I.

Уравнение на функцию Грина:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta-\mathbf{F}(t)\mathbf{r}\right]G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\delta(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (1)$$

Уравнение на функцию Грина по второй паре:

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{1}{2}\Delta'-\mathbf{F}(t')\mathbf{r}'\right]G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\delta(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (2)$$

где

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\frac{e^{3i\pi/4}\theta(t-t')}{[2\pi(t-t')]^{3/2}}e^{i\mathcal{S}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')}. \quad (3)$$

Воспользуемся определением Siegert state:

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta+V(\mathbf{r})+\mathbf{F}(t)\mathbf{r}-E_0(t)\right)\phi_0(\mathbf{r};t)=0, \quad (\text{frp}37)$$

Выразим отсюда слагаемое с потенциалом.

$$V(\mathbf{r})\phi_0(\mathbf{r},t)=\left(\frac{1}{2}\Delta-\mathbf{F}(t)\mathbf{r}+E_0(t)\right)\phi_0(\mathbf{r};t). \quad (4)$$

Перепишем frp(81), явно подставив туда функцию Грина:

$$\psi_r^{(a)}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-is_0(t')}G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')V(\mathbf{r}')\times\phi_0(\mathbf{r}';t')\,dt'\Big|_{t'\notin A}. \quad (5)$$

Подставим слагаемое с потенциалом:

$$\psi_r^{(a)}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{+\infty}G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\times\left(\frac{1}{2}\Delta'-\mathbf{F}(t')\mathbf{r}'+i\frac{\partial}{\partial t'}\right)e^{-is_0(t')}\phi_0(\mathbf{r}';t')\,dt'\Big|_{t'\notin A}. \quad (6)$$

Проинтегрируем первое слагаемое дважды по частям:

$$\begin{aligned}&\int d\mathbf{r}'\phi_0(\mathbf{r}';t')\frac{1}{2}\Delta'e^{-is_0(t')}G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\\&=\frac{1}{2}\int_{\Sigma'}e^{-is_0(t')}G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\nabla'\phi_0(\mathbf{r}';t')\,d\mathbf{\Sigma}'\\&-\frac{1}{2}\int_{\Sigma'}e^{-is_0(t')}\phi_0(\mathbf{r}';t')\nabla'G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\,d\mathbf{\Sigma}'\\&+\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}'e^{-is_0(t')}\phi_0(\mathbf{r}';t')\Delta'G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t').\end{aligned} \quad (7)$$

Слагаемое с дифференцированием по времени также проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')i\frac{\partial}{\partial t'}e^{-is_0(t')}\phi_0(\mathbf{r}';t')\,dt'\\&=iG(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')e^{-is_0(t')}\phi_0(\mathbf{r}';t')\Big|_{-\infty}^{+\infty}\\&-i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-is_0(t')}\phi_0(\mathbf{r}';t')\frac{\partial}{\partial t'}G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\,dt'.\end{aligned} \quad (8)$$

Введем поток:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\frac{-i}{2}[&e^{i\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')}\nabla'\phi_0(\mathbf{r}';t')\\&-\phi_0(\mathbf{r}';t')\nabla'e^{i\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')}].\end{aligned} \quad (9)$$

Пользуясь (2), получим:

$$\psi_r^{(a)}(\mathbf{r},t)=\frac{e^{-3i\pi/4}}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{t}\int_{\Sigma'}\mathbf{j}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\,d\mathbf{\Sigma}'\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}\Big|_{t'\notin A}. \quad (10)$$

Выберем координаты в пространстве $\mathbf{r}'$ так, что ось z' направлена вдоль $\mathbf{F}(t')$. Поперечную часть вектора $\mathbf{r}'$ обозначим $\mathbf{r}'_\perp$. Подставим в (9) $\phi_0(\mathbf{r}';t')$ в виде gamas(24):

$$\phi_0(\mathbf{r}';t')|_{z'\to-\infty}=\int A(\mathbf{k}_\perp;t')e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}'_\perp}g(z',k_\perp;t')\frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2}, \quad (11)$$

где

$$g(z',k_\perp;t')=e^{-i\pi/12}2\pi^{1/2}(2F(t'))^{-1/6}Ai(\zeta), \quad (12)$$

$$\zeta=\frac{2e^{-i\pi/3}}{(2F(t'))^{2/3}}\left[E_0(t')-F(t')z'-\frac{1}{2}k_\perp^2\right]. \quad (13)$$

Действие $\mathcal{S}$ определяется уравнением frp(23):

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\mathbf{v}(t)\mathbf{r}-\mathbf{v}(t')\mathbf{r}'+\frac{[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')-\Delta\mathbf{r}]^2}{2(t-t')}\\-\frac{1}{2}\int_{t'}^{t}\mathbf{v}^2(t'')\,dt'',\end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ соответствуют реперной траектории. Выделим слагаемые, зависящие от $\mathbf{r}'_\perp$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\frac{\mathbf{r}'^2_\perp}{2(t-t')}-\mathbf{r}'_\perp\mathbf{v}_\perp(t')\\+\frac{\mathbf{r}'_\perp[\mathbf{r}_\perp(t)-\mathbf{r}_\perp(t')-\mathbf{r}_\perp]}{(t-t')}+\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t').\end{aligned} \quad (15)$$

Функция $\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')$ содержит не зависящие от $\mathbf{r}'_\perp$ слагаемые:

$$\begin{aligned}\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t') &= \mathbf{v}(t)\mathbf{r} - v_\parallel(t')z' - \frac{1}{2}\int_{t'}^{t}\mathbf{v}^2(t'')\,dt'' \\ &+ \frac{z'^2 + 2\mathbf{z}'[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')-\mathbf{r}] + [\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')-\mathbf{r}]^2}{2(t-t')} \\ &= \mathbf{v}(t)\mathbf{r} - v_\parallel(t')z' + \frac{[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')]^2}{2(t-t')} - \frac{\mathbf{r}[\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t')]}{(t-t')} \\ &+ \frac{z'[r(t)-r(t')]_\parallel}{(t-t')} - \frac{1}{2}\int_{t'}^{t}\mathbf{v}^2(t'')\,dt'' + O(\epsilon^1).\end{aligned} \tag{16}$$

Запишем интеграл по поверхности в (10), подставив $\phi_0(\mathbf{r}';t')$ из (11) и учитывая, что $\nabla'\cdot\mathbf{n} = -\partial/\partial z'$:

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma'}\mathbf{j}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')\,d\mathbf{\Sigma}' = \frac{i}{2}\int\frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2}A(\mathbf{k}_\perp;t') \\ &\times\left[\frac{\partial g(z',k_\perp;t')}{\partial z'} - ig(z',k_\perp;t')\frac{\partial\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')}{\partial z'}\right] \\ &\times\int e^{i\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') + i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}'_\perp}\,d\mathbf{r}'_\perp.\end{aligned} \tag{17}$$

Вычислим его:

$$\begin{aligned}&\int e^{i\mathcal{S}_r(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') + i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}'_\perp}\,d\mathbf{r}'_\perp \\ &= e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t') - is_0(t')}\int\exp\left[\frac{i\mathbf{r}'^2_\perp}{2(t-t')} + i\mathbf{r}'_\perp\mathbf{b}_\perp\right]d\mathbf{r}'_\perp \\ &= 2i\pi(t-t')e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t') - is_0(t')}\exp\left[-\frac{i}{2}\mathbf{b}_\perp^2(t-t')\right],\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_\perp &= \frac{\mathbf{r}_\perp(t) - \mathbf{r}_\perp(t') - \mathbf{r}_\perp}{t-t'} - \mathbf{v}_\perp(t') + \mathbf{k}_\perp \\ &= \mathbf{k}_\perp - \mathbf{u}_{i\perp}(t,t') + O(\epsilon^1).\end{aligned} \tag{19}$$

Подставим полученный результат в выражение (10) для волновой функции:

$$\begin{aligned}\psi_r^{(a)}(\mathbf{r},t) &= \frac{e^{i\pi/4}}{(8\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{t}\int A(\mathbf{k}_\perp;t')e^{-\frac{i}{2}\mathbf{b}_\perp^2(t-t') - is_0(t')} \\ &\times\left[e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')}\frac{\partial g(z',k_\perp;t')}{\partial z'}\right. \\ &\left.- g(z',k_\perp;t')\frac{\partial e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')}}{\partial z'}\right]\frac{dt'}{(t-t')^{1/2}}\frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2}\Bigg|_{t'\notin A}.\end{aligned} \tag{20}$$

Обозначим за $\tilde{\tilde{s}}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ действие в (20):

$$\tilde{\tilde{s}}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t') - \frac{1}{2}\mathbf{b}_\perp^2(t-t') - s_0(t'). \tag{21}$$

Вычислим интеграл по $d\mathbf{k}_\perp$ методом перевала. Стационарные точки определяются уравнением:

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{s}}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')}{\partial\mathbf{k}_\perp} = \mathbf{b}_\perp(t-t') = 0, \tag{22}$$

$$\mathbf{k}_\perp^0 = \mathbf{u}_{i\perp}(t,t'). \tag{23}$$

Получим:

$$\begin{aligned}\psi_r^{(a)}(\mathbf{r},t) &= \frac{e^{-i\pi/4}}{2(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{t}A(\mathbf{k}_\perp^0;t')e^{-is_0(t')} \\ &\times\left[e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')}\frac{\partial g(z',k_\perp^0;t')}{\partial z'}\right. \\ &\left.- g(z',k_\perp^0;t')\frac{\partial e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')}}{\partial z'}\right]\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}\Bigg|_{t'\notin A},\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$A(\mathbf{k}_\perp;t') = \frac{4\pi^{1/2}}{F}\times\exp\left[-\frac{3i\pi}{4} - \frac{1}{3F} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2F}\right], \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t')}}{\partial z'} &= \left(\frac{r_\parallel(t) - r_\parallel(t')}{t-t'} - v_\parallel(t')\right)e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t') + i\pi/2} \\ &= u_{i\parallel}(t,t')e^{i\tilde{s}(\mathbf{r},t;z',t') + i\pi/2}.\end{aligned} \tag{26}$$

Седловые точки:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}_i^2(t,t') + \frac{\mathbf{r}\mathbf{u}_i(t,t') - z'u_{i\parallel}(t,t')}{t-t'} + F(t')z' - E_0(t') = 0 \tag{27}$$

Чтобы выражение (24) не зависело от z' должно быть выполнено:

$$\frac{\partial}{\partial z'}\left[e^{i\tilde{s}}\frac{\partial g}{\partial z'} - g\frac{\partial e^{i\tilde{s}}}{\partial z'}\right] = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z'^2} - ge^{i\pi}\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial z'}\right)^2 = 0. \tag{29}$$

Переходя к переменной ζ, определенной в (13), получим, что для выполнения уравнения Эйри необходимо:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial z'}\right)^2 = E_0(t') - F(t')z' - \frac{k_\perp^2}{2}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}\left(-v_\parallel(t') + \frac{r_\parallel(t) - r_\parallel(t')}{t-t'}\right)^2 + \frac{k_\perp^2}{2} + F(t')z' - E_0(t') = 0. \tag{31}$$

Подставив $k_\perp = u_{i\perp}(t,t')$, получим:

$$\frac{1}{2}u_i^2(t,t') + F(t')z' - E_0(t') = 0. \tag{32}$$

Уравнение совпадает с (27), если в последнем пренебречь вторым слагаемым.

Рассмотрим явный вид компонент вектора $\mathbf{u}_i(t,t')$. Пусть $\xi = \omega\Delta t$. Уравнения реперной траектории:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{F}{\omega^2}\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}. \tag{33}$$

Параллельная компонента скорости:

$$u_{i\parallel}(t,t') = \mathbf{u}_i(t,t')\mathbf{e}(t') = \frac{F}{\omega}\frac{1-\cos\xi}{\xi}. \tag{34}$$

Перперндикулярная составляющая $\mathbf{u}_i(t,t')$:

$$\mathbf{u}_{i\perp}(t,t') = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix} - \frac{F}{\omega^2\Delta t}\begin{pmatrix}\sin\omega t - \sin\omega t'\cos\omega\Delta t\\ \cos\omega t - \cos\omega t'\cos\omega\Delta t\\ 0\end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$u_{i\perp}(t,t') = \sqrt{1 - \frac{2\sin\xi}{\xi} + \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}}. \tag{36}$$

Полная скорость и квадрат полной скорости:

$$\mathbf{u}_i(t,t') = \frac{F}{\omega}\begin{pmatrix}\cos\omega t'\\ -\sin\omega t'\\ 0\end{pmatrix} - \frac{F}{\omega^2\Delta t}\begin{pmatrix}\sin\omega t - \sin\omega t'\\ \cos\omega t - \cos\omega t'\\ 0\end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\mathbf{u}_i^2(t,t') = \frac{F^2}{\omega^2}\left[1 - \frac{2}{\xi}\sin\xi + \frac{2}{\xi^2}[1-\cos\xi]\right] = 0. \tag{38}$$

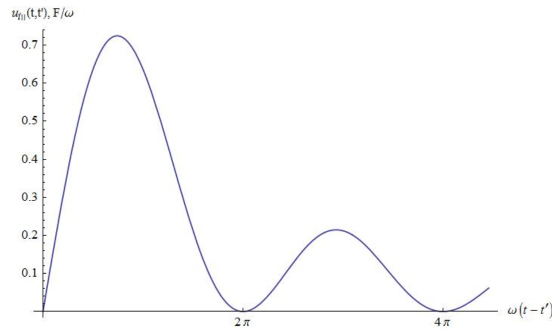

Рис. 1. Зависимость скорости $u_{i\parallel}(t,t')$ от $\omega\Delta t$.

Производные действия $\bar{S}_r$ из note(7):

$$\frac{\partial \bar{S}_r}{\partial t'} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_i^2(t,t') + u_{i\parallel}(t,t')\frac{r_\parallel - z'}{t-t'} + \frac{\mathbf{u}_{i\perp}(t,t')\mathbf{r}_\perp}{t-t'} + F(t')z' - E_0(t') + O(\epsilon^2). \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}_r}{\partial t'^2} = \frac{\mathbf{u}_i^2(t,t')}{t-t'} - \mathbf{F}(t')\mathbf{u}_i(t,t') + O(\epsilon), \tag{40}$$

$$\frac{\partial^3 \bar{S}_r}{\partial t'^3} = \frac{3\mathbf{u}_i^2(t,t')}{(t-t')^2} - \frac{2\mathbf{u}_i(t,t')\mathbf{F}(t')}{t-t'} + \mathbf{F}^2(t') - \mathbf{u}_i(t,t')\left[\frac{\mathbf{F}(t')}{t-t'} + \dot{\mathbf{F}}(t')\right] + O(\epsilon). \tag{41}$$

В точке $t'_{sp} = t - 2\pi/\omega$:

$$\left.\frac{\partial \bar{S}_r}{\partial t'}\right|_{t'=t-2\pi/\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_{i\perp}^2(t,t'_{sp}) + \frac{\mathbf{u}_{i\perp}(t,t'_{sp})\mathbf{r}_\perp}{t-t'_{sp}} + F(t'_{sp})z' - E_0(t'_{sp}) + O(\epsilon \tag{42}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \bar{S}_r}{\partial t'^2}\right|_{t'=t-2\pi/\omega} = \frac{\mathbf{u}_{i\perp}^2(t,t'_{sp})}{t-t'_{sp}} + O(\epsilon), \tag{43}$$

$$\left.\frac{\partial^3 \bar{S}_r}{\partial t'^3}\right|_{t'=t-2\pi/\omega} = \frac{3\mathbf{u}_{i\perp}^2(t,t'_{sp})}{(t-t'_{sp})^2} - \mathbf{u}_{i\perp}(t,t'_{sp})\dot{\mathbf{F}}(t'_{sp}) + \mathbf{F}^2(t'_{sp}) + O(\epsilon). \tag{44}$$

Пусть $\delta = t' - t'_{sp}$. Действие в окрестности t'_{sp}:

$$\bar{S}_r = \bar{S}_0 + \left[\frac{1}{2}\mathbf{u}_{i\perp}^2(t,t'_{sp}) + \frac{\mathbf{u}_{i\perp}(t,t'_{sp})\mathbf{r}_\perp}{t-t'_{sp}} + F(t'_{sp})z' - E_0(t'_{sp})\right]\delta + \frac{\mathbf{u}_{i\perp}^2(t,t'_{sp})}{t-t'_{sp}}\frac{\delta^2}{2} + \left[\frac{3\mathbf{u}_{i\perp}^2(t,t'_{sp})}{(t-t'_{sp})^2} - \mathbf{u}_{i\perp}(t,t'_{sp})\dot{\mathbf{F}}(t'_{sp}) + F^2\right]\frac{\delta^3}{3}. \tag{45}$$