I. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

Рассмотрим следующее одномерное уравнение Шредингера:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-Fx\right]\psi(x,t)=0. \tag{1}$$

Найдем функцию Грина:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-Fx\right]G(x,x',t;F)=\delta(t)\delta(x-x'). \tag{2}$$

Сделаем замену $G=\tilde{G}e^{-iFx'}$, после чего произведем преобразование Фурье по координате. Получившееся уравнение будет выглядеть так:

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}+F\frac{\partial}{\partial q}\right)+\frac{1}{2}q^2\right]\tilde{G}(q,t;F)=\delta(t). \tag{3}$$

Сделаем замену координат:

$$\eta=Ft-q,\qquad \xi=Ft. \tag{4}$$

Получим:

$$\left[iF\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{1}{2}(\xi-\eta)^2\right]\tilde{G}(q,t;F)=\delta\left(\frac{\xi}{F}\right). \tag{5}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(q,t;F)&=\theta\left(\frac{\xi}{F}\right)C(\xi)\exp\left[\frac{i}{2F}\int_0^{\xi}[\xi'-\eta]^2\,d\xi'\right]\\&=\theta(t)C(t)\exp\left[\frac{i}{2}\int_0^{t}[q+F(t'-t)]^2\,dt'\right].\end{aligned} \tag{6}$$

II. ПОТЕНЦИАЛ НУЛЕВОГО РАДИУСА

Пусть потенциал нулевого радиуса находится в нуле координат. В окрестности этой точки волновая функция имеет вид[1]:

$$\psi(\mathbf{r})\Big|_{r\to 0}=\frac{c}{r}-\alpha c. \tag{7}$$

Заметим, что выполняется соотношение[2]

$$\alpha r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}. \tag{8}$$

Проинтегрируем по полному углу левую и правую части:

$$\alpha\int r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\,d\Omega=\alpha\int(\nabla,\psi)\,dS=\alpha\int\nabla^2\psi\,dV, \tag{9}$$

$$\int\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}\,d\Omega=-4\pi\alpha c\int\delta(r)\,dV. \tag{10}$$

Сравнивая последние два уравнения, получим:

$$-\frac{\nabla^2}{2}=2\pi c\delta(r), \tag{11}$$

что является необходимым граничным условием в нуле. Сшивая со стационарным уравнением Шредингера в оставшейся области, получим (в случае, когда $V(r)$ не имеет особенностей в нуле):

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2}+V(r)-E\right]\psi=2\pi c\delta(r) \tag{12}$$

или

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2}+V(r)-E\right]\psi=-\frac{2\pi}{\alpha}\delta(\mathbf{r})\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}. \tag{13}$$

III. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ЦИРКУЛЯРНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим движение электрона в циркулярном поле:

$$V(t)=F(x\cos\omega t+y\sin\omega t). \tag{14}$$

Уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=[H_0+V(t)]\psi(\mathbf{r},t). \tag{15}$$

Произведем унитарное преобразование вида $\varphi(\mathbf{r},t)=\exp[i\omega t\hat{L}_z]\psi(\mathbf{r},t)$. Для преобразования операторов используем следующую формулу:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}=\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+... \tag{16}$$

Так как гамильтониан H_0 коммутирует с $\hat{L}_z$:

$$e^{i\omega t\hat{L}_z}H_0e^{-i\omega t\hat{L}_z}=H_0. \tag{17}$$

Потенциал должен измениться следующим образом:

$$\begin{aligned}&e^{i\omega t\hat{L}_z}[x\cos\omega t+y\sin\omega t]e^{-i\omega t\hat{L}_z}=\\&x\cos\omega t+y\sin\omega t-i^2\omega t[x\partial_y-y\partial_x,x\cos\omega t+y\sin\omega t]=\\&x\cos\omega t+y\sin\omega t+\omega t[x\sin\omega t-y\cos\omega t].\end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим малый момент времени:

$$x + y \cdot \omega t + x \cdot \omega^2 t^2 - y \cdot \omega t \approx x, \tag{19}$$

Если рассматривать переход во вращающуюся систему отсчета как последовательные переходы на малые углы $\omega\, dt$, то

$$e^{i\omega t \hat{L}_z} V(t) e^{-i\omega t \hat{L}_z} = Fx. \tag{20}$$

Левая часть:

$$i\frac{\partial \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = i\frac{\partial \varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \omega \hat{L}_z \varphi(\mathbf{r},t). \tag{21}$$

Таким образом, уравнение Шредингера во вращающейся системе координат аналогично уравнению Шредингера в однородном электрическом поле, направленном по оси x и магнитном по оси z:

$$i\frac{\partial \varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[H_0 + Fx - \omega \hat{L}_z\right] \varphi(\mathbf{r},t). \tag{22}$$

Гамильнотиан H_0 в данном случае состоит из кинетической энергии и ZRP. Обозначим вслед за статьей[3] решение стационарного уравнения за $\varphi_E(\mathbf{r})$:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = e^{-iEt} \varphi_E(\mathbf{r}) \tag{23}$$

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2} + Fx - \omega \hat{L}_z - E\right] \varphi_E(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi}{\alpha} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial (r\varphi_E)}{\partial r}, \tag{24}$$

где справа стоит потенциал нулевого радиуса, определяемый в трехмерном случае граничным условием[1]

$$\left.\frac{1}{r\varphi}\frac{\partial (r\varphi)}{\partial r}\right|_{r\to 0} = -\alpha, \qquad \alpha = \sqrt{2|E_0|} \tag{25}$$

Решение этого уравнения запишем с помощью функции Грина:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}^2}{2} - Fx + \omega \hat{L}_z\right] G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \tag{26}$$

Найдем функцию Грина. Для лабораторной системы отсчета, обозначенной штрихом:

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}',t) = \int_0^t \left[\frac{1}{2}\mathbf{u}^2(t') - \mathbf{F}(t')\mathbf{q}(t')\right] dt', \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{r}',t) = \frac{\mathbf{r}'^2}{2t} - \frac{F^2 t}{2\omega^2}\left(1 - \frac{4\sin^2 \omega t/2}{\omega^2 t^2}\right) \\ - \frac{F}{\omega}\left[x'\left(\sin\omega t - \frac{1-\cos\omega t}{\omega t}\right) - y'\left(\cos\omega t - \frac{\sin\omega t}{\omega t}\right)\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Во вращающейся системе координат:

$$\varphi = \varphi' - \omega t; \;\; x = r'\sin\theta\cos\varphi; \;\; y = r'\sin\theta\sin\varphi; \;\; z = z', \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{r}^2}{2t} - \frac{F^2 t}{2\omega^2}\left(1 - \frac{4\sin^2 \omega t/2}{\omega^2 t^2}\right) \\ - \frac{F}{\omega}\left[x\left(\frac{1-\cos\omega t}{\omega t}\right) - y\left(1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t}\right)\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом,

$$\varphi_E(\mathbf{r}) = -2\pi c \int_0^\infty dt e^{iEt} G(\mathbf{r},t;0). \tag{31}$$

.

Получим константу из граничного условия (25):

$$\left. 2\pi \frac{\partial [rG(\mathbf{r}',E)]}{\partial r}\right|_{r=0} + \alpha = 0. \tag{32}$$

$$G(\mathbf{r},t) = \frac{e^{3i\pi/4}\theta(t)}{(2\pi t)^{3/2}} e^{i\mathcal{S}(\mathbf{r},t)}. \tag{33}$$

Получим:

$$\varphi_E(\mathbf{r}) = \frac{e^{-i\pi/4}}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} e^{iEt + i\mathcal{S}(\mathbf{r},t)}. \tag{34}$$

Подставим $r = 0$:

$$\mathcal{S}(0,t) = -\frac{F^2 t}{2\omega^2}\left(1 - \frac{4\sin^2 \omega t/2}{\omega^2 t^2}\right) \tag{35}$$

Решая уравнение на седловые точки, мы придем к уравнению

$$\omega^2 t^2 - 2\omega t \sin\omega t - 2\cos\omega t + 2 = 0, \tag{36}$$

физически означающему равенство нулю $\mathbf{u}_i^2(t,0)-$ квадрата скорости, необходимой для того, чтобы вернуться к моменту времени t в точку начала движения.

Список литературы

[1] Ю.Н.Демков и В.Н.Островский. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике, 1975.

[2] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf. Theoretical nuclear physics, 1952.

[3] N.L.Manakov and L.P.Rapoport. Particle with low binding energy in a circularly polarized field, 1975.