Matemática Discreta – Turma B – 2019

<u>Funções</u>

1) Sejam A = {1,2,3,4,5,6} e B = {1,2,3,4,5}. O conjunto de pares ordenados a seguir define uma função de A em B? Justifique.

f = {(1,3), (2,1), (2,4), (3,2), (4,4), (5,5)}

2) Sejam A = {1,2,3} e B = {4,5}. Quantas funções f: A → B existem? No caso de |A| = m e |B| = n, qual é o número de funções de A em B?

3) Seja X = {0,1,2} e as funções f: X→ X e g: X→ X a seguir:

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \ mod \ 3$$
$$g(x) = (x+2)^2 \ mod \ 3$$

Pergunta-se: f(x) = g(x) ?

4) Encontre os valores:

a) $\lfloor 1.1 \rfloor$ b) $\lceil 1.1 \rceil$ c) $\lfloor -0.9 \rfloor$ d) $\lceil 0.9 \rceil$ e) $\lceil 2.99 \rceil$ f) $\lceil -2.99 \rceil$

g) $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rfloor$ h) $\left\lceil \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \frac{1}{2} \right\rceil$ i) $\left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil$ j) $\left\lfloor \frac{7}{8} \right\rfloor$ k) $\left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil$

l) $\left\lfloor -\frac{7}{8} \right\rfloor$ m) $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil \right\rfloor$ n) $\left\lfloor \frac{1}{2} \times \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \right\rfloor$

5) Prove que para todo n inteiro $n = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

6) O que é uma função injetora?

7) Quais das funções a seguir definidas de X = {a,b,c,d} em X são injetoras? Justifique.

a) f = {(a,b), (b,a), (c,c), (d,d)}
b) g = {(a,b), (b,b), (c,d), (d,c)}
c) h = {(a,d), (b,b), (c,c), (d,d)}

8) Determine se cada uma das funções de Z em Z a seguir é injetora, justificando sua resposta.

a) f(n) = 5n + 7
b) g(n) = n^2 + 1
c) h(n) = n^3

9) O que é uma função sobrejetora?

10) Seja f: R→ R dada por f(x) = 2x + 5. Prove que f(x) é sobrejetora.

11) Sejam A = {1,2,3} e B = {4,5}. Escreva todas as funções f: A → B. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.

12) Sejam A = {1,2,3,4} e B = {5,6,7}. Seja f o conjunto de pares ordenados a seguir:

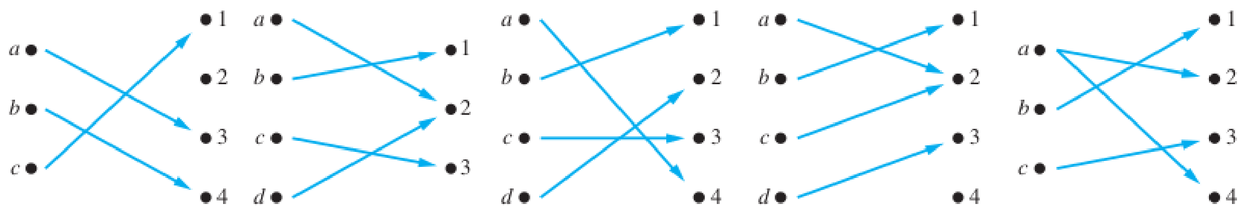
f = {(1,5), (2,5), (3,6), (?,?)}

Complete f de modo que:

a) f não seja uma função.
b) f seja função mas não seja sobrejetora.
c) f seja função e seja sobrejetora.

13) Sejam os conjuntos A e B e f: A → B. Prove que f^{-1} é a função inversa de B para A se e somente se f é injetora e sobrejetora.

14) Classifique cada uma das correspondências a seguir:



15) Elabore uma fórmula para contar o número de funções injetoras de A para B, sabendo que |A| = m <= |B| = n. Explique seu raciocínio. Se m = 9 e n = 5, quantas funções injetoras existem de A para B?

16) Desenvolva uma fórmula para contar quantas funções sobrejetoras existem de A para B, sabendo que |A| = m e |B| = n, com m >= n. Explique seu raciocínio. Se m = 5 e n = 3, quantas funções sobrejetoras existem de A para B?

17) Seja f: Z → Z dada por $f(x) = 2x^2 + 3$ e g: Z → Z dada por g(x) = 3x + 1.

a) Calcule $g\circ f$. Quanto vale $g\circ f(2)$?
b) Calcule $f\circ g$. Quanto vale $f\circ g(2)$?
c) A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa: Não existem funções f e g tais que $g\circ f=f\circ g$. Justifique sua resposta.

18) Sejam os conjuntos A, B, C e D e sejam f: A → B, g: B → C e h: C → D. Mostre que:

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

19) Suponha g: A → B e f: B → C.

a) Mostre que se ambas f e g são injetoras, então $f\circ g$ é injetora.
b) Mostre que se ambas f e g são sobrejetoras, então $f\circ g$ é sobrejetora.

20) Sejam conjuntos A e B e seja f: A → B. Prove que $f\circ I_A=I_B\circ f=f$, em que $I_A(a)=a,\forall a\in A$ e $I_B(b)=b,\forall b\in B$ são as funções identidades.

21) Sejam A e B conjuntos e seja f: A→ B bijetora. Mostre que $f \circ f^{-1} = I_B$ e $f^{-1} \circ f = I_A$.

22) Sejam f: R→ R e g: R→ R dadas por:

$$f(x) = 3x - 2$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 6$$

Encontre:

a) $f^{-1}(x)$
b) $g^{-1}(x)$
c) $(f \circ g)^{-1}(x)$
d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

23) Sejam f: A→ B e g: A→ B. Prove que $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

24) Seja $f^{(n)}$ a composição de ordem n de f consigo mesma, ou seja:

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n vezes}}$$

Prove ou refute, explicando seu raciocínio:

a) $(g \circ f)^{(2)} = g^{(2)} \circ f^{(2)}$
b) $(f^{-1})^{(n)} = (f^{(n)})^{-1}$

25) A melhor maneira de responder a essa questão é com o auxílio de um computador. Responda:

a) f: R→ R definida por $f(x) = 2.8x(1-x)$. Considere a sequência $f(0.5)$, $f^{(2)}(0.5)$, $f^{(3)}(0.5)$, $f^{(4)}(0.5)$, … Descreva o comportamento a longo prazo desses números.
b) f: R→ R definida por $f(x) = 3.1x(1-x)$. Considere a sequência $f(0.5)$, $f^{(2)}(0.5)$, $f^{(3)}(0.5)$, $f^{(4)}(0.5)$, … Descreva o comportamento a longo prazo desses números.
c) f: R→ R definida por $f(x) = 3.9x(1-x)$. Considere a sequência $f(0.5)$, $f^{(2)}(0.5)$, $f^{(3)}(0.5)$, $f^{(4)}(0.5)$, … Descreva o comportamento a longo prazo desses números.