Primeira Prova de Álgebra Linear 1 - 08.013-6 Turma C
26-09-2017

Nome:____ RA: ____________

1. Seja $\mathbb{V} = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$. Definimos a soma de dois elementos u e v de $\mathbb{V}$ como sendo a multiplicação usual de números reais (por exemplo, se $u = 2$ e $v = 9$, então $u + v := 2 \cdot 9 = 18$). Definimos também o produto de um número real α por um elemento v de $\mathbb{V}$ como sendo v^{α} (por exemplo, se $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $v = 9$, temos que $\alpha \cdot v := 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$). $\mathbb{V}$ equipado com essas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

   a. Determine quem é o vetor nulo $0_{\mathbb{V}}$. (justifique sua resposta)

   Temos que $0_{\mathbb{V}} = 1$ pois, dado $v \in \mathbb{V}$ temos que $v + 1 := v \cdot 1 = v$ para todo $v \in \mathbb{V}$.

   b. Determine uma base para $\mathbb{V}$. (justifique sua resposta)

   Temos que $\{2\}$ é uma base para $\mathbb{V}$ pois,

   Se $\alpha \cdot 2 = 0_{\mathbb{V}}$ então, $2^{\alpha} = 1$, de onde segue que $\alpha \cdot \ln(2) = \ln(1) = 0$ logo, $\alpha = 0$. Assim, $\{2\}$ é L.I.

   Analogamente, seja $v \in \mathbb{V}$. Temos que $v = 2^{\alpha}$ com $\alpha = \log_2(v)$. Portanto, $v = \alpha \cdot 2$. Assim, $\{2\}$ gera o espaço $\mathbb{V}$.

2. Seja $\mathbb{W} = \{\begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq M_{\mathbb{R}}(2,2)$.

   a. Mostre que $\mathbb{W}$ é subespaço de $\mathbb{V}$;

   Temos que,

   1) $0_{M_{\mathbb{R}}(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ com $a = b = 0$. Portanto, $0_{M_{\mathbb{R}}(2,2)} \in \mathbb{W}$.

   2) Dados $A = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+2b_1 \\ 0 & a_1-b_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2a_2 & a_2+2b_2 \\ 0 & a_2-b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$ temos que,

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+2b_1 \\ 0 & a_1-b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 & a_2+2b_2 \\ 0 & a_2-b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1+2a_2 & (a_1+2b_1)+(a_2+2b_2) \\ 0+0 & (a_1-b_1)+(a_2-b_2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2(a_1+a_2) & (a_1+a_2)+2(b_1+b_2) \\ 0 & (a_1+a_2)-(b_1+b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   com $a = a_1 + a_2$ e $b = b_1 + b_2$. Portanto, $A + B \in \mathbb{W}$.

   3) Dados $A = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+2b_1 \\ 0 & a_1-b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que,

   $\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+2b_1 \\ 0 & a_1-b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 2a_1 & \alpha \cdot (a_1+2b_1) \\ \alpha \cdot 0 & \alpha \cdot (a_1-b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$,
   com $a = \alpha \cdot a_1$ e $b = \alpha \cdot b_1$. Portanto, $\alpha \cdot A \in \mathbb{W}$.

Segue de 1), 2) e 3) que $\mathbb{W}$ é subespaço de $M_{\mathbb{R}}(2,2)$.

b. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? (justifique)

Temos que $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, com $a = 0$ e $b = -1$. Logo, $M \in \mathbb{W}$.

c. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? (justifique)

Para que a matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pertença a $\mathbb{W}$, devem existir $a, b \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

ou seja, $2a = 0$, $a + 2b = 2$ e $a - b = 3$. Devemos ter então que, $a = 0$, $b = 1$ e $b = -3$, mas isso é impossível pois $1 \neq -3$. Logo, $N \notin \mathbb{W}$.

d. Determine a dimensão de $\mathbb{W}$. (justifique)

Dado $A = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$ temos que,

$$A = \begin{pmatrix} 2a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Logo, $\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$

Temos também que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I. pois, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então, $2\alpha = 0$, $\alpha + 2\beta = 0$ e $\alpha - \beta = 0$. Mas disso segue que $\alpha = \beta = 0$.

Desta forma, como E é L.I. e gera $\mathbb{W}$ segue que E é uma base para $\mathbb{W}$. Logo, $\dim(\mathbb{W}) = 2$.

3. Sejam $E = \{(1,0),(0,1)\}, F = \{(-1,1),(1,1)\}, G = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $H = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

   a. Determine as matrizes de mudança de base,

      i) $[I]^F_E$; $[I]^F_E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

      ii) $[I]^E_F$; $[I]^E_F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

      iii) $[I]^E_G$; $[I]^E_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

      iv) $[I]^E_H$. $[I]^E_H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   b. Determine as coordenadas de $v = (3,-2)$ em relação às bases,

i) E; $[v]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

ii) F; $[v]_F = [I]_F^E \cdot [v]_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

iii) G; $[v]_G = [I]_G^E \cdot [v]_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+2}{2} \end{pmatrix}$

iv) H. $[v]_H = [I]_H^E \cdot [v]_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

c. As coordenadas de um vetor v em relação à base F são dadas por $[v]_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quais são as coordenadas de v em relação à base,

i) E; $[v]_E = [I]_E^F \cdot [v]_F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

ii) G; $[v]_G = [I]_G^E \cdot [v]_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} - 2 \end{pmatrix}$

iii) H. $[v]_H = [I]_H^E \cdot [v]_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial.

a. Mostre que, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto LD de $\mathbb{V}$ então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ é também um conjunto LD de $\mathbb{V}$, qualquer que seja o vetor $w \in \mathbb{V}$;

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD, existem números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

Assim, temos que,

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n + \beta_{n+1} w = 0_{\mathbb{V}}$$

sendo $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, ... , $\beta_n = \alpha_n$ e $\beta_{n+1} = 0$. Como os números $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ não são todos nulos, segue que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ é LD.

b. Mostre que, se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI então $\beta - \{v_j\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ é também um conjunto LI de $\mathbb{V}$, qualquer que seja $j = 1, 2, \ldots, n$.

Se $\beta - \{v_j\}$ não é LI, então $\beta - \{v_j\}$ é LD. Segue então do item a) (tomando $w = v_j$) que β é LD, o que é um absurdo, pois por hipótese, β é LI. Portanto, conclui-se que $\beta - \{v_j\}$ é LI qualquer que seja $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

• Demonstração alternativa (direta)

Suponha que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI e suponha que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_n v_n = O_{\mathbb{V}}$$

segue então que, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + 0 v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_n v_n = O_{\mathbb{V}}$, ou seja, fazendo $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \cdots, \beta_{j-1} = \alpha_{j-1}, \beta_j = 0, \beta_{j+1} = \alpha_{j+1}, \ldots, \beta_n = \alpha_n$ teremos

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_j v_j + \beta_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \beta_n v_n = O_{\mathbb{V}}$$

como $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI, conclui-se que $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Logo, o conjunto $\beta - \{v_j\}$ é LI.

BOA PROVA