Datenstrukturen und Algorithmen: Hausübung 1

Felix Schrader, Jens Duffert, Eduard Sauter

16. Oktober 2015

Aufgabe 1.2

a) Das folgende Programm berechnet die Quadratwurzel einer positiven Zahl x nach dem Divide-and-Conquer Paradigma.

```
1  function SqrtBisect(x, eps){
2      return SqrtBisectRecurse(x, 0, x + 1, eps * eps);
3  }
4
5  function SqrtBisectRecurse(x, a, b, eps){
6      guess = (b+a)/2;
7      square = guess*guess;
8      if (abs(x - square) < eps)
9          return guess;
10     else if (square < x)
11         return SqrtBisectRecurse(x, guess, b, eps);
12     else
13         return SqrtBisectRecurse(x, a, guess,  eps);
14 }
```

Um die Korrektheit zu zeigen, wird vorrausgesetzt ,dass

$$a < b \iff a^2 < b^2 \quad \forall\, a, b \geq 0 \tag{1}$$

gilt.

`SqrtBisect` sucht $\sqrt{x}$ im Intervall $[0, x+1]$. Die Quadratwurzel muss in diesem Bereich liegen, da $a * a > a \quad \forall\, a \geq 1$ und $a * a \leq 1 \quad \forall\, 0 \leq a \leq 1$. Zu beginn eines Funktionsaufrufes sei also sichergestellt, dass $\sqrt{x} \in [a, b]$. Aufgrund der oberen Gleichung und Zeilen 10-13 bleibt dies Gewährleistet. Die Abbruchbedingung muss somit erreicht werden, da das Suchintervall nach jedem Schritt halbiert wird. An dieser Stelle ist

$$|x - \texttt{guess}^2| < \varepsilon^2 \tag{2}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass daraus folgt $|\sqrt{x} - \texttt{guess} < \varepsilon|$.

Dies folgt direkt aus

$$|x-a|^2 \leq \left|x^2 - a^2\right|$$

Beweis

(a) Fall $x \geq a$

$$|x-a|^2 = x^2 + a^2 - 2ax \leq x^2 + a^2 - 2a^2 = x^2 - a^2 = \left|x^2 - a^2\right|$$

(b) Fall $x < a$

$$|x-a|^2 = x^2 + a^2 - 2ax \leq x^2 + a^2 - 2x^2 = a^2 - x^2 = \left|x^2 - a^2\right|$$

Damit ist $|\texttt{SqrtBisect}(x) - \sqrt{x}| < \varepsilon$.

b) Im schlimmsten Fall erreicht $b-a$ den Wert von ε^2. Dies geschieht, falls gleich zu begin $a = \sqrt{x} = 0$. Da nach jedem Schritt $b - a \to (b-a)/2$ ist nach dem n-ten Schritt für den Startwert von $b - a = x + 1$ der Wert $\frac{x+1}{2^n}$. Man erhält als Lösung:

$$\frac{x+1}{2^n} = \varepsilon \implies n = \lg \frac{x+1}{\varepsilon}$$