

Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli

Quinta Lista de Exercícios – Funções

- 1) Seja $W = \{a, b, c, d\}$. Determine se cada conjunto de pares ordenados define uma função de W em W .
- $\{(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)\}$
 - $\{(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)\}$
 - $\{(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)\}$
 - $\{(a, a), (b, a), (a, b), (c, d)\}$
- 2) Para cada uma das relações seguintes, responda:
- É uma função? Se não for, explique por que. Se for, responda as questões seguintes;
 - Quais são seus domínios e imagem?
 - A função é injetora (um-para-um)? Se não for, explique por que.
- $\{(1, 2), (3, 4)\}$
 - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y = 2x\}$
 - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x+y = 0\}$
 - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x|y\}$
 - $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x|y \text{ e } y|x\}$
- 3) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \rightarrow B$. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
- 4) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \rightarrow B$. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
- 5) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{4, 5\}$. Escreva todas as funções $f: A \rightarrow B$. Indique quais são injetoras e quais são sobrejetoras.
- 6) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{5, 6, 7\}$. Seja a relação $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (?, ?)\}$. Determinar um par ordenado $(?, ?)$ pertencente a $A \times B$, para completar a f , de modo que as proposições a seguir sejam verdadeiras:
- A relação f não é uma função.
 - A relação f é uma função de A para B mas não sobrejetora.
 - A relação f é uma função de A para B e é sobrejetora.
- 7) Para cada caso a seguir, determine se a função é injetora, sobrejetora ou ambos (bijetora). Justifique suas afirmações.
- $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x$.
 - $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 10 + x$.
 - $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 10 + x$.
- 8) Sejam A e B conjuntos finitos e $f: A \rightarrow B$. Verifique que duas quaisquer das afirmações seguintes acarretam a terceira:
- f é injetora.
 - f é sobrejetora.
 - $|A| = |B|$.

9) Dê exemplo de um conjunto A e uma função $f: A \rightarrow A$ onde f é sobrejetora, mas não é injetora. Dê um exemplo em que f é injetora, mas não é sobrejetora.

10) Para cada um dos pares de funções a seguir, faça:

- Determine qual das duas funções $g \circ f$ ou $f \circ g$ está definida
- Se uma ou ambas forem definidas, ache as funções resultantes.
- Se ambas forem definidas, determine se $g \circ f = f \circ g$ ou não.

a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2,1), (3, 1), (4,1)\}$.

b) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(2,1), (3, 2), (4,3)\}$.

c) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ e $g = \{(1, 2), (2,0), (3, 5), (4,3)\}$.

d) $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ e $g = \{(1, 1), (2,1), (3, 4), (4,4)\}$.

11) Avalie:

a) $\lfloor 13,2 \rfloor, \lfloor -0,17 \rfloor, \lfloor 34 \rfloor;$

b) $\lceil 13,2 \rceil, \lceil -0,17 \rceil, \lceil 34 \rceil$

12) Prove que $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$.

13) Calcule os seguintes valores:

- a. $31 \bmod 11$
- b. $16 \bmod 8$
- c. $22 \bmod 6$
- d. $-7 \bmod 3$

14) Defina $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $f(x) = x + 1$. Seja $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(x) = 3x$. Calcule as seguintes expressões:

- a. $(g \circ f)(5)$
- b. $(f \circ g)(5)$
- c. $(g \circ f)(x)$
- d. $(f \circ g)(x)$
- e. $(f \circ f)(x)$
- f. $(g \circ g)(x)$

15) Para cada uma das bijeções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir, encontre f^{-1} :

- a. $f(x) = 2x$
- b. $f(x) = x^3$
- c. $f(x) = (x+4)/3$

16) Sejam $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $U = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Sejam também, $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 6)\}$ uma função de S em T e $g = \{(1, 7), (2, 6), (3, 9), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$ uma função de T em U . Escreva os pares ordenados da função $g \circ f$.

17) Sejam $A = \{x, y\}$ e A^* o conjunto de todas as cadeias finitas formadas com símbolos pertencentes a A . Defina uma função $f: A^* \rightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte maneira: para s em A^* , $f(s)$ = o comprimento de s . f é injetora? Prove que sim ou que não. f é sobrejetora? Prove que sim ou que não.

18) Se $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $f(x) = 3x$, encontre $f(A)$ para

a. $A = \{1, 3, 5\}$

b. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } (\exists y) (y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 2y)\}$