Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli

Quinta Lista de Exercícios – Funções

1) Seja W = {a, b, c, d}. Determine se cada conjunto de pares ordenados define uma função de W em W.
a) {(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)}
R.: Não, c está repetido no domínio.

b) {(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)}
R.: Não, b não é domínio e d está repetido.

c) {(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)}
R.: Sim, é função.

d) {(a, a), (b, a), (a, b), (c, d)}
R.: Não, d não é domínio e a está repetido.

2) Para cada uma das relações seguintes, responda:
- É uma função? Se não for, explique por que. Se for, responda as questões seguintes;
- Quais são seus domínios e imagem?
- A função é injetora (um-para-um)? Se não for, explique por que.

Este exercício pede para dizer se as relações dadas são funções. Como toda função é também uma relação, é necessário verificar se a relação dada satisfaz a propriedade de consistência para afirmar que é função. A propriedade de consistência diz que toda vez que um elemento é fornecido a uma função obtem-se o mesmo resultado, ou seja, segundo essa propriedade não há 2 pares ordenados com primeiros elementos iguais. A outra restrição, necessária para se dizer que uma relação é uma função, não será testada neste exercício já que não está definido previamente quais são o domínio e o contradomínio da função. É dado apenas o conjunto de pares e, a partir deles, encontra-se o domínio e a imagem da função.

a) {(1, 2), (3, 4)}
R.: É uma função, pois não existe mais que um par com o primeiro elemento do par Igual e o segundo diferente.

dom f = {1,3} Conjunto dos primeiros elementos do par
im f = {2,4} conjunto dos segundos elementos do par

É uma função injetora, pois cada elemento da imagem está associado a apenas um elemento do domínio.

b) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y = 2x\}$
R.: Esta relação é formada por todos os pares de número inteiros da forma (x,y) tal que y= 2x. Não é difícil concluir que para cada entrada x, a saída y é única, ou seja, y=2x. Logo, essa relação é também uma função com *dom f* = $\mathbb{Z}$ e *im f* = conjunto dos números inteiros pares. A função é injetora.

c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x+y = 0\}$
R.: É uma função. Os números são inteiros, logo, os pares (5,-5), (1,-1), (-4,4), ...pertencem a relação.

Para dizer se é função, é necessário verificar se tem na relação pares com o primeiro elemento igual e o segundo diferente.
Para o par (5,y) existe algum valor inteiro diferente de -5 tal que 5+y=0? Não.
De forma geral, Para o par (x,y) existe algum valor inteiro diferente de -x tal que 5+y=0? Não.
Logo a relação do exercício é função.
Dom = Im = $\mathbb{Z}$: todo inteiro pode ser somado a um outro inteiro para resultar zero.
É injetora: todo inteiro SÓ pode ser somado a um único inteiro de tal forma que a soma dá zero.

d) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x|y\}$
R.:
Não é função pois 3|9 e 3|6.
Não teria que definir domínio e imagem, pois não é função mas seria:
Dom = Im = $\mathbb{Z}$: Todo inteiro é divisor de um outro inteiro, todo inteiro tem um divisor.

e) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x|y \text{ e } y|x\}$
R.:
A relação está definida no exercício, pela definição sabe-se exatamente quais pares estão na relação, a resposta se refere a essa relação.
A relação "divide" sobre os naturais é anti-simétrica: Se x|y e y|x então x=y. Logo, o conjunto é dos pares de números (x,x) (iguais).
Assim, é função, Dom = Im = $\mathbb{N}$ e é injetora.

3) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \to B$. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
R.:
f1 = {(1,4), (2,4), (3,4)}
f2 = {(1,5), (2,5), (3,5)}
f3 = {(1,4), (2,4), (3,5)} é sobrejetora
f4 = {(1,4), (2,5), (3,5)} é sobrejetora
f5 = {(1,5), (2,4), (3,4)} é sobrejetora
f6 = {(1,5), (2,5), (3,4)} é sobrejetora
f7 = {(1,5), (2,4), (3,5)} é sobrejetora
f8 = {(1,4), (2,5), (3,4)} é sobrejetora

4) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \to B$. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
R.:
f1={(1,3), (2,3)}
f2={(1,4), (2,4)}
f3={(1,5), (2,5)}
f4={(1,3), (2,4)}
f5={(1,3), (2,5)}
f6={(1,4), (2,3)}
f7={(1,4), (2,5)}
f8={(1,5), (2,3)}
f9={(1,5), (2,4)}
Injetoras: f4, f5, f6, f7, f8, f9
Não há função sobrejetora.

5) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \rightarrow B$. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
R.:
f1={(1,4), (2,4)}
f2={(1,5), (2,5)}
f3={(1,4), (2,5)}
f4={(1,5), (2,4)}
Injetora e sobrejetora: f3 e f4

6) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. Seja a relação $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (?, ?)\}$. Determinar um par ordenado $(?,?)$ pertencente a $A \times B$, para completar a f, de modo que as proposições a seguir sejam verdadeiras:
a) A relação *f* não é uma função.
R.: (1,7)

b) A relação f é uma função de A para B mas não sobrejetora.
R.: (4,6)

c) A relação *f* é uma função de *A* para *B* e é sobrejetora.
R.: (4,7)

7) Para cada caso a seguir, determine se a função é injetora, sobrejetora ou ambos (bijetora). Justifique suas afirmações.
Veja que neste exercício, ao contrário do exercício 1, a função está definida como "de um conjunto para outro conjunto", ou seja, o domínio e contra-domínio estão previamente definidos.

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x$.
R.: Esta função é injetora porque cada elemento da imagem é a saída para um único valor de entrada. Porém, a imagem da função é formada apenas pelos inteiros pares e não por todos os inteiros, logo a função não é sobrejetora, ou seja, a imagem não é igual ao contradomínio $\mathbb{Z}$.

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 10 + x$.
R.: É injetora e sobrejetora, ou seja, é bijetora. Pois cada ocorrência de x tem uma imagem f(x) diferente, e todos os valores do conjunto que é contradomínio têm um representante no conjunto domínio. Isto ocorre porque todos os números inteiros ao serem somados a um valor positivo resultam em um valor diferente, e o resultado da soma entre um número positivo qualquer com todas as ocorrências de inteiros tem como resultado todo o conjunto inteiro.

c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 10 + x$.
R.: É injetora, pois todo x possui uma imagem f(x) diferente. Isto ocorre porque como as diversas ocorrências de x no conjunto dos naturais têm valor diferente, ao serem somadas à um número natural resultaram em números diferentes.
Esta função não é sobrejetora, pois o intervalo compreendido entre 0 e 9, não faz parte da imagem do conjunto domínio em questão.

8) Sejam A e B conjuntos finitos e $f: A \rightarrow B$. Verifique que duas quaisquer das afirmações seguintes acarretam a terceira:

a) f é injetora.
b) f é sobrejetora.
c) $|A| = |B|$.

R.:
Para resolver esta questão temos que provar o seguinte:

Parte1. SE a E b ENTAO c
Parte2. SE b E c ENTAO a
Parte3. SE a E c ENTAO b

Ou seja,

Parte1. Se uma função é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, então |A| = |B| e
Parte2. Se uma função é injetora e |A| = |B|, então ela também será sobrejetora e
Parte3. Se uma função é sobrejetora e |A| = |B|, então ela também será injetora.

Parte 1 - SE a E b ENTAO c
Se a função é injetora, então eu sei que cada elemento do domínio terá uma imagem distinta (f(a)=f(b) somente quando a=b). Além disso, se ela é sobrejetora, então todos os elementos da imagem terão um correspondente no domínio. A partir disso podemos concluir que |dom f| = |img f|.

Parte 2 - SE b E c ENTAO a
Se a função é injetora, então eu sei que cada elemento do domínio terá uma imagem distinta (f(a)=f(b) somente quando a=b). Além disso, se |A| = |B|, então nesta função cada elemento de a está relacionado a exatamente um elemento de B, não havendo nenhum elemento de B que não seja imagem de A. Logo, é sobrejetora.

Parte 3 - SE a E c ENTAO b
Se a função é sobrejetora, então CADA elemento de B é imagem de algum elemento de A. Além disso, se |A| = |B|, podemos concluir que a função é obrigatoriamente injetora, pois só assim garantiriamos a consistência.

9) Dê exemplo de um conjunto *A* e uma função $f: A \rightarrow A$ onde *f* é sobrejetora, mas não é injetora. Dê um exemplo em que f é injetora, mas não é sobrejetora.
R.: Impossível, neste contexto em que o domínio e o contradomínio são os mesmos, se a função é sobrejetora significa que todos os elementos de A contradomínio são imagem dos elementos de A domínio, mas para isso, cada elemento de A domínio tem que estar associado a um elemento de A contradomínio diferente (são o mesmo conjunto e, portanto |A| = |A|). Assim, uma função com essas características, se for sobrejetora tem que ser injetora e vice-versa, se for injetora, tem que ser sobrejetora.

10) Para cada um dos pares de funções a seguir, faça:
- Determine qual das duas funções $g \circ f$ ou $f \circ g$ está definida
- Se uma ou ambas forem definidas, ache as funções resultantes.
- Se ambas forem definidas, determine se $g \circ f = f \circ g$ ou não.

a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2,1), (3, 1), (4,1)\}$.
R.: Tanto $f^o g$ quanto $g^o f$ estão definidas e são dadas por:
$f^o g=\{(2,2),(3,2),(4,2)\}$
$g^o f=\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$
Logo, $f^o g$ é diferente de $g^o f$.

b) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2,1), (3, 2), (4,3)\}$.

R.: Tanto $f^o g$ quanto $g^o f$ estão definidas e são dadas por:

$f^o g=\{(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$g^o f=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Logo, $f^o g$ é diferente de $g^o f$ pois não possuem o mesmo domínio.

c) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(1, 2), (2,0), (3, 5), (4,3)\}$.

R.: Neste caso $g^o f$ está definida porém $f^o g$ não está, pois não existe $f^o g(2)$, uma vez que $g(2)=0$ e o zero não está no domínio da f. No entanto $g^o f=\{(1,0),(2,5),(3,3)\}$

d) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ e $g = \{(1, 1), (2,1), (3, 4), (4,4)\}$.

R.: Tanto $f^o g$ quanto $g^o f$ estão definidas e são dadas por:

$f^o g=\{(1,4),(2,4),(3,1),(4,1)\}$

$g^o f=\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1)\}$

Logo $f^o g$ é diferente de $g^o f$ pois $f^o g(3)$ é $g^o f(3)$

11) Avalie:

a) $\lfloor 13{,}2 \rfloor$, $\lfloor -0{,}17 \rfloor$, $\lfloor 34 \rfloor$;

b) $\lceil 13{,}2 \rceil$, $\lceil -0{,}17 \rceil$, $\lceil 34 \rceil$

R.:

A função $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que não excede x, logo, as respostas são:

$\lfloor 13{,}2 \rfloor = 13$

$\lfloor -0{,}17 \rfloor = -1$

$\lfloor 34 \rfloor = 34$

A função $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que não é menor do que x, logo,

$\lceil 13{,}2 \rceil = 14$

$\lceil -0{,}17 \rceil = 0$

$\lceil 34 \rceil = 34$

12) Prove que $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$.

R.: Seja $k \leq x < k+1$ onde k é um inteiro. Então $\lfloor x \rfloor = k$. Além disso, $-k \geq -x > -k-1$, logo $\lceil -x \rceil = -k$ e $-\lceil -x \rceil = k$.

13) Calcule os seguintes valores:

a. 31 mod 11
b. 16 mod 8
c. 22 mod 6
d. -7 mod 3

R.:

a. 9
b. 0
c. 4
d. 2

14) Defina f: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ por $f(x) = x + 1$. Seja g: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dada por $g(x) = 3x$. Calcule as seguintes expressões:

a. $(g \circ f)(5)$
b. $(f \circ g)(5)$
c. $(g \circ f)(x)$
d. $(f \circ g)(x)$
e. $(f \circ f)(x)$

f. $(g \circ g)(x)$

R.:

a. 18

b. 16

c. $3x + 3$

d. $3x + 1$

e. $x + 2$

f. $9x$

15) Para cada uma das bijeções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir, encontre f^{-1}:

a. $f(x) = 2x$

b. $f(x) = x^3$

c. $f(x) = (x+4)/3$

R.:

a. $f^{-1}(x) = x/2$

b. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

c. $f^{-1}(x) = 3x - 4$

16) Sejam S = {1, 2, 3, 4}, T = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e U = {6, 7, 8, 9, 10}. Sejam também, f = {(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 6)} uma função de S em T e g = {(1, 7), (2, 6), (3, 9), (4, 7), (5, 8), (6, 9)} uma função de T em U. Escreva os pares ordenados da função $g \circ f$.

R.: $f: S \rightarrow T$ e $g: T \rightarrow U$, assim, os pares ordenados da função $g \circ f$ terão primeiro elemento em S e segundo elemento em U: $g \circ f$ = {(1, 6), (2, 7), (3, 9), (4, 9)}

17) Sejam A = {*x*, *y*} e A* o conjunto de todas as cadeias finitas formadas com símbolos pertencentes a A. Defina uma função f: A* → $\mathbb{Z}$ da seguinte maneira: para s em A*, $f(s)$ = o comprimento de s. f é injetora? Prove que sim ou que não. f é sobrejetora? Prove que sim ou que não.

R.: f não é injetora nem sobrejetora. f(xxy) = f(yyy) = 3, logo f não é injetora. Para qualquer cadeia s, $f(s) \geq 0$; não existe cadeia em A* cuja imagem seja um inteiro negativo, de modo que f não é sobrejetora.

18) Se $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $f(x) = 3x$, encontre f(A) para

a. A = {1, 3, 5}

b. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 2y)\}$

R.:

a. f(A) = {3, 9, 15}

b. $f(A) = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 6y)\}$