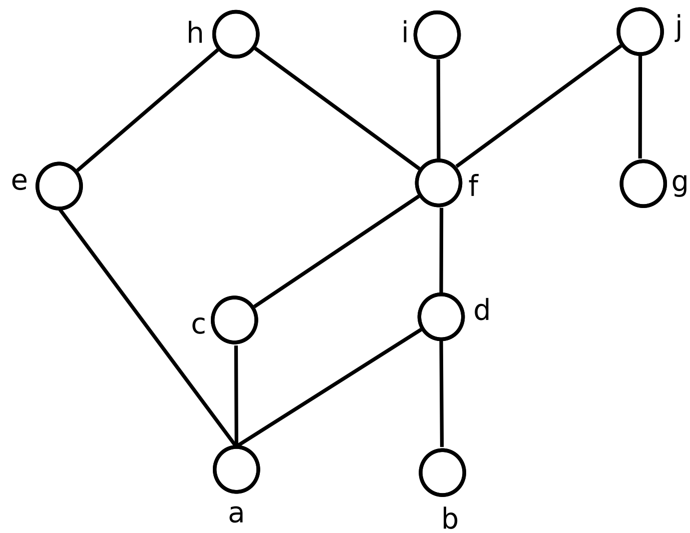
Conjuntos Parcialmente Ordenados

1. Para cada par de elementos x, y relacionados a seguir, determine se x<y, y<x ou se x e y são não comparáveis, no conjunto PO ilustrado na figura dada.



   (a) a, b.
   Não comparavéis

   (b) a, c.
   a < c.

   (c) c, g.
   Não comparavéis.

   (d) b, h.
   b < h.

   (e) c, i.
   c < i.

   (f) h, d.
   d < h.

2. Para o conjunto PO do exercício anterior, determine:

   (a) Uma cadeia de tamanho máximo.
   Uma cadeia possível é: {b, d, f, i}.

   (b) Uma cadeia de tamanho mínimo.
   Uma cadeia possível é: {a}.

(c) Uma cadeia contendo dois elementos e que não pode ser estendida para uma cadeia maior.
{g,j}.

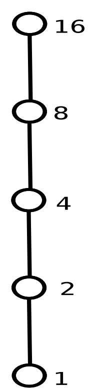
(d) Uma anti-cadeia de tamanho máximo.
{e, c, d, g}.

(e) Uma anti-cadeia de tamanho mínimo.
{a, b}.

(f) A largura do conjunto.
A largura do conjunto é denotada pela maior cadeia, P = 4.

(g) A altura do conjunto.
A altura do conjunto é denotada pela maior anti-cadeia, P = 4.

3. Denotando por P_n o conjunto de todos os divisores positivos do inteiro positivo n, ordenados por divisibilidade, trace o diagrama de Hasse de P_{16}.
Considerando-se a ordem parcial de "a divide b", em que b é o inteiro positivo 16 e a todos os inteiros positivos que dividem 16 temos:
R = {(1,1), (1,2), (1,4), (1,8), (1,16), (2,2), (2,4), (2,8), (2,16), (4,4), (4,8), (4,16), (8,8), (8,16), (16,16)}



4. Para o conjunto do exercício anterior, determine uma cadeia máxima, uma anti-cadeia máxima, a altura e a largura do conjunto PO.
O conjunto do exercício anterior é um conjunto totalmente ordenado ou linear, como visto no diagrama de Hasse. Sendo assim, se trata de um conjunto no qual não existem elementos não comparáveis. Nesse caso:
Cadeia máxima: {1, 2, 4, 8, 16}
Anti-cadeia máxima: Não tem
Altura: P = 5
Largura: P = 0

5. Seja P o conjunto PO do exercício 1. Determine os elementos (se houver) maximal, máximo, minimal e mínimo.
Máximo: Não tem
Maximal: h, i, j
Mínimo: Não tem
Minimal: a, b, g

6. Assinale como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, justificando.

   (a) Sejam x e y elementos de um conjunto PO que pertencem a uma mesma cadeia. Então exatamente um dos casos seguintes é verdadeiro: x<y, x=y ou x>y.
   Verdadeiro, pois ambos os elementos pertencem a mesma cadeia e podem ser comparados. Sendo assim $x\ R\ y$, ou x é predecessor de y (x $<$ y), ou x é sucessor de y (x $>$ y) ou x é igual a y.

   (b) Sejam C e D cadeias em um conjunto PO, Então, C $\cup$ D também é uma cadeia.
   Verdadeiro, vamos pergar como exemplo o conjunto PO do exercício 1, sendo C = {a,e,h} e D = {b,d,f,i}, a união iria gerar um novo conjunto X = {a,e,h,b,d,f,i} contendo duas cadeias.

   (c) Sejam C e D cadeias em um conjunto PO, Então, C $\cap$ D também é uma cadeia.
   Falso, vamos pergar o mesmo exemplo do conjunto PO do exercício 1, sendo C = {a,e,h} e D = {b,d,f,i}, a interseção iria gerar um novo conjunto X = {} (vazio), ou seja, uma anti cadeia.

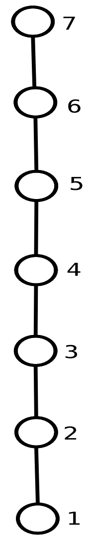
   (d) Dois pontos em um diagrama de Hasse (representando dois elementos de um conjunto PO) nunca podem ser unidos por um segmento horizontal.
   Verdadeiro.

   (e) Seja A um conjunto de elementos em um conjunto PO. Se A é uma anti-cadeia, então dois elementos quaisquer de A nunca são ligados por segmentos de reta no diagrama de Hasse.
   Verdadeiro, se diz que esses dois elementos são não comparáveis.

7. Diga se a relação "é-comparável" em um conjunto PO tem alguma das propriedades: reflexiva, anti-reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva. Justifique sua resposta.
   A proprieda reflexiva e transitiva é sempre comparável, pois todo elemento é comparável a ele mesmo e uma vez que $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$ seja válida $x\ R\ z$ também será e isso indica que x, y, z pertence a mesma cadeia.

8. Construa um conjunto PO e o respectivo diagrama de Hasse, com 7 elementos no conjunto fundamental, que tenha elemento mínimo e elemento máximo.
   Dado o conjunto fundamental A={1,2,3,4,5,6,7} e a relação $\leq$ o conjunto PO seria:

   R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,4), (4,5), (4,6), (4,7), (5,5), (5,6), (5,7), (6,6), (6,7), (7,7)}
   E o Diagrama de Hasse seria:

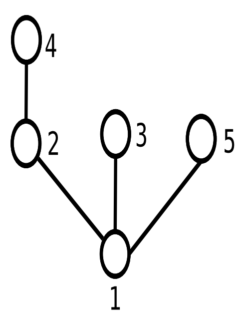


Em que o elemento mínimo seria = 1 e o elemento máximo seria = 7.

9. Prove que “refina” é uma relação de ordem parcial no conjunto de todas as partições de um conjunto A.
Não cai na prova.

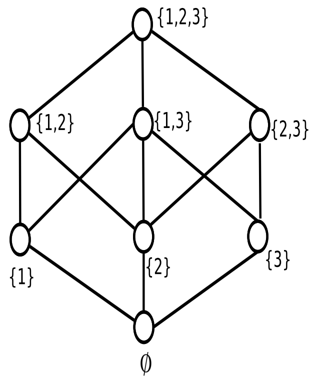
10. Para cada um dos seguintes conjuntos PO, determine os elementos máximo, maximal, mínimo e minimal:

    (a) Os inteiros {1, 2, 3, 4, 5} ordenados por divisibilidade.



Máximo: Não tem
Maximal: 3, 4, 5
Mínimo: 1
Minimal: 1

    (b) O conjunto de todos os subconjuntos de {1, 2, 3} ordenados pela relação “é-umsubconjunto-de”.



Máximo = Maximal = 1,2,3
Mínimo = Minimal = ∅

11. Prove ou refute as afirmações:

    (a) Se um conjunto PO tem um elemento máximo, este deve ser único.
    Verdadeiro.

    (b) É possível um conjunto PO ter um elemento que é, simultaneamente, máximo e mínimo.
    Sim, pois para um conjunto ser PO ele deve ser reflexivo, antisimétrico e transitivo. Sendo assim, um conjunto PO do tipo R = {(1,1)} é reflexivo, antisimétrico e transitivo e o conjunto fundamental possui apenas 1 elemento.

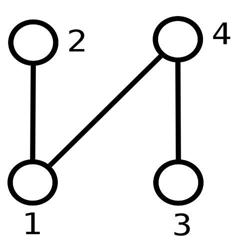
    (c) É possível um conjunto PO ter um elemento que é, simultaneamente, maximal e minimal, mas não é nem máximo nem mínimo.
    Não.

    (d) Se x é um elemento minimal e y é um elemento maximal em um conjunto PO, então x $\leq$ y.
    Verdadeiro se ambos pertencerem a mesma cadeia, porém se os elementos forem não comparáveis não é possível fazer essa afirmação.

12. Seja P o conjunto PO do exercício 1. Diga quais das ordens lineares a seguir são extensões lineares de P. Para as que não forem, justifique:
    Não cai na prova.

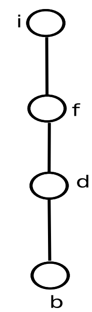
    (a) a<b<c<d<e<f<g<h<i<j.
    (b) b<a<e<g<d<c<f<j<i<h.
    (c) a<d<e<g<i.
    (d) a<b<c<e<f<h<i<j<h<g.

13. Determine as extensões lineares do conjunto PO a seguir:
    Não cai na prova.



14. Determine 5 extensões lineares do conjunto PO do exercício 1, diferentes daquelas do exercício 12. Diga quais elementos podem ser elementos máximos e mínimos de extensões lineares desse conjunto.
Não cai na prova.

15. Seja P=(X, $\leq$) o conjunto PO do exercício 1. Encontre um conjunto PO Q=(A, $\leq$) com A $\subset$ X que tenha elementos máximo e mínimo. Qual a altura e qual a largura do conjunto encontrado?
Uma possível resposta seria :



Em que, i seria o elemento máximo e b o elemento mínimo. Nesse caso a altura seria P = 4 e a largura P = 0.

The End.