Matemática Discreta – Turma B – 2019

<u>Princípio da Indução Finita</u>

1) Explique o princípio da indução matemática.

2) Prove que a indução matemática é válida (utilize o Princípio da Boa Ordenação).

3) Prove por indução que se n é um inteiro positivo, então $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4) Elabore uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros números ímpares positivos. Prove por indução que sua equação é válida para qualquer valor de n.

5) Prove por indução que $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

6) Use a indução matemática para provar que $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$.

7) Use a indução matemática para provar que a soma dos termos de uma progressão geométrica finita com $a_0=a$ e razão $r\neq 1$ é: $a+ar+ar^2+ar^3+...+ar^n=\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$, onde n é um inteiro não negativo.

8) Prove por indução que $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

9) Prove por indução que $1^2+3^2+5^2+7^2+...+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

10) Encontre uma fórmula para $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$. Prove ela vale para todo inteiro n > 0.

11) Prove por indução que $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{(n-1)\times n}=\frac{n-1}{n}$. Utilize como base n = 2.

12) Use a indução matemática para provar a desigualdade $n<2^n$ para todo inteiro positivo n.

13) Use a indução matemática para provar a desigualdade $2^n<n!$ para todo inteiro positivo $n\geq 4$.

14) Use a indução matemática para mostrar que $2^n>n^2$ para todo n maior ou igual a 5.

15) Os números harmônicos, para j = 1, 2, …, n são definidos por

$$H_j=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{j}$$

Temos por exemplo que $H_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$. Use a indução matemática para mostrar que:

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

ou seja, que essa soma é divergente.

16) Use indução matemática para provar que $(n^3 - n)\ mod\ \ 3 = 0$ para todo n inteiro positivo.

17) Use indução matemática para provar que $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ é divisível por 57.

18) Prove por indução que 3 divide $5^n + 2 \times 11^n$ para todo inteiro positivo n.

19) Prove por indução que $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$

20) Prove por indução a desigualdade de Bernoulli:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

para todo n inteiro se $h \geq 0$. Note que em termos práticos essa desigualdade afirma que o avanço de um capital a juros compostos é sempre maior que o avanço do capital a juros simples.

21) Prove por indução que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$.

22) Prove por indução que $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \ldots + n \times (n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

23) Suponha que A(k) denota $1+2+3+\ldots+k = \frac{(2n+1)^2}{8}$. Então, a demonstração a seguir prova que para um k arbitrário A(k) → A(k+1).

$$A(k+1) = 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(2k+1)^2}{8} + (k+1) = \frac{(2k+1)^2 + 8(k+1)}{8} =$$
$$= \frac{4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8}{8} = \frac{4k^2 + 8k + 4 + 4(k+1) + 1}{8} = \frac{4(k^2 + 2k + 1) + 4(k+1) + 1}{8} =$$
$$= \frac{4(k+1)^2 + 4(k+1) + 1}{8} = \frac{[2(k+1)]^2 + 2[2(k+1)] + 1^2}{8} = \frac{(2(k+1)+1)^2}{8}$$

Portanto, por indução, A(n) é verdadeiro para qualquer n inteiro.

Você concorda com essa afirmação?