Matemática Discreta – Turma B – 2019

Recorrências

1) Sabemos que o número de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói com n discos é dado por uma recorrência linear de primeira ordem: $T_n = 2T_{n-1} + 1$, com $T_1 = 1$. Obtenha uma fórmula fechada para T_n utilizando somas telescópicas.

2) Resolva as seguintes recorrências lineares de primeira ordem usando somas telescópicas:

a) $x_n = 3x_{n-1} + 5$, $x_1 = 2$

b) $x_{n+1} = 5x_n + 6$, $x_1 = 3$

3) Resolva as seguintes recorrências lineares de primeira ordem:

a) $x_{n+1} = 2x_n + 3^n$, $x_1 = 1$

b) $a_{n+1} = 5a_n + 2^n$, $a_1 = 1$

4) Resolva a seguinte recorrência linear de primeira ordem:

$$x_{n+1} = 2x_n + n^2$$
$$x_1 = 1$$

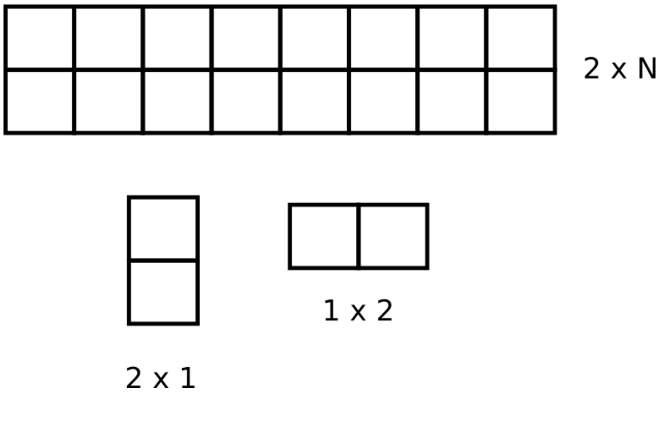
5) Resolva as seguintes recorrências lineares homogêneas de segunda ordem utilizando somas telescópicas:

a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, com $x_1 = 5$ e $x_2 = 13$.
b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$, com $x_1 = 6$ e $x_2 = 27$.

6) Utilizando o método da equação característica, resolva a sequência de Fibonacci, ou seja, obtenha uma fórmula fechada para a recorrência a seguir:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{com} \quad F_1 = F_2 = 1 \ .$$

7) Dado um tabuleiro $2 \times N$ e peças de dominó que podem ser tanto 2×1 ou 1×2 , conforme indica a figura a seguir, pergunta-se: de quantas formas podemos preencher o tabuleiro com as peças?



Note que se N = 1, há uma única maneira de preencher o tabuleiro (peça 2×1) e se N = 2, há duas maneiras de preencher o tabuleiro: 2 peças 2×1 ou 2 peças 1×2 . Sugestão: pense recursivamente.

8) A sequência x_n é tal que $x_1=0$ e $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$, $\forall n\geq 1$ inteiro. Encontre uma fórmula fechada para a recorrência e prove que $\forall n, x_n \in N$, ou seja, todos os números gerados pela sequência são inteiros.

9) Seja a recorrência dada por:

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+n a_n} \text{ , com } a_1=1$$

Determine o valor de a_{2012} .

10) Seja a recorrência $a_{n+1}^3=99a_n^3$ com $a_1=1$. Calcule a_{100} . (Dica: use o produto telescópico)

11) A sequência de Fibonacci tem como primeiros termos os números

$F_1 = 1$ $F_2 = 1$ $F_3 = 2$ $F_4 = 3$ $F_5 = 5$ $F_6 = 8$ $F_7 = 13$

Um estudante de matemática discreta observou o seguinte fato: ao computar o quadrado de um elemento k da sequência, ele é igual ao produto de seus vizinhos a esquerda e a direita, mais ou menos uma unidade, dependendo se k é par ou ímpar. Ele anotou que:

$$F_2^2=F_1F_3-1$$
$$F_3^2=F_2F_4+1$$
$$F_4^2=F_3F_5-1$$
$$F_5^2=F_4F_6+1$$

e assim sucessivamente percebendo um padrão. O estudante afirma que essa propriedade é válida para qualquer valor de k, ou seja:

$$F_k^2=F_{k-1}F_{k+1}+(-1)^{k-1}$$

Prove ou refute o argumento do estudante.

12) Seja T_n uma recorrência linear homogênea de segunda ordem arbitrária com condições iniciais dadas por $T_0=p$ e $T_1=q$. Mostre que se as raízes da equação característica são iguais, ou seja, $r_1=r_2=r$, a forma geral da solução é dada por $T_n=f_1(n)r^n$, onde $f_1(n)$ é um polinômio de grau 1 em n (é linear em n).

13) Seja T_n uma recorrência linear homogênea de segunda ordem arbitrária dada por:

$$T_n=aT_{n-1}+bT_{n-2}$$

com condições iniciais dadas por

$T_0=p$ e $T_1=q$. Prove, por indução, que se as raízes da equação característica são distintas, ou seja, $r_1 \neq r_2$, a forma geral da solução é dada por $T_n=c_1 r_1^n+c_2 r_2^n$, em que

$$c_1+c_2=p=T_0$$
$$c_1 r_1+c_2 r_2=q=T_1$$

14) Encontre a solução para a recorrência linear homogênea de terceira ordem dada por:

$a_n=6a_{n-1}-11a_{n-2}+6a_{n-3}$ com $a_0=2$, $a_1=5$ e $a_2=15$.

15) Resolva a recorrência linear homogênea de terceira ordem dada por:

$a_n=5a_{n-1}+2a_{n-2}-24a_{n-3}$ com $a_0=0$, $a_1=1$ e $a_2=7$.

16) Resolva a recorrência linear homogênea de terceira ordem dada por:

$a_n=4a_{n-1}+9a_{n-2}-36a_{n-3}$ com $a_0=2$, $a_1=5$ e $a_2=11$.

17) Algumas das recorrências lineares homogêneas mais conhecidas são:

a) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ com $a_1=1,\ a_2=3$ (Lucas numbers).
b) $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ com $a_0=0,\ a_1=1$ (Pell numbers).
c) $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ com $a_0=a_1=2$ (Pell-Lucas numbers).
d) $a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n$ com $a_1=1,\ a_2=3$.

Encontre fórmulas fechadas para cada uma delas.

18) Com o auxílio de um computador, encontre uma solução para as recorrências a seguir:

a) $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ com $a_0=a_1=a_2=1$: Padovan sequence.
b) $a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$ com $a_0=3,\ a_1=0,\ a_2=2$: Perrin sequence.