Matemática Discreta – Turma B – 2019

<u>Relações</u>

1) Defina o que é uma relação reflexiva. Dê um exemplo. Quando ela é irreflexiva?

2) Defina o que é uma relação simétrica. Dê um exemplo.

3) Defina o que é uma relação anti-simétrica. Dê um exemplo.

4) Defina o que é uma relação transitiva. Dê um exemplo.

5) Quantas relações binárias em A existem se |A| = n? Explique seu raciocínio.

6) Seja A = {1,2,3,4,5,6} e B = {1,2,3,4}. Define a relação R = {(a,b): (a – b) mod 2 = 0}.

a) Essa relação é reflexiva? Justifique.
b) Essa relação é simétrica? Justifique.
c) Essa relação é anti-simétrica? Justifique.
d) Essa relação é transitiva? Justifique.

7) Seja A = {a, b, c, d}. Caracterize:

a) uma relação que seja ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica, mas não reflexiva
b) uma relação reflexiva que seja uma função
c) uma relação R que satisfaça $R \cap R^{-1} = \emptyset$
d) uma relação R que satisfaça $R = R^{-1}$

8) Dê exemplos de relações definidas no conjunto A = {1, 2, 3}:

a) reflexiva, transitiva, mas não simétrica
b) simétrica e transitiva, mas não reflexiva
c) simétrica e anti-simétrica

9) Para cada uma das relações binárias a seguir, definidas no conjunto A = {1, 2, 3, 4}, explique porque ela é reflexiva, irreflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva:

a) R_1 = {(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}
b) R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
c) R_3 = {(2, 4), (4, 2)}
d) R_4 = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}
e) R_5 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
f) R_6 = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)}

10) Digamos que dois números inteiros estejam próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2. Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por R essa relação “estar próximo de”.

a) Escreva R como um conjunto R = {(a, b): …}.
b) R é reflexiva? Justifique.
c) R é simétrica ou antissimétrica? Justifique.
d) R é transitiva? Justifique.

11) Sejam R = {(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)} e S = {(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)} duas relações. Calcule a composição de R com S, $S \circ R$, e a composição de S com R, $R \circ S$.

12) Seja A = {1,2,3} e a relação binária em A R = {(1,2), (1,3), (2,3)}. Calcule:

a) a relação inversa R^{-1}
b) $R^{-1} \circ R$
c) $R \circ R^{-1}$

13) Seja R = {(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)}. Encontre R^n, para n = 2, 3, 4, …

14) Seja R = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4), (3,5), (4,2), (4,5), (5,1), (5,2), (5,4)} uma relação binária definida em A = {1,2,3,4,5}. Encontre:

a) R^2
b) R^3
c) R^4

15) Prove que uma relação binária R é transitiva se e somente se $R \circ R \subseteq R$.

16) Prove por indução que uma relação binária R é transitiva se e somente se $R^n \subseteq R$, $\forall n \geq 1$.

17) Explique porque o fecho transitivo de uma relação binária R é dado por $R^* = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$.

18) Prove que para qualquer relação binária R, o fecho transitivo R^* é uma relação transitiva.

19) Mostre que para qualquer relação binária R, toda relação transitiva S que contém R, contém o fecho transitivo R* de R. Em outras palavras, prove que o fecho transitivo R* é a menor relação que contém R e é transitiva.

20) O que é uma relação de equivalência?

21) Seja $S = \left\{ \frac{x}{y} : x, y \in Z, y \neq 0 \right\}$. Defina a relação $R \subseteq S \times S$ como:

$$\frac{x}{y} R \frac{z}{w} \Leftrightarrow xw = yz$$

R define o que conhecemos por frações equivalentes. Prove que R é relação de equivalência.

22) Dado o conjunto A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}:

a) Defina a relação congruência em módulo 2, dada por: $aRb \Leftrightarrow (a-b) \ mod \ 2 = 0$, através de um conjunto de pares ordenados. Mostre que R é uma relação de equivalência. Quem são as classes de equivalência de R?
b) Defina a relação congruência em módulo 3, dada por: $aRb \Leftrightarrow (a-b) \ mod \ 3 = 0$, através de um conjunto de pares ordenados. Mostre que R é uma relação de equivalência. Quem são as classes de equivalência de R?

23) Seja m um inteiro maior que 1. A relação congruência em módulo m, dada por:

$$R=\{(a,b):(a-b)\ \ mod\ \ m=0\}$$

Prove que R é uma relação de equivalência. Quantas são as classes de equivalência? Explique.

24) Seja $S=\{(x,y)\in R\times R : x-y\in Q\}$. Prove que S é uma relação de equivalência.

25) Seja R uma relação sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos definida por:

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$$

a) Prove que R é uma relação de equivalência.
b) Descreva a classe de equivalência (1,2) segundo R.

26) Seja R uma relação sobre o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos definida por:

$$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c$$

a) Prove que R é uma relação de equivalência.
b) Descreva a classe de equivalência (3,1) segundo R.
c) Descreva as classes de equivalência de R.

27) Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A.

a) Mostre que para $a,b\in A$ arbitrários, $aRb\rightarrow[a]_R=[b]_R$. Em outras palavras, se a e b estão relacionados, então ambos pertencem a mesma classe de equivalência.
b) Mostre que para $a,b\in A$ arbitrários, $[a]_R=[b]_R\rightarrow[a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$. Em outras palavras, se a e b estão na mesma classe de equivalência, então a intersecção delas não é vazia.
c) Mostre que para $a,b\in A$ arbitrários, $[a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset\rightarrow aRb$. Em outras palavras, se a intersecção das classes de equivalência de a e b não é vazia, então a e b estão relacionados.
d) Mostre que as classes de equivalência de R formam uma partição de A.

28) Seja P uma partição de um conjunto A e seja S a relação

$$S=\{(x,y):\exists C\in P\ \ com\ \ x\in C\wedge y\in C\}$$

ou seja, xSy se e somente se x está no mesmo bloco que y. Prove que S é uma relação de equivalência.

29) O que é uma relação de ordem parcial?

30) Seja A = R (conjunto dos números reais) e $R=\{(x,y)\in A\times A : x\leq y\}$. Prove que R é uma relação de ordem parcial (ROP).

31) Seja A um conjunto finito e seja 2^A o conjunto potência de A. Defina a relação S como:

$$R=\{(X,Y)\in 2^A\times 2^A : X\subseteq Y\}$$

Mostre que S é uma relação de ordem parcial.

32) Seja A = {1,2,3,4,5,6,12} e R uma relação em A dada por:

$$xRy \Leftrightarrow x \quad divide \quad y$$

a) Defina os pares ordenados que compõem R.
b) R é uma relação de ordem parcial? Prove sua resposta.

33) Seja A um conjunto qualquer e seja a relação $\leq_2$ definida em $A \times A$ como:

$$(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2) \Leftrightarrow (a_1 < b_1) \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$$

A relação $\leq_2$ é conhecida por ordenação lexicográfica e é muito utilizada sempre que precisamos comparar pares ordenados. Mostre que $\leq_2$ definida em $N \times N$ é uma ROP.

34) Seja A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e a relação R dada por:

R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,7),
(2,2), (2,3), (2,4), (2,5),
(3,3), (3,4), (3,5),
(4,4), (4,5),
(5,5),
(6,6), (6,9), (6,5),
(7,7), (7,4), (7,4),
(8,8), (8,7), (8,5),
(9,9), (9,5)}

a) R é uma relação de ordem parcial? Prove sua resposta.
b) Desenhe o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (poset) (A,R).
c) Há um elemento mínimo em (A,R)? Há um elemento máximo em (A,R)?
d) Quem são os elementos minimais de (A,R)? e os maximais?

35) Seja A = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} e seja a relação

$$R = \{(a, b) \in A \times A : a \quad divide \quad b\}$$

Desenhe o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (A,R).

36) Seja A = {1, 2, 3} e 2^A o conjunto potência de A. Seja a relação

$$R = \{(X, Y) \in 2^A \times 2^A : X \subseteq Y\}$$

Desenhe o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (A,R).

37) Seja $A = N - \{0,1\}$ e R a relação ‘é divisor próprio de’, isto é:

$$R = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \wedge (\exists k \in N)\, y = kx\}$$

a) Determine alguns pares ordenados que compõem R.
b) Quem são os elementos minimais de R? Explique.

38) Prove ou refute: Não existe um conjunto parcialmente ordenado (A,R) que contém um único elemento minimal que não seja mínimo.

39) Seja A = {2, 3, 4, 6, 8} e a relação $R=\{(x,y): x\in A \wedge y\in A \wedge x \;\; divide \;\; y\}$. Desenhe o diagrama de Hasse de (A,R). Responda:

a) Quem é o máximo?
b) Quem é o mínimo?
c) Quem é (são) o(s) elemento(s) maximais?
d) Quem é (são) o(s) elemento(s) minimais?
e) Calcule $4\wedge 6, 2\vee 3, 4\vee 6, 2\wedge 6, 2\vee 6$.

40) Quais dos conjuntos parcialmente ordenados a seguir são reticulados? Justifique sua resposta.