

Sorbonne Université  
M2 Informatique, Spécialité SAR  
Algorithmique Répartie Avancée  
Année universitaire 2021/2022

# GRAPHES DYNAMIQUES

Swan DUBOIS

# Contexte

- Graphe :
  - Outil mathématique
  - Modèle pour un ensemble d'acteurs (nœuds, sommets) avec des relations binaires (arcs, arêtes)
- Théorie très riche avec nombreux concepts bien définis
- Modèle général :
  - Tâches/travailleurs et possibilité d'affectations
  - Danseurs/danseuses et préférence de partenaires
  - Dépendances entre tâches
  - Réseau (informatique, social, professionnel...)

# Contexte

- Graphe :
  - Outil mathématique
  - Modèle pour un ensemble d'acteurs (nœuds, sommets) avec des relations binaires (arcs, arêtes)
- Théorie très riche avec nombreux concepts bien définis
- Modèle général :
  - Tâches/travailleurs et possibilité d'affectations
  - Danseurs/danseuses et préférence de partenaires
  - Dépendances entre tâches
  - Réseau (informatique, social, professionnel...)

# Contexte

- Graphe :
  - Outil mathématique
  - Modèle pour un ensemble d'acteurs (nœuds, sommets) avec des relations binaires (arcs, arêtes)
- Théorie très riche avec nombreux concepts bien définis
- Modèle général :
  - Tâches/travailleurs et possibilité d'affectations
  - Danseurs/danseuses et préférence de partenaires
  - Dépendances entre tâches
  - **Réseau** (informatique, social, professionnel...)

# Contexte

- Algorithmique répartie “à la Lamport” :
  - Tout processus peut communiquer avec tout autre tout le temps
  - Modèle = graphe complet
- Algorithmique répartie avec point de vue “réseaux” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble tout le temps
  - Modèle = graphe quelconque
- Algorithmique répartie pour réseaux “modernes” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble à certains moments
  - Modèle = ???

# Contexte

- Algorithmique répartie “à la Lamport” :
  - Tout processus peut communiquer avec tout autre tout le temps
  - Modèle = graphe complet
- Algorithmique répartie avec point de vue “réseaux” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble tout le temps
  - Modèle = graphe quelconque
- Algorithmique répartie pour réseaux “modernes” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble à certains moments
  - Modèle = ???

# Contexte

- Algorithmique répartie “à la Lamport” :
  - Tout processus peut communiquer avec tout autre tout le temps
  - Modèle = graphe complet
- Algorithmique répartie avec point de vue “réseaux” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble tout le temps
  - Modèle = graphe quelconque
- Algorithmique répartie pour réseaux “modernes” :
  - Tout processus peut communiquer avec un sous-ensemble à certains moments
  - Modèle = ???

# Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
- Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
- Distance = longueur du plus court chemin
- Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...



# Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
- Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
- Distance = longueur du plus court chemin
- Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...

# Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
  - Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
  - Distance = longueur du plus court chemin
  - Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...

# Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
- Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
  - Distance = longueur du plus court chemin
  - Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...

# Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
- Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
- Distance = longueur du plus court chemin
- Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...

# Besoin de modèle/théorie pour écrire un algo ?

- OUI !
- Besoin d'accord sur les définitions pour écrire/comprendre l'algorithme
- Mais surtout pour la preuve et l'analyse
- Exemple : preuve par récurrence sur distance à un initiateur
- Distance = longueur du plus court chemin
- Chemin et longueur non clairement définis en dynamique...

# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |

# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |

# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |



# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |

# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |

# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |

# Toutes les dynamicités se ressemblent-elles ?

- Mobilité vs. Dynamicité ?
  - Mobilité  $\Rightarrow$  Dynamicité
  - Dynamicité  $\nRightarrow$  Mobilité
- Churn vs. Connexion/Déconnexion des nœuds ?
  - Churn  $\Rightarrow$  Connexion/Déconnexion des nœuds
  - Connexion/Déconnexion des nœuds  $\nRightarrow$  Churn
- Types de dynamicité ?

| Dynamicité contrôlée                        | Dynamicité subie<br>prévisible        | Dynamicité subie<br>imprévisible  |
|---|---------------------------------------|---|
| Réseau robots<br>Réseau capteurs/actuateurs | Réseau satellites<br>Réseau bus/métro | Réseau ad-hoc<br>Réseau véhiculaire<br>Réseau téléphones<br>Réseau capteurs |

# Modèles

- Idée = un graphe “qui bouge avec le temps”
- Nombreux modèles issus de nombreux cadres applicatifs distincts
- Aucun modèle ne s'impose vraiment
- Théorie encore jeune et peu développée (comparée aux graphes statiques)

# Modèles

- Idée = un graphe “qui bouge avec le temps”
- Nombreux modèles issus de nombreux cadres applicatifs distincts
- Aucun modèle ne s'impose vraiment
- Théorie encore jeune et peu développée (comparée aux graphes statiques)

# Modèles

- Idée = un graphe “qui bouge avec le temps”
- Nombreux modèles issus de nombreux cadres applicatifs distincts
- Aucun modèle ne s'impose vraiment
- Théorie encore jeune et peu développée (comparée aux graphes statiques)

# Modèles

- Idée = un graphe “qui bouge avec le temps”
- Nombreux modèles issus de nombreux cadres applicatifs distincts
- Aucun modèle ne s'impose vraiment
- Théorie encore jeune et peu développée (comparée aux graphes statiques)



# Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps discret  $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Graphe évolutif = une suite de sous graphe de  $G$   
 $\mathcal{G} = G_0, G_1, G_2, G_3, \dots$  avec  $\forall i \in T, G_i \subseteq G$

# Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps discret  $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Graphe évolutif = une suite de sous graphe de  $G$   
 $\mathcal{G} = G_0, G_1, G_2, G_3, \dots$  avec  $\forall i \in T, G_i \subseteq G$

# Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps discret  $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Graphe évolutif = une suite de sous graphe de  $G$   
 $\mathcal{G} = G_0, G_1, G_2, G_3, \dots$  avec  $\forall i \in T, G_i \subseteq G$

## Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps discret  $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Graphe évolutif = une suite de sous graphe de  $G$   
 $\mathcal{G} = G_0, G_1, G_2, G_3, \dots$  avec  $\forall i \in T, G_i \subseteq G$

# Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle peu compacte et pratique
- Adapté systèmes synchrones

# Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle peu compacte et pratique
- Adapté systèmes synchrones

# Modèles : Graphes évolutifs/Evolving graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle peu compacte et pratique
- Adapté systèmes synchrones

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps continu  $T = \mathbb{R}^+$
- GVT = étiquetage de  $G$  avec une fonction de présence  
 $\mathcal{G} = (G, \rho)$  avec  $\rho : E \times T \rightarrow \{0, 1\}$  fonction de présence des arêtes



# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps continu  $T = \mathbb{R}^+$
- GVT = étiquetage de  $G$  avec une fonction de présence  
 $\mathcal{G} = (G, \rho)$  avec  $\rho : E \times T \rightarrow \{0, 1\}$  fonction de présence des arêtes

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps continu  $T = \mathbb{R}^+$
- GVT = étiquetage de  $G$  avec une fonction de présence  
 $\mathcal{G} = (G, \rho)$  avec  $\rho : E \times T \rightarrow \{0, 1\}$  fonction de présence des arêtes

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Ensemble de sommets  $V$  fixe
- Un graphe  $G = (V, E)$
- Temps continu  $T = \mathbb{R}^+$
- GVT = étiquetage de  $G$  avec une fonction de présence  
 $\mathcal{G} = (G, \rho)$  avec  $\rho : E \times T \rightarrow \{0, 1\}$  fonction de présence des arêtes

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle compacte mais peu intuitive
- Adapté systèmes asynchrones
- Hypothèse courante : toute apparition d'une durée inférieure à la latence est ignorée
- Facile à enrichir : fonctions de présence des nœuds, de latence de communication, ...

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle compacte mais peu intuitive
- Adapté systèmes asynchrones
- Hypothèse courante : toute apparition d'une durée inférieure à la latence est ignorée
- Facile à enrichir : fonctions de présence des nœuds, de latence de communication, ...

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle compacte mais peu intuitive
- Adapté systèmes asynchrones
- Hypothèse courante : toute apparition d'une durée inférieure à la latence est ignorée
- Facile à enrichir : fonctions de présence des nœuds, de latence de communication, ...

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle compacte mais peu intuitive
- Adapté systèmes asynchrones
- Hypothèse courante : toute apparition d'une durée inférieure à la latence est ignorée
- Facile à enrichir : fonctions de présence des nœuds, de latence de communication, ...

# Modèles : Graphe variant dans le temps/Time-Varying graphs

- Simple, généralisation “naturelle” du statique
- Représentation visuelle compacte mais peu intuitive
- Adapté systèmes asynchrones
- Hypothèse courante : toute apparition d'une durée inférieure à la latence est ignorée
- Facile à enrichir : fonctions de présence des nœuds, de latence de communication, ...



# Adaptation/Généralisation de la théorie des graphes

- Aussi peu que possible...
- Mais quasi obligatoire
- Parfois simple : voisinage de  $v$ 
  - Graphe statique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$
  - Graphe dynamique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$  à un instant  $t$
  - Tout devient fonction du temps !
- Parfois complexe et sujet à débat : connexité, ensemble couvrants, leader...

# Adaptation/Généralisation de la théorie des graphes

- Aussi peu que possible...
- Mais quasi obligatoire
- Parfois simple : voisinage de  $v$ 
  - Graphe statique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$
  - Graphe dynamique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$  à un instant  $t$
  - Tout devient fonction du temps !
- Parfois complexe et sujet à débat : connexité, ensemble couvrants, leader...

# Adaptation/Généralisation de la théorie des graphes

- Aussi peu que possible...
- Mais quasi obligatoire
- Parfois simple : voisinage de  $v$ 
  - Graphe statique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$
  - Graphe dynamique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$  à un instant  $t$
  - Tout devient fonction du temps !
- Parfois complexe et sujet à débat : connexité, ensemble couvrants, leader...

# Adaptation/Généralisation de la théorie des graphes

- Aussi peu que possible...
- Mais quasi obligatoire
- Parfois simple : voisinage de  $v$ 
  - Graphe statique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$
  - Graphe dynamique : ensemble de sommets partageant une arête avec  $v$  à un instant  $t$
  - Tout devient fonction du temps !
- Parfois complexe et sujet à débat : connexité, ensemble couvrants, leader...

# Degré maximal d'un graphe dynamique

- Graphe statique : Degré d'un nœud  $deg_v =$  nombre de voisins
- Graphe dynamique : Degré d'un nœud  $deg_v(t) =$  nombre de voisins à un instant  $t$
- Graphe statique : Degré maximal  $\Delta_G = \max_{v \in V} \{deg_v\}$
- Graphe dynamique : Degré maximal ?
  - Option 1 : fonction du temps  $\Delta_G(t) = \max_{v \in V} \{deg_v(t)\}$
  - Option 2 : valeur unique  $\Delta_G = \max_{v \in V, t \in T} \{deg_v(t)\}$
  - Les deux sont valables, tout dépend de ce dont on a besoin !

# Degré maximal d'un graphe dynamique

- Graphe statique : Degré d'un nœud  $deg_v =$  nombre de voisins
- Graphe dynamique : Degré d'un nœud  $deg_v(t) =$  nombre de voisins à un instant  $t$
- Graphe statique : Degré maximal  $\Delta_G = \max_{v \in V} \{deg_v\}$
- Graphe dynamique : Degré maximal ?
  - Option 1 : fonction du temps  $\Delta_G(t) = \max_{v \in V} \{deg_v(t)\}$
  - Option 2 : valeur unique  $\Delta_G = \max_{v \in V, t \in T} \{deg_v(t)\}$
  - Les deux sont valables, tout dépend de ce dont on a besoin !

# Degré maximal d'un graphe dynamique

- Graphe statique : Degré d'un nœud  $deg_v$  = nombre de voisins
- Graphe dynamique : Degré d'un nœud  $deg_v(t)$  = nombre de voisins à un instant  $t$
- Graphe statique : Degré maximal  $\Delta_G = \max_{v \in V} \{deg_v\}$
- Graphe dynamique : Degré maximal ?
  - Option 1 : fonction du temps  $\Delta_G(t) = \max_{v \in V} \{deg_v(t)\}$
  - Option 2 : valeur unique  $\Delta_G = \max_{v \in V, t \in T} \{deg_v(t)\}$
  - Les deux sont valables, tout dépend de ce dont on a besoin !

# Empreinte

- Idée : “résumer” le graphe dynamique en un graphe statique
- $E_{\mathcal{G}} = (V, E)$  avec
  - $V$  l'ensemble de sommets de  $\mathcal{G}$
  - $E$  l'ensemble des arêtes qui sont présentes au moins une fois dans  $\mathcal{G}$
- Attention aux conclusions hâtives sur l'empreinte !
  - Exemple : degré maximal
  - $\Delta_{\mathcal{G}}$  n'est pas toujours  $\Delta_{E_{\mathcal{G}}}$  !
  - $\Delta_{\mathcal{G}} \leq \Delta_{E_{\mathcal{G}}}$



# Empreinte

- Idée : “résumer” le graphe dynamique en un graphe statique
- $E_{\mathcal{G}} = (V, E)$  avec
  - $V$  l'ensemble de sommets de  $\mathcal{G}$
  - $E$  l'ensemble des arêtes qui sont présentes au moins une fois dans  $\mathcal{G}$
- Attention aux conclusions hâtives sur l'empreinte !
  - Exemple : degré maximal
  - $\Delta_{\mathcal{G}}$  n'est pas toujours  $\Delta_{E_{\mathcal{G}}}$  !
  - $\Delta_{\mathcal{G}} \leq \Delta_{E_{\mathcal{G}}}$

# Empreinte

- Idée : “résumer” le graphe dynamique en un graphe statique
- $E_{\mathcal{G}} = (V, E)$  avec
  - $V$  l'ensemble de sommets de  $\mathcal{G}$
  - $E$  l'ensemble des arêtes qui sont présentes au moins une fois dans  $\mathcal{G}$
- Attention aux conclusions hâtives sur l'empreinte !
  - Exemple : degré maximal
  - $\Delta_{\mathcal{G}}$  n'est pas toujours  $\Delta_{E_{\mathcal{G}}}$  !
  - $\Delta_{\mathcal{G}} \leq \Delta_{E_{\mathcal{G}}}$

# Chemin

- Dans un graphe statique  $G$ , chemin de  $u$  à  $v$  = suite d'arêtes adjacentes de  $G$  menant de  $u$  à  $v$
- Longueur d'un chemin = nombre d'arêtes de ce chemin
- Notion centrale en théorie des graphes car permet de définir :
  - Distance de  $u$  à  $v$  = longueur du plus court chemin de  $u$  à  $v$
  - Excentricité de  $v$  = plus grande distance entre  $v$  et un autre nœud
  - Diamètre de  $G$  = plus grande excentricité d'un nœud de  $G$
  - Connexité = existence d'un chemin entre toute paire de nœud
  - etc.
- En algorithmique répartie, intuition d'un chemin = possibilité d'envoyer un message.

# Chemin

- Dans un graphe statique  $G$ , chemin de  $u$  à  $v$  = suite d'arêtes adjacentes de  $G$  menant de  $u$  à  $v$
- Longueur d'un chemin = nombre d'arêtes de ce chemin
- Notion centrale en théorie des graphes car permet de définir :
  - Distance de  $u$  à  $v$  = longueur du plus court chemin de  $u$  à  $v$
  - Excentricité de  $v$  = plus grande distance entre  $v$  et un autre nœud
  - Diamètre de  $G$  = plus grande excentricité d'un nœud de  $G$
  - Connexité = existence d'un chemin entre toute paire de nœud
  - etc.
- En algorithmique répartie, intuition d'un chemin = possibilité d'envoyer un message.

# Chemin

- Dans un graphe statique  $G$ , chemin de  $u$  à  $v$  = suite d'arêtes adjacentes de  $G$  menant de  $u$  à  $v$
- Longueur d'un chemin = nombre d'arêtes de ce chemin
- Notion centrale en théorie des graphes car permet de définir :
  - Distance de  $u$  à  $v$  = longueur du plus court chemin de  $u$  à  $v$
  - Excentricité de  $v$  = plus grande distance entre  $v$  et un autre nœud
  - Diamètre de  $G$  = plus grande excentricité d'un nœud de  $G$
  - Connexité = existence d'un chemin entre toute paire de nœud
  - etc.
- En algorithmique répartie, intuition d'un chemin = possibilité d'envoyer un message.

# Chemin

- Dans un graphe statique  $G$ , chemin de  $u$  à  $v$  = suite d'arêtes adjacentes de  $G$  menant de  $u$  à  $v$
- Longueur d'un chemin = nombre d'arêtes de ce chemin
- Notion centrale en théorie des graphes car permet de définir :
  - Distance de  $u$  à  $v$  = longueur du plus court chemin de  $u$  à  $v$
  - Excentricité de  $v$  = plus grande distance entre  $v$  et un autre nœud
  - Diamètre de  $G$  = plus grande excentricité d'un nœud de  $G$
  - Connexité = existence d'un chemin entre toute paire de nœud
  - etc.
- En algorithmique répartie, intuition d'un chemin = possibilité d'envoyer un message.

# Chemin dans un graphe dynamique ?

- Idée = conserver l'intuition de possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans l'empreinte  $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans  $G_i$   $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans tous les  $G_i \Rightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Suffisant mais est-ce nécessaire ?

# Chemin dans un graphe dynamique ?

- Idée = conserver l'intuition de possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans l'empreinte  $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans  $G_i$   $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans tous les  $G_i \Rightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Suffisant mais est-ce nécessaire ?



# Chemin dans un graphe dynamique ?

- Idée = conserver l'intuition de possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans l'empreinte  $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans  $G_i$   $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans tous les  $G_i \Rightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Suffisant mais est-ce nécessaire ?

# Chemin dans un graphe dynamique ?

- Idée = conserver l'intuition de possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans l'empreinte  $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans  $G_i$   $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans tous les  $G_i \Rightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Suffisant mais est-ce nécessaire ?

# Chemin dans un graphe dynamique ?

- Idée = conserver l'intuition de possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans l'empreinte  $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans  $G_i$   $\nRightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Chemin dans tous les  $G_i \Rightarrow$  possibilité d'envoyer un message
- Suffisant mais est-ce nécessaire ?

# Trajet

- Il faut prendre en compte le temps et les latences
- Dépend d'une date de départ !
- Trajet de  $u$  à  $v$  au temps  $t_d$  = Chemin  $a_1, a_2, \dots$  de  $u$  à  $v$  dans l'empreinte **tel que** :
  - $a_1$  est présente à un  $t_1 \geq t_d$
  - $a_2$  est présente à un  $t_2 \geq t_1 + 1$
  - etc.
- Relation non symétrique car trajet "orienté" par le temps

# Trajet

- Il faut prendre en compte le temps et les latences
- Dépend d'une date de départ !
- Trajet de  $u$  à  $v$  au temps  $t_d$  = Chemin  $a_1, a_2, \dots$  de  $u$  à  $v$  dans l'empreinte **tel que** :
  - $a_1$  est présente à un  $t_1 \geq t_d$
  - $a_2$  est présente à un  $t_2 \geq t_1 + 1$
  - etc.
- Relation non symétrique car trajet "orienté" par le temps

# Trajet

- Il faut prendre en compte le temps et les latences
- Dépend d'une date de départ !
- Trajet de  $u$  à  $v$  au temps  $t_d$  = Chemin  $a_1, a_2, \dots$  de  $u$  à  $v$  dans l'empreinte **tel que** :
  - $a_1$  est présente à un  $t_1 \geq t_d$
  - $a_2$  est présente à un  $t_2 \geq t_1 + 1$
  - etc.
- Relation non symétrique car trajet "orienté" par le temps

# Trajet

- Il faut prendre en compte le temps et les latences
- Dépend d'une date de départ !
- Trajet de  $u$  à  $v$  au temps  $t_d$  = Chemin  $a_1, a_2, \dots$  de  $u$  à  $v$  dans l'empreinte **tel que** :
  - $a_1$  est présente à un  $t_1 \geq t_d$
  - $a_2$  est présente à un  $t_2 \geq t_1 + 1$
  - etc.
- Relation non symétrique car trajet "orienté" par le temps

# Caractéristiques des trajets

- Date de départ  $\neq$  Date de première émission
- Longueur du trajet = nombre d'arêtes traversées
- Durée = Date d'arrivée - Date de première émission
- Qu'est-ce qu'un bon trajet ?
- Tout dépend de l'objectif :
  - Le plus court = minimise la longueur
  - Le plus rapide = minimise la durée
  - Arrivant le plus vite = minimise la date d'arrivée



# Caractéristiques des trajets

- Date de départ  $\neq$  Date de première émission
- Longueur du trajet = nombre d'arêtes traversées
- Durée = Date d'arrivée - Date de première émission
- Qu'est-ce qu'un bon trajet ?
- Tout dépend de l'objectif :
  - Le plus court = minimise la longueur
  - Le plus rapide = minimise la durée
  - Arrivant le plus vite = minimise la date d'arrivée

# Caractéristiques des trajets

- Date de départ  $\neq$  Date de première émission
- Longueur du trajet = nombre d'arêtes traversées
- Durée = Date d'arrivée - Date de première émission
- Qu'est-ce qu'un bon trajet ?
- Tout dépend de l'objectif :
  - Le plus court = minimise la longueur
  - Le plus rapide = minimise la durée
  - Arrivant le plus vite = minimise la date d'arrivée

# Caractéristiques des trajets

- Date de départ  $\neq$  Date de première émission
- Longueur du trajet = nombre d'arêtes traversées
- Durée = Date d'arrivée - Date de première émission
- Qu'est-ce qu'un bon trajet ?
- Tout dépend de l'objectif :
  - Le plus court = minimise la longueur
  - Le plus rapide = minimise la durée
  - Arrivant le plus vite = minimise la date d'arrivée

# Caractéristiques des trajets

- Date de départ  $\neq$  Date de première émission
- Longueur du trajet = nombre d'arêtes traversées
- Durée = Date d'arrivée - Date de première émission
- Qu'est-ce qu'un bon trajet ?
- Tout dépend de l'objectif :
  - Le plus court = minimise la longueur
  - Le plus rapide = minimise la durée
  - Arrivant le plus vite = minimise la date d'arrivée

Interlude de cours 1 : Trajets le plus court, le plus rapide, arrivant le plus vite

# Connexité

- Intuition dans un graphe statique : tout le monde peut communiquer avec tout le monde
- Définition dans un graphe statique : pour toute paire de nœuds, il existe un chemin les reliant
- Généralisation dans un graphe dynamique ?
  - Beaucoup de définitions existent...
  - Aucune n'est strictement meilleure que les autres !
  - Tout dépend du contexte et du cas d'application.
  - La définition retenue impacte beaucoup les résultats
  - Comment les comparer ?

# Connexité

- Intuition dans un graphe statique : tout le monde peut communiquer avec tout le monde
- Définition dans un graphe statique : pour toute paire de nœuds, il existe un chemin les reliant
- Généralisation dans un graphe dynamique ?
  - Beaucoup de définitions existent...
  - Aucune n'est strictement meilleure que les autres !
  - Tout dépend du contexte et du cas d'application.
  - La définition retenue impacte beaucoup les résultats
  - Comment les comparer ?

# Connexité

- Intuition dans un graphe statique : tout le monde peut communiquer avec tout le monde
- Définition dans un graphe statique : pour toute paire de nœuds, il existe un chemin les reliant
- Généralisation dans un graphe dynamique ?
  - Beaucoup de définitions existent...
  - Aucune n'est strictement meilleure que les autres !
  - Tout dépend du contexte et du cas d'application.
  - La définition retenue impacte beaucoup les résultats
  - Comment les comparer ?



# Quelques exemples

- **Empreinte connexe**
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

## Quelques exemples

- Empreinte connexe
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

## Quelques exemples

- Empreinte connexe
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

## Quelques exemples

- Empreinte connexe
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

## Quelques exemples

- Empreinte connexe
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

## Quelques exemples

- Empreinte connexe
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

## Quelques exemples

- Empreinte connexe
- Il existe un nœud  $v$  tel que tout autre nœud ait un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a infiniment souvent un trajet vers  $v$
- Pour tout nœud  $v$ , tout autre nœud a un chemin vers  $v$  à un instant donné
- Pour toute paire de nœuds, il existe un trajet entre eux toutes les  $T$  unités de temps
- etc.

# Comparaison des définitions

- Chaque définition de connexité induit une classe de graphes dynamiques (l'ensemble des graphes dynamiques satisfaisants la définition)
- L'inclusion/l'intersection des ces classes permet de comparer objectivement les définitions
- Cela induit une hiérarchie permettant de caractériser le degré de dynamisme d'un graphe



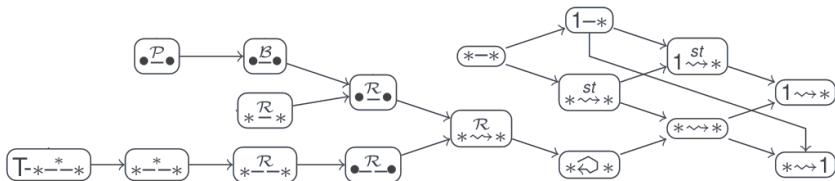
# Comparaison des définitions

- Chaque définition de connexité induit une classe de graphes dynamiques (l'ensemble des graphes dynamiques satisfaisants la définition)
- L'inclusion/l'intersection des ces classes permet de comparer objectivement les définitions
- Cela induit une hiérarchie permettant de caractériser le degré de dynamisme d'un graphe

# Comparaison des définitions

- Chaque définition de connexité induit une classe de graphes dynamiques (l'ensemble des graphes dynamiques satisfaisants la définition)
- L'inclusion/l'intersection de ces classes permet de comparer objectivement les définitions
- Cela induit une hiérarchie permettant de caractériser le degré de dynamisme d'un graphe

# Hiérarchie de dynamicité



# Intérêts

- Comparaison objective des définitions et des résultats
- Mutualisation/factorisation des résultats issus de cadre applicatifs différents
- Deux propriétés très intéressantes :
  - Algorithme dans une classe  $\Rightarrow$  Algorithme dans toutes les classes incluses
  - Impossibilité dans une classe  $\Rightarrow$  Impossibilité dans toutes les classes englobantes

# Intérêts

- Comparaison objective des définitions et des résultats
- Mutualisation/factorisation des résultats issus de cadre applicatifs différents
- Deux propriétés très intéressantes :
  - Algorithme dans une classe  $\Rightarrow$  Algorithme dans toutes les classes incluses
  - Impossibilité dans une classe  $\Rightarrow$  Impossibilité dans toutes les classes englobantes

# Intérêts

- Comparaison objective des définitions et des résultats
- Mutualisation/factorisation des résultats issus de cadre applicatifs différents
- Deux propriétés très intéressantes :
  - Algorithme dans une classe  $\Rightarrow$  Algorithme dans toutes les classes incluses
  - Impossibilité dans une classe  $\Rightarrow$  Impossibilité dans toutes les classes englobantes

## Interlude de cours 2 : Caractérisation alternative de C et R

# Préparation du TD

- Séance du 18/01
- Regarder l'article "Shortest, Fastest, and Foremost Broadcast in Dynamic Networks" disponible sur la page Moodle de l'UE
- Objectifs :
  - Comprendre le problème et le modèle
  - Identifier les classes de graphes dynamiques utilisées
  - Repérer les algorithmes et résultats utiles pour les questions du TD
  - Essayer de comprendre l'intuition derrière ces résultats



# Préparation du TD

- Séance du 18/01
- Regarder l'article "Shortest, Fastest, and Foremost Broadcast in Dynamic Networks" disponible sur la page Moodle de l'UE
- Objectifs :
  - Comprendre le problème et le modèle
  - Identifier les classes de graphes dynamiques utilisées
  - Repérer les algorithmes et résultats utiles pour les questions du TD
  - Essayer de comprendre l'intuition derrière ces résultats

# Préparation du TD

- Séance du 18/01
- Regarder l'article "Shortest, Fastest, and Foremost Broadcast in Dynamic Networks" disponible sur la page Moodle de l'UE
- Objectifs :
  - Comprendre le problème et le modèle
  - Identifier les classes de graphes dynamiques utilisées
  - Repérer les algorithmes et résultats utiles pour les questions du TD
  - Essayer de comprendre l'intuition derrière ces résultats