

TD 1 : LTL

Exercice 1

Exprimez chacune des phrases ci-dessous en une formule LTL (les propositions atomiques existantes pour chaque cas sont données entre parenthèses). À chaque fois, donnez une trace satisfaisant la formule que vous avez écrite, et une trace la violant.

- (a) La propriété p arrive un jour ($AP = \{p\}$)
- (b) La propriété p est toujours vraie ($AP = \{p\}$)
- (c) La propriété p est vraie à l'instant 1 ($AP = \{p\}$)
- (d) La propriété p est stable (si elle arrive, elle demeure) ($AP = \{p\}$)
- (e) Toute requête sera un jour satisfaite ($AP = \{\text{request}, \text{grant}\}$).
- (f) Toute requête sera un jour satisfaite et aucune requête supplémentaire n'arrive avant la satisfaction de cette requête ($AP = \{\text{request}, \text{grant}\}$)
- (g) À chaque fois que de l'argent a été retiré, le bon code pin a été fourni auparavant ($AP : \{\text{cash_withdraw}, \text{pin_ok}\}$).
- (h) Deux processus ne sont jamais en section critique en même temps ($AP = \{\text{crit1}, \text{crit2}\}$).
- (i) À chaque fois qu'un processus demande l'accès à la section critique, il l'obtiendra un jour dans le futur ($AP = \{\text{ask_crit}, \text{acc_crit}\}$).
- (j) Une fois que le feu est vert, il ne peut pas devenir rouge immédiatement après ($AP = \{\text{red}, \text{green}\}$).
- (k) À chaque fois que le feu est rouge, il deviendra vert un jour dans le futur ($AP = \{\text{red}, \text{green}\}$).
- (l) Lorsque le feu est vert, il deviendra rouge après avoir été orange ($AP = \{\text{red}, \text{green}, \text{orange}\}$).
- (m) Lorsque le feu est vert, il ne deviendra rouge qu'après avoir été orange ($AP = \{\text{red}, \text{green}, \text{orange}\}$).

Exercice 2

On considère le préfixe de trace suivant :

$$\emptyset, \{p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{p\}, \emptyset, \{p, q\}$$

Déterminez, pour chaque position de ce préfixe de trace, si les formules suivantes sont vérifiées ou non :

- (a) $p \wedge q$
- (b) $F(p \wedge q)$
- (c) $p \cup q$
- (d) $F p \wedge F q$
- (e) $G(p \vee q)$

Exercice 3

Les équivalences suivantes sont-elles vraies? Si oui, démontrez-le, sinon donnez une trace contre-exemple.

- (a) $G(F p \wedge F q)$ et $GF p \wedge GF q$
- (b) $F(G p \wedge G q)$ et $FG p \wedge FG q$
- (c) $G(F p \vee F q)$ et $GF p \vee GF q$.
- (d) $F(G p \vee G q)$ et $FG p \vee FG q$.

- (e) $\text{GF}(p \wedge q)$ et $\text{GF } p \wedge \text{GF } q$
- (f) $\text{GF}(p \vee q)$ et $\text{GF } p \vee \text{GF } q$
- (g) $\text{FG}(p \wedge q)$ et $\text{FG } p \wedge \text{FG } q$
- (h) $\text{FG}(p \vee q)$ et $\text{FG } p \vee \text{FG } q$

Exercice 4

On considère le préfixe de trace suivant :

$$\{q\}\{q\}\{p\}\{p\}\{r\}\{q, r\}q\{p\}\{p\}\{r\}$$

- (a) Déterminer quelles sont les formules qui sont vraies sur le préfixe de trace ci-dessus :
 1. $\text{G } p \vee \text{G } \neg p$
 2. $\text{F } p \wedge \text{F } \neg p$
 3. $\text{F}(p \wedge \text{X } q)$
 4. $\text{F } p \wedge \text{X } q$
 5. $(\text{G}(p \rightarrow q)) \rightarrow \text{G } r$
- (b) Pour chacune des traces ci dessus, proposez deux traces modèles de cette formule.

Exercice 5

On introduit un nouvel opérateur, B , pour *Before*, défini ainsi : $t, i \models \varphi \text{B} \psi$ ssi pour tout $j \geq i$ tel que $t, j \models \psi$, il existe $i \leq k < j$ tel que $t, k \models \varphi$.

- (a) Donnez une trace (ou un préfixe de trace) qui satisfait $p \text{B} q$.
- (b) Donnez une trace t (ou un préfixe de trace) tel qu'il existe $i \geq 0$ tel que $t, i \models q$ mais qui ne satisfait pas $p \text{B} q$.
- (c) Exprimez une formule équivalente à $\varphi \text{B} \psi$, en n'utilisant que des opérateurs LTL définis en cours. Prouvez que les deux formules sont bien équivalentes.

Exercice 6

- (*) Prouvez la loi d'expansion $\varphi_1 \text{R } \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge (\varphi_1 \vee \text{X}(\varphi_1 \text{R } \varphi_2))$