Segunda Prova de Álgebra Linear 1 - 08.013-6 Turma C
07-11-2017

Nome:____ RA: ____________

1. Dê a definição de:

a. Transformação linear de um espaço vetorial real $\mathbb{V}$ em um espaço vetorial real $\mathbb{W}$;

Uma transformação linear de um espaço vetorial real $\mathbb{V}$ em um espaço vetorial real $\mathbb{W}$ é uma função $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ com domínio $\mathbb{V}$ e contradomínio $\mathbb{W}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para quaisquer $v, w \in \mathbb{V}$;

2) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e para qualquer $v \in \mathbb{V}$.

b. Núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$;

Dada uma transformação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, define-se o núcleo de T como sendo o subconjunto $\text{Ker}(T) = \{v \in \mathbb{V} : \ T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$.

c. Imagem de uma transformação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$;

Dada uma transformação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, define-se a imagem de T como sendo o subconjunto $\text{Im}(T) = \{w \in \mathbb{W} : \ w = T(v) \text{ para algum } v \in \mathbb{V}\}$.

d. Matriz $[T]^{\alpha}_{\beta}$ de uma transformação linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, com respeito às bases ordenadas α de $\mathbb{V}$ e β de $\mathbb{W}$;

$[T]^{\alpha}_{\beta}$ é definida como sendo a única matriz $m \times n$ ($m = \dim(\mathbb{W})$ e $n = \dim(\mathbb{V})$) tal que:

$$[T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [v]_{\alpha} = [T(v)]_{\beta} \ \text{ para qualquer } v \in \mathbb{V}$$

Se $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ então a j-ésima coluna de $[T]^{\alpha}_{\beta}$ é composta por $[T(v_j)]_{\beta}$

e. Autovalor de um operador linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$;

Dado um operador linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, um autovalor de T é definido como sendo um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe $v \in \mathbb{V} - \{0_{\mathbb{V}}\}$ que satisfaz, $T(v) = \lambda \cdot v$.

f. Autovetor de um operador linear $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$;

Um vetor não nulo $v \in \mathbb{V}$ é chamado autovetor de T se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda \cdot v$.

2. Sejam $\alpha = \{(1, 1, 0), (0, -1, 1), (1, 2, 3)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 2), (2, -1)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear tal que $[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, calcule $[T(2, 2, 4)]_{\gamma}$, sendo $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base ordenada canônica de $\mathbb{R}^2$.

Precisamos determinar as coordenadas de $(2, 2, 4)$ com respeito à base ordenada α. Se $(2, 2, 4) = a(1, 1, 0) + b(0, -1, 1) + c(1, 2, 3)$ então, $a + c = 2$, $a - b + 2c = 2$ e $b + 3c = 4$. Fazendo as contas conclui-se que $a = b = c = 1$. Logo,

$$[T(2, 2, 4)]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta} \cdot [(2, 2, 4)]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desta forma, $T(2,2,4) = 7\cdot(1,2) + 0\cdot(2,-1) = (7,14)$. Portanto, $\boxed{[T(2,2,4)]_\gamma = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}}$

3. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ o operador linear definido por $T(x,y,z,w,t) = (x, 2y, -4z, 9w, 9t)$.

   a. Calcule $[T]_\alpha^\alpha$, sendo $\alpha = \{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$;

   Temos que $T(1,0,0,0,0) = (1,0,0,0,0)$, $T(0,1,0,0,0) = (0,2,0,0,0)$, $T(0,0,1,0,0) = (0,0,-4,0,0)$, $T(0,0,0,1,0) = (0,0,0,9,0)$ e $T(0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,9)$. Logo,

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

   b. Determine o polinômio minimal $M_T(x)$ de T.

   Pelo item anterior temos que T é diagonalizável e seus autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -4$ e $\lambda_4 = 9$. Logo, o polinômio minimal de T é dado por $\boxed{M_T(x) = (x-1)(x-2)(x+4)(x-9)}$

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o único operador linear tal que $T(1,1) = (0,0)$ e $T(2,-3) = (1,0)$.

   a. Determine o polinômio característico $P_T(x)$ de T;

   Determinemos primeiramente uma expressão para $T(x,y)$. Temos que, se $(x,y) = \lambda(1,1) + \mu(2,-3)$ então $\lambda + 2\mu = x$ e $\lambda - 3\mu = y$. Logo, $5\mu = x - y$ portanto, $\mu = \frac{x-y}{5}$ e $\lambda = y + 3\mu$, ou seja, $\lambda = \frac{3x+2y}{5}$. Desta forma,

$$T(x,y) = T(\frac{3x+2y}{5}\cdot(1,1) + \frac{x-y}{5}\cdot(2,-3)) = \frac{3x+2y}{5}\cdot T(1,1) + \frac{x-y}{5}\cdot T(2,-3) = (\frac{x-y}{5}, 0)$$

   Considerando a base ordenada canônica $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ temos que $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Desta forma, o polinômio característico de T é dado por,

$$P_T(x) = \det(xI_{2\times 2} - [T]_\beta^\beta) = \det\begin{pmatrix} x - \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & x \end{pmatrix} = x(x - \frac{1}{5})$$

   • Resolução alternativa

   Consideremos a base ordenada $\delta = \{(1,1),(2,-3)\}$. Temos que,

   $T(1,1) = (0,0) = 0(1,1) + 0(2,-3)$ e $T(2,-3) = (1,0) = p(1,1) + q(2,-3)$.

   Fazendo as contas, conclui-se que $p = \frac{3}{5}$ e $q = \frac{1}{5}$. Assim, $[T]_\delta^\delta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Portanto, o polinômio característico de T é dado por,

$$P_T(x) = \det\begin{pmatrix} x & -\frac{3}{5} \\ 0 & x - \frac{1}{5} \end{pmatrix} = x(x - \frac{1}{5})$$

   b. T é diagonalizável? Se a resposta for afirmativa, determine uma base ordenada α de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. Se a resposta for negativa, calcule o polinômio minimal $M_T(x)$ de T.

O polinômio $x(x-\frac{1}{5})$ possui 0 e $\frac{1}{5}$ como raízes, anula $[T]_\alpha^\alpha$ (pois é o polinômio característico de T) e é o polinômio mônico de menor grau com essas propriedades. Logo, esse polinômio é o polinômio minimal de T. Assim, $M_T(x) = x^{m_1}(x-\frac{1}{5})^{m_2}$, com $m_1 = m_2 = 1$. Portanto, T é diagonalizável.

Notamos que, $T(1,1) = (0,0) = 0 \cdot (1,1)$ e $T(1,0) = (\frac{1-0}{5}, 0) = (\frac{1}{5}, 0) = \frac{1}{5} \cdot (1,0)$. Assim, uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T é dada por $\alpha = \{(1,1),(1,0)\}$.

• Resolução alternativa

Pelo item a) os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \frac{1}{5}$. Como T possui dois autovalores distintos e $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, segue que T é diagonalizável. Determinemos uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, formada por autovetores de T.

- Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo esse sistema linear, chegamos que $x = y$. Logo o autoespaço dos autovetores de T, associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é dado por $\mathbb{V}_{T,0} = [(1,1)]$.

- Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = \frac{1}{5}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5}-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo esse sistema linear, chegamos que $y = 0$. Logo o autoespaço dos autovetores de T, associados ao autovalor $\lambda_2 = \frac{1}{5}$ é dado por $\mathbb{V}_{T,\frac{1}{5}} = [(1,0)]$.

Assim, uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, formada por autovetores de T é dada por $\alpha = \{(1,1),(1,0)\}$.

5. Seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um operador linear definido no espaço vetorial $\mathbb{V} \neq \{0_\mathbb{V}\}$. Mostre que

$$T \text{ é injetor } \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ não é autovalor de } T$$

($\Rightarrow$) Suponhamos que T seja um operador linear injetor, então $\mathrm{Ker}(T) = \{0_\mathbb{V}\}$. Logo, se $v \in \mathbb{V}$ é tal que $T(v) = 0 \cdot v = 0_\mathbb{V}$ então $v = 0_\mathbb{V}$. Desta forma, não existe vetor não nulo $w \in \mathbb{V}$ tal que, $T(w) = 0 \cdot w$, ou seja, 0 não é autovalor de T.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que 0 não é autovalor de T. Então, se $T(v) = 0 \cdot v$ devemos ter que $v = 0_\mathbb{V}$ (pois se fosse $v \neq 0_\mathbb{V}$ então 0 seria autovalor de T). Assim, se $T(v) = 0_\mathbb{V} = 0 \cdot v$ então $v = 0_\mathbb{V}$, ou seja, se $v \in \mathrm{Ker}(T)$, então $v = 0_\mathbb{V}$. Portanto, $\mathrm{Ker}(T) = \{0_\mathbb{V}\}$ e consequentemente, T é injetor.

BOA PROVA