

Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli

Quarta Lista de Exercícios – Relações

- 1) Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ e $C = \{3, 4\}$ ache $A \times B \times C$.
- 2) São dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Seja $R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$
 - a) Determine a matriz retangular da relação.
 - b) Desenhe os discos disjuntos de R .
 - c) Ache a relação inversa R^{-1} de R .
- 3) Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine se a relação é reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.
 - a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
 - b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
 - c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$
 - d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
 - e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 4) Suponha que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Represente esta relação como um conjunto de pares ordenados e verifique se R é reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva.
- 5) Determine R^{-1} para cada uma das seguintes relações:
 - a) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
 - b) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
 - c) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x-y = 1\}$
 - d) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x|y\}$
 - e) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy > 0\}$
- 6) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e seja R a relação em A definida por “ x divide y ”, escrita $x|y$.
 - a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.
 - b) Desenhe seu grafo orientado.
 - c) Ache a relação inversa R^{-1} de R . R^{-1} pode ser descrita por palavras?
- 7) Seja R a relação *tem o mesmo tamanho que* definida sobre todos os subconjuntos finitos de \mathbb{Z} ($A R B$ se e somente se $|A| = |B|$). Quais das cinco propriedades (reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, e transitiva) R possui? Demonstre suas respostas.
- 8) Quais dos conjuntos a seguir são relações de equivalência?
 - a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$
 - b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$
 - c) $|$ em \mathbb{Z}
 - d) \leq em \mathbb{Z}
 - e) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$
- 9) Para cada relação de equivalência ache a classe de equivalência pedida.
 - a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$. Ache $[1]$.
 - b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$. Ache $[4]$.
- 10) Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação de equivalência R sobre esse conjunto:

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.
Encontre as classes de equivalência dessa relação.

11) Dê exemplos de relações R em $A = \{1, 2, 3\}$ que têm a propriedade requerida.

- a) R é simétrica e antissimétrica.
- b) R não é nem simétrica nem antissimétrica.
- c) R é transitiva, mas $R \cup R^{-1}$ não é transitiva.

12) Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$

Ache a partição de A induzida por R , isto é, ache todas as classes de equivalência de R .

13) Considere o conjunto de palavras $W = \{\text{saúde, luva, sal, pato, peso, som}\}$. Ache W/R onde R é a relação de equivalência em W definida por

- a) “tem o mesmo número de letras que” ou
- b) “começa com a mesma letra que”.

14) Cada uma das frases seguintes define uma relação nos inteiros positivos \mathbb{N}^+ :

- a) x é maior que y
- b) xy é o quadrado de um inteiro
- c) $x + y = 10$
- d) $x + 4y = 10$

Determine quais relações são: i) reflexiva, ii) simétrica, iii) antissimétrica, iv) transitiva.

15) Seja $S = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$. Seja R a relação de equivalência em S definida por $x \equiv y \pmod{5}$, isto é, $x - y$ é divisível por 5. Ache a partição de S induzida por R , isto é, o conjunto quociente S/R .

16) Sejam R e S relações em um conjunto A . Assumindo que A tem pelo menos três elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contraexemplo no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

- a) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ é simétrica.
- b) Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.
- c) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ é reflexiva.
- d) Se R e S são reflexivas, então $R \cup S$ é reflexiva.
- e) Se R é antissimétrica então R^{-1} é antissimétrica.
- f) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

17) Desenhe o diagrama de Hasse para as seguintes ordens parciais:

- a) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$
- b) $A = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (c, d)\}$
- c) $A = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b\}\}$ e $B R C \Leftrightarrow B \subseteq C$

18) Para o exercício 17, encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimal, máximo e maximal.

19) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “ x divide y ” no conjunto $\{2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210\}$. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre um subconjunto totalmente ordenado com quatro elementos.

20) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “ x divide y ” no conjunto $\{3, 6, 9, 18, 54, 72, 108, 162\}$. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre os pares de elementos que não estão relacionados.

