Exercícios Cálculo 1

1. Resolva a inequação.
   a. $3x + 3 < x + 6$
   b. $x + 3 \leq 6x - 2$
   c. $x - 3 > 3x + 1$
   d. $1 - 3x > 0$
   e. $2x - 1 \geq 5x + 3$
   f. $2x + 1 \geq 3x$

2. Divida $x^3 - a^3$ por $x - a$ e conclua que $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

3. Verifique as identidades.
   a. $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
   b. $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$
   c. $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 +ax^2 + a^2)$
   d. $x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$
4. Simplifique

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

d) $\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

e) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1}$

f) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}}{x - 3}$

g) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5}$

h) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p}$

i) $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{p^2}}{x - p}$

j) $\dfrac{x^4 - p^4}{x - p}$

l) $\dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

m) $\dfrac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h}$

n) $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

o) $\dfrac{(x + h)^2 - (x - h)^2}{h}$

5.

Considere o polinômio do 2.º grau $ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, b e c são reais dados.

a) Verifique que

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

b) Conclua de (*a*) que, se $\Delta \geqslant 0$, as raízes de $ax^2 + bx + c$ são dadas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

c) Sejam $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $(\Delta \geqslant 0)$ as raízes de $ax^2 + bx + c$. Verifique que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

6. Resolva as inequações.

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$	*b*) $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$
c) $x^2 - 3x > 0$	*d*) $x^2 - 9 < 0$
e) $x^2 - x - 2 \geqslant 0$	*f*) $3x^2 + x - 2 > 0$
g) $x^2 - 4x + 4 > 0$	*h*) $3x^2 - x \leqslant 0$
i) $4x^2 - 4x + 1 < 0$	*j*) $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

7.

Suponha que $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ seja um polinômio de grau n, com coeficientes inteiros, isto é, $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, …, a_n são números inteiros. Seja α um número inteiro. Prove que se α for raiz de $P(x)$, então α será um divisor do termo independente a_n.

8.

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n. Prove:

α é raiz de $P(x) \Leftrightarrow P(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

(*Sugestão*: dividindo-se $P(x)$ por $x - \alpha$, obtém-se um quociente $Q(x)$ e um resto R, R constante, tal que $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + R$.