Matemática Discreta – Turma B – 2019

Teoria dos Conjuntos

1) Seja o conjunto universo $U=\{n\in N: 0\leq n\leq 9\}$ e os conjuntos a seguir:

$A=\{1,2,3,4\}$
$B=\{x\in R:(x-1)(x-3)^2=0\}$
$C=\{n\in N: n \ \ mod \ \ 2=1\}$

Calcule:

a) $A\cup B$
b) $A\cap(B\cup C)$
c) $C-A$
d) $|A|$, $|B|$ e $|C|$
e) $\overline{A}\cup C$
f) $(\overline{A}\cup B)$ Δ $(\overline{B}\cup C)$

Quando possível, represente os diagramas de Venn em cada caso.

2) Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Sob que condições temos:

a) $(A\cup B)-B=A$
b) $(A\cup B)-B\neq A$

3) Sabendo que A Δ B denota a diferença simétrica entre A e B, se A Δ B = A, o que podemos dizer sobre os conjuntos A e B?

4) Dados conjuntos A_0, A_1, A_2, …, A_n que estão contidos em um conjunto universo U e um inteiro positivo n definem-se:

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i=\{x\in U: x\in A_i \ \ pelo \ \ menos \ \ para \ \ um \ \ i=0,1,2,\ldots,n\}$$

$$\cap_{i=0}^{n} A_i=\{x\in U: x\in A_i \, para \ \ todo \ \ i=0,1,2,\ldots,n\}$$

Para todo i inteiro positivo, seja $A_i=\left\{x\in R: -\frac{1}{i}<x<\frac{1}{i}\right\}$. Responda:

a) Encontre $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$
b) Encontre $\cap_{i=1}^{3} A_i$
c) Encontre $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$

5) Dados 2 conjuntos finitos A e B, prove que $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

6) Dentre um total de 4689 estudantes 2112 cursaram pelo menos 60 créditos e 2678 cursaram no máximo 60 créditos. Quantos deles cursaram exatamente 60 créditos?

7) Utilizando princípios da teoria dos conjuntos, desenvolva uma fórmula para calcular o número de elementos da união de 3 conjuntos quaisquer A, B e C. Explique seu raciocínio.

8) Um total de 1232 estudantes cursaram espanhol, 879 cursaram francês e 114 cursaram russo. Além disso, 103 cursaram espanhol e francês, 23 cursaram espanhol e russo, e 14 cursaram francês e russo. Se 2092 cursaram pelo menos um dos 3 cursos, quantos cursaram os 3 cursos?

9) Utilizando princípios da teoria dos conjuntos, desenvolva uma fórmula para calcular o número de elementos da união de 4 conjuntos quaisquer A, B, C e D. Explique seu raciocínio.

10) Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto Z dos números inteiros?

a) $\{R_0, R_1, R_2\}$ onde para i = 0, 1, 2, R_i é o conjunto dos inteiros que tem resto i na divisão por 3.
b) $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, onde P_k é o conjunto de todos os inteiros cujo quadrado termina com o algarismo k. (Por exemplo, $P_6 = \{4, -4, 6, -6, 14, \ldots\}$).
c) $\{0\} \cup P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots$, onde P_k é o conjunto de todos os inteiros cujo valor absoluto está entre 2^k (inclusive) e 2^{k+1} (exclusive)

11) Seja A = {a,b,c}, B = {x,y} e C = {0,1}. Encontre:

a) A x B x C
b) C x B x A
c) C x A x B
d) B^3 = B x B x B

12) Podemos concluir que A = B se A e B são dois conjuntos com o mesmo conjunto potência? Explique.

13) Sobre o produto cartesiano, responda:

a) Quanto vale |A x B| se |A| = m e |B| = n?
b) Quanto vale |A x B x C| se |A| = m , |B| = n e |C| = p?
c) Quanto vale $|A^n|$ se |A| = m e n é um inteiro positivo?

14) Sobre as leis de De Morgan, responda:

a) Mostre a lei de De Morgan para n = 2, ou seja, que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.
b) Usando indução matemática, prove a generalização dessa lei, ou seja, $\overline{\cap_{i=1}^{n} A_i} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

15) Prove as seguintes identidades utilizando as propriedades matemáticas vistas em aula:

a) $A - (A \cap B) = A - B$
b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$
d) $A \;\Delta\; B = (A \cup B) - (A \cap B)$