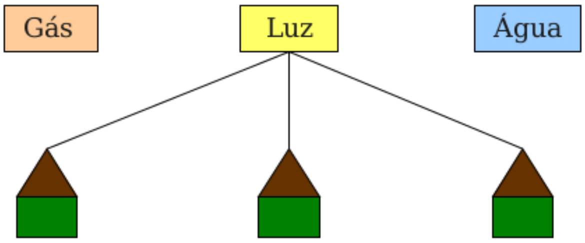
Matemática Discreta – Turma B – 2019

Grafos Planares

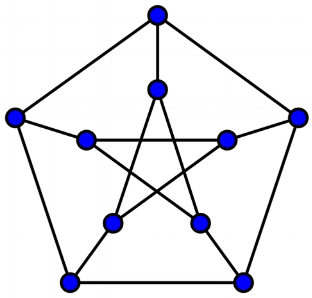
1) Podemos oferecer os 3 serviços para as 3 residências sem que haja cruzamento das linhas? Justifique sua resposta.



2) Mostre que o K_5 não é planar.

3) Suponha que você precisa decidir se um grafo G conexo é planar ou não. Ao observar o grafo G, você nota que ele não contém como subgrafo nem K_5 nem $K_{3,3}$. Você então conclui que G é planar. Esse raciocínio está correto? Explique, justificando sua resposta com base no Teorema de Kuratowski

4) Mostre que o grafo de Petersen não é planar.



5) Prove que qualquer subgrafo de um grafo planar é planar.

6) Seja G = (V, E) um grafo plano conexo com |V| = n, |E| = m e f faces ou regiões. Prove a fórmula de Euler, ou seja, que n – m + f = 2.

7) Prove que o grafo $K_{3,3}$ não é planar.

8) Prove que se G = (V, E) é planar com |V| = n e |E| = m, então $m \leq 3(n-2)$.

9) Prove que todo grafo simples planar G possui um vértice de grau no máximo 5.

10) Para que valores de n > 1 o grafo completo K_n é planar? Explique.

11) Para que valores de m,n >= 1 o grafo bipartido completo é planar?

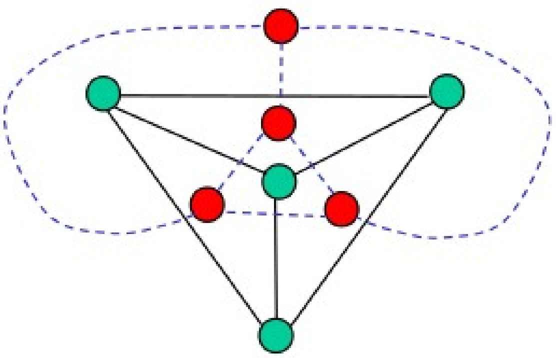
12) Seja G = (V,E) um grafo plano 4-regular com 10 faces. Determine quantos vértices e arestas G possui.

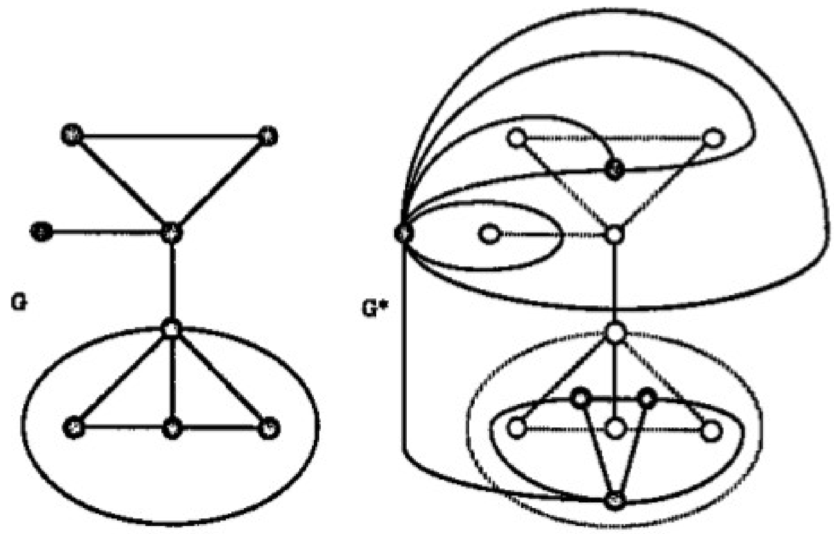
13) Seja G = (V,E) um grafo com |V| = 6 com lista de graus L_G = (2, 2, 3, 4, 4, 5). É possível G ser planar? Nesse caso quantas faces G tem?

14) Seja G um grafo básico simples planar com menos de 12 vértices. Prove que G tem ao menos um vértice v com grau menor ou igual a 4.

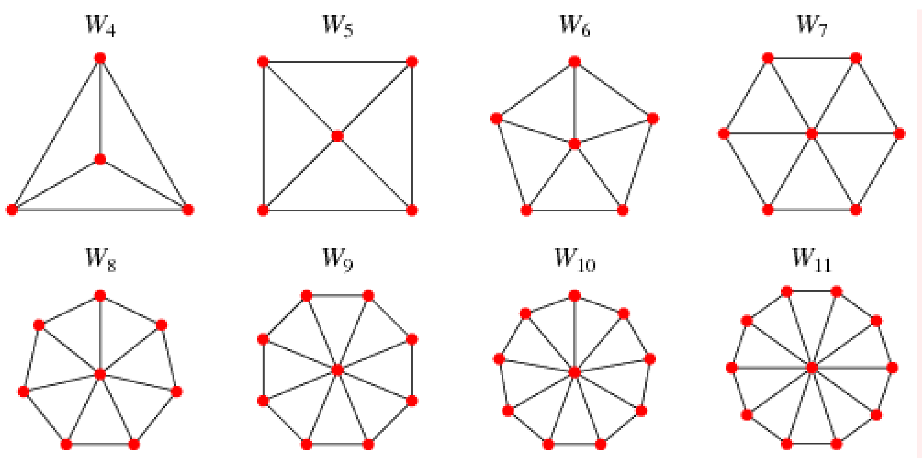
15) Dado um grafo G planar, o grafo G*, chamado de dual de G, é construído da seguinte forma:
- Para cada face f de G, G* tem um vértice v (incluindo a face externa)
- Una dois vértices w e v de G* da seguinte forma:
    - Se 2 regiões f_i e f_j são adjacentes (possuem alguma aresta em comum) coloque uma aresta entre v_i e v_j cruzando a aresta em comum
    - Se existir mais de uma aresta em comum entre f_i e f_j coloque uma aresta entre v_i e v_j para cada aresta em comum
    - Se uma aresta está inteiramente em uma região f_k coloque um loop no vértice v_k

Exemplos:

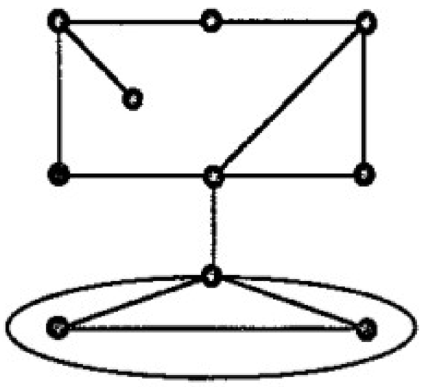


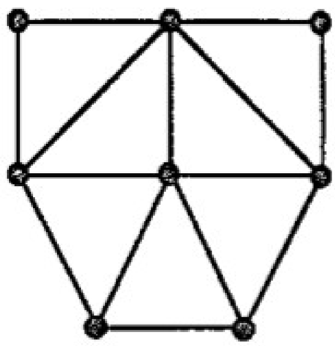


Responda:
a) Qual é o dual de um grafo C_n (grafo ciclo de tamanho n)?
b) Qual é o dual de um grafo W_n (grafo roda de n vértices)?

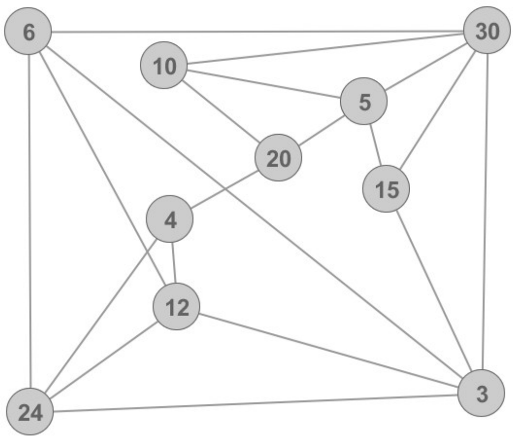


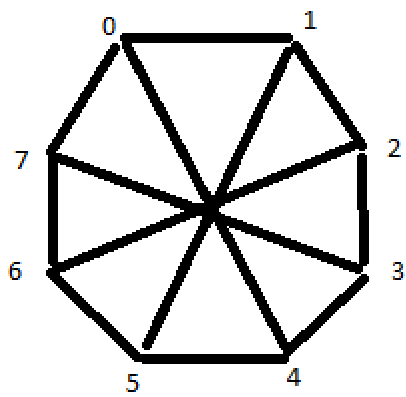
c) Quem é o dual do dual, ou seja, (G*)* ?
d) Obtenha os duais dos seguintes grafos

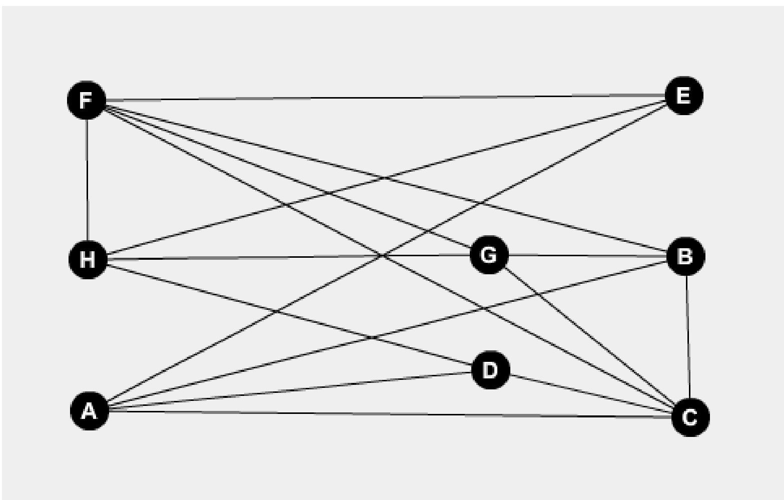




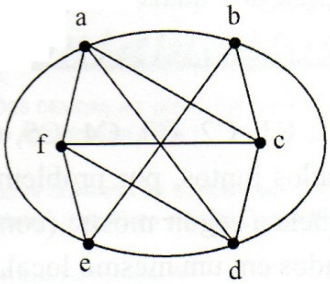
16) Mostre que os grafos a seguir não são planares através do Teorema de Kuratowski.



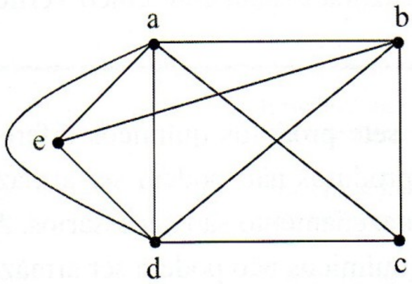




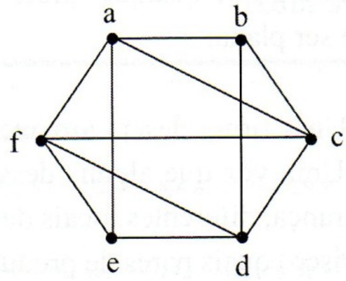
17) Para cada um dos grafos abaixo, determine se ele é planar ou não. Se o grafo for planar, encontre uma representaç ão gráfica de modo a evidenciar que as arestas não se cruzam (a não ser nos vértices). Se o grafo não for planar, use o teorema de Kuratowski para mostrar tal fato, encontrando um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



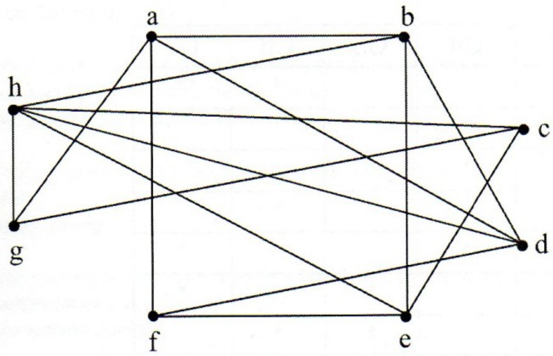
(a)



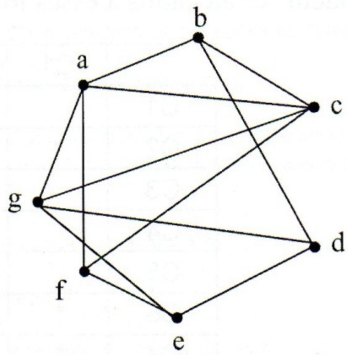
(b)



(c)



(d)



(e)

18) Seja G = (V,E) um grafo Euleriano planar. Prove que o dual de G, dado por G* é um grafo bipartido.

19) Prove que se G = (V, E) é um grafo bipartido planar com |E| = m > 2, e |V| = n, então $m \leq 2(n-2)$.