Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli

Terceira Lista de Exercícios – Teoria dos Conjuntos

1) Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:

a) $\{ x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ é par e } x < 20\}$

{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}

b) { x | x é um dos estados da região nordeste}

{Alagoas, Bahia, Ceará, Maranhão, Paraíba, Piauí, Pernambuco, Rio Grande do Norte, Sergipe}

c) { x | x é uma das disciplinas que você está cursando na graduação}

{Estrutura de Dados, Programação Orientada a Objetos, Matemática Discreta I, Administração de Empresas}

d) $\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 = -1\}$

A reposta pode ser { } ou $\emptyset$. Não existe nenhum número que elevado ao quadrado seja negativo, logo o conjunto é vazio. Não pode ser $\{\emptyset\}$ pois isso denota um conjunto que tem um elemento, que é o símbolo de conjunto vazio.

2) Descreva cada um dos conjuntos a seguir dando uma propriedade que caracterize seus elementos:

a) {1, 2, 3, 4, 5}

A={ x | x é inteiro positivo, $1 \leq x \leq 5$ }

b) {1, 3, 5, 7, 9, ...}

B={ x | x é inteiro positivo, x é ímpar }

c) {10, 20, 30, 40, 50, ...}

C={x | x é inteiro positivo, x é múltiplo de 10}

d) {São Carlos, Sorocaba, Araras}

D={x | x é uma cidade que possui campos da UFSCar}.

Por que não pode ser outra resposta? A propriedade deve caracterizar TODOS e SOMENTE os elementos do conjunto. A propriedade "cidade do estado de São Paulo", por exemplo, inclui outras além das três acima (incorreto).

3) Dada uma descrição do conjunto A como A = {2, 4, 8, ...}, pode-se dizer que $16 \in A$? Justifique sua resposta.

R. Se $A = \{x \mid x = 2^n$ para algum inteiro positivo $n\}$, então $16 \in A$. Mas se $A = \{x \mid x = 2 + n(n-1)$ para algum inteiro positivo $n\}$, então $16 \notin A$. Em outras palavras, não há informação suficiente para responder à pergunta com absoluta certeza.

4) Qual a cardinalidade de cada um dos conjuntos a seguir:

a) A = {1, {1}, {1, 2}}

|A| = 3

b) $A = \{\emptyset\}$

|A| = 1

c) $A = \{1, \emptyset, \{\emptyset\}\}$

|A| = 3

d) A = {z, {{z}}}

|A| = 2

5) Mostre que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ não é um subconjunto de $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ é par}\}$.

R. Para mostrar um resultado negativo, basta mostrar um contra-exemplo. Uma resposta possível seria:

Para A ser subconjunto de B seria necessário que todos os elementos de A também pertencessem a B. Assim, A não é subconjunto de B pois: $3 \in A$, mas 3 não é par, logo $3 \notin B$.

6) Complete cada expressão a seguir escrevendo $\in$ou $\subseteq$ na área marcada com _____.

a) 2 ______ {1, 2, 3}

R. $\in$

b) {2} ______ {1, 2, 3}

R. $\subseteq$

c) {2} ______ {{1}, {2}, {3}}

R. $\in$

d) $\emptyset$ ______ {1, 2, 3}

R. $\subseteq$

e) $\mathbb{N}$ ______ $\mathbb{Z}$

R. $\subseteq$

f) {2} ______ $\mathbb{Z}$

R. $\subseteq$

g) {2} ______ $2^{\mathbb{Z}}$

R. $\in$

7) Considere a classe de conjuntos A = {{1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7, 8}}. Determine se cada uma das afirmativas seguintes é verdadeira ou falsa e explique.

a) $1 \in A$

Falso. O 1 não é elemento de A já que A contém apenas conjuntos como seus elementos.

b) $\{1, 2, 3\} \subseteq A$

Falso. {1, 2, 3} é elemento de A. O elemento {1, 2, 3} pertence ($\in$) a A .

c) $\{6, 7, 8\} \in A$

Verdadeiro, pois {6, 7, 8} é elemento de A.

d) $\{\{4, 5\}\} \subseteq A$

Verdadeiro. {{4, 5}} está contido em A porque {{4, 5}} é um subconjunto de A.

e) $\emptyset \in A$

Falso. O conjunto vazio não é um elemento de A.

8) Sejam $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -3 < |x| < 20\}$

$B = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } -3 < |x| < 20\}$

$C = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } -3 < x < 20\}$

D = {{a}, b, c, d}

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras, quais não são e por quê?

A = {-19, -18, -17, ...,-2, -1, 0, 1, 2, ..., 17, 18, 19}

Se x = -2, |-2| = 2 e -3 <2 < 20. Logo, x = -2 satisfaz a condição para pertencer ao conjunto A.

B = (-20,20) intervalo aberto dos reais entre -20 e 20.

C = {0, 1, 2, 3, ..., 19} já que $x \in \mathbb{N}$

a) $A \subseteq B$

Verdadeiro. Os conjuntos A e B estão dentro do mesmo intervalo. A diferença é que os elementos de A são inteiros e os de B são reais. Como o conjunto dos números inteiros "está contido" no conjunto dos números reais, então A é subconjunto de B. Todo elemento de A é elemento de B, mas a recíproca não é verdadeira.

b) $C \subseteq B$

Verdadeiro. O conjunto dos números naturais é subconjunto do conjunto dos números reais e, além disso, o intervalo de C é [0, 20) e o de B é (-20, 20). Sendo assim, todo elemento de C também é elemento de B.

c) $A \subseteq C$

Falso. Existem elementos de A que não pertencem a C, os números negativos.

d) $\varnothing \in D$

Falso. O símbolo Ø denota conjunto vazio e nesse caso o conjunto vazio não é elemento de D.

e) $a \in D$

Falso. O "a" não é elemento de D.

f) $\{b, c\} \subseteq D$

Verdadeiro, pois "b" pertence a {b, c} e ao mesmo tempo pertence a D. Idem para o elemento "c".

g) $\{-2, -1, 0\} \subseteq B$

Verdadeiro, pois todos os elementos de {-2, -1, 0} também pertencem a B. Ver a definição de conjunto B acima.

9) Sejam $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 4x + 3 < 0\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < x < 6\}$. Prove que $A \subset B$.

R. Muito parecido com o exercício feito em sala de aula.

10) Dê exemplo de um objeto x que torne verdadeira a sentença $x \subseteq \{x\}$.

R. Para $x = \varnothing$ temos $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$. Essa expressão é verdadeira porque o conjunto vazio é subconjunto de todos os conjuntos.

11) Demonstre que se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

R. Demonstraremos que $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$

$(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, porque $A \subset B$

$\Rightarrow (x \in C)$, porque $B \subset C$

Portanto, pela lei de transitividade temos $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$. Conseqüentemente demonstramos que $A \subset C$.

12) Decida, dentre os seguintes conjuntos, quais são subconjuntos de quais:

A = {todos os números reais satisfazendo $x^2-8x+12=0$}

B = {2, 4, 6}

C = {2, 4, 6, 8, ...}

D = {6}

A = {2, 6}

R. $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$, $D \subseteq D$, $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, $D \subseteq A$, $D \subseteq B$, $D \subseteq C$.

13) Considere o conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e os conjuntos

A = {1, 2, 3, 4, 5},	C = {5, 6, 7, 8, 9},	E = {2, 4, 6, 8}
B = {4, 5, 6, 7}	D = {1, 3, 5, 7, 9},	F = {1, 5, 9}

Determine

a) $A \cap (B \cup C)$

{4,5}

b) $(A \backslash E)'$

{2,4,6,7,8,9}

c) $(A \cap D) \cap E$

{}

d) $(B \cap F) \cup (C \cap E)$

{5,6,8}

e) D ⊕ F

{3, 7}

14) Para os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {4, 5, 6, 7}, calcule:

a) $A \cup B$

{1,2,3,4,5,6,7}

b) $A \cap B$

{4,5}

c) $A - B$

{1,2,3}

d) $B - A$

{6,7}

e) $A \oplus B$

Diferença simétrica: $(A \cup B) - (A \cap B)$

{1,2,3,6,7}

15) Mostre que é possível que $A \cap B = A \cap C$ sem que $B = C$.

R. Supondo que A={1, 2, 3, 4} e B={1, 3, 9, 12} e C={-3, -1, 1, 3, 5, 7}

$A \cap B = \{1, 3\}$

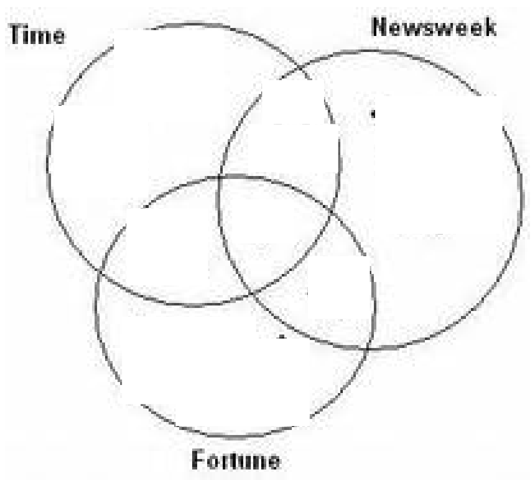
$A \cap C = \{1, 3\}$

e $B \neq C$

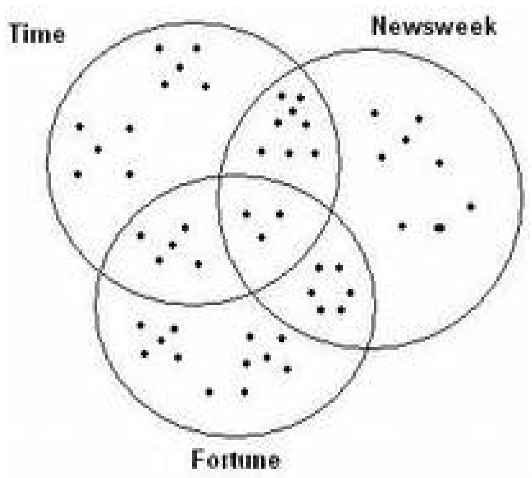
16) Em uma pesquisa com 60 pessoas, verificou-se que:

25 lêem a Newsweek,
26 lêem Time,
26 lêem Fortune,
9 lêem Newsweek e Fortune,
11 lêem Newsweek e Time,
8 lêem Time e Fortune,
3 lêem as três revistas.

- Preencha, com o número correto de pessoas, cada uma das regiões no diagrama de Venn desse problema.
- Ache o número de pessoas que lêem pelo menos uma das três revistas.
- Ache o número de pessoas que lêem exatamente uma revista.



R.



Número de pessoas que lêem pelo menos uma das revistas é igual ao número total de pessoas, que é 52.

10 pessoas lêem apenas Time, 12 pessoas lêem apenas Fortune e 8 pessoas lêem apenas Newsweek.

17) Escreva a equação dual de cada uma das equações:

a) $A \cup B = (B' \cap A')$

$A \cap B = (B' \cup A')$

b) $A = (B' \cap A) \cup (A \cap B)$

$A = (B' \cup A) \cap (A \cup B)$

c) $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

d) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B') = U$

$(A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B') = \varnothing$

18) Demonstre que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

R. A união de dois conjuntos quaisquer A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto dos elementos x tais que x pertence a pelo menos um dos dois conjuntos A e B. Ou seja, $x \in A \cup B$ se e somente se $x \in A \vee x \in B$.

$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \cup C)$

e

$x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in B \vee x \in C$

Assim,

$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

Pela lei associativa (para a disjunção), $(x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C)$ é equivalente a $(x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$. Logo, $(x \in A \cup B) \vee (x \in C)$.

Portanto, $x \in (A \cup B) \cup C$.

Assim, temos:

$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

19) Demonstre que $A-B = A \cap B'$

R. $A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$x \in A \cap B' \equiv x \in A \wedge (x \in U - B)$, pela definição de $\cap$ e de '

$\equiv x \in A \wedge [(x \in U) \wedge (x \notin B)]$

$\equiv (x \in A \cap U) \wedge (x \notin B)$

20) Seja S = {vermelho, azul, verde, amarelo}. Determine quais das seguintes classes são partições de S:

P_1={{vermelho}, {azul, verde}}

P_2={{vermelho, azul, verde, amarelo}}

P_3={∅, {vermelho, azul}, {verde, amarelo}}

P_4={{azul}, {vermelho, amarelo, verde}}

R. P_1 não é, pois a união dos subconjuntos não dá S, fica faltando {amarelo}. P_3 não é, pois a partição não pode ter como um dos conjuntos, o conjunto vazio.

21) Ache todas as partições de A = {1, 2, 3}.

R. **P_{1}**={{1},{2},{3}}, **P_{2}**={{1},{2,3}}, **P_{3}**={{1,2},{3}}, **P_{4}**={{1,3},{2}}, **P_{5}**={{2,1},{3}}, **P_{6}**={{3,1},{2}}, **P_{7}**={{3,2},{1}}, **P_{8}**= {{1, 2, 3}}

Observando que:

P_{3}={{1,2},{3}} = **P_{5}**={{2,1},{3}}

P_{4}={{1,3},{2}} = **P_{6}**={{3,1},{2}}

P_{2}={{1},{2,3}} = **P_{7}**={{3,2},{1}}

A ordem dos elementos não importa!

22) Encontre 2^S, para S = {a}

R. {∅,{a}}

23) Encontre 2^S, para S = {1, 2, 3}

R. { ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}, {1,2,3}}