Álgebra Linear 1 - 08.013-6 Turma C
Lista 1 - Sistemas Lineares
Segundo Semestre de 2017

1. Linha reduza à forma escada as seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

2. Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

$$\text{a)} \begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+y+z-w=4 \\ x+y-z+w=-4 \\ x-y+z+w=2 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} (1-i)x-iy=0 \\ 2x+(1-i)y=0 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ x-y+z=3 \\ x-y-3z=-3 \\ 3x+3y-5z=0 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \qquad \text{e)} \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases} \qquad \text{f)} \begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

3. O método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema por linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição 2) dada em aula, que passa a ser: $2'$) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições 1), 3) e 4) são idênticas. Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição. Resolva pelo método de Gauss os ítens a), b), c), d), e) e f) do exercício 2.

4. Se

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

determine todas as soluções de $AX = 2X$ e todas as soluções de $AX = 3X$. (o símbolo cX indica a matriz cujos elementos são c vezes os elementos correspondentes de X)

5. Demonstre que as duas matrizes seguintes NÃO são linha-equivalentes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Descreva explicitamente todas as 2×2 matrizes linha-reduzidas à forma escada.

7. Suponha que R e R' sejam 2×3 matrizes linha-reduzidas à forma escada e que os sistemas $RX = 0$ e $R'X = 0$ admitam as mesmas soluções. Demonstre que $R = R'$.

8. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

determine uma matriz R linha-reduzida à forma escada que seja linha-equivalente a A e uma 3×3 matriz inversível P tal que $R = PA$.

9. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo

$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad + kz = 0 \end{cases}$ tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

10. Considere o sistema $\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$. Note que podemos escrevê-lo na forma matricial (*) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que a matriz $X_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para o sistema.

b) Resolva o sistema e verifique que toda "matriz solução" é da forma

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Verifique que para todo $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$ é uma solução do sistema homogêneo (**) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, associado ao sistema (*).

d) Conclua, dos ítens a), b) e c), que o conjunto-solução do sistema (*) é o conjunto-solução do sistema (**), somado a uma solução particular do sistema (*).

11. Dado o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$.

    a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo.(atribua valores para x, y, z, w).

    b) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.

    c) Resolva também o sistema homogêneo associado.

    d) Verifique que toda matriz-solução obtida em b) é a soma de uma matriz-solução encontrada em c) com a solução particular que você encontrou em a).

12. Altamente motivado pelos exercícios 10 e 11, mostre que toda matriz-solução de um sistema linear $AX = B$ é a soma de uma solução do sistema homogêneo associado $AX = 0$ com uma solução particular de $AX = B$. (*sugestão: siga as etapas seguintes, usando somente propriedades de matrizes, i) Mostre que se X_0 é uma solução do sistema $AX = 0$ e X_1 é uma solução de $AX = B$, então $X_0 + X_1$ é solução de $AX = B$. ii) Se X_1 e X_2 são soluções de $AX = B$, então $X_1 - X_2$ é solução de $AX = 0$. iii) Use i) e ii) para chegar a conclusão desejada*).

13. Para cada uma das matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

    use operações elementares sobre linhas para descobrir se é inversível e, em caso afirmativo, determine a inversa.

14. Dada uma $n \times n$ matriz A, prove que os três ítens abaixo são equivalentes:

    a) A é inversível;

    b) A é linha equivalente a matriz identidade $I_{n\times n} = (\delta_{ij})$, sendo $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$;

    c) O sistema homogêneo $AX = 0$ admite uma única solução.

15. Mostre que, se A é uma $m \times n$ matriz, B é uma $n \times m$ matriz e $n < m$, então AB NÃO é inversível. Dê exemplos para mostrar que o resultado não é válido se $n \geq m$.

16. Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) de cada alimento, determinou-se que:

    a) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

    b) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidade de vitamina C, 1 unidades de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

    c) O alimento III tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B, 5 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

d) O alimento IV tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 13 unidades de vitamina E.

e) O alimento V tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 9 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, II, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?