**Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação**
**Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli**

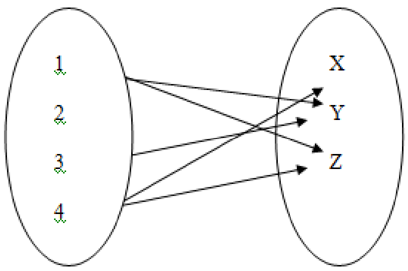
**Quarta Lista de Exercícios – Relações**

1) Dados A = {1, 2}, B = {x, y, z} e C = {3, 4} ache A × B × C.
R. {(1,x,3), (1,x,4), (1,y,3), (1,y,4), (1,z,3), (1,z,4), (2,x,3), (2,x,4), (2,y,3), (2,y,4), (2,z,3), (2,z,4)}

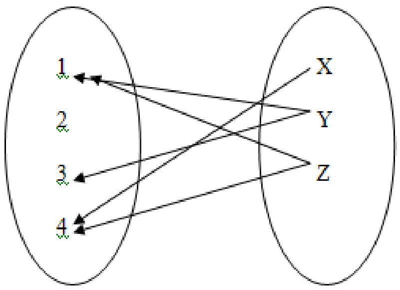
2) São dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {x, y, z}. Seja R = {(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)}
   a) Determine a matriz retangular da relação.
R.:

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 1 |

   b) Desenhe os discos disjuntos de R.
R.:




   c) Ache a relação inversa $R^{-1}$ de R.
R.:




3) Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, determine se a relação é reflexiva, anti-reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva.
   a) *R* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)} **É reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva**.
   Reflexiva => todo x está relacionado consigo mesmo.
   Simétrica => podemos afirmar que sempre que (x,y) pertence a R, então (x,y) também pertence, só que nesse caso, x=y em todos os pares.
   Anti-simétrica => também é verdade que sempre que (x,y) e (y,x) pertencem a R, x=y. Essa é uma relação simétrica e anti-simétrica ao mesmo tempo.

Transitiva => para todos os casos em que (x,y) e (y,z) pertencem a R, temos que (x,z) pertence a R, nesse caso com x=y=z. Exemplo: se x=y=z=1, vale (1R1 e 1R1) ⇒ 1R1.

b) $R$ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)} **É anti-reflexiva, não simétrica, anti-simétrica e não transitiva**.

Anti-reflexiva => nenhum dos elementos do conjunto está relacionado com ele mesmo.
Não simétrica => pois o par (1,2) está em R, mas o par (2,1) não está, por exemplo.
Anti-simétrica => pois não há nenhum caso em que (x,y) e (y,x) estejam em R.
Não transitiva => pois (1,2) e (2,3) estão em R, mas (1,3) não está.

c) $R$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)} **É não reflexiv, não anti-reflexiva, anti-simétrica, não simétrica e transitiva.**

Não reflexiva => pois os pares (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) não pertencem a relação.
Não anti-reflexiva => pois o par (1,1) pertence a relação.
Não simétrica => pois o par (1,2) está em R mas o par (2,1) não está.
Anti-simétrica => pois o único caso em que podemos afirmar que (x,y) e (y,x) estão em R é quando x=y=1.
Transitiva => pois, para todos os casos em que (x,y) e (y,z) pertencem a R, temos que (x,z) pertence a R, nesse caso com x=y=z.

d) $R$ = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)} **É não reflexiva, não anti-reflexiva, simétrica, não anti-simétrica e não transitiva.**

Não reflexiva e não anti-reflexiva => pela mesma justificativa do item anterior.
É simétrica => pois temos (1, 2) e (2, 1), (3, 4) e (4, 3) e (1,1).
Não anti-simétrica => pois (1,2) está em R e (2,1) está em R.
Não transitiva => pois os pares (2,1) e (1,2) estão em R mas o par (2,2) não está.

e) $R$ = {1, 2, 3, 4, 5} × {1, 2, 3, 4, 5} **É reflexiva, simétrica, não anti-simétrica e transitiva.**

Reflexiva => esta relação é composta por todos os pares do produto cartesiano do conjunto {1, 2, 3, 4, 5} por ele mesmo, logo é reflexiva. Os pares (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) estão na relação.
Simétrica => pois todos os pares possíveis estão em R, logo, sempre que (x,y) está em R, (y,x) também está.
Não anti-simétrica => pois para qualquer par (x,y) com x≠y que está em R, o par (y,x) também está.
Transitiva => pois todos os pares possíveis estão na relação.
Na verdade, sabe-se, pela definição de relação de equivalência que o produto cartesiano de um conjunto por si mesmo é uma relação de equivalência e, portanto, é reflexiva, simétrica e transitiva.

Para verificar propriedades de relações, nossa principal ferramenta são as definições dessas propriedades. Neste exercício estamos trabalhando com um conjunto finito: A={1, 2, 3, 4, 5}. Isso simplifica muito o trabalho de verificação de propriedades. Vamos então comentar cada uma das propriedades e verificar, para cada um dos itens do exercício, se ela se aplica ou não.

**Relações reflexivas:**

Uma relação R sobre o conjunto A é reflexiva se PARA TODO x em A, xRx (x está relacionado com x pela R). Para verificar se essa R é reflexiva temos que verificar se xRx para todos os elementos de A, ou seja, a relação deve, obrigatoriamente, ter todos os pares: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) e (5,5).

**Relações anti-reflexivas:**

As relações anti-reflexivas são aquelas em que NENHUM dos elementos do conjunto está relacionado com ele mesmo. Assim, nenhum dos pares (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) e (5,5) pode aparecer na relação. Quando afirmamos que uma relação é reflexiva está implícito que ela não é anti reflexiva e vice-versa. O que acontece se alguns desses pares aparecem e outros não? Aí dizemos que a relação não é reflexiva nem anti-reflexiva.

**Relações simétricas:**

Dizemos que R é simétrica se, para todo x, y $\in$ A, temos x R y $\Rightarrow$ y R x. Lembre-se que, a expressão A$\Rightarrow$B expressa um teorema do tipo "Se A então B", cujo significado é que, sempre que A for verdadeiro, então B também é verdadeiro.

Assim, para verificar se uma relação é simétrica, temos que verificar: Se (x,y) pertence a R, então (y,x) também deve pertencer a R. Assim, se o par (1,2) estiver em R, o par (2,1) também deve estar.

**Relações anti-simétricas:**

Dizemos que R é anti-simétrica se para todo x, y $\in$ A, temos (x R y $^\wedge$ y R x) $\Rightarrow$ x = y. Essa definição equivale a dizer que não podemos ter os dois pares (x,y) e (y,x) na relação se x e y não forem o mesmo elemento.

Assim, se o par (1,2) estiver em R, o par (2,1) não pode estar. Já foi dito em outros momentos que é mais fácil provar (ou verificar) que uma afirmação é falsa: basta encontrar um contra-exemplo, ou seja, um único exemplo que "fure" a afirmação. Assim, para verificar se uma relação é simétrica ou anti-simétrica, é mais fácil começar procurando casos que mostrem que essa relação não é uma coisa ou outra.

**Relações Transitivas:**

A transitividade também é expressa como um teorema Se-então. Uma relação R é transitiva se, para todo x, y, z $\in$ A, temos (x R y $^\wedge$ y R z) $\Rightarrow$ x R z. Mais uma vez, provar que a afirmação é falsa é mais fácil, bastando para isso encontrar um contra-exemplo.

4) Suponha que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Represente esta relação como um conjunto de pares ordenados e verifique se R é reflexiva, anti-reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva.

$R = \{(x,y) \mid x,y \in Z \text{ e } |x-y| \leq 2\}$

É reflexiva? SIM, pois |x-x| = 0, para todo x inteiro.
É anti-reflexiva? NÃO, pois é reflexiva.
É simétrica? SIM, pois |x-y| = |y-x | para todo x, y inteiros.
É anti-simétrica? NÃO, pois (2,1) e (2,1) pertencem a R, por exemplo.
É transitiva? NÃO, pois (6,4) e (4,2) estão em R mas (6,2) não está em R.

5) Determine $R^{-1}$ para cada uma das seguintes relações:

a) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}

$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

b) R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

c) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x-y = 1\}$

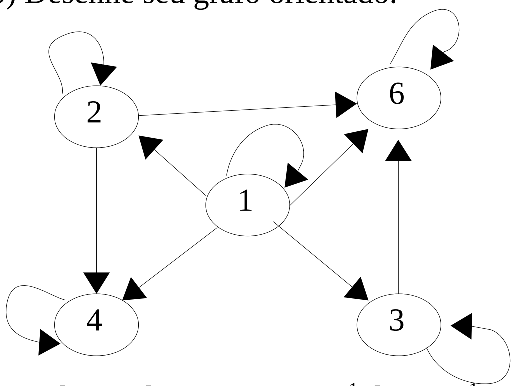
$R^{-1} = \{(x,y) \mid x,y \in Z, x = y-1\}$ ou então
$R^{-1} = \{(y,x) \mid x,y \in Z, x - y = 1\}$ entre outras

d) R = {(x, y) | x, y ∈ ℕ, x|y}
$R^{-1}$ = {(x, y) | x, y ∈ N, y|x}

e) R = {(x, y) | x, y ∈ ℤ, xy > 0}
Para todos os pares de inteiros x e y tal que xy>0 , temos yx>0, logo a inversa de R é igual a R.

6) Seja A = {1, 2, 3, 4, 6} e seja R a relação em A definida por “*x* divide *y*”, escrita *x*|*y*.
a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.
R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)}

b) Desenhe seu grafo orientado.




c) Ache a relação inversa $R^{-1}$ de R. $R^{-1}$ pode ser descrita por palavras?
$R^{-1}$={(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(6,6)}
A inversa da relação R ($R^{-1}$) pode ser descrita em palavras como "y é múltiplo de x".

7) Seja R a relação *tem o mesmo tamanho que* definida sobre todos os subconjuntos finitos de ℤ (*A* R *B* se e somente se |*A*| = |*B*|). Quais das cinco propriedades (reflexiva, anti-reflexiva, simétrica, anti-simétrica, e transitiva) R possui? Demonstre suas respostas.
R.
É reflexiva? Sim, pois |A| = |A|, ou seja, um conjunto de inteiros, tem o mesmo tamanho que ele mesmo.
É anti-reflexiva? NÃO
É simétrica? SIM, pois sempre que |A| = |B|, então |B|=|A|.
É anti-simétrica? NÃO, pois dois conjuntos diferentes podem ter o mesmo tamanho, ou seja, o mesmo número de elementos.
É transitiva? SIM, pois sempre que |A| = |B| e |B| = |C|, temos |A| = |C|.

8) Quais dos conjuntos a seguir são relações de equivalência?
a) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)} no conjunto {1, 2, 3}
R. SIM

b) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 1)} no conjunto {1, 2, 3}
R. NÃO, não é reflexiva, nem simétrica, nem transitiva.

c) | em ℤ
R. NÃO, não é simétrica

d) ≤ em ℤ

R. NÃO, não é simétrica

e) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$

R. SIM

9) Para cada relação de equivalência ache a classe de equivalência pedida.

a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$. Ache [1].

R. $[1] = \{1, 2\}$

b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ em $\{1, 2, 3, 4\}$. Ache [4].

R. $[4] = \{4\}$

10) Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a relação de equivalência R sobre esse conjunto: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$. Encontre as classes de equivalência dessa relação.

R. $[1] = \{1, 2\} = [2]$; $[3] = \{3\}$ e $[4] = \{4, 5, 6\} = [5] = [6]$

11) Dê exemplos de relações R em $A = \{1, 2, 3\}$ que têm a propriedade requerida.

a) R é simétrica e anti-simétrica.

$R = \{(1,1), (2,2)\}$

b) R não é nem simétrica nem anti-simétrica.

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$

c) R é transitiva, mas $R \cup R^{-1}$ não é transitiva.

$R = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$ é transitiva

$R^{-1} = \{(2,1), (3,2),(3,1)\}$

$R \cup R^{-1} = \{(1,2), (2,3), (1,3), (2,1), (3,2),(3,1)\}$ não é transitiva pois (2,3) e (3,2) estão em $R\cup R^{-1}$ mas (2,2) não está.

12) Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: $R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$

Ache a partição de A induzida por R, isto é, ache todas as classes de equivalência de R.

Vamos começar procurando a classe de equivalência do elemento 1, que é formada por todos os elementos relacionados ao 1:

$[1] = \{1, 5\}$

Agora vamos construir a classe de equivalência do elemento 2:

$[2] = \{2, 3, 6\}$

A classe de equivalência do elemento 3 é a mesmo do 2, já que o 3 está relacionado com 2.

A classe de equivalência do elemento 4 é:

$[4] = \{4\}$

A classe de equivalência do elemento 5 é a mesma do 1 e a do elemento 6 é a mesma do 2.

Assim, temos 3 classes de equivalência definidas pela relação R e cada uma dessas classes é um elemento da partição induzida por R:

**P = {{1,5}, {2,3,6}, {4}}**

13) Considere o conjunto de palavras W = {saúde, luva, sal, pato, peso, som}. Ache W/R onde R é a relação de equivalência em W definida por

a) "tem o mesmo número de letras que" ou

R. W/R = {[sal], [luva], [saúde]}

b) "começa com a mesma letra que".

R. W/R = {[saúde], [luva], [pato]}

14) Cada uma das frases seguintes define uma relação nos inteiros positivos $\mathbb{N}^+$:

a) *x* é maior que *y*

Não reflexiva => pois para x=1 e y=1 a relação xRy não é verdadeira.

Não simétrica => pois (3, 1) pertence a relação, mas (1, 3) não pertence.

Anti-simétrica => pois a propriedade de anti-simetria é da forma se-então: SE (xRy E yRx) ENTÃO x=y Quer dizer, se (x,y) e (y,x) pertencem a relação ao mesmo tempo, então temos obrigatoriamente x=y. Não significa que xRx tem que ser verdade. A hipótese (xRy E yRx) nunca se verifica, portanto não podemos afirmar que a implicação é falsa.

Transitiva => Se x é maior que y e y é maior que z, então x é maior que z.

b) *xy* é o quadrado de um inteiro

Reflexiva.

Simétrica.

Não anti-simétrica => pois (2, 8) e (8, 2) pertencem a relação, mas 2 é diferente de 8.

Transitiva => pois, por exemplo (8, 2) e (2, 50) pertencem a relação e (8, 50) também.

c) $x + y = 10$

Não reflexiva => para todo x=y e x diferente de 5 a relação xRy é falsa.

Simétrica => característica da adição: a ordem dos fatores não altera o resultado.

Não anti-simétrica => pois (2, 8) e (8, 2) pertencem a relação, mas 2 é diferente de 8.

Não transitiva => pois se x=3, y=7 e z=3, temos x+y=10, logo xRy, y+z=10, logo yRz, mas x não está relacionado com z pois 3+3 não é 10.

d) $x + 4y = 10$

Essa relação, como todas as outras do exercício, está definida sobre os inteiros positivos: $N^+$ = {1,2,3,4,5...} e é muito simples já que tem só dois pares: {(6,1), (2,2)}

Não reflexiva => para todo x=y e x diferente de 2 a relação xRy é falsa.

Não simétrica => pois (6, 1) pertence a relação, mas (1, 6) não pertence.

Anti-simétrica => pois não tem nenhum caso em que os pares (x,y) e (y,x) estejam na relação com x diferente de y.

Transitiva => pois não tem nenhum caso em que os pares (x,y) e (y,z) estejam em R. A hipótese não é satisfeita, não podemos dizer que a implicação é falsa. É o mesmo caso do item a) quanto a anti-simetria.

Determine quais relações são: i) reflexiva, ii) simétrica, iii) anti-simétrica, iv) transitiva.

15) Seja S = {1, 2, 3, ..., 19, 20}. Seja R a relação de equivalência em S definida por $x \equiv y (mod\ 5)$, isto é, *x-y* é divisível por 5. Ache a partição de S induzida por R, isto é, o conjunto quociente S/R.

x≡y(mod 5) (Lê-se x é congruente a y módulo 5) significa que x-y é divisível por 5, ou que a diferença entre x e y é divisível por 5 ou ainda que 5 divide x-y. Podemos escrever também 5|x-y, que por definição significa que existe um inteiro c tal que 5c = x-y.

Precisamos encontrar os pares de valores (x,y) em S tal que x-y é múltiplo de 5. Vamos verificar alguns valores específicos:

1≡6(mod 5) pois 1-6 = -5 é múltiplo de 5, já que 5(-1) = -5
6≡11(mod 5) pois 6-11 = -5 é múltiplo de 5, já que 5(-1) = -5
7≡2(mod 5) pois 7-2 = 5 é múltiplo de 5, já que 5(1) = 5
17≡7(mod 5) pois 17-7 = 10 é múltiplo de 5, já que 5(2) = 10

Vamos procurar a classe do [1], formada por elementos relacionados ao 1. Essa classe é formada pelos valores em S que diferem de 1 por um múltiplo de 5:
[1] = {1, 6, 11, 16}

E de forma análoga, encontramos as classes dos demais elementos:

[2] = {2, 7, 12, 17}
[3] = {3, 8, 13, 18}
[4] = {4, 9, 14, 19}
[5] = {5, 10, 15, 20}

**A partição de S induzida por R é P = {{1, 6, 11, 16}, {2, 7, 12, 17}, {3, 8, 13, 18}, {4, 9, 14, 19}, {5, 10, 15, 20}}**

16) Sejam R e S relações em um conjunto A. Assumindo que A tem pelo menos três elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contra-exemplo no conjunto A = {1, 2, 3}.

a) Se R e S são simétricas, então R ∩ S é simétrica.

Verdadeiro.
R ∩ S tem os pares que estão tanto em R quanto em S. Como R é simétrica, para todo par (x,y) que está em R, (y,x) também está. O mesmo vale para S. Se um par (x,y) está na interseção de R e S, é porque ele está em R e S. Como R e S são simétricas, (y,x) também estará em R e em S, logo, (y,x) também vai estar na intersecção de R e S.

b) Se R e S são simétricas, então R ∪ S é simétrica.

Verdadeiro. Justificativa semelhante a anterior

c) Se R e S são reflexivas, então R ∩ S é reflexiva.

Verdadeiro.
Se R e S são reflexivas, todos os pares da forma (x,x) estão em R e S, logo vão estar também em R ∩ S.

d) Se R e S são reflexivas, então R ∪ S é reflexiva.

Verdadeiro. Justificativa semelhante a anterior

e) Se R é anti-simétrica então $R^{-1}$ é anti-simétrica.

Verdadeiro.

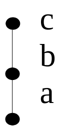
Se R é anti-simétrica, sempre que um par (x,y) estiver em R, com x≠y, o par (y,x) não pode estar. Logo, o par (y,x) vai estar em $R^{-1}$ mas o par (x,y) não pode estar, o que significa que $R^{-1}$ é anti-simétrica.

f) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

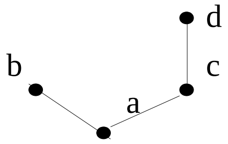
Verdadeiro. Se R é reflexiva, todo par da forma (x,x) está em R, logo está também em $R^{-1}$. Assim, pelo menos todos os pares da forma (x,x) estarão em $R \cap R^{-1}$, o que mostra que $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

17) Desenhe o diagrama de Hasse para as seguintes ordens parciais:

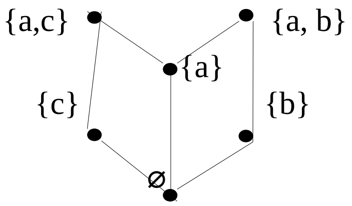
a) A = {a, b, c} e R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)}




b) A = {a, b, c, d} e R = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (c, d)}




c) A = {∅, {a}, {a, b}, {c}, {a, c}, {b}} e B R C ↔ B ⊆ C




18) Para o exercício 17, encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimal, máximo e maximal.

a) mínimo = minimal = a

máximo = maximal = c

b) mínimo = minimal = a

máximo = maximal = d

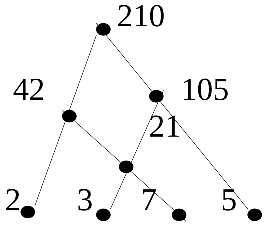
c) mínimo = minimal = ∅

não há máximo

maximais = {a, c} e {a, b}

19) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “x divide y” no conjunto {2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210}. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre um subconjunto totalmente ordenado com quatro elementos.

R.




não há elemento mínimo
minimais = 2, 3, 5, 7
máximo = maximal = 210

20) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “x divide y” no conjunto {3, 6, 9, 18, 54, 72, 108, 162}. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre os pares de elementos que não estão relacionados.

R.
mínimo = minimal = 3
maximais = 72 e 162
não há máximo pois não há como dizer quem é maior: 162 ou 72