Введем цилиндрические координаты. Ось выберем так, чтобы тор получался вращением сферы именно вокруг нее. Новые переменные: z - сдвиг вдоль оси; ρ - расстояние от оси z; $\psi \in [0, 2\pi]$

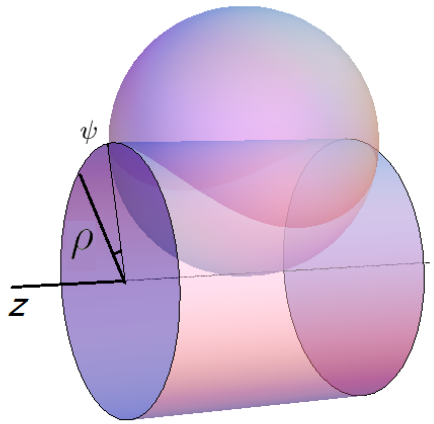

Рис. 1.

Рассмотрим одну сферу. Пусть ее центр располагается в точке (R, z_0, ψ_0) (что в дальнейшем не играет роли). Точка на сфере однозначно определяется тремя параметрами ρ, z и ψ. В частности, при заданных ρ и z существуют два угла ψ_1 и ψ_2, задающих разные точки. Однако, мы знаем, что итоговое распределение не зависит от ψ. Поэтому будем в дальнейшем считать эти точки эквивалентными, то есть параметризировать одну полусферу, отсекаемую полуплоскостью $\psi = \psi_0$ с помощью двух переменных.

Определим вектор $\mathbf{R}$: пусть он лежит на пересечении плоскости $z = z_0$ и полуплоскости $\psi = \psi_0$ и берет начало при $\rho = 0$. Зададим теперь сферическую систему координат с началом отсчета на конце вектора $\mathbf{R}$. Координатами произвольно выбранной точки будут r, θ и φ. Здесь r - расстояние от начала отсчета до точки, θ - угол между вектором, идущим из начала отсчета в точку, и вектором $\mathbf{R}$. Пусть также имеется плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{R}$ и проходящая через его конец. Угол φ - это угол между проекцией вектора на данную плоскость и положительным направлением оси z.

Имеем геометрические соотношения, задающие связь старых переменных с новыми:

$$z = R \sin\theta \cos\varphi \tag{1a}$$

$$\rho^2 = R^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \sin^2\varphi]. \tag{1b}$$

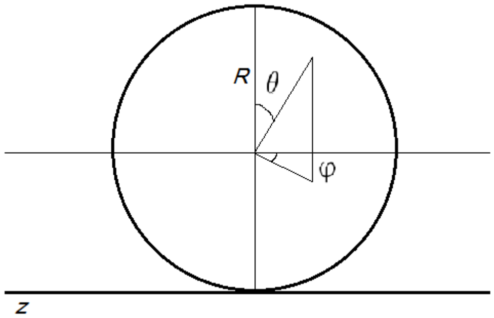

Рис. 2.

Из последних равенств нетрудно вывести:

$$\theta = \arccos\Big(\frac{\rho^2+z^2}{2R^2} - 1\Big), \tag{2a}$$

$$\varphi = \arccos\Big(\frac{z}{R\sin\theta}\Big) = \arccos\Big(\frac{z}{R\sqrt{1-(1-\frac{\rho^2+z^2}{2R^2})^2}}\Big). \tag{2b}$$

Якобиан перехода:

$$J = \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(\rho,z)}, \tag{3}$$

$$J = \frac{4\rho R}{(\rho^2+z^2)\,(4R^2-\rho^2-z^2)\sqrt{1-\frac{4R^2z^2}{(\rho^2+z^2)(4R^2-\rho^2-z^2)}}}. \tag{4}$$

Найдем плотность распределения:

$$\iint \frac{1}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi = \iint \frac{2J}{4\pi}\sin(\theta(\rho,z))d\rho dz \equiv \iint f(\rho,z)d\rho dz \tag{5}$$

$$f(\rho,z) = \frac{2J\sin\theta(\rho,z)}{4\pi}. \tag{6}$$

Коэффициент 2 восходит от описанного утверждения, что каждая точка с фиксированными ρ и z, в действительности, отвечает за две точки на сфере (с разными ψ); $\frac{1}{4\pi}$ - плотность вероятности в старых координатах.

Для того чтобы найти распределение по тору, будем использовать тот факт, что при равномерном распределении $f(\rho,z)$ не зависит от ψ:

$$f(\rho,z) = \int f(\rho,z,\psi)\rho d\psi = 2\pi\rho f(\rho,z,\psi), \tag{7}$$

$$f(\rho,z,\psi) = \frac{f(\rho,z)}{2\pi\rho}. \tag{8}$$

Итоговое распределение:

$$f_{uniform}(\rho,z,\psi)=\frac{R\sqrt{1-\left(1-\frac{\rho^2+z^2}{2R^2}\right)^2}}{\pi^2\left(\rho^2+z^2\right)\left(4R^2-\rho^2-z^2\right)\sqrt{1-\frac{4R^2z^2}{(\rho^2+z^2)(4R^2-\rho^2-z^2)}}}, \tag{9a}$$

$$\rho\in[0,2R], \tag{9b}$$

$$z\in[-\sqrt{2Rr-r^2},\sqrt{2Rr-r^2}]. \tag{9c}$$

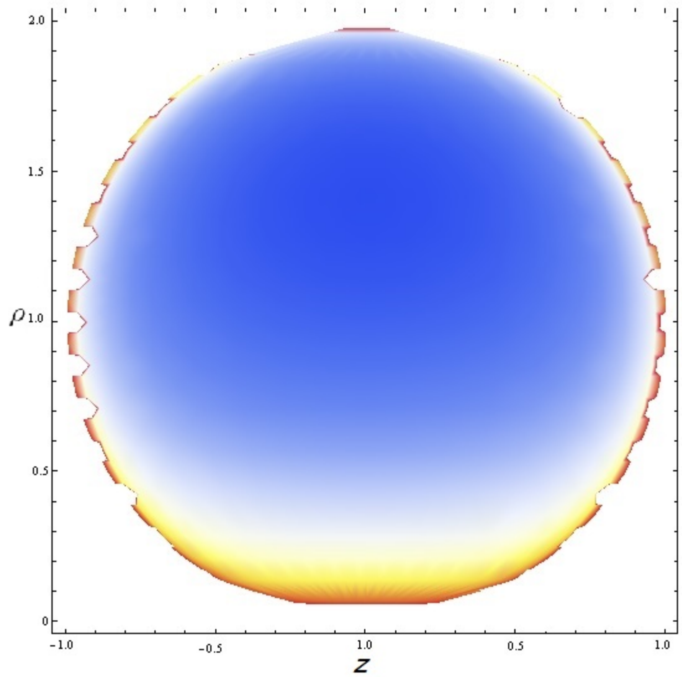

Рис. 3.

Перейдем к рассмотрению неизотропного случая, когда вероятность рассеяния зависит от угла рассеяния. Удобно выбрать направление $\theta=0$ системы вдоль направления скорости $\mathbf{u}_f$ электрона до перерассеяния. Тогда θ - это и будет угол рассеяния. Заметим, что определенная ранее сферическая система координат удовлетворяет этому критерию. Этот факт несложно понять. Направление $\theta=0$ совпадает с некоторым направлением ϕ. которое в задаче перерассеяния определяется только временем t_i, и для любого t_i совпадает с направлением $\mathbf{u}_f$. Таким образом, оси достаточно удобные, чтобы посчитать ответ для любого распределения угла рассеяния.

$$f(r,y,\psi)=f_{uniform}(\rho,z,\psi)\frac{f(\theta(\rho,z,\psi))}{1/(4\pi)}=f(\theta(\rho,z,\psi))\frac{4R\sqrt{1-\left(1-\frac{\rho^2+z^2}{2R^2}\right)^2}}{\pi\left(\rho^2+z^2\right)\left(4R^2-\rho^2-z^2\right)\sqrt{1-\frac{4R^2z^2}{(\rho^2+z^2)(4R^2-\rho^2-z^2)}}}, \tag{10a}$$

$$\rho\in[0,2R], \tag{10b}$$

$$z\in[-\sqrt{2Rr-r^2},\sqrt{2Rr-r^2}]. \tag{10c}$$