I.

Пусть электрическое поле обладает циркулярной поляризацией в плоскости xy:

$$\mathbf{F}(t) = F \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

На рис. 1 изображен годограф вектора $\mathbf{F}(t)$ в плоскости xy в интервале $t \in (0, T)$, $T = 2\pi/\omega$.

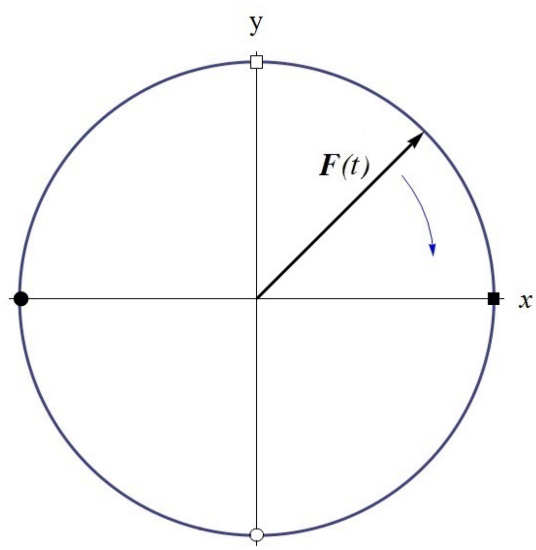


Рис. 1. Символы на графике обозначают следующие точки: □ $t = 0$, ■ $t = T/4$, ○ $t = T/2$, ● $t = 3T/4$.

II.

Пусть траектория удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\mathbf{v}(t \to -\infty) = 0, \quad \mathbf{r}(t \to -\infty) = 0, \tag{2}$$

а поле задано следующим уравнением:

$$\mathbf{F}(t) = F e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где γ - малый параметр. Найдем вид этой траектории в произвольный момент времени t после адиабатического включения поля. Скорость электрона:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{F}(t), \tag{4}$$

$$\mathbf{v}(t) = -\int_{-\infty}^{t} \mathbf{F}(t)\, dt. \tag{5}$$

Для x-компоненты:

$$-F\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma t}\sin\omega t = F\frac{e^{\gamma t}}{\omega^2+\gamma^2}(\omega\cos\omega t - \gamma\sin\omega t)\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{F}{\omega}\cos\omega t \tag{6}$$

в пределе $\gamma \to 0$. Аналогично,

$$-F\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma t}\sin\omega t = -\frac{F}{\omega}\sin\omega t. \tag{7}$$

Таким образом,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

Зависимость координаты от времени:

$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{v}(t)\, dt. \tag{9}$$

Для x-компоненты:

$$\begin{gathered}\frac{F}{\omega^2+\gamma^2}\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma t}(\omega\cos\omega t - \gamma\sin\omega t) = \\ \frac{F\omega}{\omega^2+\gamma^2}\frac{e^{\gamma t}}{\omega^2+\gamma^2}(\gamma\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\Big|_{-\infty}^{t} + \\ \frac{F\gamma}{\omega^2+\gamma^2}\frac{e^{\gamma t}}{\omega^2+\gamma^2}(\omega\cos\omega t - \gamma\sin\omega t)\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{F}{\omega^2}\sin\omega t\end{gathered} \tag{10}$$

в пределе $\gamma \to \infty$; y-компонента:

$$\begin{gathered}-\frac{F}{\omega^2+\gamma^2}\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma t}(\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t) = \\ -\frac{F\omega}{\omega^2+\gamma^2}\frac{e^{\gamma t}}{\omega^2+\gamma^2}(\gamma\sin\omega t - \omega\cos\omega t)\Big|_{-\infty}^{t} + \\ -\frac{F\gamma}{\omega^2+\gamma^2}\frac{e^{\gamma t}}{\omega^2+\gamma^2}(\gamma\cos\omega t + \omega\sin\omega t)\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{F}{\omega^2}\sin\omega t.\end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, реперная траектория имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \frac{F}{\omega^2}\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Такая траектория соответствует движению электрона по окружности, и ее удобно принять за референтную.

Найдем квадрат вектора $\mathbf{u}_i(t,t')$, используя frp(21a):

$$\mathbf{u}_i(t,t') = \mathbf{v}(t') - \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')}{t-t'}, \qquad (13)$$

$$\mathbf{u}_i(t,t') = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t'\\ -\sin\omega t'\\ 0\end{pmatrix} - \frac{F}{\omega^2(t-t')}\begin{pmatrix}\sin\omega t-\sin\omega t'\\ \cos\omega t-\cos\omega t'\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{u}_i^2(t,t') = \frac{F^2}{\omega^2}\left[1-\frac{2}{\xi}\sin\xi+\frac{2}{\xi^2}[1-\cos\xi]\right]. \qquad (15)$$

Здесь $\xi=\omega(t-t')$.

Найдем нули правой части (15):

$$\xi^2-2\xi\sin\xi-2\cos\xi+2=0. \qquad (16)$$

Представим тригонометрические функции в экспоненциальной форме:

$$\xi^2+i\xi(e^{i\xi}-e^{-i\xi})-(e^{i\xi}+e^{-i\xi})+2=0. \qquad (17)$$

Упростим:

$$e^{2i\xi}(i\xi-1)+e^{i\xi}(\xi^2+2)-i\xi-1=0. \qquad (18)$$

Изобразим некоторые решения данного уравнения. Пусть $\xi=x+iy$, а $f(\xi)$ обозначает левую часть уравнения (18). Изобразим на плоскости линии уровня $Re[f(\xi)]=0$ и $Im[f(\xi)]=0$. Точки пересечений являются корнями уравнения (18).

Точным решением (18) являются

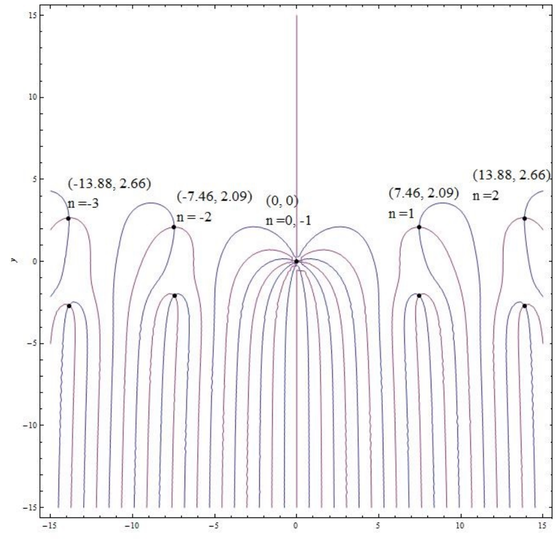
$$\xi=-i(W_n(-1/e)+1), \qquad n\in Z, \qquad (19a)$$

$$\xi=i(W_m(-1/e)+1), \qquad m\in Z. \qquad (19b)$$

Здесь W_n- функция Ламберта, определяемая функциональным уравнением $z=W(z)e^{W(z)}$.

Решение, ближайшее к нулю в 4м квадранте обозначим за ξ_0:

$$\xi_0\approx-7.461-2.089i. \qquad (20)$$



Пусть $t'=0$. Значение компонент вектора $\mathbf{u}_i(t,t')$:

$$\mathbf{u}_i(t,t') = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}0.476-0.057i\\ -0.057-0.476i\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Найдем также $\mathbf{u}_f(t,t')$:

$$\mathbf{u}_f(t,t') = \mathbf{v}(t) - \frac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')}{t-t'}, \qquad (22)$$

$$\mathbf{u}_f(t,t') = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix} - \frac{F}{\omega^2(t-t')}\begin{pmatrix}\sin\omega t-\sin\omega t'\\ \cos\omega t-\cos\omega t'\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Численное значение компонент вектора:

$$\mathbf{u}_f(t,t') = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}1.046-3.731i\\ 3.731+1.046i\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Произведение $\mathbf{u}_i(t,t')\mathbf{F}(t')$:

$$\mathbf{u}_i(t,t')\mathbf{F}(t') = \frac{F^2}{\omega}(-0.057-0.476i). \qquad (25)$$

III.

Скорость электрона, ионизированного в момент времени t_i, определяется следующим уравнением движения

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{F}(t) \qquad (26)$$

с начальным условием

$$\mathbf{u}(t_i) = 0. \tag{27}$$

Для уравнения (26) с начальным условием (27) решением является

$$\mathbf{u}(t) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t - \cos\omega t_i\\ -\sin\omega t + \sin\omega t_i\\ 0\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Обозначим за $\mathbf{k}_a(t_i)$ скорость этого электрона после адиабатического выключения поля,

$$\mathbf{k}_a(t_i) = \mathbf{u}(t\to\infty). \tag{29}$$

В случае описанного выше циркулярно поляризованного поля:

$$\mathbf{k}_a(t_i) = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_i}^{\infty}\mathbf{F}(t)e^{-\epsilon t}dt, \tag{30}$$

$$\mathbf{k}_a(t_i) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}-\cos\omega t_i\\ \sin\omega t_i\\ 0\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Здесь параметр ϵ отвечает темпу адиабатического выключения поля. Годограф вектора $\mathbf{k}_a(t_i)$ изображен на рис. 2.

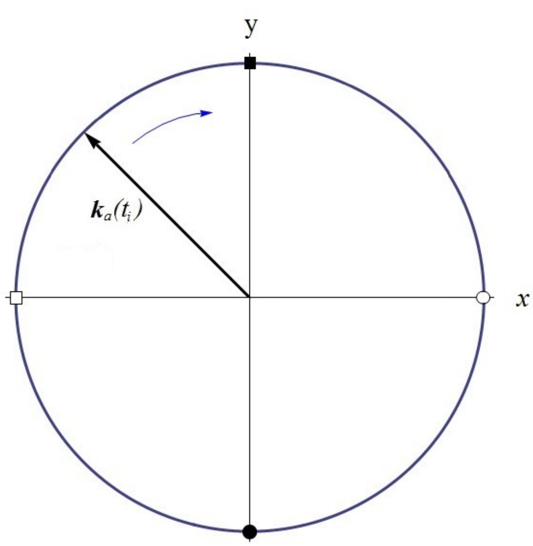


Рис. 2. Символы на графике обозначают следующие точки: □ $t_i = 0$, ■ $t_i = T/4$, ○ $t_i = T/2$, ● $t_i = 3T/4$.

IV.

Рассмотрим электрон, начавший движение в поле $\mathbf{F}(t)$ из точки $\mathbf{q}(t_i) = 0$ со скоростью $\mathbf{u}_i$.

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{F}(t), \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{u}(t) \tag{32a}$$

$$\mathbf{u}(t_i) = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{q}(t_i) = 0 \tag{32b}$$

Решения этой системы уравнений:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_i + \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t - \cos\omega t_i\\ -\sin\omega t + \sin\omega t_i\\ 0\end{pmatrix}, \tag{33a}$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}_i\Delta t + \frac{F\Delta t}{\omega}\begin{pmatrix}-\cos\omega t_i\\ \sin\omega t_i\\ 0\end{pmatrix} + \frac{F}{\omega^2}\begin{pmatrix}\sin\omega t - \sin\omega t_i\\ \cos\omega t - \cos\omega t_i\\ 0\end{pmatrix}, \tag{33b}$$

где $\Delta t = t - t_i$. В этом случае

$$\mathbf{u}(t\to\infty) = \mathbf{u}_i + \mathbf{k}_a(t_i). \tag{34}$$

Для того, чтобы электрон вернулся в начальную точку в момент t, его начальная скорость $\mathbf{u}_i$ должна быть равна:

$$\mathbf{u}_i(t,t_i) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t_i\\ -\sin\omega t_i\\ 0\end{pmatrix} - \frac{F}{\omega^2\Delta t}\begin{pmatrix}\sin\omega t - \sin\omega t_i\\ \cos\omega t - \cos\omega t_i\\ 0\end{pmatrix}. \tag{35}$$

Момент времени, в который произойдет возврат, выразим через начальный момент времени t_i из условия frp(85a):

$$\mathbf{F}(t_i)\mathbf{u}_i(t,t_i) = 0. \tag{36}$$

Подставляем $\mathbf{F}(t_i)$ и $\mathbf{u}_i(t,t_i)$, взятые из уравнений (1) и (35):

$$\begin{aligned}\sin\omega t_i[\omega\Delta t\cos\omega t_i - (\sin\omega t - \sin\omega t_i)] = \\ \cos\omega t_i[\omega\Delta t\sin\omega t_i + (\cos\omega t - \cos\omega t_i)].\end{aligned} \tag{37}$$

При раскрытии скобок слагаемые с $\omega\Delta t$ взаимно уничтожаются. Уравнение запишется в следующем виде:

$$-\sin\omega t_i(\sin\omega t - \sin\omega t_i) = \cos\omega t_i(\cos\omega t - \cos\omega t_i). \tag{38}$$

Равенство упрощается еще сильнее ввиду тождества $\sin^2\omega t_i + \cos^2\omega t_i = 1$:

$$\cos\omega t\cos\omega t_i + \sin\omega t\sin\omega t_i = 1, \tag{39}$$

$$\cos\omega\Delta t = 1. \tag{40}$$

Отсюда следует, что первый момент времени $t = t_f$, в который случится возврат:

$$t_f = t_i + T. \tag{41}$$

Подставив $t = t_f$ в уравнение (35), найдем начальную скорость электрона:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t_f, t_i) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t_i \\ -\sin\omega t_i \\ 0\end{pmatrix} = -\mathbf{k}_a(t_i). \tag{42}$$

Таким образом $\mathbf{u}(t\to\infty) = 0$. Подставив $t = t_f$ в уравнение (33a), найдем его конечную скорость $\mathbf{u}_f$:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}(t_f) = \mathbf{u}_i. \tag{43}$$

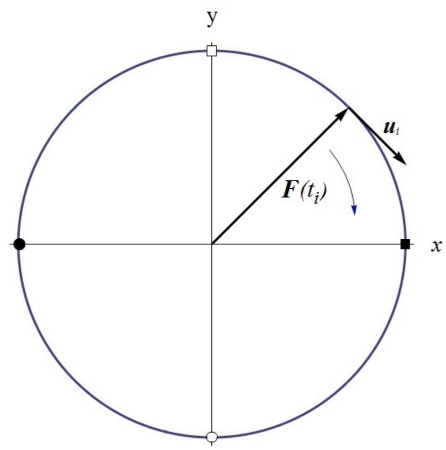


Рис. 3. На рисунке изображен годограф вектора $\mathbf{F}(t_i)$ и вектор $\mathbf{u}_i$. Замкнутая траектория возможна в случае, когда $\mathbf{F}(t_i)$ и $\mathbf{u}_i$ перпендикулярны и расположены указанным образом и $u_i = u_i(t_f, t_i)$. Символы на графике обозначают следующие точки: □ $t_i = 0$, ■ $t_i = T/4$, ○ $t_i = T/2$, ● $t_i = 3T/4$.

V.

Будем считать t_i фиксированным. Определим в пространстве конечных импульсов $\mathbf{k}$ (рис. 4) декартову систему координат $k_xk_yk_z$. Эти координаты отмеряются от начала системы xyz соответственно вдоль осей. Введем также систему координат $k_{x'}k_{y'}k_{z'}$ с началом в точке $\mathbf{k}_a(t_i)$. Ось $k_{y'}$ направим вдоль вектора

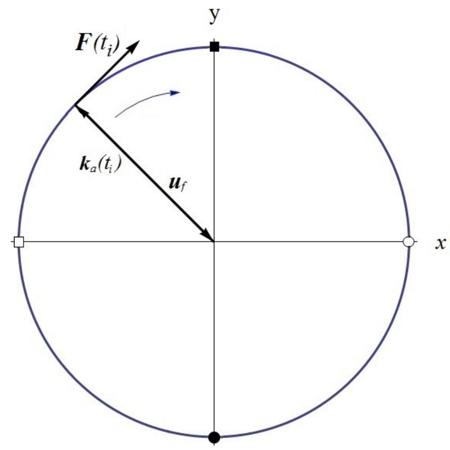


Рис. 4. На рисунке изображен годограф вектора $\mathbf{k}_a(t_i)$. Вектор $\mathbf{u}_f$ отложен от конца вектора $\mathbf{k}_a(t_i)$, и в сумме с ним дает нулевой вектор. Символы на графике обозначают следующие точки: □ $t_i = 0$, ■ $t_i = T/4$, ○ $t_i = T/2$, ● $t_i = 3T/4$.

$\mathbf{u}_f$. ось $k_{x'}$ направим вдоль вектора $-\mathbf{F}(t_i)$. Ось $k_{z'}$ направлена из глубины рисунка, так что оси $k_{x'}k_{y'}k_{z'}$ образуют правую тройку.

Конечные скорости перерассеянных электронов лежат на сфере радиуса u_f с центром в $\mathbf{k}_a(t_i)$. Сечение этой сферы плоскостью $k_{x'}k_{y'}$ показано на рис. 5.

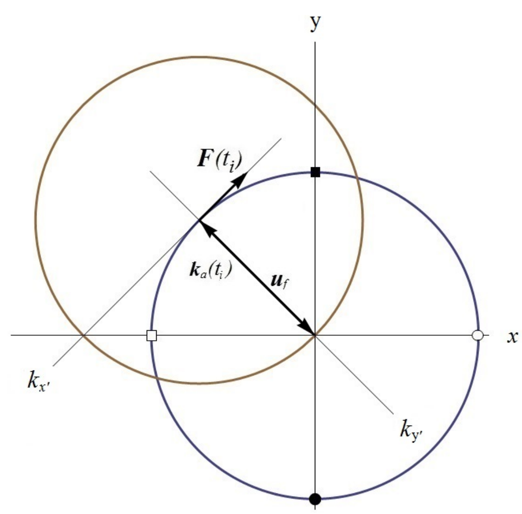


Рис. 5.

Положение точки на этой сфере определим сферическими углами θ' и φ'. С другой стороны, положение той же точки можно определить, задав ее координату $k_{z'}$ и величину $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_{z'}^2}$, где k - расстояние от точки до начала координат системы xyz. Надо учитывать следующие соотношения:

$$k_{z'} = k_z \tag{44a}$$

$$k_\rho = \sqrt{k_{x'}^2 + (u_f - k_{y'})^2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{44b}$$

$$k = \sqrt{k_{x'}^2 + (u_f - k_{y'})^2 + k_{z'}^2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \tag{44c}$$

Координаты $k_{z'}$ и k_ρ связаны с углами θ' и φ' следующим образом:

$$k_{z'} = u_f \sin\theta' \sin\varphi', \tag{45a}$$

$$k_\rho^2 = (u_f - k_{y'})^2 + k_{x'}^2 = u_f^2 \left[(1-\cos\theta')^2 + \sin^2\theta' \cos^2\varphi'\right]. \tag{45b}$$

Выразим $\cos\theta'$ и $\sin\varphi'$ через координаты k_ρ и $k_{z'}$ из уравнений (44):

$$\cos\theta' = 1 - \frac{k^2}{2u_f^2}, \tag{46a}$$

$$\sin\varphi' = \frac{k_{z'}}{u_f \sin\theta'} = \frac{k_{z'}}{u_f\sqrt{1-\left(1-\frac{k^2}{2u_f^2}\right)^2}}. \tag{46b}$$

Пусть $P(\theta')$ задает плотность распределения перерассеянных электронов на сфере:

$$\int P(\theta') \sin\theta' d\theta' d\varphi' = 1. \tag{47}$$

С другой стороны:

$$2\int P(\theta'(k_\rho, k_{z'})) \sin\theta'(k_\rho, k_{z'}) J dk_\rho dk_{z'} = 1, \tag{48}$$

где J - якобиан перехода:

$$J = \frac{\partial(\theta', \varphi')}{\partial(k_\rho, k_{z'})}. \tag{49}$$

Интеграл (48) считается дважды, так как заданные координаты k_ρ и $k_{z'}$ соответствуют двум точкам на сфере. Эти точки симметричны относительно плоскости $k_{y'}k_{z'}$. Как следствие, любая функция от θ' принимает в них одинаковые значения. Используя (46), получим:

$$J = \frac{4k_\rho u_f}{k\sqrt{4u_f^2 - k^2}\sqrt{4u_f^2 k_\rho^2 - k^4}}, \tag{50}$$

$$\sin\theta' = \frac{k}{2u_f^2}\sqrt{4u_f^2 - k^2}. \tag{51}$$

Запишем (48) в виде

$$\int \tilde{P}(k_\rho, k_{z'}) 2\pi k_\rho dk_\rho dk_{z'} = 1, \tag{52}$$

$$\tilde{P}(k_\rho, k_{z'}) = \frac{2P(\theta'(k_\rho, k_{z'}))}{\pi u_f \sqrt{4u_f^2 k_\rho^2 - k^4}}. \tag{53}$$

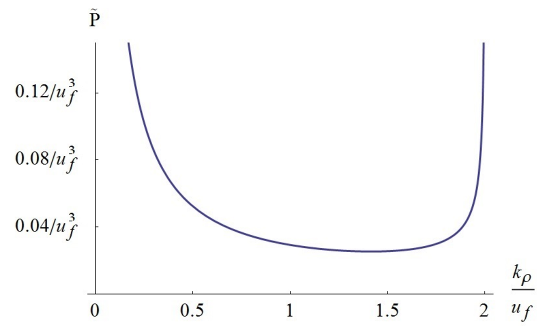


Рис. 6. На графике изображено распределение $\tilde{P}(k_\rho, k_{z'})$ при $k_{z'} = 0$ при равномерной плотности распределения $P = \frac{1}{4\pi}$.

VI.

Адиабатический вклад описывается амплитудой

$$I_a(\mathbf{k}) = e^{i\pi/4}(2\pi)^{1/2}\frac{A_0(\mathbf{k}_\perp; t_i)}{F(t_i)^{1/2}} \exp[i\mathcal{S}(t_i, \mathbf{k}) - is_0(t_i)]. \tag{54}$$

Вектор $\mathbf{k}_\perp$ - это начальная скорость электрона в момент ионизации. Он имеет начало в точке $\mathbf{k}_a(t_i)$ и лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{F}(t_i)$ (рис. 4). Амплитуда распределения поперечной скорости электрона $A(\mathbf{k}_\perp; t_i)$ задается уравнением

$$A(\mathbf{k}_\perp; t_i) = \frac{2^{3/2}\pi i}{F(t_i)^{1/2}} \Phi\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F(t_i)}, \varphi_k\right). \tag{gamas31}$$

В рассматриваемом случае амплитуда поля постоянна, поэтому $F(t_i) = F$:

$$A(\mathbf{k}_\perp; t_i) = A(\mathbf{k}_\perp) = \frac{2^{3/2}\pi i}{F^{1/2}} \Phi\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F}, \varphi_k\right). \tag{55}$$

Здесь:

$$\Phi\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F}, \varphi_k\right) = f_{00}\Phi_{00}\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F}, \varphi_k\right). \tag{56}$$

Первый множитель в этом уравнении:

$$f_{00} = \varkappa^{1/2} \left(\frac{4\varkappa^2}{F} \right)^{\beta_{00}^{(0)}/\varkappa} \times \exp\left[\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi\beta_{00}^{(0)}}{\varkappa} - \frac{\varkappa^3}{3F} \right]. \qquad \text{(gamas57)}$$

После подстановки

$$\beta_{00}^{(0)} = 1 - \varkappa/2, \qquad \text{(gamas35}a\text{)}$$

$$E_0 = -1/2, \quad \varkappa = \sqrt{2|E_0|} = 1 \qquad (57)$$

получим:

$$f_{00} = \frac{2}{F^{1/2}} \times \exp\left[\frac{3i\pi}{4} - \frac{1}{3F} \right]. \qquad (58)$$

Второй множитель:

$$\Phi_{00}\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F}, \varphi_k \right) = \phi_{00}\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{(gamas11)}$$

где

$$\phi_{00}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F} \right) = \exp\left[-\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2F} \right]. \qquad \text{(gamas35}b\text{)}$$

Таким образом:

$$A(\mathbf{k}_\perp) = \frac{2^{3/2}\pi i}{F^{1/2}} \frac{2}{F^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left[\frac{3i\pi}{4} - \frac{1}{3F} \right] \times \exp\left[-\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2F} \right] \qquad (59)$$

Упростив, получим:

$$A(\mathbf{k}_\perp) = \frac{4\pi^{1/2}}{F} \times \exp\left[-\frac{3i\pi}{4} - \frac{1}{3F} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2F} \right]. \qquad (60)$$

Отсюда и из уравнения (54) следует выражение для амплитуды $I_a(\mathbf{k})$:

$$I_a(\mathbf{k}) = \frac{2^{5/2}\pi}{F^{3/2}} \exp[i\mathcal{S}(t_i, \mathbf{k}) - is_0(t_i)] \times \exp\left[-\frac{i\pi}{2} - \frac{1}{3F} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2F} \right]. \qquad (61)$$

Квадрат амплитуды:

$$|I_a(\mathbf{k})|^2 = \frac{32\pi^2}{F^3} \exp\left[-\frac{2}{3F} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{F} \right]. \qquad (62)$$

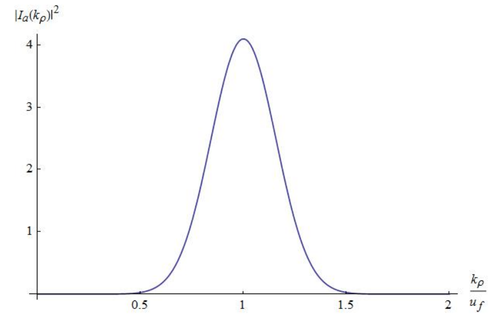


Рис. 7. График квадрата амплитуды $|I_a(\mathbf{k})|^2$ при $F = 0.05$, $\omega = 0.05$.

VII.

Вклад в амплитуду ионизации от перерассеянных электронов задается уравнениями frp(117-118), где вместо волновой функции стоит ее часть $\psi_r(\mathbf{r}, t)$:

$$\psi_r(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{2\pi} \sum_i \frac{A_0(\mathbf{u}_i(t, t_i); t_i)}{|(t - t_i)^3 F(t_i)|^{1/2}} \varphi(\mathbf{r}; \mathbf{u}_f(t)) \times \exp[-iS(t, t_i, \mathbf{u}_i(t, t_i)) - is_0(t_i)]. \qquad (63)$$

В уравнении (63) зависимость от радиус-вектора $\mathbf{r}$ обуславливает только множитель $\varphi(\mathbf{r}; \mathbf{u}_f(t))$. В рассматриваемой задаче нас интересует его асимптотика:

$$\varphi(\mathbf{r}; \mathbf{u}_f(t))\Big|_{r\to\infty} = e^{i\mathbf{u}_f\mathbf{r}} + f(\mathbf{u}_f, \mathbf{n}) \frac{e^{iu_i(t,\mathbf{k})r}}{r}, \qquad (64)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{u}_f$ - скорость налетающего электрона, $\mathbf{u}_i(t, \mathbf{k})$ - скорость электрона сразу после перерассеяния. В силу закона сохранения энергии: $\mathbf{u}_f^2 = \mathbf{u}_i^2(t, \mathbf{k})$. Приведем промежуточные вычисления:

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}; \mathbf{u}_f(t)) = i\mathbf{u}_f e^{i\mathbf{u}_f\mathbf{r}} + iu_i(t, k)\mathbf{n} f(\mathbf{u}_f, \mathbf{n}) \frac{e^{iu_i(t,k)r}}{r} \qquad (65)$$

$$\nabla e^{-iS(\mathbf{r},t;\mathbf{k})} = -i\mathbf{u}_i(t, \mathbf{k}) e^{-iS(\mathbf{r},t;\mathbf{k})} \qquad (66)$$

Запишем вклад в амплитуду ионизации от перерассеянных электронов в виде интеграла по $d\mathbf{\Sigma}$ и dt:

$$I_r(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Sigma \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{\Sigma}, \qquad \text{(frp117)}$$

где

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{2} [e^{-iS(\mathbf{r},t;\mathbf{k})} \nabla\psi_r(\mathbf{r}, t) - \psi_r(\mathbf{r}, t) \nabla e^{-iS(\mathbf{r},t;\mathbf{k})}]. \qquad \text{(frp118)}$$

Окончательное выражения для амплитуды:

$$I_r(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_i \frac{A_0(\mathbf{u}_i(t,t_i);t_i)}{(t-t_i)^3|F(t_i)|^{1/2}} \times \exp[-iS(t,t_i,\mathbf{u}_i(t,t_i)) - is_0(t_i) + iS(t,\mathbf{k})] \times \int_\Sigma e^{-i\mathbf{u}_i(t,\mathbf{k})\mathbf{r}} \times \left[[\mathbf{u}_f + \mathbf{u}_i(t,\mathbf{k})]e^{i\mathbf{u}_f\mathbf{r}} + [u_i(t,k)\mathbf{n} + \mathbf{u}_i(t,\mathbf{k})]f(\mathbf{u}_f,\mathbf{n})\frac{e^{iu_i(t,k)r}}{r}\right] d\mathbf{\Sigma}. \tag{67}$$

Интегрирование по поверхности проведем с помощью выражения

$$e^{i\mathbf{kr}}\Big|_{r\to\infty} = \frac{2\pi}{ikr}\left[e^{ikr}\delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{k}}{k}\right) - e^{-ikr}\delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{k}}{k}\right)\right]. \tag{68}$$

Скорость $\mathbf{u}_i(t,\mathbf{k})$ в промежуточных выкладках будем писать без аргументов. Поверхностью интегрирования выбирается сфера радиуса r. Интеграл от первого слагаемого в больших скобках в уравнении (67) равен нулю:

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma [\mathbf{u}_f + \mathbf{u}_i]e^{i\mathbf{u}_f\mathbf{r}}e^{-i\mathbf{u}_i\mathbf{r}}\, d\mathbf{\Sigma} = \\
&\int_\Sigma [\mathbf{u}_f + \mathbf{u}_i]\cdot\frac{2\pi}{i|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|r} \times \left[e^{i|\mathbf{u}_f-\mathbf{u}_i|r}\delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|}\right) - e^{-i|\mathbf{u}_f-\mathbf{u}_i|r}\delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|}\right)\right] r^2\, d\mathbf{n} \\
&= \frac{2\pi r}{i|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|}\left[\left(\mathbf{u}_f + \mathbf{u}_i, \frac{\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|}\right)e^{i|\mathbf{u}_f-\mathbf{u}_i|r} - \left(\mathbf{u}_f + \mathbf{u}_i, -\frac{\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|}\right)e^{-i|\mathbf{u}_f-\mathbf{u}_i|r}\right] \\
&= \frac{2\pi r(\mathbf{u}_f^2 - \mathbf{u}_i^2)}{i|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i|^2}\left(e^{i|\mathbf{u}_f-\mathbf{u}_i|r} + e^{-i|\mathbf{u}_f-\mathbf{u}_i|r}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{69}$$

Проинтегрируем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
&\int_\Sigma [u_i\mathbf{n} + \mathbf{u}_i]f(\mathbf{u}_f,\mathbf{n})\frac{e^{iu_ir}}{r}\cdot\frac{2\pi}{iu_ir} \\
&\times\left[e^{iu_ir}\delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{u}_i}{u_i}\right) - e^{-iu_ir}\delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{u}_i}{u_i}\right)\right] r^2\, d\mathbf{n} \\
&= -4\pi i\cdot f\left(\mathbf{u}_f, \frac{\mathbf{u}_i}{u_i}\right).
\end{aligned} \tag{70}$$

Таким образом, мы получили выражение для $I_r(\mathbf{k})$ через интеграл по времени. Учтем, что $F(t_i) = F$, и $\omega(t - t_i) = \xi_i$:

$$I_r(\mathbf{k}) = -2i\int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_i \frac{A_0(\mathbf{u}_i(t,t_i);t_i)\omega^3}{\xi_i^3 F^{1/2}}\cdot f\left(\mathbf{u}_f, \frac{\mathbf{u}_i(t,\mathbf{k})}{u_i(t,\mathbf{k})}\right) \times \exp[-iS(t,t_i,\mathbf{u}_i(t,t_i)) - is_0(t_i) + iS(t,\mathbf{k})] \tag{71}$$

Амплитуда распределения поперечной скорости электрона $A_0(\mathbf{u}_i(t,t_i);t_i)$ не зависит ни от конечной скорости, ни от времени.
Показатель экспоненты содержит три разных действия:

$$S(t,t_i,\mathbf{u}_i(t,t_i)) = \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t}\mathbf{u}_f^2(t',t_i,\mathbf{u}_i)\,dt', \tag{72}$$

$$S(t,\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\mathbf{k}^2t + \frac{1}{2}\int_0^t[\mathbf{u}_i^2(t',\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2]\,dt', \tag{73}$$

$$s_0(t_i) = E_0t_i. \tag{74}$$

Проинтегрируем (72):

$$\mathbf{u}_f^2(t',t_i,\mathbf{u}_i) = \frac{F^2}{\omega^2}\left[1 - \frac{2}{\xi'}\sin\xi' + \frac{2}{\xi'^2}[1 - \cos\xi']\right], \tag{75}$$

где $\xi' = \omega(t' - t_i)$.

$$S(t,t_i,\mathbf{u}_i(t,t_i)) = \frac{1}{2}\int_0^{\xi_i}\mathbf{u}_f^2(\xi')\frac{d\xi'}{\omega}. \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
S(t,t_i,\mathbf{u}_i(t,t_i)) &= \frac{F^2}{\omega^3}\left(\frac{\xi_i}{2} + \cos\xi_i - 1\right) \\
&= \frac{F^2}{\omega^3}(51.8728 + 27.4987i).
\end{aligned} \tag{77}$$

Вычислим действие (73):

$$\begin{aligned}
S(t,\mathbf{k}) &= \frac{1}{2}\mathbf{k}^2t + \frac{1}{2}\int_0^t[\mathbf{u}_i^2(t',\mathbf{k}) - \mathbf{k}^2]\,dt' \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{u}_i^2(t',\mathbf{k})\,dt'.
\end{aligned} \tag{78}$$

Согласно frp(26):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i(t',\mathbf{k}) &= \mathbf{k} - \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}(t_i) \\
&= \mathbf{k} + \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t_i \\ -\sin\omega t_i \\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Квадрат скорости:

$$\mathbf{u}_i^2(t',\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 + \frac{F^2}{\omega^2} + \frac{2F}{\omega}\left[k_x\cos(\omega t-\xi_i) - k_y\sin(\omega t-\xi_i)\right]. \tag{80}$$

$$S(t,\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\mathbf{k}^2 t + \frac{F^2}{2\omega^2}t + \frac{2Ft}{\omega^2}[k_x\sin(\omega t-\xi_i)+k_y\cos(\omega t-\xi_i)]. \tag{81}$$

Посчитаем интеграл (71) для $\xi = \xi_0$:

$$\begin{aligned} I_r(\mathbf{k}) &= \frac{8\pi^{1/2}\omega^3}{F^{3/2}\xi^3} f(u_f,\theta) \\ &\times \exp\left[iE_0T - \frac{1}{3F} - \frac{F}{2\omega^2} + \frac{3i\pi}{4} - \frac{iF^2T}{2\omega^2}\right] \\ &\times \int_0^{2\pi} dt \exp\left[i\left(\frac{F^2}{2\omega^2} + \frac{\mathbf{k}^2}{2} - E_0\right)t + i\mathbf{k}\frac{F}{\omega^2}\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t - 1\\ 0\end{pmatrix}\right]. \end{aligned} \tag{82}$$

Проинтегрировав и воспользовавшись равенством для функции Бесселя $J_\nu(-z) = e^{i\pi\nu}J_\nu(z)$, получим:

$$\begin{aligned} I_r(\mathbf{k}) &= \frac{8\pi^{1/2}}{F^{3/2}T^3} f(u_f,\theta) \\ &\times \exp\left[iE_0T - \frac{1}{3F} - \frac{F}{2\omega^2} + \frac{3i\pi}{4} - \frac{iF^2T}{2\omega^2}\right] \\ &\times \frac{2\pi}{\omega} J_\nu\left(\frac{Fk_\rho}{\omega^2}\right) \cdot \exp\left[i\pi\nu - i\xi\nu - \frac{ik_yF}{\omega^2}\right], \end{aligned} \tag{83}$$

где использованы обозначения:

$$\nu = \frac{F^2}{2\omega^3} + \frac{\mathbf{k}^2}{2\omega} - \frac{E_0}{\omega}, \tag{84}$$

$$\xi = \arccos\frac{k_x}{k_\rho}. \tag{85}$$

Квадрат модуля амплитуды:

$$\begin{aligned} |I_r(\mathbf{k})|^2 &= \frac{128\pi^2|f(u_f,\theta)|^2}{\omega F^3 T^6} \exp\left[-\frac{2}{3F} - \frac{F}{\omega^2}\right] \\ &\times \left|J_\nu\left(\frac{Fk_\rho}{\omega^2}\right)\right|^2. \end{aligned} \tag{86}$$

Угол рассеяния, входящий в выражение (86), является вершинным углом равнобедренного треугольника со сторонами $\mathbf{u}_f$, $\mathbf{u}_i(t,\mathbf{k})$, $\mathbf{k}$ и может быть выражен через конечную скорость электрона:

$$\cos\theta = 1 - \frac{k^2\omega^2}{2F^2} \tag{87}$$

Если аргумент функции Бесселя меньше, чем ее порядок ν, то выполняется неравенство

$$\frac{F^2}{2\omega^3} + \frac{k^2}{2\omega} - \frac{E_0}{\omega} > \frac{Fk_\rho}{\omega^2}, \tag{88}$$

Пусть $k_z = 0$:

$$k_\rho^2 - \frac{2F}{\omega}k_\rho + \frac{F^2}{\omega^2} - 2E_0 > 0, \tag{89}$$

$$\left(k_\rho - \frac{F}{\omega}\right)^2 - 2E_0 > 0. \tag{90}$$

Последнее неравенство выполнено при всех k_ρ, так как $-2E_0 > 0$.

Исследуем асимптотики функции $|I_r(\mathbf{k})|^2$. При $\omega \to 0$ порядок функции Бесселя является большим числом. Модуль конечной скорости $k = O(\omega^{-1})$. Заметим теперь, что если аргумент функции Бесселя представить в виде $\frac{Fk}{\omega^2} = \nu z$, где z - некая функция, то справедливо утверждение об области значений этой функции: $z \in [0,1]$. Для такого случая справедливо асимптотическое выражение (Дж.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций, глава VIII, §8.11):

$$J_\nu(\nu z) \approx \frac{z^\nu \exp[\nu\sqrt{1-z^2}]}{(2\pi\nu)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{1-z^2})^\nu}. \tag{91}$$

В случае малых k:

$$z \approx \frac{2k\omega}{F}, \tag{92}$$

В случае $k = 2F/\omega$:

$$z = \frac{4}{5 + \frac{\omega^2}{F^2}}. \tag{93}$$