Álgebra Linear 1 - 08.013-6 turma C
Lista 2 - Determinantes
Segundo semestre de 2017

Dada uma matriz quadrada $a = (a_{ij})$ *de ordem* n *com entradas em* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*), seu* **determinante** *é definido indutivamente por:*

$$\text{Se } n = 1 \text{ então } \det(a) = a_{11}$$

$$\text{Se } n > 1 \text{ então } \det(a) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \cdot \det(A_{1,j})$$

sendo $A_{1,j}$ *a* $(n-1) \times (n-1)$ *matriz obtida a partir de a pela supressão da primeira linha e j-ésima coluna de a.*

1. Calcule a partir da definição acima o determinante de $a = (a_{ij})_{2\times 2}$ e o determinante de $b = (b_{ij})_{3\times 3}$. Mais geralmente, mostre que se $c = (c_{ij})_{n\times n}$ então

$$\det(c) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot c_{1\sigma(1)} \cdot c_{2\sigma(2)} \cdots c_{n\sigma(n)}$$

   sendo $S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} / \ \sigma \text{ é bijetora}\}$ o grupo de permutações de n elementos e $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação σ, o qual é definido como sendo -1 se σ se escreve como produto de um número ímpar de transposições e $sgn(\sigma) = 1$ se σ se escreve como produto de um número par de transposições.

2. Prove que se permutarmos duas linhas ou duas colunas numa matriz $a = (a_{ij})_{n\times n}$ então o determinante da matriz resultante é igual ao determinante de a multiplicado por (-1).

3. Mostre que, se $a \in M(n, n, \mathbb{K})$ possui duas linhas iguais ou duas colunas iguais então $\det(a) = 0$.

4. Mostre que $\det((a_{ij})_{n\times n}) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{r+s} \cdot a_{rs} \cdot \det(A_{r,s}) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+s} \cdot a_{rs} \cdot \det(A_{r,s})$, sendo $A_{r,s}$ a $(n-1) \times (n-1)$ matriz obtida a partir de $(a_{ij})_{n\times n}$ pela supressão da r-ésima linha e s-ésima coluna de $(a_{ij})_{n\times n}$.

5. Mostre que $\det(a) = \det(a^t)$ para todo $a \in M(n, n, \mathbb{K})$.

6. Sejam $a = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} L_1(a) \\ \vdots \\ L_i(a) \\ \vdots \\ L_n(a) \end{pmatrix}$, $b = (b_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} L_1(b) \\ \vdots \\ L_i(b) \\ \vdots \\ L_n(b) \end{pmatrix}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Prove que, se $L_k(a) = L_k(b)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots n\} - \{i\}$ então

$$\det\left(\begin{pmatrix} L_1(a) \\ \vdots \\ \lambda \cdot L_i(a) + \mu \cdot L_i(b) \\ \vdots \\ L_n(a) \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \det(a) + \mu \cdot \det(b)$$

7. Considere as matrizes $a = (a_{ij})_{n\times n} = (C_1(a) \;\cdots\; C_j(a) \;\cdots\; C_n(a))$ e $b = (b_{ij})_{n\times n} = (C_1(b) \;\cdots\; C_j(b) \;\cdots\; C_n(b))$ e sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Prove que, se $C_k(a) = C_k(b)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots n\} - \{j\}$ então

$$\det\big((C_1(a) \quad \cdots \quad \lambda \cdot C_j(a) + \mu \cdot C_j(b) \quad \cdots \quad C_n(a))\big) = \lambda \cdot \det(a) + \mu \cdot \det(b)$$

8. Mostre que se $a \in M(n, n, \mathbb{K})$ possui uma linha ou uma coluna nula então $\det(a) = 0$.

9. Use o exercício 6 da lista 0 e as propriedades de determinante listadas acima para mostrar que se $a, b \in M(n, n, \mathbb{K})$, então $\det(a \cdot b) = \det(a) \cdot \det(b)$.

10. Dada uma matriz $a \in M(n, n, \mathbb{K})$, define-se o **cofator** do elemento a_{rs} de $a = (a_{ij})$ como sendo $\Delta_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot \det(A_{rs})$, em que A_{rs} é a $(n-1)\times(n-1)$ matriz obtida de $a = (a_{ij})$ pela supressão da r-ésima linha e s-ésima coluna. A **matriz dos cofatores** de a é a matriz $\mathrm{cof}(a) = (\Delta_{ij})_{n\times n}$. Define-se a **matriz adjunta clássica** da matriz $a = (a_{ij})_{n\times n}$ como sendo a matriz $\mathrm{Adj}(a) = (\mathrm{cof}(a))^t$. Calcule $\mathrm{cof}(a)$ e $\mathrm{Adj}(a)$ para cada uma das matrizes a abaixo.

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & i-2 & 0 \\ 2i & -2 & 1-i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Dada uma matriz $a = (a_{ij})_{3\times 3}$, prove que $a \cdot \mathrm{Adj}(a) = \mathrm{Adj}(a) \cdot a = \det(a) \cdot I_3$. Convença-se de que resultado semelhante vale para qualquer $n \times n$ matriz sobre $\mathbb{K}$, ou seja, se $a \in M(n, n, \mathbb{K})$ e $\det(a) \neq 0$, então $a^{-1} = \left(\frac{1}{\det(a)}\right) \cdot \mathrm{Adj}(a)$. Baseado nessa fórmula, verifique quais das matrizes do exercício anterior são invertíveis e para as que forem, calcule sua inversa.