.*



G_1 terhubung, G_2 terpisah.

Komponen-komponen Terhubung

Sebuah **komponen terhubung** dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah subgraf terhubung dari G yang bukan subgraf sebenarnya dari graf G.Jadi, sebuah komponen terhubung dari graf G adalah sebuah subgraf terhubung maksimal dari G. Sebuah graf G yang tidak terhubung mempunyai dua atau lebih komponen terhubung yang terpisah dan G adalah gabungannya.



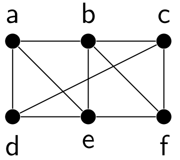
Graf H adalah gabungan dari subgraf terhubung H1,H2 dan H3. H1, H2 dan H3 adalah komponen terhubung dari H.

Keterhubungan Simpul

Tidak semua graf mempunyai simpul pemotong. Contohnya graf lengkap K_n, dengan $n \geq 3$. Pada saat kita membuang simpul pada K_n dan semua sisi yang terhubung dengannya, maka kita akan mendapatkan graf lengkap K_{n-1}. Graf terhubung tanpa simpul pemotong disebut **Graf tak terpisahkan**, dan bisa dianggap sebagai graf yang lebih terhubung dibandingkan dengan graf dengan simpul pemisah. Notasi ini bisa diperluas dengan mendefinisikan tingkat keterhubungan graf berdasarkan jumlah minimal simpul pemisah.

Simpul Pemisah

Sebuah himpunan bagian V' dari himpunan simpul V dari $G = (V, E)$ adalah **simpul pemisah**, atau **himpunan pemisah**, jika $G - V'$ adalah graf terpisah.

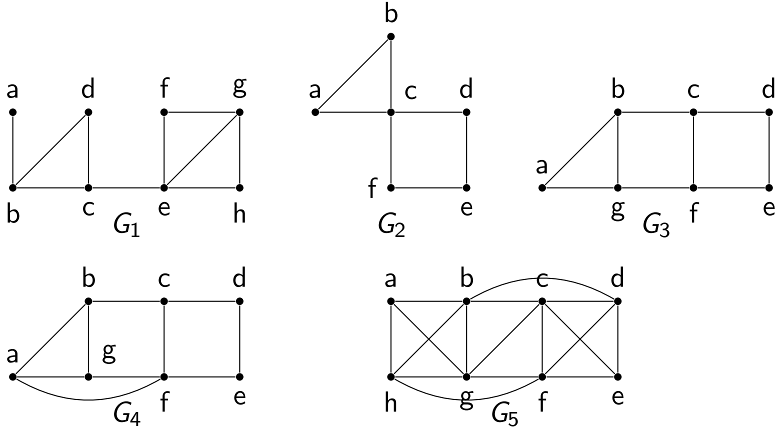


Di graf ini $\{b, c, e\}$ adalah simpul pemisah dengan tiga simpul, karena kalau simpul-simpul tersebut dibuang dari graf, maka graf akan menjadi terpisah.

Konektivitas Simpul dari suatu graf tidak lengkap G, dinyatakan dengan $\kappa(G)$, adalah jumlah minimum simpul dalam simpul pemisah.

Konektivitas Simpul

Tentukan nilai $\kappa(G)$ masing masing graf berikut:



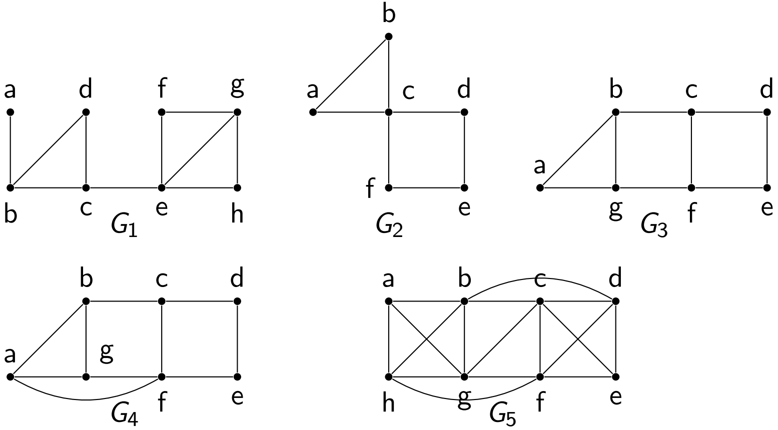
Konektivitas Simpul

G_1 **dan** G_2:
Karena ada simpul pemisah (b, c dan e), maka $\kappa(G_1) = 1$.
Demikian juga G2, karena memiliki simpul pemisah (c) maka $\kappa(G_2) = 1$
G_3 **dan** G_4 :
Tidak ada simpul pemisah di G_3, memerlukan setidaknya dua simpul untuk membuat G_3 terpisah, maka $\kappa(G_3) = 2$, demikian juga di G_4, tidak ada simpul pemisah, tetapi dengan membuang cukup du a simpul bisa membuat G_4 terpisah, maka $\kappa(G_4) = 2$
G_5:
Diperlukan setidaknya tiga simpul dibuang (misalnya c,d,f) untuk membuat G_5 terpisah, maka $\kappa(G_5) = 3$

Konektivitas Sisi

Kita juga bisa mengukur konektivitas graf terhubung $G = (V, E)$ dari segi jumlah minimum sisi yang bisa kita buang untuk membuat graf menjadi terpisah. Jika suatu graf memiliki sisi pemisah, maka dengan membuangnya akan menjadikan graf terpisah. Jika G tidak mempunyai sisi pemisah, kita bisa mencari himpunan terkecil sisi-sisi yang bisa dibuang untuk membuat graf terpisah. Sebuah himpunan sisi E' disebut **pemisah sisi** dari G jika subgraf $G - E'$ terpisah. **Edge Connectivity** dari suatu graf G, dinyatakan dengan $\lambda(G)$, adalah jumlah minimal sisi dalam pemisah sisi dari G.

Konektivitas Sisi



Pertidaksamaan dalam konektivitas graf

Jika $G = (V, E)$ adalah graf terhubung tidak lengkap dengan setidaknya tiga simpul, maka derajat simpul paling kecil adalah batas atas dari keterhubungan simpul maupun keterhubungan sisi.
$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} deg(v)$

Penggunaan Konektivitas Graf

Di awal sudah diberikan contoh graf yang memodelkan jaringan komputer. Konektivitas simpul bisa diaplikasikan dalam graf yang memodelkan jaringan komputer, dimana simpul memodelkan router dan sisi memodelkan jalur komunikasi, maka nilai dari konektivitas sisi adalah jumlah maksimal dari router yang mengalami kegagalan sehingga jaring tidak bisa berfungsi lagi (terputus).
Demikian juga konektivitas sisi bisa dipakai untuk menyatakan jumlah maksimum jalur komunikasi (misalnya fiber optik) yang gagal yang menyebabkan jaringan tidak bisa berfungsi lagi (terputus).

Keterhubungan Graf Berarah

Definisi

Graf berarah terhubung kuat *adalah jika ada lintasan dari a ke b dan dari b ke a dimana a dan b adalah simpul dalam graf.*

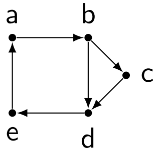
Supaya graf berarah terhubung kuat, maka harus ada urutan sisi berarah dari setiap simpul ke setiap simpul lainnya dalam graf.

Definisi

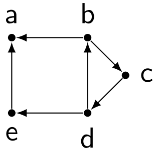
Graf berarah terhubung lemah *jika ada lintasan antara seetiap dua simpul dalam graf, tanpa melihat arah sisi/busurnya.*

Keterhubungan Graf berarah

Apakah graf berikut ini terhubung kuat?
Apakah terhubung lemah?



G



H

Lintasan dan Sirkuit Euler

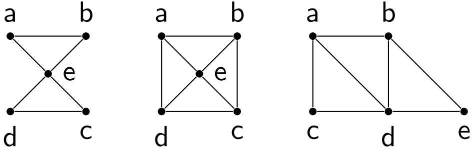
- Dapatkah kita membuat lintasan yang berawal dari suatu titik dan kembali lagi ke titik semulai dengan melewati setiap sisi dalam sebuah graf tepat satu kali?
- Dapatkan kita membuat lintasan yang berawal dari suatu titik dan kembali ke titik semula dengan melewati setiap titik dalam sebuah graf tepat satu kali?

Pertanyaan pertama menanyakan apakah suatu graf mempunyai sirkuit **Euler**, relatif mudah diidentifikasi dengan melihat derajat setiap simpul, pertanyaan kedua adalah mencari sirkuit **Hamilton** dan relatif lebih sulit untuk diselesaikan.

Sirkuit dan Lintasan Euler

Definisi

Sebuah sirkuit Euler dalam graf G adalah seebuah sirkuit sederhana yang mengandung semua sisi dalam G. Lintasan Euler adalah lintasan sederhana yang mengandung semua sisi dalam graf G.



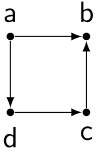
G_1 G_2 G_3

G_1:Sirkuit Euler : $a, e, c, d, e, b, a,$

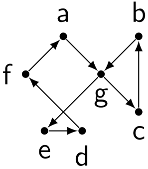
G_3:Lintasan Euler : a, c, d, e, b, d, a, b

Sirkuit dan Lintasan Euler

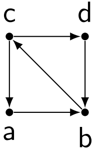
Manakah graf yang memiliki sirkuit Euler? Manakah yang tidak memiki sirkuit Euler tetapi memiliki lintasan Euler?



H_1



H_2



H_3

Sirkuit Euler: H_2 : mis. $a, g, c, b, g, e, d, f, a$, lintasan Euler: H_3: mis. c, a, b, c, d, b

Syarat perlu dan cukup untuk lintasan dan sirkuit Euler

Teorema

Sebuah multigraf terhubung dengan setidaknya dua simpul mempunyai sirkuit Euler jika dan hanya jika setiap simpulnya berderajat genap

Teorema

Sebuah multigraf terhubung mempunyai sebuah lintasan Euler tetapi tidak mempunyai sirkuit Euler jika dan hanya jika tepat dua simpulnya memiliki derajat ganjil.

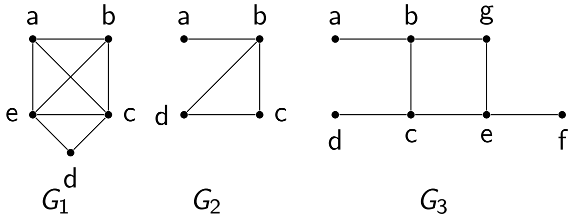
Sirkuit dan Lintasan Hamilton

Definisi

Suatu lintasan sederhana dalam graf G yang melewati semua simpul tepat satu kali disebut lintasan Hamilton, dan sirkuit sederhana yang melewati semua simpul tepat satu kali disebut sirkuit Hamilton.

Lintasan sederhana $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ dalam graf $G = (V, E)$ adalah sebuah lintasan Hamilton jika $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ dan $x_i \neq x_j$ untuk $0 \leq i < j \leq n$, dan sirkuit sederhana $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (dengan $n > 0$) adalah sirkuit Hamilton jika $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ adalah lintasan Hamilton.

Sirkuit dan Lintasan Hamilton



G_1 memiliki sirkuit Hamilton, misalnya a, b, c, d, e, a, G_2 tidak memiliki sirkuit Hamilton, tetapi memiliki lintasan Hamilton, misalnya a, b, c, d, b, G_3 tidak memiliki sirkuit Hamilton maupun lintasan Hamilton.

Sirkuit dan Lintasan Hamilton

Teorema

Teorema Dirac: Jika G adalah graf sederhana dengan n simpul, dengan $n \geq 3$ dan derajat setiap simpul di G setidaknya $n/2$, maka G mempunyai sirkuit Hamilton

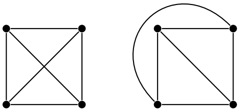
Teorema

Teorema Ore: Jika G adalah graf sederhana dengan n simpul, dengan $n \geq 3$ dan $deg(u) + deg(v) \geq n$ untuk setiap pasangan simpul yang bertetangga u dan v dalam G, maka G memiliki sirkuit Hamilton

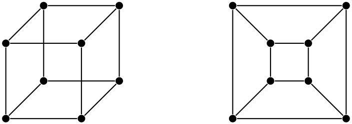
Graf Planar

Definisi

Sebuah graf dikatakan planar jika bisa digambarkan dalam bidang datar tanpa ada sisi yang bersilangan. Penggambaran suatu graf seperti ini disebut representasi planar dari suatu graf.



K_4



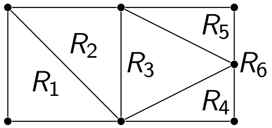
Q_4

Rumus Euler

Representasi planar suatu graf akan membagi suatu bidang menjadi beberapa daerah, termasuk daerah tak berbatas.

Teorema

Rumus Euler : Diketahui G adalah graf sederhana planar dengan jumlah sisi e dan jumlah titik v, dan r banyaknya daerah dari representasi planar G.
Maka $r = e - v + 2$



Rumus Euler

Corrolary

Jika G adalah graf terhubung sederhana planar dengan sisi e dan simpul v dimana $v \geq 3$ *maka* $e \leq 3v - 6$

Corrolary

Jika G adalah graf terhubung sederhana planar, maka G memiliki simpul dengan derajat tidak lebih dari lima.

Corrolary

Jika G graf sederhana terhubung planar mempunyai sisi e dan simpul v, dengan $v \geq 3$*, tidak ada sirkuit dengan panjang 3, maka* $e \leq 2v - 4$.

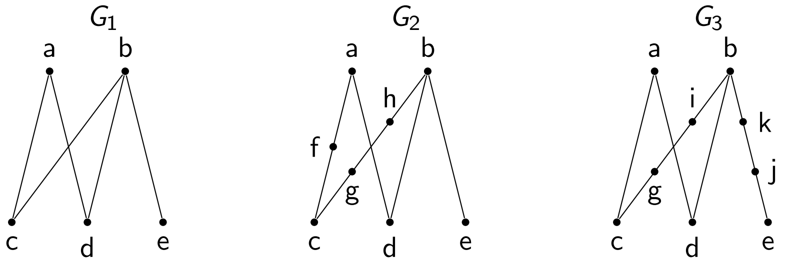
Teorema Kuratowski

Jika G suatu graf planar, maka graf bagian bisa didapatkan darinya dengan menghilangkan sisi $\{u, v\}$ dan menambah simpul baru w dan sisi-sisi $\{u, w\}$ dan $\{w, v\}$, operasi ini disebut pembagian elementer. Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ disebut **homeomorfis** jika bisa didapatkan dari graf yang sama dengan pembagian elementer berurutan.

Teorema

Suatu graf nonplanar jika dan hanya jika ada subgraf yang homeomorfis dengan $K_{3,3}$ atau K_5

Graf Homeomorfis



Graf G_1, G_2 dan G_3 adalah graf homeomorfis

Pewarnaan Graf

Definisi

Pewarnaan graf sederhana adalah pemberian sebuah warna pada setiap simpul dalam graf sehingga tidak ada dua simpul berdekatan yang berwarna sama.

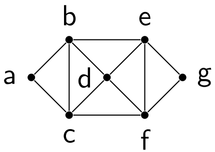
Definisi

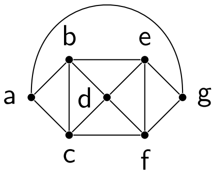
Nilai kromatik dari suatu graf adalah nilai minimal dari warna yang diperlukan untuk mewarnai graf. Nilai kromatik suatu graf dinyatakan dengan $\chi(G)$. (χ adalah huruf latin chi)

Teorema

Nilai kromatik suatu graf planar tidak lebih dari empat.

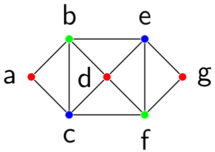
Pewarnaan Graf

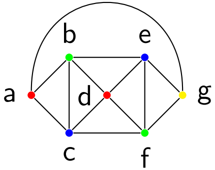




Berapa nilai kromatik graf di atas?

Pewarnaan Graf

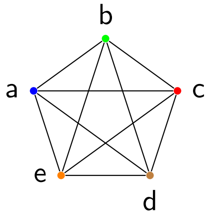




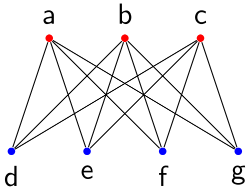
Beberapa nilai kromatik graf sederhana

Pewarnaan Graf K_n dan $K_{m,n}$

Berapa nilai kromatik graf lengkap K_n dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$?

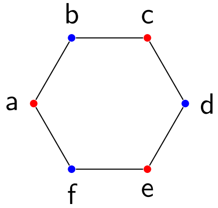


Pewarnaan graf lengkap K_5

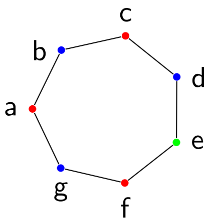


Pewarnaan graf bipartit lengkap $K_{3,4}$

Pewarnaan Graf C_n



Pewarnaan graf lingkaran C_6



Pewarnaan graf lingkaran C_7

$\chi(C_n) = 2$ jika n genap dengan $n \geq 4$ dan $\chi(C_n) = 3$ jika n ganjil dengan $n \geq 3$.

Penerapan pewarnaan graf

- Penjadwalan
- Pengaturan frekuensi radio (mis. pada jaringan seluler)
- Penggunaan register indeks pada loop yang dioptimasi