Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli

Primeira Lista de Exercícios – Estratégias de Demonstração de Teoremas

1) Cada uma das afirmações seguintes pode ser formulada na forma "se-então". Reescreva cada uma das sentenças seguintes na forma "Se A, então B".

a) O produto de um inteiro ímpar e um inteiro par é par.
Se x é um inteiro ímpar e y é um inteiro par, então xy é um inteiro par.
b) O quadrado de um inteiro ímpar é ímpar.
Se x é um inteiro ímpar, então x^2 é um inteiro ímpar.
c) O quadrado de um número primo não é primo.
Se x é um número primo, então x^2 não é primo.
d) O produto de dois inteiros negativos é negativo. (Naturalmente, isso é falso.)
Se x e y são inteiros negativos, então xy é um inteiro negativo.

2) Prove que a soma de dois inteiros pares é par.
R. Transformando para a forma se-então, o problema pede que se prove: se x e y são inteiros pares, então $x + y$ é par.
Prova: Vamos mostrar que se x e y são inteiros pares, então $x + y$ é um inteiro par. Sejam x e y inteiros pares. Por definição de par, sabemos que x é divisível por 2, isto é, $2|x$. Analogamente, como y é par, $2|y$. Como $2|x$, sabemos que existe um inteiro a de modo que $x = 2a$. Do mesmo modo, existe um inteiro b de modo que $y = 2b$. Ao somar x e y temos que $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$. Portanto, existe um inteiro c (que é $a + b$) de modo que $x + y = 2c$. Logo, por definição de divisível, $x + y$ é divisível por 2 e, por definição de par, $x + y$ é par.

3) Prove que a soma de dois inteiros ímpares é par.
R. Transformando para a forma se-então, o problema pede que se prove: se x e y são inteiros ímpares, então $x + y$ é par.
Prova: Vamos mostrar que se x e y são inteiros ímpares, então $x + y$ é um inteiro par. Sejam x e y inteiros ímpares. Por definição de ímpar, existe um inteiro a de modo que $x = 2a + 1$. Do mesmo modo, existe um inteiro b de modo que $y = 2b + 1$. Ao somar x e y temos que $x + y = 2a + 1 + 2b + 1 = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$. Portanto, existe um inteiro c (que é $a + b + 1$) de modo que $x + y = 2c$. Logo, por definição de divisível, $x + y$ é divisível por 2 e, por definição de par, $x + y$ é par.

4) Prove que a soma de um inteiro ímpar e um inteiro par é ímpar.
R. Transformando para a forma se-então, o problema pede que se prove: se x é um inteiro ímpar e y é um inteiro par, então $x + y$ é ímpar.
Prova: Vamos mostrar que se x é um inteiro ímpar e y é um inteiro par, então $x + y$ é ímpar. Sejam x um inteiro ímpar e y um inteiro par. Por definição de ímpar, existe um inteiro a de modo que $x = 2a + 1$. Por definição de par, sabemos que y é divisível por 2, isto é, $2|y$ e, portanto, existe um inteiro b de modo que $y = 2b$. Ao somar x e y temos que $x + y = 2a + 1 + 2b = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$. Portanto, existe um inteiro c (que é $a + b$) de modo que $x + y = 2c + 1$. Logo, $x + y$ é ímpar.

5) Prove: Sejam a, b e c inteiros. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.
R. **Prova:** Vamos mostrar que se a, b e c são inteiros com $a|b$ e $b|c$, então $a|c$. Sejam a, b e c inteiros com $a|b$ e $b|c$. Com $a|b$, existe um inteiro x de modo que $b = ax$. Da mesma forma, existe um inteiro y de modo que $c = by$. Seja $z = xy$. Considerando as igualdades descritas anteriormente, temos que $az = axy = by = c$. Portanto, existe um inteiro z, de modo que $az = c$. Assim, $a|c$.

6) Prove: Seja x um número inteiro. Se $x > 1$, então $x^3 + 1$ é um composto.

R. **Prova:** Vamos mostrar que se x é um inteiro com $x > 1$, então $x^3 + 1$ é um composto. Seja x um inteiro com $x > 1$. Observe que $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Como x é um inteiro, tanto $x + 1$ quanto $x^2 - x + 1$ são inteiros. Portanto, pela definição de divisível, existe um inteiro c (que é $x + 1$), que divide a $(x^3 + 1)$: $(x + 1)|(x^3 + 1)$. Como $x > 1$, temos $x + 1 > 1 + 1 = 2 > 1$. Além disso, $x > 1$ significa que $x^2 > x$, e como $x > 1$, temos que $x^2 > 1$. Multiplicar ambos os lados da desigualdade por x novamente resulta em $x^3 > x$. Somar 1 a ambos os lados resulta em $x^3 + 1 > x + 1$. Com isso, $x + 1$ é um inteiro com $1 < x + 1 < x^3 + 1$. Como $x + 1$ é um divisor de $x^3 + 1$ e $1 < x + 1 < x^3 + 1$, concluímos que $x^3 + 1$ é um composto.

7) Verdadeiro ou falso: Todo inteiro positivo é primo ou composto. Explique sua resposta.

R. Falso. O inteiro positivo 1 não é primo, pois a primeira parte da definição de primo (“Um inteiro p é primo se $p > 1$ ...”) o exclui, nem composto, pois a definição de composto exige que o número tenha um divisor que seja maior do que 1 (“Um número positivo a é composto se existe um inteiro b de modo que $1 < b < a$ e $b|a$.”).

8) Prove que a soma de quaisquer três inteiros consecutivos é divisível por três.

R. **Prova:** Vamos mostrar que se a, $a + 1$ e $a + 2$ são três inteiros consecutivos, então sua soma é divisível por 3. Seja a, $a + 1$ e $a + 2$ três inteiros consecutivos. Sua soma $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3$. Observe que $3a + 3 = 3(a + 1)$. Como $a + 1$ é um inteiro, $3|(3a + 3)$, ou seja, existe um inteiro c (que é $a + 1$) de modo que $3(a + 1) = 3a + 3$. Desse modo, a soma de quaisquer três inteiros consecutivos é divisível por 3.

9) Prove que a soma de quaisquer dois inteiros consecutivos não é divisível por dois.

R. **Prova:** Sejam x e y inteiros consecutivos. Vamos mostrar por absurdo que a soma desses inteiros $(x+y)$ não é divisível por 2. Sejam x e y inteiros consecutivos. Se x e y são inteiros consecutivos, então tem-se que $y = x+1$. Somando-se x e y tem-se que $x+y = x+x+1 = 2x+1$. Vamos supor por absurdo que $x+y$ é divisível por 2, ou seja, que $2x+1$ é divisível por 2. Pela definição de divisível sabemos que $2x+1$ é divisível por 2 se existe um inteiro c tal que $2x+1 = 2c$. Como 2 é par, sabe-se que todo número par é divisível por 2, ou seja, existe um inteiro b tal que $2 = 2b$ o que implica que $2x+1 = 2bc$. Por conseguinte, deduz-se que existe um inteiro que é ímpar $(2x+1)$ e par $(2bc)$ ao mesmo tempo, uma contradição (um absurdo).
Portanto, $x+y$ não é divisível por 2.

10) Prove que o produto de dois inteiros ímpares é ímpar.

R. **Prova:** Vamos mostrar que, se x e y são dois inteiros ímpares, então o produto xy é um inteiro ímpar. Sejam x e y inteiros ímpares. Como x é ímpar e y é ímpar, pela definição de números ímpares temos que existe um inteiro a de modo que $x = 2a + 1$ e, de modo semelhante, que $y = 2b + 1$. Observe que $xy = (2a +1)(2b +1) = 2(2ab + a + b) + 1$. Por conseguinte, existe um inteiro c (que é $2ab + a + b$) de modo que $xy = 2c + 1$. Portanto, xy é ímpar.