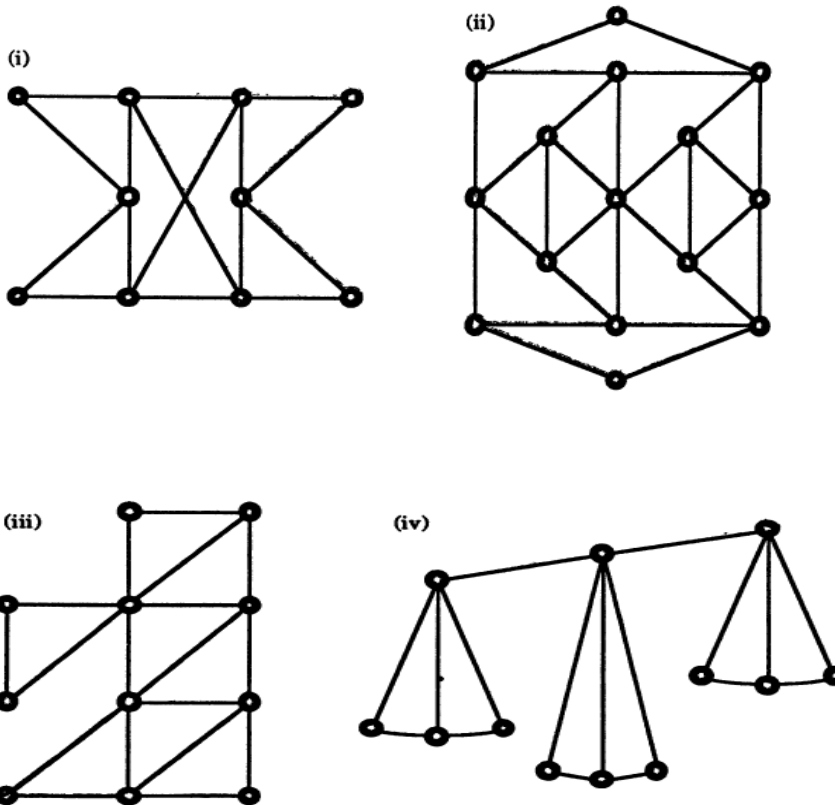


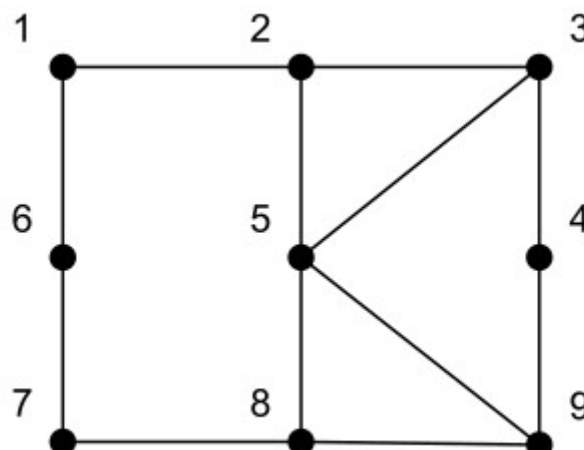
Matemática Discreta – Turma B – 2019

Grafos Eulerianos

- 1) O que é um grafo Euleriano? Como podemos decidir de um dado grafo G é Euleriano?
- 2) Prove que um grafo G é Euleriano se e somente se todo vértice v possui grau par.
- 3) Quais dos seguintes grafos são Eulerianos? Para os grafos que não forem, estenda-os adicionando o menor número de arestas de modo que sejam simples e Eulerianos.

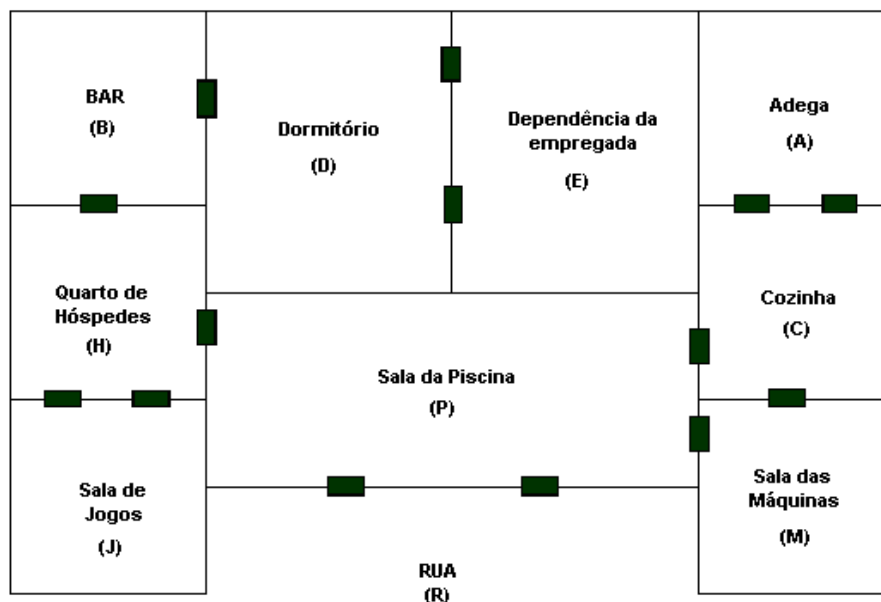


- 4) Estenda o grafo a seguir, adicionando o menor número de arestas possíveis de modo que ele permaneça como um grafo básico simples mas torne-se Euleriano.

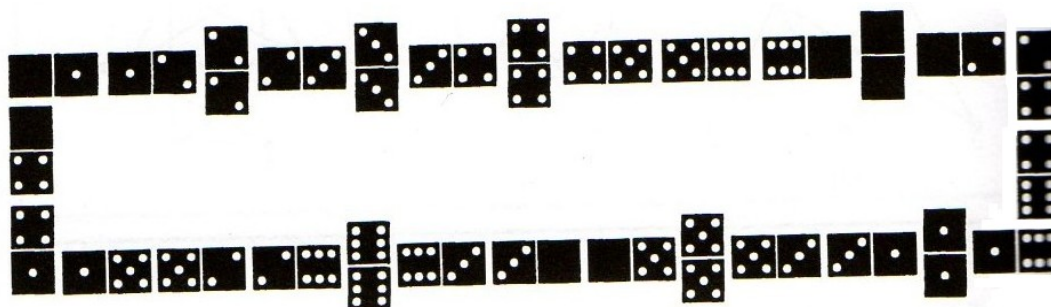


5) **O problema do assassinato do bilionário Van Diamond:** A figura abaixo é a planta da residência do bilionário Van Diamond, que acaba de ser assassinado. Sherlock Gomes (um conhecido detetive que nas horas vagas é um estudioso da Teoria de Grafos) foi chamado para investigar o caso. O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida deixar aquela sala pela mesma porta que havia entrado. O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois *ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa*. Sherlock Gomes avaliou a planta da residência (conforme figura) e em poucos minutos declarou solucionado o caso.

Quem poderia ser o suspeito indicado por Sherlock Gomes? Explique qual o raciocínio utilizado pelo detetive para apontar o suspeito utilizando conceitos da Teoria dos Grafos.



6) As peças de um jogo de dominó possuem rótulos que variam de 0 até 6, perfazendo um total de 28 peças. Explique, utilizando conceitos da Teoria dos Grafos, como você pode utilizar um grafo Euleriano para encontrar uma sequência contínua de peças que formam um anel, conforme ilustra a figura a seguir.



7) Tertuliano Gonçalves havia prometido casamento a Josefina das Graças. O evento deveria ser realizado, segundo ele, assim que acabasse o contrato de trabalho recém assinado com uma empresa encarregada de pavimentar toda a rede de estradas que ligava Santana do Caixa Prego (cidade onde morava Josefina) às cidades da região. O

trabalho iria começar em Santana e prosseguir em continuidade, estrada após estrada, terminando, segundo explicou Tertuliano, na própria Santana. A rede de estradas é dada pela matriz de adjacência abaixo, na qual a cidade de Santana do Caixa Prego é representada pelo número 1. Você que leu esta estória acha que Tertuliano estava sendo sincero com Josefina? Por quê?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		x	x		x					
2	x		x	x	x					
3	x	x			x	x				
4		x			x		x			x
5	x	x	x	x		x	x	x	x	
6			x		x			x		x
7				x	x			x		x
8					x	x	x		x	x
9					x			x		x
10				x		x	x	x	x	

8) No problema das 7 pontes de Königsberg, qual é o menor número de pontes que devem ser adicionadas para que o problema admita uma solução, ou seja, para que o grafo G torne-se Euleriano. Quais são essas pontes?

9) Para quais valores de n , o grafo completo K_n é Euleriano? Explique.

10) Para quais valores de $m, n > 1$ o grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é Euleriano? Explique.

11) Considere um grafo básico simples conexo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $|E| = m$.

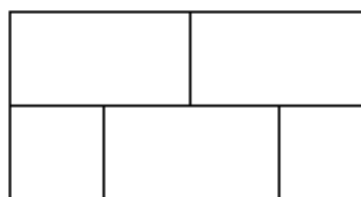
a) G pode ser Euleriano se n é par e m é ímpar? Justifique.

b) G pode ser Euleriano se n é ímpar e m é par? Justifique.

12) Prove que um grafo conexo $G = (V, E)$ é Euleriano se e somente se ele pode ser decomposto em ciclos arestas disjuntos.

13) Prove que um grafo $G = (V, E)$ que não contém vértices ímpares não possui pontes.

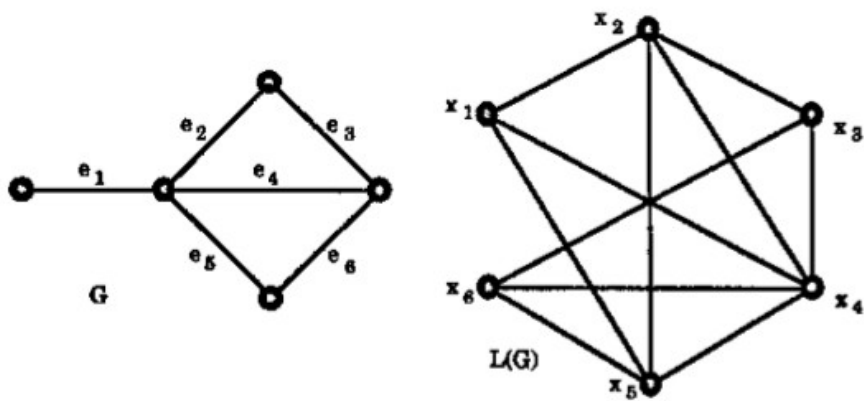
14) O problema das 5 salas é definido como segue: dado o retângulo dividido em 5 salas no diagrama abaixo, o objetivo consiste em, iniciando em alguma das 5 salas ou fora do retângulo, cruzar cada parede utilizando uma linha contínua, ou seja, sem tirar o lápis do papel. Resolva o problema ou justifique o porque você não conseguiu.



15) O grafo da amizade, ou *friendship graph*, denotado por F_n , é um grafo básico simples com $2n + 1$ vértices, obtido através da união de n cópias do grafo ciclo C_3 (triângulo) em um único vértice central v . O teorema da amizade afirma que grafos finitos com a propriedade de que todo par de vértices tem exatamente um vizinho em comum são F_n .

- Desenhe os grafos F_3 e F_4 .
- Quantas arestas F_n possui? Justifique.
- Prove que F_n é Euleriano.

16) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com arestas e_1, e_2, \dots, e_n . Define-se por $L(G)$ o *line graph* de G como sendo o grafo com vértices x_1, x_2, \dots, x_n numa correspondência 1 para 1 com as arestas de G , tal que x_i é adjacente a x_j se e somente se as arestas correspondentes e_i e e_j são adjacentes em G . A figura a seguir ilustra um grafo G e seu *line graph* $L(G)$:



- Prove que se G é Euleriano então $L(G)$ também deve ser.
- Seja $n > 2$ um inteiro. Quem são os *line graphs* $L(G)$ dos grafos bipartidos completos $K_{1,n}$? Explique.
- Dê um exemplo de grafo G em que $L(G)$ é Euleriano mas G não é.