

1 Einführung

Schwabl Kapitel 1.1

Makroskopische Systeme aus $N \gg 1$ Teilchen.

Mikrozustand und mikroskopische Gesetze

- Klassische Physik:

Punkt $(\vec{r}, \vec{p}) \in$ Phasenraum $\simeq \mathbb{R}^{6N}$

$$m_1 \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1$$

- Quantenmechanik:

Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3N})$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

Makrozustand und Makroskopische Gesetze

- Temperatur T , Volumen V , Druck P , ...
- $PV = nk_B T$, $U = RI$

Mikroskopische Gesetze \implies makroskopische Gesetze.

Makrozustand \iff Zeitmittelung

- Klassische Physik:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t+t} dt' A(\vec{r}(t'), \vec{p}(t'))$$

- Quantenmechanik:

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t+t} dt' \langle \Psi(t) | \hat{B} | \Psi(t) \rangle$$

Mikroskopische Zeitskala $\ll \Delta t \ll$ makroskopische Zeitskala

Statistische Mittelung

- Klassische Physik

$$\bar{A} = \int d^3r d^3p A(\vec{r}, \vec{p}) P(\vec{r}, \vec{p}), \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte } P(\vec{r}, \vec{p})$$

- Quantenmechanik:

$$\bar{B} = \text{tr}(\hat{B} \hat{\rho}) \quad \text{Dichteoperator } \hat{\rho}$$

Statistische Physik

- Bestimmung von P und $\hat{\rho}$
- Berechnung der Ensemblemittelung

- Anwendung auf physikalische Probleme

Reduktionismus

$$\text{System} = \{\text{Einzelteile}\}$$

Elementarteilchenphysik \rightarrow Festkörperphysik, Chemie \rightarrow Biologie \rightarrow Medizin \rightarrow Psychologie \rightarrow Soziologie

“*More is different*” P.W. Anderson

2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Schwabl Kapitel 1.2, 1.5.1

Einige Definitionen

Zufallsvariable x Wert von x hängt von einem Zufallsereignis ab Beispiel Messung: $x = X_{\text{exakt}} + \text{Messfehler}$

Häufigkeit N identische Versuche, $N_x = \text{Anzahl der Werte } x \implies \frac{N_x}{N}$

Empirische Wahrscheinlichkeit $P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_x}{N}$.

$$\sum_x P_x = 1, \quad 1 \geq P_x \geq 0$$

Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ $x \in \mathbb{R}$.

$w(x)\Delta x = \text{Wahrscheinlichkeit für einen Wert } \in [x, x + \Delta x]$

$$\int dx w(x) = 1, \quad w(x) \geq 0$$

Beziehung mit diskreter Wahrscheinlichkeit:

$$w(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$$

Mittelwert/Erwartungswert

$$\langle f(x) \rangle = \sum_x f(x) P_x \text{ beziehungsweise } \int dx w(x) f(x)$$

Schwankungsquadrat

$$\Delta X^2 = \langle (x - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad \Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

2.1 Zentraler Grenzwertsatz

Es gibt N unabhängige aber identische Zufallsvariablen $x_i, i = 1, \dots, N$.

$$P(x_1, \dots, x_N) = P(x_1)P(x_2) \dots P(x_N)$$

Außerdem existieren $\langle x \rangle, \Delta x$ von $P(x)$.

Mittelwert $Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ist eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeit $Q_N(Y)$

$$Q_N(Y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Y-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$a = \langle x \rangle, \quad \sigma = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$$

Abbildung 1: Normalverteilung, $Y = \langle X \rangle \pm \frac{\Delta X}{\sqrt{N}}$

3 Klassische Physik

N Teilchen Mikrozustand $(q, P) \in$ Phasenraum $\simeq \mathbb{R}^{6n}$

Kanonische Gleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, 3N$$

Anfangsbedingung

$$(q_0, P_0) = (q_0(t_0), P(t_0)) \implies \text{Bahn } (q(t|q_0, P_0), P(t|q_0, P_0))$$

Kanonische Transformation

$$(q(t), P(t)) \iff (q(t'), P(t'))$$

Ziel

$$\bar{A} = \int d^{3N}q d^{3N}p A(q, P) P_G(q, P)$$

Gleichgewichtsverteilung $P_G(q, P) = ?$

Unschärfe Anfangsbedingung

$$P(q, P, t_0) = P_0(q, P)$$

Scharfe Anfangsbedingung: $P_0(q, P) = \delta(q - q_0)\delta(P - P_0)$. Differentialgleichung für $P(q, P, t)$:
Liouville-Gleichung.

$$P(t) = P(q, P, t) d^{3N}q d^{3N}p = P(t') = P(q, P, t') d^{3N}q' d^{3N}p'$$

Liouville-Satz

$$d^{3N}q d^{3N}p = d^{3N}q' d^{3N}p' \quad \left[\text{Jacobi-Matrix } \frac{d^{3N}q' d^{3N}p'}{d^{3N}q d^{3N}p} = 1 \right]$$

$$\implies P(q(t), P(t), t) = P(q(t'), P(t'), t'), \quad \text{Erhaltungsgröße } \frac{dP}{dt} = 0$$

Kettenregel

$$\frac{dP(q(t), P(t), t)}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \{H, P\}$$

Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \{P, H\}$$

Bedingungen für $P_G(q, P)$ (im Gleichgewicht)

- $\{P_G, H\} = 0$
- $P_G \geq 0$
- $\int d^{3N}q d^{3N}p P_G(q, P) = 1$.

Superpositionsprinzip: Lösungen $P_1, P_2 \implies P = a_1 P_1 + a_2 P_2$ mit $a_1, a_2 \geq 0, \quad a_1 + a_2 = 1$.

Makrozustand: $T, V, P, \dots \implies P_0$ oder P_g ?

4 Quantenmechanik

Schwabl Kapitel 1.4, 1.5.2

N Teilchen, Mikrozustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \simeq \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3N})$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

Anfangsbedingung $|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle$ (eindeutig)

$$\text{Erwartungswert } A(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \langle \hat{A} \rangle$$

Ziel:

$$\text{Statistische Mittelung } \langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{A} \hat{\rho}_G), \quad \hat{\rho}_G = ?$$

Definition

Statistischer Operator, Dichteoperator, Dichtematrix, ...

$$\hat{\rho} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \text{ linear}$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{+\dagger}$$

$$\text{positiv-semidefinit } \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \geq 0 \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\text{tr } \hat{\rho} = 1$$

Spektrale Zerlegung

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n p_n |n\rangle \langle n| \\ &= \int d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| w(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dichteoperator} \implies & \begin{aligned} p_n &\geq 0 \\ \sum_n p_n &= 1 \\ p_n &\in \mathbb{R} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{aligned} w(\lambda) &\geq 0 \\ \int d\lambda w(\lambda) &= 1 \\ w(\lambda) &\in \mathbb{R} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n p_n \langle n | \hat{A} | n \rangle.$$

Reiner Zustand :

$$p_{n_0} = 1, p_n = 0 \forall n \neq n_0, \quad \hat{\rho} = |n_0\rangle \langle n_0| \implies \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

Gemisch : $p_n \neq 0$ für 2 oder mehr n .

- Verschränkte Zustände
- Statistisches Gemisch

Spektrale Zerlegung

$$\hat{A} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \sum_n \sum_{\alpha} \underset{\text{Stat. Zufall}}{p_n} \underset{\text{Q.M. Zufall}}{|\langle n | \alpha \rangle|^2} a_{\alpha}$$

$$\text{Gemisch: 2 Quellen: } I_1, \theta_1, \quad I_2, \theta_2 \implies I' = I_1(\cos \theta_1)^2 + I_2(\cos \theta_2)^2$$

$$p_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}, \quad p_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$

Von Neumann Gleichung

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [H, \hat{\rho}]$$

- Anfangsbedingung $\hat{\rho}_0 \rightarrow \hat{\rho}(t)$
- Gleichgewicht:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = 0 \implies [H, \hat{\rho}] = 0$$

- Superpositionsprinzip $\rho = a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2$ mit $a_1, a_2 \geq 0$, und $a_1 + a_2 = 1$
- Im Gleichgewicht:

$$\hat{\rho}_G = \sum_n p_n |E_n\rangle \langle E_n| = \int dE w(E) |E\rangle \langle E| \quad \text{mit } H |E\rangle = E |E\rangle$$

- Isoliertes System:

$$p_n = \frac{1}{Z_n} \text{ für } E_n = E_0, \quad Z_n = \text{Entartung des Niveaus } E_0$$

- Geschlossenes System:

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \text{ mit } \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

Entropie und Ensemble

Schwabl Kapitel 2.1-2.5

Definition Entropie (Quantenstatistik)

$$S = -k_B \text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \quad k_B = k = \text{Boltzmann-Konstante} \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

Eigenschaften

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n p_n |n\rangle \langle n| & p_n &\geq 0 & \sum_n p_n &= 1 \\ S(\{p_n\}) &= -k_B \sum_n p_n \ln p_n \end{aligned}$$

Hinweise:

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{A} &= \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle & f(\hat{\rho}) &= \sum_n f(p_n) |n\rangle \langle n| \\ e^{\hat{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n \end{aligned}$$

Die Entropie ist also über die Diagonalelemente der Dichtematrix in diagonalisierter Form berechenbar. Dies ist wohldefiniert, da jede Dichtematrix diagonalisiert werden kann.

Extrema mit Nebenbedingung $\sum_n p_n = 1$

- Minimum $S = 0$ für einen reinen Zustand ($p_{n_0} = 1, p_n = 0 \quad \forall n \neq n_0$)
- Maximum $S = k_B \ln M$ für $p_n = \frac{1}{M} \quad \forall 1, \dots, M$.

Die Entropie ist maximal für Unkenntnis über den Zustand des Systems (Auch Maß für Unordnung).

Extensivität

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

$$\hat{\rho}_A \rightarrow \hat{\rho}_A \otimes \hat{I}_B$$

$$\hat{\rho}_B \rightarrow \hat{I}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

$$\implies [\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B] = 0$$

$$\begin{aligned} S &= -k_B \operatorname{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \\ &= -k_B \operatorname{tr}[(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) \ln (\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B)] \\ &= -k_B \operatorname{tr}(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A) - k_B \operatorname{tr}(\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B) = S_A + S_B \end{aligned}$$

Nebenbedingung

$$S \leq S_A + S_B$$

(z.B. verschränkte Systeme)

Beispiel System von N Spins S ($\vec{S}^2 = S(S+1)$).

Hilbert-Raum für einen Spin $= \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^{2S+1}$. Gesamter Hilbert-Raum

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$$

$$\dim \mathcal{H} = (2S+1)^N = M$$

- Minimum $S = 0$ z.B. für $|\Psi\rangle = |\uparrow, \uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow\rangle$.
- Maximum $S = k_B \ln M$ für $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \hat{I} = k_B n \ln (2S+1)$

Gleichgewicht

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\rho}{dt} &\iff [H, \hat{\rho}] = 0 \implies \rho = \sum_m p_n |E_n\rangle \langle E_n| \\ &\implies E = \langle \hat{H} \rangle = \operatorname{tr}(\hat{\rho} \hat{H}) = \sum_n p_n E_n \end{aligned}$$

$$\rho |E_n\rangle = p_n |E_n\rangle$$

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$$

Definition Statistisches Ensemble oder Gesamtheit

Sie ist eine Gewichtete Menge der Mikrozustände, die einen Makrozustand entsprechen.

$$\{(|N\rangle, p_n)\} \equiv \hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$$

Zentrales Postulat der statistischen Physik

System mit $N \rightarrow \infty$ Freiheitsgraden im Gleichgewicht.

- S ist maximal für einen gegebenen Makrozustand. Das erlaubt uns eine eindeutige Bestimmung des statistischen Operators $\hat{\rho}$.
- Statistische Mittelungen der Observablen erfüllen die makroskopischen Gesetze der Thermodynamik.

$$S = -k_B \operatorname{tr} \hat{\rho}_B = -k_B \langle \ln \hat{\rho}_G \rangle$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \operatorname{tr}(\hat{\rho}_G \mathcal{O}) \qquad U = \langle \hat{H} \rangle$$

Definition Entropie (Thermodynamik)

Wir betrachten ein System in einem Bad, mit welchem es Energie austauschen kann. Eine ideale Situation, in welcher alle Prozesse die wir betrachten reversibel sind.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Zustandsfunktion oder thermodynamische Variable.

- Extensiv
- monoton steigend $\frac{\partial S}{\partial E} > 0$
- $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{S}{N} = 0$.

Nebenbedingung Für bestimmte Modelle statistische Entropie nicht gleich der thermodynamischen Entropie, das bedeutet das Modell ist nicht physikalisch. Eigentlich hat man in den letzten 100 Jahren in denen man Forschung betreibt kein Problem gefunden, das man nicht lösen konnte. Es gibt verschiedene Situationen in der Praxis, in denen man die Makrozustände beschreibt.

Mikrokanonisches Ensemble

Es beschreibt ein isoliertes System.

Freie thermodynamische Variablen

- Teilchenzahl N
- Volumen V
- Magnetisierung M
- Energie E

Zustandsfunktion Druck $P(N, V, E)$

Maximierung der Entropie

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{\Omega} P_E P_N \dots \\ \hat{\rho} &\propto \delta(\hat{H} - E) \delta(\hat{N} - N) \end{aligned}$$

Kanonisches Ensemble

Beschreibt ein geschlossenes System.

Freie thermodynamische Variablen

- Temperatur T
- N, V, M

Zustandsfunktionen $E(T, N, V)$

Maximum der Entropie Für feste T, N, V, \dots

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \hat{P}_N \dots \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Zustandssumme

$$Z = \text{tr } e^{-\beta \hat{H}}$$

Großkanonisches Ensemble

Beschreibt ein offenes System

Freie Thermodynamische Variablen

- Chemisches Potential μ
- T, V, \dots

Zustandsfunktionen $N(T, \mu, V)$

Maximum der Entropie für feste T, μ, V falls

$$\hat{\rho}_G = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} P$$

Großkanonische Zustandssumme $Z_{GK} \text{tr } e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$

Viele weitere Ensembles

Zu jeder intensiven Variable gibt es eine Extensive Variable(Observable).

Äußeres Feld Intensive Variable	Observable Extensive Variable
y	x
$\hat{\rho}_G e^{-\beta y \hat{x}}$	$\hat{\rho}_G P_x \delta(\hat{x} - x)$
Beispiele	
M	N
P	V
H	M
Magnetfeld	Magnetisierung

Mikrokanonisches Ensemble

Wir betrachten ein isoliertes System. Zum Beispiel ein Gas in einem Behälter welcher isoliert ist. Energie und Teilchenzahl sind fest. Genauso das Volumen. Eine Ähnliche Situation wäre auch ein magnetisches Material. Die Isolation wäre hier ein Material welches keine magnetischen Felder durchlässt. Typisch für das isolierte System ist, dass die Energie eine kontrollierbare Variable ist. Es gibt also eine freie thermodynamische Variable E . Die erlaubten Mikrozustände sind die Eigenzustände des Hamilton-Operators H zur Energie E . Das Ziel ist nun die Mikrozustände zu beschreiben und die makroskopischen Variablen zu berechnen. Man braucht dazu den statistischen Operator.

Diskretes Eigenspektrum

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n| \quad : \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad p_n = 0 \quad \forall n \text{ mit } E_n \neq E$$

$$\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{w(E)} p_n |n\rangle \langle n| \quad w(E) = \text{Entartung der Eigenenergie } E$$

Wir verwenden das Postulat der Maximierung der Entropie:

$$S(E) = -k_B \sum_{n=1}^{w(E)} p_n \ln p_n, \quad \sum_{n=1}^{w(E)} p_n = 1$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial p_n} - \lambda \frac{\partial}{\partial p_n} \left(\sum_{m=1}^{w(E)} p_m - 1 \right)$$

$$= -k_B (\ln p_n + 1) - \lambda \quad \forall 1, \dots, w(E)$$

$$\text{Extrema für } \implies p_n = e^{-\frac{\lambda}{k_B} - 1} \implies p_n = \frac{1}{w(E)}$$

$$\implies S(E) = k_B \ln(w(E)) \text{ ist auch ein Maximum}$$

Dichteoperator im Gleichgewicht

$$\hat{\rho}_G = \sum_{n=1}^{w(E)} \frac{1}{w(E)} |n\rangle \langle n| = \frac{1}{w(E)} P_E = \frac{1}{w(E)} \delta(H - E)$$

$$\text{tr } \hat{\rho}_G = 1$$

$$\text{tr } P_E = w(E)$$

Kontinuierliches Spektrum

$$\hat{\rho} = \int d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| p(\lambda)$$

$$N(E) = \text{Anzahl der Zustände mit einer Eigenenergie} \leq E$$

Hinweis: Für ein diskretes System von Eigenzuständen für ein kontinuierliches Spektrum kann man die Anzahl der Eigenzustände kleiner als w definieren.

$$w(E) = \frac{dN}{dE} = \text{Zustandsdichte}$$

$$\implies w(E)\Delta E = \text{Anzahl der Eigenzustände in } [E, E + \Delta E]$$

$$S(E) = k_B \ln(w(E)\Delta E)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{w(E)} \delta(H - E)$$

Thermodynamische Variablen

Man macht eine Statistische Mittelung

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}_G \hat{\mathcal{O}})$$

Beispiele

$$\text{Innere Energie: } U = \langle H \rangle = E$$

$$\text{Magnetisierung: } M_z = \langle S_z \rangle$$

Thermodynamischer Limes ($N \rightarrow \infty$)

Definition Temperatur

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_x$$

Definition Konjugierte Variablen

Beispiele:

$$x = \left\{ \begin{array}{c} M \longleftrightarrow H \\ N \longleftrightarrow M \\ V \longleftrightarrow P \end{array} \right\} y$$

$$S(E, X) \qquad y = \pm T \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_E$$

Statistische Physik

Extensive Observable \hat{x} ,

$$\implies \langle \hat{x} \rangle = x$$

$$[\hat{x}, \hat{H}] \xrightarrow{N \gg 1} N^0, n^{-1}$$

$$S(E, X) = k_B \ln w(E, X)$$

Beispiel: System von nicht-wechselwirkenden Spins

$$N \text{ Spins } s = 1, \quad H = \sum_{i=1}^N H_i = J \sum_{i=1}^N S_{iz}^z \quad (J > 0)$$

Eigenzustände:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Teilchen } & \begin{cases} H_i |m_j\rangle = JS_{jz}^z |m_j\rangle = J\hbar^2 m_j^2 \\ S_{zj} |m_j\rangle = \hbar m_j |m_j\rangle \end{cases} & m_j = -1, 0, 1 \\ N \text{ Teilchen } & \begin{cases} \text{Dim } \mathcal{H} = 3^N \\ |\{m_j\}\rangle = |m_j\rangle \otimes |m_j\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle \\ E(\{M_j\}) = J \sum_{j=1}^N m_j^2 \\ S_z |\{m_j\}\rangle = \sum_j m_j |\{m_j\}\rangle \\ H |\{m_j\}\rangle = E(\{m_j\}) |\{m_j\}\rangle \end{cases} & M = \sum_j m_j |\{m_j\}\rangle \end{aligned}$$

Problem Entartung $w(E, M)$

$$\begin{aligned} N_+ &= \text{Anzahl der Spins mit } m_j = +1 \text{ in } \{m_j\} \\ N_0 &= \text{Anzahl der Spins mit } m_j = +0 \text{ in } \{m_j\} \\ N_- &= \text{Anzahl der Spins mit } m_j = -1 \text{ in } \{m_j\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = J(N_+ + N_-) \\ M = N_+ - N_- \\ N = N_+ + N_- + N_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_+ = \frac{R+M}{L} = \frac{r+m}{L} N \\ N_- = \frac{R-M}{L} = \frac{r-m}{L} N \\ N_0 = N - R = (1-r)N \end{cases}$$

$$\text{Energie pro Spin ist } r = \frac{R}{N} = \frac{E}{NJ} \in [0, 1]$$

$$\text{Magnetisierung pro Spin } m = \frac{M}{N} \in [-1, 1]$$

Problem: N_+ unterscheidbare Zustände $m_j = +1$ auf N Spins verteilen.

$$\Rightarrow \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{N_+!(N - N_+)!} \text{ Möglichkeiten}$$

Danach: N_- unterscheidbare Zustände auf $N - N_+$ Spins mit $m_j = -1$ verteilen.

$$\Rightarrow \binom{N - N_+}{N_-} \text{ Moeglichkeiten}$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned} w(E, M) &= w(N_+, N_-) \\ &= \binom{N}{N_+} \binom{N - N_+}{N_-} \\ &= \frac{N!}{N_+! N_-! N_0!} \end{aligned}$$

Damit folgt die Entropie:

$$\begin{aligned} S(E, M) &= S(N_+, N_-) \\ &= k_B \ln \left(\frac{N!}{N_+! N_-! N_0!} \right) \end{aligned}$$

Annahme: $N, N_+, N_0, N_- \gg 1$ aber

$$\begin{aligned} \frac{N_+}{N}, \frac{N_-}{N}, \frac{N_0}{N} &\text{ fest und endlich} \\ \Leftrightarrow m, n &\text{ fest und endlich} \\ \Leftrightarrow M, E &\text{ sind extensiv } (M, E \propto N) \end{aligned}$$

Stirling Formel

$$\begin{aligned} \ln N! &\approx N \ln N - N \\ \Rightarrow S(E, M) &= k_B N f(r, m) \\ f(r, m) &= - \left[\frac{r+m}{2} \ln(r+m) + \frac{r-m}{2} \ln \frac{(r-m)}{2} + (1-r) \ln(1-r) \right] \end{aligned}$$

Temperatur

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_M = \frac{k_B}{J} \ln \left(\frac{2(1-r)}{\sqrt{r^2 - m^2}} \right)$$

Ohne Magnetisierung $M = 0$ genau dann, wenn $m = 0$.

$$S(E) = -kN \left[r \ln \frac{r}{2} + (1-r) \ln(1-r) \right]$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{J} \ln \left(\frac{2(1-r)}{r} \right) \begin{cases} > 0 & \text{falls } 0 < r < \frac{2}{3} \\ < 0 & \text{falls } \frac{2}{3} < r < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow r(T) &= \frac{2}{e^{\beta J} + 2}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \\ E(T) &= NJ \frac{2}{e^{\beta J} + 2} \\ S(T) &= kN \left[\frac{2}{e^{\beta J} + 2} \ln(e^{\beta J} + 2) - \frac{1}{e^{\beta J} + 2} \ln(1 + 2e^{-\beta J}) \right]\end{aligned}$$

Diskussion

Tiefe Temperaturen

$$k_B T \ll J \iff \beta J \longrightarrow \infty \implies \begin{cases} E \longrightarrow 0 \\ S \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Nebenbedingung für $J < 0$:

$$\implies \begin{cases} E = NJ \\ S = k_B N \ln(z) \end{cases}$$

Hohe Temperatur $k_B T \gg J$

$$\iff \beta J \longrightarrow 0 \implies \begin{cases} E = \frac{2}{3} NJ \\ S = \frac{1}{3} k_B N \ln(3) \end{cases}$$

Kanonisches Ensemble

Schwabl Kapitel 2.6

Schwabl nimmt an, dass man das gesamte System mikrokanonisch behandeln kann. $\hat{\rho} \propto \delta(\hat{H} - E)$. Das innere Teilsystem 2 ist viel kleiner als das äußere Teilsystem 1. Also ist auch die Änderung der Energie des Systems 1 $\Delta E_1 \gg \Delta E_2$. Man benutzt dann das Prinzip der Maximierung der Entropie S woraus folgt, dass

$$\hat{\rho}_2 = e^{-\hat{H}_2/(k_B T_2)}$$

Quantenmechanik Anmerkung:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad \text{Basis } \{|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle\} \text{ von } H$$

$$\text{tr } \hat{A} = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \langle n_1 n_2 | \hat{A} | n_1 n_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{A} = \sum_{n_2} \langle n_2 | \hat{A} | n_2 \rangle \\ &= \sum_{n_2} \sum_{n_1} \sum_{n'_1} \langle n_1 n_2 | \hat{A} | n'_1 n_2 \rangle |n_1\rangle \langle n'_1|\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_1 = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{\rho} \implies S_1(E_1) = \frac{1}{T_1} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right) = \frac{1}{T}.$$

Wir betrachten ein geschlossenes System im Gleichgewicht mit Wärmebad der Temperatur T . Was ist der statistische Operator $\hat{\rho}$?

Definition Freie Energie (Thermodynamik, makroskopisch)

$$F(T) = U(S(T)) - TS(T)$$

Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_X &\iff T_X = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_X \\ &\implies S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_X \end{aligned}$$

Postulat Im thermischen Gleichgewicht ist die Entropie maximal. Dies gilt genau dann wenn die freie Energie minimal ist.

Definition Funktional der freien Energie In der mikroskopischen statistischen Physik.

$$\begin{aligned} F[\hat{\rho}] &= E[\hat{\rho}] - TS[\hat{\rho}] \\ \text{mit } E[\hat{\rho}] &= \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

Minimierung von $F[\hat{\rho}]$

Variationsrechnung $\delta F = 0 \quad \forall \delta \hat{\rho}$

1.

$$\begin{aligned} \delta F &= F(\hat{\rho} + \delta \hat{\rho}) - F(\hat{\rho}) \\ &= \text{tr}(H \delta \hat{\rho}) + k_B T \text{tr}(\delta \hat{\rho} \ln \hat{\rho}) + k_B T \text{tr} \delta \hat{\rho} \\ &= \text{tr}((H + k_B T \ln \hat{\rho}) \delta \hat{\rho}) \end{aligned}$$

Wir verwenden, dass man kompakte operatoren in der Spur vertauschen kann.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{A} \hat{B}) &= \text{tr}(\hat{B} \hat{A}) \\ \text{tr} \hat{\rho} = 1 &\implies \text{tr} \delta \hat{\rho} = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\delta F = 0 \quad \forall \delta \hat{\rho} \implies H + k_B \ln \hat{\rho} = c \iff \hat{\rho} = e^{\frac{\hat{H}}{k_B T}} e^{\frac{c}{k_B T}}$$

Die folgenden drei Formeln sollte man sich merken:

$$\implies \hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Kanonische Zustandsumme

$$Z = \text{tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

Minimum von $F[\hat{\rho}] \equiv$ Freie Energie.

$$F = -k_B T \ln Z$$

Bemerkung: $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}} P_N$

Weitere thermodynamische Variablen

$$x = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{x}) \text{ z.B. } M, N$$

$$\text{Thermodynamik } y = \pm \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_T, \text{ z.B. } P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, B = \left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_T$$

Statistische Bedeutung der Wärme

$$\begin{aligned} dE &= d \text{tr}(\hat{\rho}\hat{H}) = \text{tr}(d\hat{\rho}\hat{H}) + \text{tr}(\hat{\rho}d\hat{H}) \\ dS &= -k_B d \text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -k_B \text{tr}(d\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) - k_B \text{tr} d\hat{\rho} \\ &= \frac{1}{T} \text{tr}(d\hat{\rho}\hat{H}) \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \\ \implies dE &= T dS + \text{tr}(\hat{\rho} d\hat{H}). \end{aligned}$$

1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$dV = \delta Q + \delta A$$

- Reversibler Prozess

$$\delta Q = T dS = \text{tr}(d\hat{\rho}\hat{H})$$

$$\delta A = \text{tr}(\hat{\rho} d\hat{H}) \implies \text{Änderung der Wärme} \equiv \text{Änderung der Wahrscheinlichkeit der Mikrozustände}$$

Energiefluktuationen

Wahrscheinlichkeit für Mikrozustand mit Energie E . Diskretes Spektrum

$$P(E) = \begin{cases} \frac{1}{Z} e^{-\beta E} & \text{Falls Eigenenergie } E \text{ existiert} \\ 0 & \text{Falls Eigenenergie } E \text{ nicht existiert} \end{cases}$$

Kontinuierliches Spektrum

$$P(E) = W(E) \Delta E$$

$$W(E) = w(E) \frac{1}{Z} e^{-\beta E}$$

Definition einiger Größen

- Mittelwert

$$\bar{E} = \int dE w(E) E = \langle \hat{H} \rangle = U$$

Nebenbedingung

$$\langle H \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

- Schwankungsquadrat

$$\Delta E^2 = \int dE W(E) (E - \bar{E})^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2$$

Nebenbedingung

$$\Delta E^2 = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \langle \hat{H} \rangle}{\partial \beta}$$

- Wärmekapazität

$$C_x = \left(\frac{dU}{dT} \right)_x = \frac{1}{k_B T^2} \Delta E^2 \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

3. Hauptsatz

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_x = 0 \implies \lim_{T \rightarrow 0} \Delta E^2 = 0$$

Relation mit dem mikrokanonischen Ensemble

Experiment: U und C_x sind extensiv. Das bedeutet mathematisch, dass U und C_x proportional zur Teilchenzahl N sind. Das bedeutet auch, dass der Mittelwert \bar{E} und das Schwankungsquadrat ΔE proportional zur Teilchenzahl sind. Das bedeutet für die relative Breite:

$$\frac{\Delta E}{\bar{E}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{Thermodynamischer Limes}} 0$$

$$P(\bar{E}) = W(\bar{E}) \Delta E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

oder $W(E) \rightarrow \delta(E - \bar{E})$

Äquivalenz der mikrokanonischen und kanonischen Ensembles im thermodynamischen Limes ($\frac{\Delta E}{N} \rightarrow 0$).

Beispiel: Spin System

$$\hat{H} = J \sum_{i=1}^N S_{iz}^z - B \sum_{i=1}^N S_{iz} = \sum_{i=1}^N H_i$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad [H_j, H_l] = 0 \quad \forall j, l = 1, \dots, N$$

$$Z = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta \hat{H}} = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} e^{-\beta \hat{H}_1} \text{tr} e^{-\beta \hat{H}_2} \dots \text{tr}_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta \hat{H}_N}$$

$$Z_1 = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} e^{-\beta \hat{H}_1} = \sum_{m_1=1,0,1} \langle m_1 | e^{-\beta \hat{H}_1} | m_1 \rangle$$

$$\hat{H}_1 |m_1\rangle = (J m_1^2 - \beta m_1) |m_1\rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_1 &= 1 + e^{-\beta(J+B)} + e^{-\beta(J-B)} \\ \Rightarrow Z &= \left(1 + e^{-\beta(J+B)} + e^{-\beta(J-B)}\right)^N = \left(1 + 2e^{-\beta J} \cosh(\beta B)\right)^N \end{aligned}$$

$$Z = \left(1 + Ze^{-\beta J} \cosh(\beta B)\right)^N$$

Freie Energie

$$F(T, X) = -k_B T \ln Z(T, X) \quad X = V, M$$

Freie Enthalpie

$$G(T, Y) = -k_B T \ln Z(T, X) \quad y = P, B$$

Legendre Transformation

$$G(T, B) = F(T, M(T, B)) - M(T, B)B$$

$$B = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_T \quad M = -\left(\frac{\partial G}{\partial B}\right)_T$$

$$\Rightarrow G(T, B) = -k_B T N \ln \left(1 + 2e^{-\beta J} \cosh \beta B\right)$$

Magnetisierung

$$\begin{aligned} M &= \langle S_z \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}} \hat{S}_z) \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial B} \\ &= N \frac{2e^{-\beta J} \sinh(\beta B)}{1 + 2e^{-\beta J} \cosh(\beta B)} \end{aligned}$$

anmerkung:

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} \quad H = J \sum_i \hat{S}_{iz}^z - B \sum_i S_{iz}$$

- Tiefe Temperatur $kT \ll J, |B|$
 - Falls $|B| < J$ so geht $M \rightarrow 0$
 - Falls $|B| < J$ so geht $M \rightarrow \tanh(\beta B) \rightarrow N \text{sign}(B)$ Im Grundzustand $|m_1 = \text{sign } B\rangle$.
- Hohe Temperatur $kT \gg J, |B|$

Curie-Gesetz

$$M = N \frac{2}{3} \frac{B}{k_B T}$$

Großkanonisches Ensemble

Schwabl Kapitel 2.7

Wir haben einen offenen Behälter, in dem sich ein Untersystem befindet. Man kontrolliert nicht die Teilchenzahl und die Energie, sondern nur die Temperatur und das chemische Potential. Es handelt sich also um ein offenes System im Gleichgewicht mit

- Einem Wärmebad bei Temperatur T .
- Einem Teilchenreservoir mit chemischem Potential μ .

Beispiel. *Wasserspiegel*

Definition. *Großkanonisches Potential der Thermodynamik*

$$\Phi(T, \mu) = U(S(T, \mu), N(T, \mu)) - TS(T, \mu) - \mu N(T, \mu)$$

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{X, N} & \mu &= \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{X, T} \\ S &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{X, \mu} & N &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{X, T} \end{aligned}$$

Postulat. *Thermodynamisches Gleichgewicht besteht genau dann, wenn die Entropie S maximal ist. Oder Äquivalent, das großkanonische Potential Φ minimal ist.*

Definition. *Funktional des großkanonischen Potentials (Statistische Physik)*

$$\Phi[\hat{\rho}] = E[\hat{\rho}] - TS[\hat{\rho}] - \mu N[\hat{\rho}]$$

wobei

$$N[\hat{\rho}] = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{N})$$

Wir minimieren nun $\Phi[\hat{\rho}]$ unter $\hat{\rho}$ mit $\text{tr} \hat{\rho} = 1$. Daraus folgt der statistische Operator.

Statistischer Operator	$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Zustandsumme	$Z = \text{tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Großkanonisches Potential	$\Phi(T, \mu) = -k_B T \ln Z$

Kanonisch und Großkanonisch

- Kanonisch

Hilbert-Raum für N -Teilchen	\mathcal{H}_N .
Hamilton-Operator	$H_N : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N$.
Statistischer Operator	$\hat{\rho}_{K,N} = \frac{1}{Z_K(N)} e^{-\beta \hat{H}_N} : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N$
Zustandsumme	$Z_K(N) = \text{tr}_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta \hat{H}_N}$

- Großkanonisch

Hilbert-Raum für beliebige Teilchenzahl	$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N$
Projektor	$\hat{P}_N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_N$
Hamilton-Operator	$\hat{H} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \hat{H}_N = \hat{P}_N \hat{H} \hat{P}_N$
Statistischer-Operator	$\hat{\rho}_{GK} = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
Teilchenzahl-Operator	$\hat{N} = \sum_{N=0}^{\infty} N \hat{P}_N$ oder $\hat{N} \Psi\rangle = N \Psi\rangle \quad \forall \Psi\rangle \in \mathcal{H}_N$
Zustandsumme	$Z_{GK} = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{N,K} &= \hat{P}_N \hat{\rho}_{GK} \hat{P}_N e^{-\beta \mu N} \frac{Z_{GK}}{Z_{K,N}} \\
\hat{\rho}_{GK} &= \frac{1}{Z_{GK}} \sum_{N=0}^{\infty} Z_K(N) \hat{\rho}_{K,N} e^{\beta \mu N} \\
Z_{GK}(\mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_K(N) = \text{tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \text{tr}_{\mathcal{H}_N} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \underbrace{\text{tr}_{\mathcal{H}} \left(e^{-\beta \hat{H}_N} \right)}_{Z_K(N)} e^{\beta \mu N}
\end{aligned}$$

Fluktuation der Teilchenzahl

Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System sich in einem Mikrozustand mit N Teilchen befindet.

$$\begin{aligned}
P(N) &= \langle \hat{P}_N \rangle = \langle \delta(\hat{N} - N) \rangle = \frac{1}{Z_{GK}} \text{tr}_{\mathcal{H}} = \hat{P}_N e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \\
&= \frac{Z_K(N)}{Z_{GK}} e^{\beta \mu N}
\end{aligned}$$

Mittlere Teilchenzahl

$$\bar{N} = \langle \hat{N} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N P(N)$$

Nebenbedingung

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \hat{P}}{\partial \mu}$$

Fluktuationen

$$\begin{aligned}\Delta N^2 &= \left\langle \left(\hat{N} - \langle \hat{N} \rangle \right)^2 \right\rangle \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N) (N - \bar{N})^2 \propto \bar{N}\end{aligned}$$

$$P(N) \xrightarrow{N \gg 1} \delta(N - \bar{N})$$

Das bedeutet die Äquivalenz zwischen kanonischem und großkanonischem Ensemble.

Ensemble	mikrokanonisch	kanonisch	großkanonisch
Physikalisches System	isoliert	geschlossen	offen
Thermodynamische Variablen	N, E	T, N	T, μ
Thermodynamische Funktionen	T, μ	E, μ	E, N
Zustandsumme	$w(E, N)$ $\text{tr}_{\mathcal{H}_{E,N}} \hat{I}$ $\text{tr}_{\mathcal{H}} \hat{P}_E \hat{P}_N$	$Z_K(T, N)$ $\text{tr}_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta \hat{H}}$ $\text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta \hat{H}} \hat{P}_N$	$Z_{\text{GK}}(T, \mu)$ $\text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Statistischer Operator	$\hat{\rho} = \frac{1}{w} \hat{\rho}_E \hat{\rho}_N$	$\hat{\rho}_K$ $\frac{1}{Z_K} e^{-\beta \hat{H}_N}$ $\frac{1}{Z_K} \hat{\rho}_N e^{-\beta H} \hat{\rho}_N$	$\hat{\rho}_{\text{GK}}$ $\frac{1}{Z_{\text{GK}}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Thermodynamische Potentiale	$S(E, N)$ $k_B \ln w(E, N)$	$F(T, N)$ $-k_B T \ln Z_K$	Φ $-k_B T \ln Z_{\text{GK}}$

Tabelle 1: Übersicht der Ensembles der statistischen Physik

Klassische Statistische Physik

Schwabl Kapitel 2, Nolting Band 6 Kapitel 1 Das Problem besteht aus Mikrozuständen eines Systems von N -Teilchen.

Problem

$$\begin{array}{ll}\text{Mikrozustände} & (q, p) \in \mathbb{R}^{6N} \\ \text{Zeitmittelung} & A_z = \frac{1}{T_z} \int_0^{T_z} dt A(q(t), p(t)) \\ \text{Ensemblemittelung} & A_E = \int dq dp A(q, p) \rho(q, p)\end{array}$$

Ergodenhypothese

$$A_E = \lim_{T_z \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} A_z$$

Klassische Physik und das Postulat der statistischen Physik bestimmen $\rho(q, p)$ nicht. Deshalb benutzt man die Quantentheorie und das Postulat der klassischen statistischen Physik. Auf diese Art und Weise erhält man die Quantenstatistik. Diese ergibt im klassischen Grenzfall wieder die klassische Statistische Physik.

Klassischer Grenzfall Beispiel: Fermi-Gas mit Fermi-Temperatur T_F

$$\begin{aligned} T < T_F : \quad & \text{Fermi-Dirac-Verteilung } f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} \\ T \gg T_F : \quad & \text{Maxwell-Boltzmann-Verteilung } f(\varepsilon) = c e^{-\beta\varepsilon} \end{aligned}$$

Elektronen im Metall: $T_F \approx 10 \times 10^3 \text{ K}$ bis $10 \times 10^4 \text{ K}$

$$H_e^3 \quad : \quad T_F \approx 3 \text{ K}$$

Mikrokanonisches Ensemble $(q, p) \in \mathbb{R}^{6N}$

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= \frac{1}{w(E)} \delta(H(q, p) - E) \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \\ w(E, N) &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int dq dp \delta(H(q, p) - E) \\ \text{Entropie } S(E, N) &= k_B \ln w(E, N) \end{aligned}$$

$w(E) \Delta E$ entspricht dem Phasenraumvolumen der Mikrozustände mit Energie $m[E, E + \Delta E]$.

Kanonisches Ensemble

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= \frac{1}{Z_K} e^{-\beta H(q, p)} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \\ Z_K &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int dq dp e^{-\beta H(q, p)} \end{aligned}$$

Die freie Energie schreibt sich als

$$F(T, N) = -k_B T \ln Z_K(T, N)$$

Großkanonisches Ensemble

$$\begin{aligned} Z_{\text{GK}}(T, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_K(T, N) \\ \implies \Phi(T, \mu) &= -k_B T \ln Z_{\text{GK}}(T, \mu) \\ \rho(q, p) &= \frac{1}{Z_{\text{GK}}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(H_N(q_N, p_N) - \mu N)} \frac{1}{N! h^{3N}} \delta(q - q_N) \delta(p - p_N) \end{aligned}$$

•

$$0 = \{H, P\} = \{H, H\} \frac{dp}{dH}$$

- Entropie

$$\begin{aligned} S &\neq -k_B \int dq dp \rho(q, p) \ln \rho(q, p) \\ &= -k_B \int dq dp \rho(q, p) \ln (\rho(q, p) N! h^{3N}) \end{aligned}$$

- Mit Z Zwangsbedingungen wird $6N$ zu $6N - 2Z$ und $3N$ zu $3N - Z$.
- Vorfaktor h^{-3N}
- Erwartungswert

$$\langle A \rangle \propto \frac{h^{3N}}{h^{3N}} = 1$$

- Die Entropie S und die Freie Energie F sind von der Form

$$\begin{aligned} S(h) &= S + cN \ln h \\ F(h) &= F + c'N \ln h \end{aligned}$$

Als Schlussfolgerung sind diese Werte nicht experimentell messbar. Bemerkung: die Konstante c' widerspricht dem 3. Hauptsatz der Thermodynamik, aber das ist wegen des klassischen Limits kein Problem.

Vorfaktor $N!$ In der Quantentheorie gibt es austauschsymmetrie zwischen identischen Teilchen.

- Erwartungswert

$$\langle A \rangle \propto \frac{N!}{N!} = 1$$

- $S, F, \Phi \propto N$, also sind sie extensive Größen.

Gibbs-Paradoxon Wir haben zwei ursprünglich getrennte Systeme die addiert werden. Es gibt ein Gleichgewicht, also

$$T_1 = T_2 \qquad P_1 = P_2$$

Für eine Mischung von 2 Gasen

$$N! \rightarrow N_1! N_2!$$

Mit N unterscheidbare Teilchen.

Beispiel Klassisches ideales Gas.
 N Teilchen im Potential V .

$$\begin{aligned} H(\vec{r}, \vec{p}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N V(\vec{r}_j) \\ V(\vec{r}) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{r} \in V \\ \infty & \text{für } \vec{r} \notin V \end{cases} \end{aligned}$$

Mikrokanonisches Ensemble

$$\Omega(E) = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N}r \int d^{3N}p \quad \Theta(E - H(\vec{r}, \vec{p}))$$

Wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Die Heaviside Theta Funktion ist. Die Integrale stellen ein Phasenraumvolumen der Energie $< E$ dar. Wir werden nun diese Größe berechnen. In diesem Integral können wir anstatt über R^{3N} nur über das Volumen integrieren.

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \underbrace{\int_{V^N} d^{3N}r}_{V^N} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p \Theta(E - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2M}) \\ &= \frac{V^N}{N! h^{3N}} C_{3N} R^{3N} \end{aligned}$$

mit

$$R = \sqrt{2mE} \qquad C_{3N} = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!}$$

Damit folgt

$$\Omega(E) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!} (2mE)^{\frac{3N}{2}}$$

und

$$w(E) = \frac{d\Omega}{dE} = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \frac{\pi^{3n/2}}{(\frac{3N}{2} - 1)!} (2m)^{3N/2} E^{3N/2-1}$$

$$S = -k_B \ln w(E) = k_B N \left[\ln V - \ln h^3 - \ln N + 1 + \frac{3}{2} \ln(\pi) + \frac{3}{2} \ln(2m) + \frac{3}{2} \ln E - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}N\right) + \frac{3}{2} \right]$$

Wobei die Stirling Formel benutzt wurde für

$$N \gg 1 \quad \left(\frac{E}{N}, \frac{V}{N} \text{ endlich} \right)$$

$$S(E, N, V) = k_B N \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{E}{N} \right)^{3/2} \left(\frac{4\pi m}{h^2 3} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right\}$$

Ideales klassisches Gas im kanonischen Ensemble

$$Z_K = \frac{1}{N!} h^{3n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} d^{3N}r \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p e^{-\beta H(\vec{r}, \vec{p})}$$

$$\begin{aligned}
H(\vec{r}, \vec{p}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{r}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i) & V(\vec{r}) &= \begin{cases} 0 & \vec{r} \in V \\ \infty & \vec{r} \notin V \end{cases} \\
&= \sum_{i=1}^N H(\vec{r}_i, \vec{r}_2)
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
Z_k &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N} r e^{-\beta \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i)} \right)}_{=\left(\int d^3 r \cdot 1 \right)^N} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N} p e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}} \right)}_{=\left(\int_{\mathbb{R}} dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \right)^{3N}} \\
Z_K &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} V^N \left(\sqrt{2\pi} \sqrt{mkT} \right)^{3N} \\
F(T, N, V) &= -k_B T \ln Z_K = -k_B T N \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 1 \right\}
\end{aligned}$$

Wobei die Stirling-Formel benutzt wurde für $N \gg 1$.

$$\begin{aligned}
S(T, N, V) &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N, V} \\
&= k_B N f(T, V, N) + \frac{3}{2} k_B N
\end{aligned}$$

Die Nebenbedingung lautet, dass

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) \neq 0$$

Für die Innere Energie gilt

$$U(T, V, N) = F + TS = \frac{3}{2} N k_B T \quad (1)$$

Der Druck ist

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N} = k_B T N \frac{1}{V} \quad (2)$$

$$\Longleftrightarrow PV = N k_B T \quad (3)$$

A und B sind Zustandsgleichungen des idealen Gases.

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{3}{2} N k_B \quad \text{Gleichverteilungssatz}$$

Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung

$$dN = n(\vec{v}) d^3 v$$

Dies ist die Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeiten \vec{v} in einem Volumen d^3v . $n(\vec{v})$ ist die Geschwindigkeitsverteilung.

$$\begin{aligned}
n(\vec{v}) &= \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) \right\rangle = \frac{1}{Z_K} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}r \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p \sum_{i=1}^N \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) e^{-\beta H(\vec{r}, \vec{p})} \\
&= \frac{1}{Z_K} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} V^N \left(\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}v \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) e^{-\beta \sum_{i=1}^N v^2} \right) \\
&= \frac{1}{Z_K} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} V^N \left(\sum_{i=1}^N e^{-\beta \frac{m}{2} \vec{v}^2} \left(\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{kT}{M}} \right)^{3(N-1)} \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) e^{-\beta \sum_{i=1}^N v^2} \right) \\
&\Rightarrow N(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{m}{2} \vec{v}^2} d^3v = \sum_{i=1}^N v^2 dv \frac{m}{2} \vec{v}_i^2
\end{aligned}$$

Wir schreiben für die Delta-Funktion $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

Großkanonisches Ensemble

$$\begin{aligned}
Z_{\text{GK}} &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_K(N) e^{\beta \mu N} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} e^{\beta \mu N} \\
&= \exp \left[V e^{\beta \mu} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right].
\end{aligned}$$

$$\Phi_{\text{GK}}(T, \mu, V) = -k_B T \ln Z_{\text{GK}} = -k_B T V e^{\beta \mu} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Thermodynamik

$$\begin{aligned}
N(T, \mu, V) &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{T, V} = -\beta \Phi \\
P(T, \mu, V) &= - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, \mu} = -\frac{\Phi}{V} \\
&\Rightarrow PV = N k_B T
\end{aligned}$$

Die Teilchenzahlfluktuationen werden klein. In unserem Fall können wir die mittlere Teilchenzahl berechnen, das haben wir schon gemacht. Aber auch das Schwankungsquadrat.

Flukuationen der Teilchenzahl

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \sum_{N=1}^{\infty} P(N) N = \langle N \rangle = N(T, \mu, V) = -\beta \Phi \\
\Delta N^2 &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N) (N - \bar{N})^2 = \langle (\hat{N} - \bar{N})^2 \rangle = kT \frac{\partial \langle \hat{N} \rangle}{\partial \mu} \\
&= k_B T \frac{\partial N}{\partial \mu}
\end{aligned}$$

Die Relativen Fluktuationen sind von der Ordnung

$$\frac{\Delta N}{\bar{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{Thermodynamischer Limes}} 0$$

oder $P(N) \rightarrow \delta(N - \bar{N})$

Thermodynamik I

Theorie der Wärme. Sie ist eine rein Makroskopische Theorie. Das bedeutet die Theorie ist selbst dann gültig, wenn die Materie nicht aus Atome bestünde. Das ist zuerst einmal eine phänomenologische Theorie, das bedeutet sie ist basiert auf Beobachtungen. Man hat später auch versucht sie mathematisch kompakt zu beschreiben. Es geht hier um Systeme im Gleichgewicht und deren Quasi-Statistische-Transformation. Was genau das bedeutet werden wir genauer auch in der nächsten Vorlesung diskutieren. Die Theorie der Systeme die sich schnell ändern ist nicht die Theorie der Thermodynamik, sondern eine andere. Wir beginnen mit den Grundlagen, den 4 Hauptsätzen, oder auch die 3 Hauptsätze der Thermodynamik mit dem "nullten" Hauptsatz. Beginnen wir mit den Grundbegriffen.

Thermodynamische Variablen Temperatur, Druck Volumen, Magnetisierung und so weiter. Es gibt in dieser Theorie zwei Größen, welche man variieren kann, die Temperatur und die Entropie. Wichtig ist auch der Begriff:

Thermodynamischer Zustand (Makrozustand) Er ist eine Charakterisierung des Makroskopischen Systems durch thermodynamische Variablen. Zum Beispiel Temperatur, Druck für ein ideales Gas.

Zustandsgleichungen

$$PV = Nk_B T \qquad M = \frac{\Theta}{T} B$$

Wir haben damit außerdem

Zustandsfunktionen

$$\rho(T, P) = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T}$$

Sie können sehen, dass wir hier 4 Variablen haben, die Gleichungen eliminieren 2 davon. Wir brauchen also noch eine Gleichung.

Keine Zustandsgrößen Dazu zählen die Wärme und Arbeit

$$\delta Q$$

Zustandsgrößen Volumen V , Innere Energie U werden zu dV und dU . Physikalisch gesehen beschreiben die Zustandsgrößen den echten Zustand. In einem Gleichgewichtszustand sind die anderen Größen fest gegeben.

In einem Gedankenexperiment haben wir zwei Systeme mit einer undurchlässigen Wand. Es gibt dann Variablen der folgenden Form

- Extensive Variablen

$$X_{AB} = X_A + X_B \quad \Longleftrightarrow \quad X \propto N, V,$$

Zum Beispiel für $X = V, N, M, U, F$.

- Intensive Variablen

$$X_{AB} = X_A = X_B \quad \Longleftrightarrow \quad X \propto N^0, V^0$$

zum Beispiel für $X = T, P, B$.

Die obigen Gleichungen gelten im Gleichgewicht. Wenn man nicht im Gleichgewicht ist, so kann es sein dass einer der VARIablen nicht mehr extensiv ist. Wir fangen nun mit dem nullten Hauptsatz an.

Der nullte Hauptsatz

Es gibt für jeden Hauptsatz formulierungen, welche äquivalent sind. Wir brauchen für die Temperatur ein zusätzliches Postulat, da wir die Temperatur nicht nur aus den mikroskopischen Postulaten ableiten können.

- I) Die Temperatur ist eine messbare charakteristische Eigenschaft eines thermodynamischen Systems.
- II) Im thermodynamischen Gleichgewicht ohne zeitliche änderung. Wir können dann eine Notation einführen $A \overset{T}{\simeq} B$

Satz.

$$A \overset{T}{\simeq} B \text{ und } B \overset{T}{\simeq} C \implies A \overset{T}{\simeq} C$$

Der beweis bleibt dem Leser als Hausaufgabe überlassen. Mathematisch gesehen ist $\overset{T}{\simeq}$ eine Äquivalenzrelation

$$\text{reflexiv } A \overset{T}{\simeq} A$$

$$\text{symmetrisch } A \overset{T}{\simeq} B \iff B \overset{T}{\simeq} A$$

transitiv 0. Hauptsatz

- Die Äquivalenzklassen sind alle thermodynamischen Systeme, die miteinander im thermodynamischen Gleichgewicht stehen.
- Thermometer
 - Referenz System mit messbarer Eigenschaft Θ , die verschieden für jede Klasse ist.
- Empirische Temperatur Θ
- Schlussfolgerung: Alle Systeme in einer Klasse haben die gleiche Temperatur Θ . Zwei Systeme in verschiedenen Klassen haben immer zwei verschiedene Temperaturen. Sie müssen die Temperatur als eine Zahl mit index verstehen, die charakterisiert welche Systeme im Gleichgewicht sind.

Man kann dasselbe auch mit der Masse eines Körpers vergleichen. $A \overset{M}{\simeq} B$. Wir werden sehen, dass man die empirische Temperatur durch eine Absolute Temperratur ersetzen kann. Aber das muss man schritt für Schritt konstruieren.

Thermodynamik II

Schwabl Kapitel 3; Nolting Band 4 Teil 2 Wir wollen zuerst Änderung der Energie eines makroskopischen Systems diskutieren. Es gibt im wesentlichen 3 Arten von Energien in der analytischen Mechanik.

- Mechanische Energie (Arbeit)

$$\begin{aligned}\delta W &= -P dV \quad (\text{Gas Expansion}) \\ &= -\vec{B} d\vec{M}\end{aligned}$$

Das Vorzeichen von P ist eine Konvention. Wenn ds System Arbeit leistet, dann ist die Energie negativ. Es gibt keine Einheitliche bezeichnung der Energie. Man kann also W oder E schreiben.

- Chemische Energie. Dies ist die Energie die man gewinnt oder verliert wenn man die Anzahl der Teilchen ändert.

$$\delta C = \sum_j \mu_j dN_j$$

Wenn $dN_1 > 0$ dann wird Materie hinzugeführt.

- Wärme. In der Thermodynamik benutzt man die Mikrostruktur der Systeme nicht, deshalb die folgende Definition: Die Wärme ist die Energieänderung unter Änderung der Temperatur

$$\begin{aligned}dT > 0 &\rightarrow \delta Q > 0 \\ dT < 0 &\rightarrow \delta Q < 0\end{aligned}$$

1. Hauptsatz Es gibt eine Zustandsgröße U (Innere Energie).

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta C$$

Dies bedeutet, dass Wärme eine Form der Energie darstellt, und dass die Energieerhaltung gilt.

Eine kurze Wiederholung über mathematische Konzepte der Differentiale.

Mathematische Grundlagen

Wir betrachten eine Funktion f mit mehreren Variablen und definieren die Differentialform df .

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad df(\vec{x})\vec{v} = \vec{\Delta} f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$$

Definition. Eine Differentialform w ist geschlossen, wenn

$$\oint_{\gamma} w = 0$$

für alle geschlossenen Integrationswege γ gilt.

Geschlossene Differentialformen

Eine Differentialform ist geschlossen, genau dann wenn alle Integrale über einen Weg eindeutig sind.

$$\begin{aligned}w \text{ geschlossen} &\iff \int_A^B \omega \text{ ist eindeutig für alle Wege zwischen } A \text{ und } B \\&\iff \omega \text{ ist eine exakte(totale) Differentialform} \\&\iff \text{Es existiert eine Stammfunktion } f \text{ mit } df = \omega\end{aligned}$$

Umgekehrt, wenn eine Form nicht geschlossen ist, dann hängt das Integral vom Weg ab. Da bedeutet für uns in der Thermodynamik: Es gibt Größen, welche Zustandsgrößen sind

$$dV, dS, dv$$

Sie sind Exakte differentialformen und U, S, V sind Zustandsgrößen. Allerdings sind

$$\delta Q, \delta W, \delta C$$

nicht geschlossen.

Wir betrachten ein System, in dem die thermodynamischen Variablen Temperatur und Volumen sind.

$$\begin{aligned}U &= U(T, V) \\ \int_{\gamma_1} dU &= \int_{\gamma_2} dU = \int_A^B dU = U(B) - U(A) \\ Q &\neq Q(T, V) \\ \int_{\gamma_1} \delta Q &\neq \int_{\gamma_2} \delta Q\end{aligned}$$

Anmerkung:

Konservative Kraft

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dies bedeutet, es existiert eine potentielle Energie $V(\vec{r})$ und

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Wir haben jetzt die Möglichkeit, eine erste theoretische Maschine zu definieren, die Carnotsche-Maschine. Wir werden die Maschine zuerst abstrakt einführen, und dann ein Beispiel für die Arbeit der Maschine für ein ideales Gas sehen.

Carnot-Maschine Sie ist eine theoretische Maschine, deren Arbeitssubstanz ein Thermodynamisches System ist. Es gibt zwei Wärmebäder mit Temperaturen $\Theta_{1,2}, \Theta_{3,4}$. Die Maschine durchläuft einen Kreisprozess mit 4 reversiblen thermodynamischen Transformationen. Reversibel bedeutet, dass das System Quasistatisch ist. Man nimmt also immer thermodynamisches Gleichgewicht an, trotzdem ändert sich der Zustand des Systems langsam. Das System ist Umkehrbar, falls $\delta Q = T dS$.

I) $1 \rightarrow 2$

Isotherme Absorption der Wärmemenge $Q_{1,2} > 0$ aus dem warmen Wärmebad. Dies ist Isotherm, also das Wärmebad hat immer dieselbe Temperatur.

II) $2 \rightarrow 3$

Adiabatische Abkühlung von $\Theta_{1,2}$ zu $\Theta_{3,4}$. Das bedeutet, dass arbeit geleistet wird $W_{2,3} < 0$.

III) $3 \rightarrow 4$

Isotherme Abgabe der Wärmemenge $Q_{3,4} < 0$ an das kalte Wärmebad.

IV) $4 \rightarrow 1$

Adiabatische Erwärmung von $\Theta_{3,4}$. Es wird arbeit am System geleistet $W_{4,1} > 0$.

Wir haben es hier mit einem Kreisprozess zu tun. Das bedeutet wenn man die totale Änderung der Energie übre einem Zyklus betrachtet, so sollte sich nichts ändern.

$$\begin{aligned} 0 &= \oint dU & dU &= \delta W + \delta Q \\ \Delta W &= \oint \delta W = - \oint \delta Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_1^2 \delta W + \int_2^3 \delta W + \int_3^4 \delta W + \int_4^1 \delta W \\ &= W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,4} + W_{4,1} \\ \Delta Q &= Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,4} + Q_{4,1} \end{aligned}$$

$Q_{2,3}$ und $Q_{4,1}$ kann man hierbei vergessen. Die geleistete Arbeit ist $\Delta W < 0$. Wir können somit einen Wirkungsgrad definieren:

$$\eta = \frac{-\Delta W}{Q_{1,2}} = \frac{Q_{1,2} + Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = 1 + \frac{Q_{3,4}}{Q_{1,2}} \leq 1$$

Ideales Gas als Arbeitssubstanz

I) Isotherme Expansion

II) Adiabatische Expansion

III) Isotherme Kompression. Wir wollen, dass das System Energie abgibt.

IV) Adiabatische Kompression

Zustandsgleichungen des idealen Gases. Wir benutzen die empirische Temperatur θ .

$$\begin{aligned} PV &= nk_B f(\theta) \\ V &= \frac{3}{2} Nk_B f(\theta) \end{aligned}$$

Wir haben als Variablen Druck und Volumen. Man kann also ein PV-Diagramm erstellen, um einen Zyklus zu visualisieren. Eine isotherme Transformation führt zu einem konstanten θ und damit auch zu konstanten dU sowie $\delta W = -\delta Q$.

$$Q_{1,2} = \int_1^2 \delta Q = - \int_1^2 \delta W = \int_1^2 P dV = \int_1^2 \frac{Nk_B f(\theta_{1,2})}{V} dV = Nk_B f(\theta_{1,2}) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$Q_{3,4} = Nk_B f(\theta_{3,4}) \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

Eine Adiabatische Transformation ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} dU &= \delta W \\ \Rightarrow \frac{3}{2} Nk_B df &= -P dV = -Nk_B f(\theta) \frac{1}{V} dV \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{df}{f} = -\frac{dV}{V} \\ &\Rightarrow f^{\frac{3}{2}}(\theta) \cdot V = \text{Konstant} \end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} f(\theta_{1,2}) V_2 &= f(\theta_{3,4}) V_3 \\ f(\theta_{3,4}) V_4 &= f(\theta_{1,2}) V_1 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Wir können nun den Wirkungsgrad ausschreiben als

$$\eta = 1 + \frac{Q_{3,4}}{Q_{1,2}} = 1 + \frac{Nk_B f(\theta_{3,4}) \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right)}{Nk_B f(\theta_{1,2}) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)} = 1 - \frac{f(\theta_{3,4})}{f(\theta_{1,2})}$$

Man kann damit eine absolute Temperaturskala definieren über

$$\eta = 1 - \frac{T_{3,4}}{T_{1,2}} \qquad \eta = 1 - \frac{T}{T_0}$$

Thermodynamik III

[2. Hauptsatz der Thermodynamik]

Wir beobachten eine Brechung der Zeitumkehrsymmetrie in der makroskopischen Welt. Es gibt für den 2. Hauptsatz sehr viele verschiedene Formulierungen. Wir geben hier ein Paar Beispiele.

Kelvin Es gibt keine Maschine, dessen einziger Effekt ist, Wärme aus einem Bad zu entnehmen und Arbeit zu produzieren.

Clausius Es gibt keine Maschine, die

Carnot Es gibt keine Wärmemaschine, die einen höheren Wirkungsgrad als die Carnot-Maschine besitzt. Also $\eta \leq \eta_{\text{Carnot}}$.

Perpetuum mobile 2. Art Es gibt kein Perpetuum mobile 2. Art!

Absolute Temperatur

$$\eta = F(\theta_{1,2}, \theta_{3,4})$$

Ideales Gas:

$$\eta = 1 - \frac{f(\theta_{3,4})}{f(\theta_{1,2})}$$

Wir benutzen ein absolutes Thermometer, die Carnot-Maschine Die Temperatur T ist die Lösung von

$$\eta = \begin{cases} F(T_0, T) & T_0 > T \\ F(T, T_0), & T > T_0 \end{cases}$$

In der Wissenschaft benutzt man eigentlich nur eine Temperaturskala, die

Kelvin-Temperatur-Skala

$$T_0 = 273.16 \text{ K}$$

Dies ist der Gefrierpunkt von Wasser.

$$T = \begin{cases} (1 - \eta)T_0 & T < T_0 \\ \frac{T_0}{1 - \eta} & T > T_0 \end{cases}$$

Dies ist die theoretische Definition der Kelvin Temperaturskala.

Entropie

Wir können nun zeigen, dass die Entropie existiert. Wir betrachten einen Carnot-Prozess

$$\oint (\delta Q)/T = \frac{Q_{1,2}}{T_{1,2}} + \frac{Q_{3,4}}{T_{3,4}} = 0$$

Ein beliebiger reversibler Kreisprozess ist eine Folge von unendlich vielen Carnot-Prozessen. Es gilt

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Für alle reversiblen Kreisprozesse. Wir finden also für die Größe

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

,dass sie eine geschlossene Differentialform ist. Die Stammfunktion S von $\frac{\delta Q}{T}$ nennt man die *Entropie* Eigenschaften der Entropie

- Zustandsgröße

$$S = S(U, X, N)$$

- Sie ist extensiv
- Bis auf eine Konstante eindeutig definiert
- $dU = T dS + \delta W (= -p dV) + \delta C (= \mu dN)$

Es ist wichtig, die obige Formel zu verstehen, weil sie uns viele Beziehungen gibt, wenn man klassische Probleme untersucht.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{X,N} = T \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{X,N} = \frac{1}{T}$$

Dies gilt nur, wenn die Funktionen monoton sind.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{P}{T} \qquad T dS - p dV = 0$$

Fundamentalgleichung (Euler-Gleichung)

$$S(\lambda U, \lambda X, \lambda N) = \lambda S(U, X, N)$$

Diese Gleichung beschreibt, dass die Entropie eine Lineare Größe ist. Wir berechnen die Ableitung nach λ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} U + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} V + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} N &= S \\ \Leftrightarrow \frac{U}{T} + \frac{PV}{T} + \frac{MN}{T} &= S \end{aligned}$$

Euler-Gleichung:

$$U = ST - PV + \mu N$$

Man muss verstehen, dass diese Gleichung mehr Information enthält als die Andere.

$$dU = T dS + S dT - p dV - V dP + \mu dN + N d\mu$$

Daraus folgt mit dem 1. Hauptsatz

$$0 = S dT - V dP + n d\mu$$

Sie wird die *Gibbs-Duhem-Gleichung* genannt. Man hat immer die Struktur intensiven Variable, gepaart mit einer Extensiven Variable.

Irreversible Prozesse

$$\begin{aligned} \eta^{\text{Reell}} &= 1 + \frac{Q_{3,4}}{Q_{1,2}} < \eta^{\text{Ideal}} = 1 - \frac{T_{3,4}}{T_{1,2}} \\ \Rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} &= \frac{Q_{1,2}}{T_{1,2}} + \frac{Q_{3,4}}{T_{3,4}} < 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\frac{\delta Q}{T}$ nicht exakt für irreversible Prozesse ist. Das bringt uns auch zur Formulierung des 2. Hauptsatzes

2. Hauptsatz

•

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

- Irreversible Transformationen im isolierten System sind gleichbedeutend mit zunehmender Entropie.

Beispiel Streben ins Gleichgewicht.

$$S_B - S_A = \int_A^B dS = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dS}{dt} dt > 0$$

- Ein isoliertes System im thermodynamischen ist im Gleichgewicht genau dann wenn die Entropie maximal ist. Um dies zu illustrieren berechnen wir ein Beispiel.

Anwendung Wir benutzen die Extensivität

$$U = U_1 + U_2$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$N = N_1 + N_2$$

$$S = S_1 + S_2$$

Diese Gleichungen beschreiben den Makrozustand.

$$S = S(U_1, U_2, V_1, V_2, N_1, N_2) = S_1(U_1, V_1, N_1) + S_2(U_2, V_2, N_2)$$

Allerdings gibt es für die Entropie mehrere Makrozustände $U_1, U_2, V_1, V_2, N_1, N_2$. Im Gleichgewicht ist die Entropie S maximal, mit der Nebenbedingung, dass $U = U_1 + U_2$, $V = V_1 + V_2$, $N = N_1 + N_2$. Wie berechnen wir das? Man kann Lagrange-Multiplikatoren benutzen, aber hier machen wir es einfacher. Da

$$S(U_1, V_1, N_1) = S(U_1, V_1, N_2) + S_2(U - U_1, V - V_1, N - N_1)$$

Wir maximieren nun diese Funktion

$$0 = \left(\frac{\partial S}{\partial U_1} \right)_{V_1, N_1} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1} \right)_{V_1, N_1} - \left(\frac{\partial S}{\partial U_1} \right)_{V_1, N_1} \Big|_{U_2=U-U_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \implies T_1 = T_2$$

Wir können dasselbe auch mit den anderen Variablen machen

$$0 = \left(\frac{\partial S}{\partial V_1} \right)_{V_1, N_1} = \frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \implies P_1 = P_2$$

$$0 = \left(\frac{\partial S}{\partial N_1} \right)_{U_1, V_2} = -\frac{\mu_1}{T_1} + \frac{\mu_2}{T_2} \implies \mu_1 = \mu_2$$

3. Hauptsatz

-

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{S}{N} = 0$$

-

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_x = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x = 0$$

- Der absolute Nullpunkt ist nicht erreichbar

Thermodynamik IV

Thermodynamische Potentiale sind Energiefunktionen der thermodynamischen Variablen.

$$U(S, X, N)$$

$$F(T, X, N),$$

$$\Phi(T, X, \mu)$$

Die äquivalenz der thermodynamischen Potentiale sind durch ihren ursprung aus der Legendre-Transformation gegeben.

Thermisch Isoliertes System (Mikrokanonisches Ensemble)

$$S, \{X\}, \{N\}$$

Die innere Energie ist

$$U(S, \{x\}, \{N\})$$

Der erste Hauptsatz besagt

$$dU = \delta Q + \sum_j y_j dx_j + \sum_j \mu_j dN_j$$

Y_j ist eine intensive thermodynamische Variable konjugiert zu x_j . Ein Reversibler Prozess

$$dU_{\text{rev}} = T dS + \sum_j y_j dx_j + \sum_j \mu_j dN_j$$

Daraus folgt

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{\{x\}, \{N\}} = T(S, \{x\}, \{N\})$$

$$y_j = \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)_{T, \{x\}, \{N\}} = T(S, \{x\}, \{N\})$$

$$\mu_j = \left(\frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{T, \{x\}, \{N\}_{i \neq j}} = T(S, \{x\}, \{N\})$$

Maxwell-Relationen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{S,N} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)_{X,N}$$

Zum Beispiel

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S,N}$$

Irreversible Transformationen

$$\delta Q < T dS \implies dU_{\text{irreversibel}} < dU_{\text{reversibel}}$$

Bei festen $S, \{x\}, \{N\}$ und $dU_{\text{reversibel}} = 0$ ist $dU_{\text{irreversibel}} < 0$. Ein Makrozustand

$$S, \{x\}, \{N\}$$

ist im Gleichgewicht, genau dann wenn U minimal wird.

Thermodynamisches isoliertes System mit intensiven mechanischen Variablen Die thermodynamischen Variablen sind

$$S, \{y\}, \{N\}$$

Wir verwenden eine Legendre-Transformation

$$x_j \rightarrow y_j = \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

Man erhält damit die sogenannte Enthalpie H

$$H(S, \{y\}, \{N\}) = U - \sum_j y_j x_j$$

Zum Beispiel ist

$$H(S, P, N) = U(S, V, N) + PV$$

Wir berechnen nun die Variation von H

$$dH = dU - \sum_j x_j dy_j - \sum_j y_j dx_j = \delta Q - \sum_j x_j dy_j + \sum_j \mu_j dN_j$$

Wir können nun ähnlich vorgehen wie bei der inneren Energie. Zuerst betrachten wir reversible Prozesse

$$dH_{\text{rev}} = T dS - \sum_j x_j dy_j + \sum_j \mu_j dN_j$$

Daraus können wir ablesen

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{\{y\}, \{N\}}, \quad x_j = - \left(\frac{\partial H}{\partial y_j} \right)_{S, \{y_i\}_{i \neq j}, \{N\}}$$

Man kann damit wieder die Maxwell Relationen ableiten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S, N} = - \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P, N}$$

Auch interessant ist was für irreversible Prozesse geschieht, im Prinzip ist das genau wie bei den vorigen Prozessen.

$$\delta Q < T dS \implies dH_{\text{irreversibel}} < dH_{\text{reversibel}}$$

Bei festen $S, \{y\}, \{N\}$ haben wir $dH_{\text{reversibel}} = 0$ und darum ist die Variation der Energie bei reversiblen Prozessen negativ $dH_{\text{reversibel}} < 0$. Ein Makrozustand $S, \{y\}, \{N\}$ ist im thermodynamischen Gleichgewicht genau dann wenn H minimal ist. Man kann dieses Spiel wiederholen für andere Kombinationen von Variablen. Statt nur intensive oder extensive Variablen zu nutzen kann man sie auch Mischen. Es gibt eine Menge Möglichkeiten diese zu variieren. Es gibt bestimmte Kombinationen die eigenen konventionelle Buchstaben erhalten haben.

Hier einige Beispiele

Geschlossenes System (Kanonisches Ensemble)

$$T, \{x\}, \{N\} \rightarrow \text{Helmholtz freie Energie } F$$

$$F(T, \{x\}, \{N\}) = U - TS$$

Ein Makrozustand $T, \{x\}, \{N\}$ ist im thermodynamischen Gleichgewicht, genau dann wenn F minimal ist. Dies ist äquivalent zu der Idee der Maximierung der Entropie.

Geschlossenes System mit intensiven mechanischen Variablen

$$T, \{y\}, \{N\}, \quad G(T, \{y\}, \{N\}) = F - \sum_j x_j y_j$$

$$= U - TS - \sum_j x_j y_j = H - TS$$

Ein Name für G ist (*Gibbs'sche Freie Energie*)

Antwortfunktionen

Antwort eines thermodynamischen Systems auf einen äußeren Einfluss. Wir nehmen an, dass dieser Einfluss sehr klein ist, und alle Vorgänge reversibel sind (Quasistatisch). Wir betrachten zuerst ein intensive Variable f welches eine von T, y, μ, B, P, \dots . Außerdem ein thermodynamisches Potential

$$\Phi = \Phi(f)$$

Und die konjugierte extensive Variable

$$F = \pm \frac{\partial \Phi}{\partial f}$$

Die Antwortfunktion ist gegeben durch die Variation der extensiven Variable bezüglich der intensiven Variable (Bis auf ein Vorzeichen), also die zweite Ableitung des Potentials

Antwortfunktion

$$A = \pm \frac{\partial F}{\partial f} = \pm \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f^2}$$

Beispiel

Wärmekapazität

$$\delta Q = C dT$$

wobei $C \geq 0$. Es ist klar, dass die Änderung dieser Variable auch von den anderen abhängt. Die isobare Wärmekapazität

$$C_P = \left(\frac{\delta Q}{dt} \right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_P$$

Isochore Wärmekapazität

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = T \left(\frac{dS}{dT} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V$$

Anmerkungen

$$C \geq 0 \implies \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right) \leq 0$$

Die spezifische Wärme ist

$$\frac{C}{N}, \frac{C}{V}, \frac{C}{\text{masse}}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$C_P > C_V$$

Für Luft ist

$$\frac{C_P}{\text{Masse}} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K} \frac{C_V}{\text{Masse}} = 717 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}$$

Kompressibilität

$$(f = P) \qquad dV = -V K dP \qquad K \geq 0$$

Wenn man den Druck erhöht, soll das System kleiner werden, deswegen das Minuszeichen. Die isotherme Kompressibilität ist

$$K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right)_T$$
$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T$$

Die Adiabatische Kompressibilität ist

$$K_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial P^2} \right)_S$$

Sie ist wiederum eine Antwortfunktion.

$$K_T > K_S$$

Magnetische Suszeptibilität ($f = B$)

Isotherme Suszeptibilität

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial B^2} \right)_T$$

Adiabatische Suszeptibilität

$$\chi_S = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_S = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial B^2} \right)_S$$

Thermischer Ausdehnungskoeffizient

Sie ist eine gemischte Antwortfunktion. Wir haben ein Objekt und wollen es aufwärmen. Sie führen das Experiment für einen festen Druck durch. Ausdehnungskoeffizient:

$$\rho_P = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T, P} \right)$$

Ein einfaches Beispiel

$$\kappa_T - \kappa_S = \frac{TV\alpha_P^2}{C_P}$$

Anwendungen und Rechenmethoden

- Reale Gase und Flüssigkeiten
- Ideale Quantengase
- Magnetismus

Ideales Gas	Reales Gas
1 Art von Teilchen	Gemisch (Lösung)
Punktteilchen	Endliche Ausdehnung, Innere Struktur, Spaltung und Bindung
Keine Wechselwirkung	Wechselwirkung

Ideales Molekülgas

Ideal ist hier im Sinne von “Keine Wechselwirkung” gemeint. Wir betrachten also ein verdünntes Gas.

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i^{(1)} \quad H = \sum_{i=1}^N H_i^{(1)} \quad H_i^{(1)} = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes H_i \otimes I_{n-1} \otimes \dots$$

$$[H_i^{(1)}, H_i^{(1)}] = 0$$

$$\begin{aligned} Z_N &= \text{tr}_{\mathcal{H}^{(N)}} e^{-\beta H(N)} = \text{tr}_{\mathcal{H}^{(N)}} \prod_{i=1}^N e^{-\beta H_i^{(1)}} \\ &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1^{(1)}} \text{tr}_{\mathcal{H}_2^{(1)}} \dots \text{tr}_{\mathcal{H}_N^{(1)}} \prod_{i=1}^N e^{-\beta H_i^{(1)}} = \prod_{i=1}^N \text{tr}_{\mathcal{H}_i^{(1)}} e^{-\beta H_i^{(1)}} = \left(\text{tr}_{\mathcal{H}_1^{(1)}} e^{-\beta H^{(1)}} \right)^N \end{aligned}$$

$$F = -k_B T \ln Z_N = -k_B T N \ln Z_1 \quad \implies \quad \frac{F}{N} = -k_B \ln Z_1$$

Freiheitsgrade eines Moleküls

- Bewegung des Schwerpunkts
- Rotation
- Schwingung (Vibrationen)
- Elektronische Anregung

Wir nehmen an, dass die Freiheitsgrade sämtlich unabhängig sind.

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= H_{\text{SP}} + H_{\text{rot}} + H_{\text{vib}} + H_{\text{Elek}} \\ \mathcal{H}^{(1)} &= \mathcal{H}_{\text{sp}} \otimes \mathcal{H}_{\text{rot}} \otimes \mathcal{H}_{\text{vib}} \otimes \mathcal{H}_{\text{el}} \\ Z_1 &= \text{tr} e^{-\beta H^{(1)}} = \left(\text{tr}_{\mathcal{H}_{\text{sp}}} e^{-\beta H_{\text{sp}}} \right) \left(\text{tr}_{\mathcal{H}_{\text{rot}}} e^{-\beta H_{\text{rot}}} \right) \left(\text{tr}_{\mathcal{H}_{\text{vib}}} e^{-\beta H_{\text{vib}}} \right) \left(\text{tr}_{\mathcal{H}_{\text{el}}} e^{-\beta H_{\text{el}}} \right) \end{aligned}$$

Damit ist

$$f = -k_B T \ln Z_{\text{sp}} - k_B T \ln Z_{\text{rot}} - k_B T \ln Z_{\text{vib}} - k_B T \ln Z_{\text{el}} = f_{\text{SP}} + f_{\text{rot}} + f_{\text{vib}} + f_{\text{el}}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{C_{V,N}}{N} &= \frac{1}{N} \frac{\delta Q}{dT} = -\frac{T}{N} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_{V,N} = -T \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_{V,N} \\ &= C_{\text{sp}} + C_{\text{rot}} + C_{\text{vib}} + C_{\text{El}}\end{aligned}$$

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} \simeq -N \left(\frac{\partial f_{\text{sp}}}{\partial V} \right)_{T,N}$$

$$\begin{aligned}T_0 &= T_F \text{ (Fermi Temperatur)} \\ &= T_C \text{ (BEC kritische Temperatur)}\end{aligned}$$

$$T_0 < 5 \text{ K für He}^3, \text{He}^4$$

Rotationsanteil

Für ein zweiatomiges Molekül aus 2 verschiedenen Atomen zB HCl aber nicht O₂, N₂

$$H_{\text{rot}} = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

Mit dem Trägheitsmoment $I = m_{\text{reduziert}} R^2$

$$\epsilon_{lm} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad \forall l \in \mathbb{N}, m = -l, -l+1, \dots, +l$$

$$\Theta_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{Ik_B}$$

Für $T \ll \Theta_{\text{rot}}$:

$$C_{\text{rot}} \approx k_B 3 \left(\frac{\Theta_{\text{rot}}}{T} \right)^2 e^{-\frac{\Theta_{\text{rot}}}{T}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

Für hohe Temperaturen $T \gg \Theta_{\text{rot}}$ gilt dann

$$C_{\text{rot}} \approx k_B \left[1 + \frac{1}{180} \left(\frac{\Theta_{\text{rot}}}{T} \right)^2 + \dots \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} k_B$$

Beispiel

HCl	$\Theta_{\text{rot}} = 30 \text{ K}$
H ₂	$= 170 \text{ K}$
O ₂	$= 4 \text{ K}$

Vibrationsanteil

Beispiel: Harmonische Schwingungen eines zweiatomigen Moleküls. Aus der Eigenfrequenz ω kann man eine Temperaturskala definieren.

$$\Theta_{\text{vib}} = \frac{\hbar W}{k_B}$$

Beispiele

HCl	$\Theta_{\text{vib}} = 4 \times 10^3 \text{ K}$
H ₂	$= 6 \times 10^3 \text{ K}$
O ₂	$= 2 \times 10^3 \text{ K}$

$$C_{\text{vib}} = k_B \left(\frac{\Theta_{\text{vib}}}{T} \right)^2 \frac{1}{\left[2 \sinh \left(\frac{\Theta_{\text{vib}}}{2} \right) \right]} = \begin{cases} \left(\frac{\Theta_{\text{vib}}}{T} \right)^2 e^{-\frac{\Theta_{\text{vib}}}{T}} \rightarrow 0 & T \ll \Theta_{\text{vib}} \\ 1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\Theta_{\text{vib}}}{T} \right)^2 + \dots \rightarrow 1 & T \gg \Theta_{\text{vib}} \end{cases}$$

Elektronischer Anteil

Wasserstoffatom

$$\mathcal{E}_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

Die minimale Anregungsenergie ist

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 10 \text{ eV} \approx 1 \times 10^5 \text{ K}$$

Reales Klassisches Gas Teil I

Schwabl Kapitel 5.3

Klassisch Verdünnt und hohe Temperaturen
Real Wechselwirkende Teilchen (Atome oder Moleküle)

$$Z_K(N) = \frac{1}{h^{3N}} \frac{1}{N!} \int_{V^N} d^{3N} r \int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-\beta H(\vec{r}, \vec{p})}$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Dabei ist $w(r)$ ein Zentralpotential.

$$Z_K(N) = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N} p e^{-\beta \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m}} \right)$$

Der Konfigurationsanteil ist:

$$Q(T, V, N) = \int_{V^N} d^{3N}r e^{-\beta \sum_{i=1}^N w(|\vec{r}_i, \vec{p}_i|)}$$

Die thermische Wellenlänge ist:

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

Für $w = 0$ haben wir ein ideales Gas.

$$Q = V^N$$

Wenn $w \neq 0$ ist es ein reales Gas, wir können dann Q im allgemeinen nicht berechnen. Es gibt jedoch Näherungsverfahren

- Virialentwicklung
- Molekularfeldnäherung
- Computersimulation
- Moleküldynamik
- Monte Carlo

Potentiale $w(r)$ für neutrale Teilchen. Lennard-Jones-Potential

$$w(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right], \quad \forall \epsilon, \sigma > 0$$

Teilchen mit einem harten Kern, also harte Kugeln:

$$w(r) = \begin{cases} \infty & r < d \\ -w_r & d < r \\ 0 & r > l \end{cases}$$

Virialentwicklung

Die Großkanonische Zustandssumme

$$Z_{\text{GK}} = \sum_{N=0}^{\infty} Z_K(N) e^{\beta \mu N}$$

$$Z_K(0) = 1, \quad Z_K(1) = \frac{V}{\lambda_T^3}, \quad Z_K(2) = ?$$

Klassisches Gas: Fugazität $e^{\beta \mu} = y \ll 1$, das bedeutet $-\mu \gg k_B T$. Mithilfe dieser Annahme können wir einfach eine Taylor-Entwicklung machen

$$Z_{\text{GK}} = Z_K(0) + Z_K(1)y + Z_K(2)y^2 + \mathcal{O}(y^3)$$

Das bedeutet

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \ln Z_{\text{GK}} = -k_B T \left[\frac{V}{\lambda_T^3} y + \left(Z_K(2) - \frac{V}{2\lambda_T^3} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3) \right]$$

So erhält man

$$PV = Nk_B T [1 + B\rho + \mathcal{O}(\rho^2)] \quad \rho = \frac{N}{V} \ll 1$$

B ist der 2. Virialkoeffizient.

$$B = \frac{V}{2} - \frac{\lambda_T^6}{V} Z_K(2)$$

$$Z_K(2) = \frac{1}{\lambda_T^6} \frac{1}{2} \int_V d^3 r_1 \int_V d^3 r_2 e^{-\beta w(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}$$

Daraus folgt dann

$$B = -\frac{1}{2V} \int_V d^3 r_1 \int_V d^3 r_2 \left[e^{-\beta w(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)} - 1 \right] \quad \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \gg \sigma, l$$

$$W \simeq 0 \iff (e^{-\beta w} \approx 1) \quad \forall \vec{r}_2 \notin V \text{ und } \vec{r}_1 \in V$$

Wir können also das Integral auf den ganzen Raum erweitern und nicht nur über das Volumen.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \implies B = -\frac{1}{2V} \int_V d^3 r_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r \left[e^{-\beta w(r)} - 1 \right]$$

Wir haben einen Kugelsymmetrischen Integranden also verwenden wir Kugelkoordinaten.

$$B = -2\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[e^{-\beta w(r)} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} B &= 2\pi \int_0^d dr (r^2 e^{+\beta w_s} - 1) + 0 \\ &= \frac{2\pi}{3} d^3 (l^3 - d^3) (e^{\beta w_s} - 1) \simeq -\frac{a}{k_B T} + b \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\pi}{3} (l^3 - d^3) w_s > 0 \text{ (Anziehende Wechselwirkung)} \\ b &= \frac{4 \cdot 4\pi}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3 > 0 \end{aligned}$$

Man sieht, dass b eigentlich nur 4-mal das Volumen einer Kugel ist.

$$PV = Nk_B T \left[1 + \left(-\frac{a}{k_B T} + b \right) \frac{N}{V} \right] + \mathcal{O} \left(\left(\frac{N}{V} \right)^2 \right) \quad (*)$$

Van-der-Waals Zustandsgleichung

$$\left[P + a \left(\frac{N}{V} \right)^2 \right] (V - Nb) = Nk_B T$$

Für

$$\frac{N}{V} \ll \frac{1}{b} \iff \frac{V}{N} \gg b \implies (*)$$

Harte Kugeln

$$w(r) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ 0 & r > \sigma \end{cases}$$

$$Q_{HK} = \int_{V'} d^{3N} r \underset{N \gg 1}{=} (V - Nb)^N$$

ist das Volumen von V'

$$V' = \{ \{ \vec{r}_i \} \in V^N \subset \mathbb{R}^{3N} \text{ mit } |\vec{r}_i - \vec{r}_j| > \sigma \quad \forall i \neq j = 1, \dots, N \}$$

b ist größer oder gleich dem Volumen des harten Kerns $\frac{\pi\sigma^3}{6}$. Dies ist kein mathematischer Beweis, aber

- Exakt in $D = 1$
- Numerischer Beweis für $D = 2, 3$

Sie müssen das als ein asymptotisches Verhalten verstehen wenn N sehr groß ist. Wenn sie das mit der virialentwicklung vergleichen dann sehen sie, dass

$$b = 4 \cdot \left(\frac{\pi\sigma^3}{6} \right)$$

Das ist Physik, man kann nicht immer alles mathematisch streng beweisen. Wir haben jetzt einen spezialfall diskutiert und werden uns nun allgemeineren problemen widmen. Wir nehmen an, dass die Wechselwirkung die folgende Struktur hat

$$w(\vec{r}) = \begin{cases} w_K(r) > 0 \text{ für } r < \sigma \\ w_K(r) \leq 0 \text{ für } r > \sigma \end{cases}$$

Wir nehmen an, dass

$$w_K(r) \gg k_B T \gg |w_F(r)|$$

$$w(r) = w_K(r) + w_F(r)$$

mit

$$\begin{aligned} w_K(r > \sigma) &= 0 \\ w_F(r \leq \sigma) &= 0 \end{aligned}$$

$$Q = Q_H \frac{\int_{V^N} d^{3N}r e^{-\beta \sum_{i<j} w_K(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} e^{-\beta \sum_{i<j} w_F(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}}{\int_{V^N} d^{3N}r e^{-\beta \sum_{i=1}^N w_K(\vec{r}_i - \vec{r}_2)}} = Q_{HK} \left\langle e^{-\beta \sum_{i<j} w_F(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \right\rangle_{HK}$$

$\langle \dots \rangle_{HK}$ ist der Erwartungswert im Gas harter Kuehn

Definition Dichte

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \qquad \int_{\Delta V} \rho(\vec{r}) d^3r = \sum_{\vec{r}_i \in \Delta V} 1$$

Dies entspricht der Teilchenzahl in ΔV .

$$\sum_{i<j=1}^N w_F(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{1}{2} \int_V d^3R_1 \int_V d^3R_2 w_F(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \rho(\vec{R}_1) \rho(\vec{R}_2)$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_{HK} \left\langle \exp \left[-\frac{\beta}{2} \int_V d^3R_1 \int_V d^3R_2 w_F(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \rho(\vec{R}_1) \rho(\vec{R}_2) \right] \right\rangle_{HK} \\ &= Q_{HK} \exp \left[-\frac{\beta}{2} \int_V d^3R_1 \int_V d^3R_2 w_F(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \rho_{MF}(\vec{R}_1) \rho_{MF}(\vec{R}_2) \right]_{HK} \end{aligned}$$

mit

$$\rho_{MF}(\vec{R}) = \left\langle \rho(\vec{R}) \right\rangle_{HK}$$

Reales Klassisches Gas

Molekularfeldnäherung, Van-Der-Waals-Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!} \lambda_T^{-3N} Q, \quad Q = Q_{HK} \left\langle \exp \left[-\beta \sum_{i<j} w_F(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right] \right\rangle_{HK} \\ &= Q_{HK} \left\langle \exp \left[-\beta \int_V d^3R_1 \int_V d^3R_2 W(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \rho(\vec{R}_1) \rho(\vec{R}_2) \right] \right\rangle_{HK} \\ &= Q_{HK} \exp \left[-\frac{\beta}{2} \int_V d^3R_1 \int_V d^3R_2 w_F(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|) \rho_{MF}(\vec{R}_1) \rho_{MF}(\vec{R}_2) \right] \end{aligned}$$

wobei

$$\rho_{MF}(\vec{R}) = \left\langle \rho(\vec{R}) \right\rangle_{HK}$$

Die Molekularfeldnäherung ist die Näherung des mittleren Feldes, *mean-field approximation*. Die Potentialenergie eines Teilchens i lautet

$$V_1(\vec{r}) = \sum_{j \neq i, j=1} w_F(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \simeq \int_V d^3R w_F(|\vec{r}_1 - \vec{R}|) \rho(\vec{R})$$

$$V_{MF}(\vec{r}) = \langle V_i(\vec{r}) \rangle_{HK} = \int_V d^3R w_F(|\vec{r} - \vec{R}|) \rho_{MF}(\vec{R})$$

- 1. Ansatz** Symmetrienerhaltung: Es gibt keinen Grund für das Gas eine bestimmte Richtung zu bevorzugen, es gibt also auch keinen Grund anzunehmen, dass die Dichte nicht konstant ist. Wir nehmen sie also als Konstant an.

$$\rho_{MF}(\vec{R}) = \frac{N}{V}$$

Daraus folgt dann

$$Q = Q_{HF} \exp \left[-\frac{\beta}{2} \underbrace{\int_V d^3R_1 \int_V d^3R_2 w_F(|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|)}_{=-2aV} \left(\frac{N}{V} \right)^2 \right]$$

Wir können das wie bei der Virialentwicklung behandeln: Wir werden das deswegen nicht nochmal explizit berechnen. Die Größe $a \geq 0$ ist extensiv.

$$Z = \frac{1}{N!} \lambda_T^{-3N} [V - Nb]^N e^{+\frac{\beta N^2}{V} a}$$

Damit ist dann

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T N \left[1 + \ln \left(\frac{V - Nb}{N \lambda_T^3} \right) \right] - \frac{aN^2}{V}$$

(Dies ist der Startpunkt der Computeraufgabe 2) Wir werden hier die Physik und die Idee hinter der Berechnung vermitteln, das eigentliche Berechnen ist Teil der Computeraufgabe 2.

$$\mu(T, v) = -k_B T \left[\ln \frac{v - b}{\lambda_T^3} + \frac{v}{b - v} \right] - \frac{2a}{v}$$

$$P(T, v) = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

Wir erkennen, dass diese Gleichung nur von dem spezifischen Volumen und .. abhängt.

$$v = \frac{V}{N} = \rho^{-1}$$

Die isotherme Kompressibilität ist

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{N, T}$$

daraus folgt

$$\left(P + a \left(\frac{N}{V} \right)^2 \right) (V - Nb) = k_B T N$$

$$\kappa_T \geq 0 \implies T \geq T_c(\rho) = 2a\rho(1 - b\rho)^2$$

$$\implies \rho_c = \frac{1}{3b}, T_c = T(\rho_c) = \frac{8}{27} \frac{a}{k_B b} \implies P_c = \frac{a}{27b^2}$$

2. Ansatz Symmetriebrechung Wir haben ein heterogenes System, in welchem 2 Phasen koexistieren. Gas und Flüssigkeit. Das bedeutet ein Teil des Systems ist in Gasform, ein anderer Teil jedoch in Flüssiger Form

$$\text{Gas: } T, N_G, V_G \implies F(T, N_G, V_G), v_G = \frac{V_G}{N_G}, \mu(T, v_G), P(T, v_G)$$

Für die Flüssigkeit ist es ähnlich:

$$T, N_F, V_F \implies F(T, N_F, V_F), v_F = \frac{V_F}{N_F}, \mu(T, v_F), P(T, v_F)$$

Wir nehmen an, dass die Wechselwirkung zwischen Gas und Flüssigkeit vernachlässigbar ist:

$$\begin{aligned} F(T, V_G, V_F, N_G, N_F) &= F(T, V_G, N_G) + F(T, N_F, V_F) \\ N &= N_G + N_F(*) \\ V &= V_G + V_F(*) \end{aligned}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist

A) F ist minimal bei N_F, N_G, V_F, V_G unter der Nebenbedingung (*)

ODER

B)

$$\mu(T, v_G) = \mu(T, v_F) \quad (1)$$

und

$$P(T, v_G) = P(T, v_F) \quad (2)$$

Sie müssen Verfahren B auch in Computeraufgabe 2 verwenden.

Lösung Das spezifische Volumen des Gases sollte größer als das der Flüssigkeit sein

$$v_G \geq v_F > 0$$

Es gibt also nur eine Lösung für $T \geq T_c$ nämlich $v_G = v_F$. Damit haben wir das Problem im wesentlichen gelöst. Damit ist die $v dw$ Gleichung wieder anwendbar.

Für

$$v < v_F^{\min} \text{ oder } v > v_G^{\max}$$

gibt es nur eine Lösung mit $v_G = v_F$ und die Van-der-Waals Gleichung ist anwendbar.

$$v_F^{\min} < v < v_G^{\max} (P_{\min} < P < P_{\max})$$

Es gibt also ein Kontinuum von Lösungen zu Gleichung (1). Man kann das so schreiben

$$v_F(T, v_G) \text{ mit } v_G \in [v_G^{\min}, v_G^{\max}]$$

Aus Gleichung (2) folgt dann

$$\mu(T, v_G) = \mu(T, v_F(T, v_G))$$

ergibt dann v_G . Das ist das Verfahren, das sie in der Computeraufgabe verwenden sollten. Es gibt ein altes Verfahren, die sogenannte Maxwell Konstruktion: Man hat ein Praktisches Verfahren entwickelt um den Wert von v_G zu bestimmen.

Maxwell-Konstruktion

$$\int_{v_F(T)}^{v_G(T)} P(T, v) dv = P_M(T)(v_G(T) - v_F(T))$$

Wir müssen den 1. Hauptsatz für die freie Enthalpie verwenden

$$G(T, P, N) \quad dG = -S dT + V dp + \mu dN$$

Nun fragen wir uns, was passiert wenn man bei einer Transformation einer isotherme folgt. dT ist dann Null. Die freie Energie ist dann

$$dG = V dp \implies G_G - G_F = \int_{P(T, v_F)}^{P(T, v_G)} V(P) dP = \int_{v_F}^{v_G} v \frac{dP}{dv} dv$$

Wir können nun einfach eine partielle Integration machen

$$G_G - G_F = N[v_G P(T, v_G) - v_F P(T, v_F) - \int_{v_F}^{v_G} P(T, v) dv]$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist

$$G_G = G_F, P(T, v_G) = P(T, v_F) = P_N(T)$$

Daraus folgt dann auch die Maxwell-Konstruktion.

Physikalische Zustandsgleichung

$$\tilde{P}(T, v) = \begin{cases} P(T, v) & \text{für } v < v_F(T) \\ P_M(T) & \text{für } v_F(T) < v < v_G(T) \\ P(T, v) & \text{für } v > v_G(T) \end{cases}$$

Es folgt eine Zusammenfassung der Physik

Zusammenfassung • Für $T \geq T_c$ gibt es nur eine Phase, und man kann die Van-der-Waals Zustandsgleichung verwenden

- Für $T < T_c, v < v_F(T)$ gibt es nur eine flüssige Phase, und man kann auch die Van-der-Waals Gleichung verwenden.
- Für $T < T_c, v > v_G(T)$ Gibt es nur die gasförmige Phase, also benutzt man auch die Van-der-Waals Gleichung
- Für $T < T_c, v_F(T) < v < v_G(T)$ gibt es 2 Phasen und man kann die Van-der-Waals Gleichung nicht verwenden. Es gibt dann konstanten Druck, und Chemisches Potential.

$$C = \frac{N_F}{N} = \frac{v - G(T) - v}{v_G(T) - v_F(T)}$$

Ist der Anteil der Materie der in der flüssigen Phase ist.

Ideale Quantengase

Gase von Bosonen und Fermionen ohne Wechselwirkung. Sie bilden die Grundlagen für die Festkörperphysik. Wir haben es in erster Näherung mit einem Elektronengas in einem Metall zu tun. In der Festkörperphysik gibt es auch die Vibration des Gitters also Phononen. Beispiele sind

- Photonengas
- Ultrakalte Gase mit Bose-Einstein Kondensation
- Fermigase

Vorlesung 15: Fermi- und Bose-Verteilungen

Schwabl Kapitel 4.1 Wir machen zuerst Quanten-Vielteilchentheorie, das bedeutet wir haben ein system von vielen Quantenteilchen $N \gg 1$ welche nicht wechselwirken. Beginnen wir jedoch mit einem Teilchen um ein paar notationen einzuführen. Für diesen Fall haben wir einen Hilbertraum

$$\mathcal{H}_j^{(1)} \quad \text{Hamilton-Operator } H_j^{(1)}$$

Zum beispiel

$$H_j^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_j + V(\vec{r}_j)$$

Es gibt einteilchen Eigenzustände

$$|\Phi_\alpha\rangle$$

mit Eigenenergien

$$\epsilon_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

Ordnung

$$\epsilon_0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots$$

Für N Teilchen können wir den Hilbert-Raum einfach mit einem Tensorprodukt bilden.

$$H^{(N)} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j^{(1)}, \quad H^{(N)} = \sum_{j=1}^N H^{(1)}$$

Wir können sehr leicht die Eienzustände dieses Hamilton-Operators schreiben. Die N -Teilchen Eigenzustände kann man mit N quantenzahlen parametrisieren

$$|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_N\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle$$

Mit den Eigenenergien

$$E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \sum_{j=1}^N \epsilon_{\alpha_j}$$

Wir können das erweitern auf eine beliebige Zahl von Teilchen, mit dem sogenannten *Fock-Raum*

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}$$

In jedem Unterraum gibt es den Hamilton-Operator mit der Eigenbasis und den Eigenenergien. Wir werden nun annehmen, dass die Teilchen alle identisch und ununterscheidbar sind. Wenn Quantenteilchen identisch sind, dann gibt es jedoch ein Problem, denn man kann die Teilchen nicht durchnummerieren und ihre Bahnen einzeln bestimmen. Daraus folgt eine besondere Eigenschaft dieses Zustandes: Die Funktion sollte nicht von der Nummerierung der Teilchen abhängen. Man verlangt also, dass wenn man einen Zustand hat der Vertauschungsoperator folgende Eigenschaft besitzt

$$\begin{aligned} A_{jl} |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N\rangle &= |\alpha_1 \dots \alpha_l \dots \alpha_j \dots \alpha_N\rangle \\ &= e^{i\varphi_{jl}} |\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_l \dots \alpha_N\rangle \end{aligned}$$

Die Anwendung dieses Operators ergibt die Vertauschung von zwei Quantenzahlen. Wir verlangen, dass die Physik nicht von der Reihenfolge abhängt. Es gibt eine experimentelle Beobachtung für Bosonen:

$$\varphi_{jl} = 0$$

Für Fermionen wird beobachtet

$$\varphi_{jl} = \pi$$

Das bedeutet es ergibt keinen Sinn in diesem Ganzen Raum zu arbeiten, sondern wir müssen uns auf Unterräume beschränken die symmetrisch oder antisymmetrisch sind.

$$\mathcal{H}_S^{(N)} \quad \mathcal{H}_A^{(N)} \subset \mathcal{H}^{(N)}$$

$$|\alpha_1, \dots \alpha_N\rangle_{S,A} = C_{S,A} \sum_P (\pm)^P |\alpha_{P(1)} \alpha_{P(2)} \dots \alpha_{P(N)}\rangle$$

Je nachdem ob der Zustand symmetrisch oder antisymmetrisch ist gibt es ein Vorzeichen. Jeder Zustand hat wieder eine Energie von oben, man hat nur die Reihenfolge permutiert. Die Zustände sind also wieder Eigenzustände des hamilton-Operators mit den Entsprechenden Eigenenergien

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_{S,A}^{(N)}$$

Besetzungszahldarstellung

Wir definieren zuerst einen Operator der auf dem Fock-Raum wirkt. Der Teilchenzahl- oder Besetzungszahloperator

$$\hat{n}_\alpha : \mathcal{F}_{S,A} \rightarrow \mathcal{F}_{S,A} \hat{n}_\alpha |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle_{S,A} = n_\alpha |\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle_{S,A}$$

mit n_α der Anzahl der $\alpha_1 = \alpha$, $j = 1, \dots, N$ als Besetzungszahl. Der Teilchenzahloperator

$$\hat{N} = \sum_{\alpha} \hat{n}_\alpha$$

und der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{N=0}^{\infty} H^{(N)} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \setminus_{\alpha}$$

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle_{S,A} \leftrightarrow |n_0 n_1 \dots\rangle_{S,A} \subset \mathcal{F}_{S,A}$$

Gittermodell

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}^{(1)} &= L & \dim \mathcal{F} &= 4^L \\ \dim \mathcal{H}^{(N_{\text{up}} N_{\text{down}})} &= \begin{pmatrix} L & N_{\text{up}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & N_{\text{down}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{N} |n_0 n_1 \dots\rangle = N |n_0 n_1 \dots\rangle \text{ mit } N = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$$

$$H |n_0 n_1 \dots\rangle = E |n_0 n_1 \dots\rangle \text{ mit } E = \sum_{\alpha} E_{\alpha} n_{\alpha} = E(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

Für Bosonen

$$0 \leq n_{\alpha} \leq \infty \implies \text{Grundzustand } n_0 = N, \quad E_0 = N \epsilon_0$$

Für Fermionen gilt das Pauli-Prinzip

$$0 \leq n_{\alpha} \leq 1 \implies \text{Grundzustand } n_0 = n_1 - \dots - n_{N-1} - 1, \quad n_{\alpha \geq N} = 0, \quad E_0 = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \epsilon_{\alpha}$$

Zustandsumme • Unterscheidbare Teilchen

$$Z_N = \text{tr}_{\mathcal{H}^{(N)}} e^{-\beta H^{(N)}} = \prod_{j=1}^N \text{tr}_{\mathcal{H}_j^{(1)}} e^{-\beta H_j^{(1)}}$$

• Identische Quantenteilchen

$$Z_{GK} = \text{tr}_{\mathcal{F}_{S,A}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \sum \left\langle \{n_{\alpha}\} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \middle| \{n_{\alpha}\} \right\rangle$$

$$\sum_{\{n_{\alpha}\}} e^{-\beta(\sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} n_{\alpha} - \mu \sum_{\alpha} n_{\alpha})} = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots \prod_{\alpha} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)}$$

$$Z_{GK} = \prod_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}}$$

Bosonen:

$$Z_{GK} = \prod_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}} = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)}}$$

Diese geometrische Reihe ist nur konvergent für

$$\mu < \epsilon_{\alpha} \quad \forall \alpha$$

Man kann also das chemische Potential in einem Bose-Gas nicht beliebig wählen.
Fermionen:

$$\begin{aligned} Z_{GK} &= \prod_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}=0,1} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)n_{\alpha}} \\ &= \prod_{\alpha} (1 + e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)}) \end{aligned}$$

Mittlere Besetzungszahl

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{\alpha} \rangle &= \text{tr}(\hat{n}_{\alpha} \hat{\rho}) = \frac{1}{Z_{GK}} \text{tr}_{\mathcal{F}_{S,A}} \left(\hat{n}_{\alpha} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \right) \\ &= -k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\alpha}} \ln Z_{GK} \end{aligned}$$

Bose-Einstein-Verteilung

$$\langle \hat{n}_{\alpha} \rangle = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} - 1} \quad \text{mit } \mu < \epsilon_0 \leq \epsilon_{\alpha}$$

Fermi-Dirac-Verteilung

$$\langle \hat{n}_{\alpha} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} + 1}$$

Die Anzahl der Teilchen im Einteilchen-Zustand $|\Phi_{\alpha}\rangle$ mit Eigenenergie ϵ_{α}

$$\langle \hat{n}_{\alpha} \rangle$$

Zustandsdichte und Photonengas

Schwabl Kapitel 4.1, 4.5 Wir haben Makroskopische Variable von der Form

$$F = \sum_{\alpha} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)} \pm 1}$$

Die Idee ist

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon f(\epsilon) \sum_{\alpha} \delta(\epsilon - \epsilon_{\alpha}) = V \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon f(\epsilon) Z(\epsilon)$$

Wir definieren die *Einteilchen-Zustandsdichte* auch *Density of States (DOS)* genannt.

$$Z(\epsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \delta(\epsilon - \epsilon_{\alpha})$$

- $Z(\epsilon)$ ist (stückweise) stetig für $\lim_{N \rightarrow \infty}$
- $Z(\epsilon) d\epsilon$ ist die Dichte der Einteilchen-Eigenzustände im Intervall $[\epsilon], \epsilon + d\epsilon$.
- $V Z(\epsilon) d\epsilon$ ist die Anzahl der Einteilchen-Eigenzustände im Intervall $[\epsilon], \epsilon + d\epsilon$.
- Eine Folgerung daraus ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{V} \dim \mathcal{H}^{(1)}$$

Um das zu integrieren muss man zuerst $N \rightarrow \infty$ schicken. Wir lassen dabei jedoch $\frac{V}{N}$ konstant.

Die Zustandsdichte ist keine abstrakte gröÙe, sonder man kann sie auch konkret messen. Sie ist zum Beispiel relevant für die Wärmeleitfähigkeit eines Metalls. Wir berechnen jetzt ein Beispiel:

Freies Quantengas

Es gibt kein Potential, also ist der Hamilton-Operator eines Teilchens

$$H^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

$$H^{(1)} \Psi_{\alpha}(\vec{r}) = \epsilon_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{r})$$

Die Zustandsdichte hängt nicht von der Randbedingung ab, aber man muss trotzdem die Richtige Randbedingung wählen.

I) Offene Randbedingungen

$$\Psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx$$

also

$$k = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

II) Periodische Randbedingungen

$$\Psi(x + L) = \Psi(x)$$

$$\Psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$$

$$k = \frac{2\pi}{L} z, \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

Man kann das mit der Definition der Delta-Funktion ausrechnen, man erhält dann ein sehr leichtes Ergebnis. Wir definieren zuerst eine gröÙe, die Anzahl der Eigenzustände mit Energie

kleiner als ϵ .

$$\begin{aligned}
 N(\epsilon) &= \frac{1}{V} \\
 &= \frac{1}{V} \text{ Anzahl der } \vec{k} \text{ Punkte mit } \left| \vec{k} < \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \right| \\
 &= \frac{1}{V} \frac{V_d \left(\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \right)}{\left(\frac{2\pi}{L} \right)^d}
 \end{aligned}
 \qquad
 \epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}^2 < \epsilon$$

$$V_d(R) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} R^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}$$

$$Z(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} \begin{cases} 0 & \text{für } \epsilon < 0 \\ (2\pi)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \epsilon^{\frac{d}{2}-1} & \text{für } \epsilon > 0 \end{cases}$$

Zum Beispiel

$$\begin{aligned}
 d=1 & \qquad Z(\epsilon) = \frac{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}}{\sqrt{\epsilon}} \\
 d=2 & \qquad Z(\epsilon) = \frac{2\pi m}{\hbar^2} \\
 d=3 & \qquad Z(\epsilon) = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon}
 \end{aligned}$$

Photonengas

Elektromagnetisches Feld in einem Hohlraumresonator Die Maxwell-Gleichungen ergeben stehende Wellen

$$w(\vec{k}) = c \left| \vec{k} \right|, \qquad \vec{k} = \frac{\pi}{L} \vec{n}, \quad \forall n_j \in \mathbb{N}^*$$

Quantenmechanisch sind Photonen Bosonen:

$$\epsilon(\vec{k}) = \hbar w(\vec{k}) = \hbar c \left| \vec{k} \right|$$

$$H = \sum_{\vec{k}, \lambda} \epsilon(\vec{k}) \hat{n}_{\vec{k}, \lambda}$$

$$\lambda = 1, 2 \text{ (Polarisation)}$$

Wir wollen nun die Energiedichte des Systems berechnen

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{u}{V} = \frac{\langle \hat{H} \rangle}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \epsilon(\vec{k}) \langle \hat{n}_{\vec{k}, \lambda} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k} \neq 0, \lambda} \epsilon(\vec{k}) \frac{1}{e^{\beta \epsilon(\vec{k})} - 1} \\
 &= \sum_0^\infty d\epsilon * \frac{\epsilon}{e^{\beta \epsilon} - 1} Z(\epsilon) \\
 &= \hbar^2 \int_0^\infty d\omega * \frac{\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} Z(\hbar \omega)
 \end{aligned}$$

Das ist schon sehr schön, man muss jetzt noch die Zustandsdichte bestimmen. Wir nehmen nun an, dass das System unendlich groß ist und benutzen Periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 Z(\hbar\omega) &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \delta(\hbar\omega - \hbar c |\vec{k}|) \\
 &= \frac{2}{V} * \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \delta(\hbar\omega - \hbar c |\vec{k}|) \\
 &= \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \delta(\hbar\omega - c\hbar k) \\
 &= \frac{1}{\pi^2 \hbar c} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u = \int_0^\infty d\omega * \frac{\hbar}{\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Der Term im Integranden ist die Spektrale Energiedichte $u(T, \omega)$.

Rayleigh-Jeans Gesetz:

$$\begin{array}{lll}
 \hbar\omega \ll k_B T & u(T, \omega) = \frac{1}{\pi^2} k_B T * \frac{\omega^2}{c^3} & \text{Rayleigh-Jeans Gesetz} \\
 \hbar\omega \gg k_B T & u(T, \omega) e^{-\beta\hbar\omega} & \text{Wien Gesetz}
 \end{array}$$

$$x = \beta\hbar\omega \implies u(T) = (k_B T)^4 * \frac{1}{\pi^2} * \frac{1}{(c\hbar)^3} \underbrace{\int_0^\infty dx * \frac{x^3}{e^x - 1}}_{=b} = a T^4 \quad \text{Stefan-Boltzmann-Gesetz}$$

$$b = \int_0^\infty dx * \frac{x^4}{\sinh(\frac{x}{2})} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\implies u = \frac{\pi^2}{15} * \frac{1}{(c\hbar)^3} (k_B T)^4$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 T_1 &\simeq 27 \text{ K}, V_1 \\
 T_2 &= 270 \text{ K}, V_2 = ?
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= V_1 u_1 = U_2 = V_2 u_2 \\
 \implies V_2 &= V_1 * \frac{u_1}{u_2} = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = 1 \times 10^{-8} V_1
 \end{aligned}$$

Bose-Einstein-Kondensation

Ideales freies Gas von Bosonen mit $s = 0, 1, 2, \dots$. Die Dispersion ist

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}^2 \geq 0 \quad s = -S, -S+1, \dots, +S$$

Die Zustandsdichte ist das Produkt mit der Entartung

$$Z(\epsilon \geq 0) = (2S+1) \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2} \right)^{\frac{d}{2}} \epsilon^{\frac{d}{2}-1} * \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

Bose-Einstein-Verteilung

$$\langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle = \langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle = \frac{1}{e^{(\beta(\epsilon(\vec{k})-\mu))} - 1} \quad \text{mit } \mu < 0$$

Die erste Größe die wir damit zum Beispiel berechnen können ist die mittlere Teilchenzahl

$$N(T, \mu, V) = \sum_{s, \vec{k}} \langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle = V \int_0^E d\epsilon Z(\epsilon) * \frac{1}{e^{(\beta(\epsilon-\mu))} - 1}$$

Daraus folgt

$$N = \frac{V(2S+1)}{\lambda_T^d} \int_0^\infty dx x^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{\frac{1}{z}e^x - 1} \quad \text{mit } 0 \leq Z = e^{\beta\mu} < 1$$

Definition

$$\begin{aligned} g_\alpha(z) &= \int_0^{+\infty} dx x^{\alpha-1} \frac{1}{\frac{1}{z}e^x - 1} * \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n^\alpha} \end{aligned} \quad \alpha > 0$$

Daraus folgt

$$N(T, \mu, V) = V * \frac{2S+1}{\lambda_T^d} g_{\frac{d}{2}}(Z)$$

Die innere Energie

$$U(T, \mu, V) = \sum_{\vec{k},s} \epsilon(\vec{k}) \langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle = V * \frac{2S+1}{\lambda_T^d} k_B T * \frac{d}{2} g_{\frac{d}{2}+1}(Z)$$

Wir brauchen jedoch das großkanonische Potential

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu, V) &= +k_B T \sum_{\vec{k},s} \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon(\vec{k})-\mu)}) \\ &= -\frac{2}{d} U(T, \mu, V) \end{aligned}$$

Wir können damit einige allgemeine Ergebnisse herleiten, wie zum Beispiel den Druck

$$P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu} - \frac{\Omega}{V} = \frac{2}{d} * \frac{U}{V} \implies U = \frac{d}{2} PV$$

Quantenkorrekturen zum klassischen idealen Gas

$$\begin{aligned}
 Z \ll 1 &\iff |\mu| \gg k_B T \implies g_\alpha(z) \simeq Z + Z^{-\alpha} Z^2 + \mathcal{O}(Z^3) \\
 &\implies N = V * \frac{2S+1}{\lambda_T^d} \left(Z + Z^{-\frac{d}{2}} Z^2 + \mathcal{O}(Z^3) \right) \quad (*)
 \end{aligned}$$

Man kann hier auch eine Entwicklung machen

$$PV = V * \frac{2S+1}{\lambda_T^d} k_B T \left(Z + Z^{-\frac{d}{2}-1} Z + \mathcal{O}(Z^3) \right)$$

Man kann damit sehr schön die Änderung der Zustandsgleichung des idealen Gases berechnen

$$\begin{aligned}
 \frac{PV}{nk_B T} &= \left(Z + Z^{-(\frac{d}{2}+1)} Z^2 \right) / (Z + Z^{-\frac{d}{2}} Z^2) + \mathcal{O}(Z^3) \\
 &= 1 - Z^{-(\frac{d}{2}+1)} Z + \mathcal{O}(Z^3)
 \end{aligned}$$

Aus (*) folgt

$$Z = \frac{N}{V} \lambda_T^d * \frac{1}{2S+1} = \rho * \frac{\hbar^d}{(2\pi m k_B T)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{2S+1}$$

Wenn $Z \ll 1$

$$\rho \ll 1 \qquad T \rightarrow \infty \qquad S \rightarrow \infty$$

$$\mu(T, N, V) = ? \implies g_{\frac{d}{2}}(z) = \frac{\rho \lambda_T^d}{2S+1} \quad (+)$$

$g_\alpha(z)$ ist monoton steigend und $g_\alpha(0) = 0$. Was passiert nun wenn $Z \rightarrow 1$?

$$g_{\frac{d}{2}}(z \rightarrow 1) = \begin{cases} +\infty & d = 1, 2 \\ g_{\frac{3}{2}}(1) \simeq 2.612... & \text{sonst} \end{cases} \implies \begin{cases} \exists z(T, \rho) \quad \forall T > 0, \rho > 0 \\ \exists z(T, \rho) \quad \forall 0 < \rho < \rho_c(T) \text{ oder } \forall T > T_c(\rho) \end{cases}$$

mit der kritischen Dichte $\rho_c(T) = \frac{g_{\frac{3}{2}}(1)}{\lambda_T^3} (2S+1)$ oder der kritischen Temperatur $T_c(\rho) = \left(\frac{\rho}{(2S+1)g_{\frac{3}{2}}(1)} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2\pi m k_B}$.

Bose-Gas bei $T = 0$

$$\left\langle \hat{n}_{s, \vec{k}} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \forall \vec{k} \neq 0 \\ \geq 0 & \forall \vec{k} = 0, \quad \sum_s \left\langle \hat{n}_{s, \vec{k}=0} \right\rangle = N \end{cases}$$

Das bedeutet der Grundzustand ist makroskopisch besetzt. Man nennt das Bose-Einstein-Kondensat.

$$\frac{N_0}{N} > 0 \qquad N \rightarrow \infty$$

Man kann daraus sehr leicht die Fluktuation der Teilchenzahlen berechnen. Wenn man das mit der Großkanonischen Beschreibung vergleicht, dann muss man um diesen Effekt zu bekommen das folgende machen

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{k})-\mu)} - 1} = \begin{cases} 0 & \forall \epsilon(\vec{k}) > \mu \\ \infty & \text{für } \epsilon(\vec{k} = 0) = \mu \end{cases}$$

Wir erreichen dass wenn das chemische Potential den festen Wert des Grundzustands hat. Wir wollen die Funktion oben invertieren, also sollte die Funktion $\mu(N)$ umkehrbar sein. Das ist im allgemeinen jedoch nicht möglich. Man braucht eine Funktion die variiert in abhängigkeit der Parameter. Physikalisch gesehen, was passiert da? Sobald es eine endliche Temperatur gibt dann ist das Kondensat gelöst. Dann kann man das großkanonische ensemble verwenden. in 3 dimensionen ist das im allgemeinen nicht der Fall. Wir können diesen Fall mit unserer berechnung nicht berücksichtigen. Wir müssen also die gleichung korrigieren. Unser startpunkt war dabei die Summe oben. Wir hatten geschrieben

$$N = \sum_{s, \vec{k}} \langle \hat{n}_{s, \vec{k}} \rangle = \sum_n \langle \hat{n}_{s, \vec{k}=0} \rangle + \sum_{s, \vec{k} \neq 0} \langle \hat{n}_{s, \vec{k}} \rangle.$$

Wenn man die Summe durch ein Integral ersetzt dann spielt ein Punkt keine rolle und man kann wieder das Ergebnis von oben verwenden. Sie sehen, dass nun die Zustandsgleichung ein bisschen anders ist als Vorher

$$N = N_0 + \frac{v(2S+1)}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(Z)$$

Wir müssen nun diese Gleichung näher untersuchen. Für

$$N_0 = \begin{cases} 0 & T > T_c(\rho) \\ N - \frac{v(2S+1)}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(1) & T < T_c(\rho) \end{cases}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{\rho_c(T)}{\rho} = 1 - \left(\frac{T}{T_c(\rho)} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Dies ist der Anteil des Kondensats.

$$1 - \frac{N_0}{N}$$

Ist der nicht kondensierte Anteil. Wir können nun kurz analysieren was das eigentlich bedeutet. Man hat ein Kondensat oberhalb der kritischen dichte. Es verschwindet jedoch genau wenn die Dichte diesen Wert erreicht. Man kann das graphisch illustrieren.

Ausdruck Name vorname matrikelnummer

elektronisch name nachnahme

sprechzeiten

nächste woche			
Mi	11-12	Mi	vorlesungsfrei nach absprache
	14-16:30		14-18
Do	10-12	Do	14-16

Freies ideales Fermi-Gas

Schwabl Kapitel 4.2, 4.3

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}^2 \quad s = -S, -S+1, \dots, S \quad \text{Entartung: } 2S+1 \quad S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

Damit ist

$$Z(\epsilon \geq 0) = \frac{2S+1}{k^d} \frac{((2\pi m)^{\frac{d}{2}})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{\epsilon^{\frac{d}{2}-1}}$$

$$\text{Fermi-Dirac-Verteilung } \langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{k})-\mu)} + 1}$$

Wir berechnen zuerst großkanonisch die Teilchenzahl

$$N(T, \mu, V) = \sum_{\vec{k},s} \langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle = V \int_0^{+\infty} d\epsilon \frac{Z(\epsilon)1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

Wir müssen dieses Integral analysieren indem wir für Z diese besondere Form verwenden.

$$N(T, \mu, V) = \frac{V(2S+1)}{\lambda_T^d} f_{\frac{d}{2}}(Z)$$

mit der Fugazität $Z = e^{\beta\mu}$ und $\lambda_T = \sqrt{2\pi m k_B T} \frac{1}{h}$.

$$f_\alpha(Z) = \int_0^{+\infty} dx x^{\alpha-1} \frac{1}{\frac{1}{z}e^x + 1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{z^m}{m^\alpha}$$

$$\begin{aligned} U(T, \mu, V) &= \sum_{\vec{k},s} \epsilon(\vec{k}) \langle \hat{n}_{\vec{k},s} \rangle \\ &= V \int_0^{+\infty} d\epsilon Z(\epsilon) \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \\ &= V(2S+1) \frac{1}{\lambda_T^d} f_{\frac{d}{2}+1}(z) \frac{d}{2} k_B T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu, V) &= -k_B T \ln Z_{GK} = -k_B T \sum_{\vec{k},s} \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon(\vec{k})-\mu)} \right) \\ &= -k_B T V \int_0^{+\infty} d\epsilon Z(\epsilon) \ln \left[1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \right] \\ &= -k_B T V (2S+1) (2\pi m)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{h^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \underbrace{\int_0^{+\infty} d\epsilon \epsilon^{\frac{d}{2}-1} \ln \left[1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \right]}_{=(k_B T)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln [1 + Z e^{-x}]} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln [1 + Z e^{-x}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{Z}{d} x^{\frac{d}{2}} \ln [1 + Z e^{-x}] \Big|_0^\infty - \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty dx \frac{2}{d} x^{\frac{d}{2}} \underbrace{\frac{-z e^{-x}}{1 + z e^{-x}}}_{=-\frac{1}{e^x \frac{1}{z} + 1}}$$

$$\Omega(T, \mu, V) = k_B T V (2S + 1) \frac{1}{\lambda_T^d} \frac{2}{d} f_{\frac{d}{2}+1}(z) = -\frac{2}{d} U$$

Wir können nun den Druck berechnen, da wir das großkanonische Potential ausgerechnet haben

$$P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu} = -\frac{\Omega}{V} = \frac{2}{d} \frac{U}{V} \implies U = \frac{PVd}{2}$$

Im Grenzfall ist

$$Z \ll 1 \quad \iff \quad \beta\mu \rightarrow -\infty \quad \iff \quad -\mu \gg k_B T$$

$$f_\alpha(z) = z - z^{-\alpha} z^2 + \mathcal{O}(z^3)$$

Daraus folgt

$$PV = \frac{2}{d} U \simeq V(2S + 1) \frac{1}{\lambda_T^d} k_B T \left[z - z^{-(\frac{d}{2}+1)} z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right]$$

$$N \simeq V(2S + 1) \frac{1}{\lambda_T^d} \left[z - z^{-\frac{d}{2}} z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right] (*)$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \frac{PV}{Nk_B T} &= \frac{z - z^{-(\frac{d}{2}+1)} z^2 + \mathcal{O}(z^3)}{(z - z^{-(\frac{d}{2})} z^2 + \mathcal{O}(z^3))} \\ &= 1 - \left(z^{-(\frac{d}{2}+1)} - z^{-\frac{d}{2}} \right) Z + \mathcal{O} \\ &= 1 + z^{-(\frac{d}{2}+1)} z + \mathcal{O}(z^2) \quad (+) \end{aligned}$$

$$Z = \frac{N}{V} \frac{1}{2S + 1} \lambda_T^d$$

Aus (*) folgt

$$Z = \frac{N}{V} \frac{1}{2S + 1} \lambda_T^d$$

und dann mit (+)

$$PV = Nk_B T \left[1 + z^{-(\frac{d}{2}+1)} \frac{\rho}{2S + 1} \lambda_T^d \right]$$

Dies ist die erste Quantenkorrektur zur Zustandsgleichung des idealen Gases für Fermionen. Wenn man betrachtet, wann dies Gleichung erfüllt ist: Wir haben angenommen dass $z \ll 1$ also

$$\rho \lambda_T^d \ll 1 \quad T \rightarrow \infty \quad S \rightarrow \infty$$

Bevor wir den Grenzfall $z \gg 1$ betrachten untersuchen wir den Fall $T = 0$.

$$\langle \hat{n}_{s, \vec{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{k}) - \mu)} + 1} T \rightarrow 0 \begin{cases} 0 & \text{für } \epsilon(\vec{k}) > \mu \\ 1 & \text{für } \epsilon(\vec{k}) < \mu \end{cases}$$

Fermi-Energie $\epsilon_F = \mu$ für $T = 0$

Fermi-Temperatur $\epsilon_F = k_B T_F$

Das schöne an diesem Grenzfalle ist, dass die Rechnung sehr einfach wird.

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{\vec{k}, s} \langle \hat{n}_{\vec{k}, s} \rangle = V \int_0^{+\infty} d\epsilon Z(\epsilon) \Omega(\epsilon_F - \epsilon) \\
 &= V (2S + 1) (2\pi m)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{h^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \underbrace{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{\frac{d}{2}-1} d\epsilon}_{= \frac{2}{d} \epsilon_F^{\frac{d}{2}}} \\
 \epsilon_F &= \left(\rho \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) / (2S + 1) \right)^{\frac{2}{d}} \frac{h^2}{2\pi m}
 \end{aligned}$$

Beispiel

$$d = 3 \qquad \epsilon_F \left(\frac{6\pi^2}{2S + 1} \rho \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$E_0 = \sum_{\vec{k}, s} \epsilon(\vec{k}) \langle \hat{n}_{\vec{k}, s} \rangle = U(T = 0) = N \epsilon_F \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2} + 1}$$

$$d = 3 \qquad E_0 = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

$$\text{Grenzfall } z \gg 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta\mu \gg 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu > k_B T$$

$$d = 3 \qquad \text{Sommerfeld-Entwicklung} \equiv \text{asymptotische Entwicklung der } f_\alpha(z)$$

$$f_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\ln z)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \dots \right]$$

Das funktioniert auch für die zweite Funktionen die wir brauchen, für die Energie haben wir

$$f_{\frac{5}{2}}(z) = \frac{8}{15} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\ln z)^{\frac{5}{2}} + \pi^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} (\ln z)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Sie können diese Formel verwenden um die Teilchenzahl als funktion von z zu entwickeln. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mu &= \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{T}{T_F} \right)^4 \right) \right] \\
 U &= \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{T}{T_F} \right)^4 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Wenn $z \gg 1$ dann ist $T \ll T_F$ und wir haben ein entartetes Fermi-Gas. Man kann jetzt die Wärmekapazität berechnen:

$$C_{V,N} = \frac{dU}{dT} = \frac{N k_B \pi^2}{2} \frac{T}{T_F} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

Beispiele sind

Vorlesung 19: Magnetismus und Ising-Modell

Klassische Physik

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\vec{P}_i - q_i \vec{A}(\vec{r}_i, t) \right]^2 + \sum_{i=1}^N q_i \Phi(\vec{r}_i, t) + W(\{\vec{r}_i\})$$

$$Z(T, V, N, \vec{B}) = c \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{V^N} d^3N r e^{-\beta H}$$

$$G(T, V, N, \vec{B}) = -k_B T \ln Z$$

Magnetisierung

$$\vec{M}(T, V, N, \vec{B}) = - \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{B}} \right)_{T, V, N}$$

Bohr-Van-Leeuwen-Theorem Es gibt keinen Magnetismus in der klassischen statistischen Physik.
Das heißt

$$\vec{M}(\vec{B}) = 0 \quad \forall \vec{B}$$

Beweis Man macht eine Substitution

$$\tilde{\vec{P}}_i = \vec{P}_i - q_i \vec{A}$$

Damit verschwindet die Abhängigkeit vom Vektorpotential. Mit der richtigen Eichung ist das Magnetfeld unabhängig von Φ .

Quantenphysik

$$H = \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\vec{P}_i^2)}{2m_i} - \mu_i^z B \right]$$

Magnetisches Moment des Teilchens i in z -Richtung

$$\hat{\mu}_i^z = + \frac{q_i}{2m_i} \left(\hat{L}_i^z + g_i \hat{S}_i^z \right) + \frac{q_i^2}{4m_i} (\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2) B$$

In der Regel wird der Zweite Term vernachlässigt.

$$G(T, V, N, \vec{B}) = -k_B T \ln (\text{tr } e^{-\beta H})$$
$$M(T, V, N, \vec{B}) = - \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{B}} \right)_{T, V, N} = \left\langle \sum_i \hat{\mu}_i^z \right\rangle$$

Es gibt isotherme magnetische Suszeptibilität

$$\chi_T(T, V, N, \vec{B}) = \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \vec{B}} \right)_{T, V, N} = \left\{ \frac{\partial M_i}{\partial B_j} \right\}$$

Beispiele 1) Magnetismus von Atomen und Ionen

- Edelgase $\vec{L} + \vec{S} = 0$. Damit folgt Diamagnetismus, also $\chi_T < 0$.
- Ungerade Anzahl von Elektronen (Na, U^{4+}): $J^z = L^z + 2S^z \neq 0$. Es gibt also Paramagnetismus $\chi_T > 0$, $\chi_T = \frac{C}{T}$. Man nennt diesen Zusammenhang auch *Curie-Weiss-Gesetz*.

2) Magnetismus der Metalle

Man hat Leitungselektronen, also Delokalisierte Elektronen im positiv geladenen Hintergrund. Dies ist letztlich ein Freies Fermi-Gas. Jetzt schalten wir ein Magnetfeld ein. Wir müssen aus dem hamilton-Operator den Teil nehmen der für das Magnetfeld relevant ist. Dazu machen wir die Vereinfachung, dass es nur Kopplung des Magnetfeldes mit dem Spin gibt.

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{(\vec{P}_i^2)}{2m_i} + 2\mu_B S_i^z$$

Dabei ist $\mu_B = \frac{2\hbar}{2m_l}$. Die Einteilchen Eigenenergien

$$\epsilon_\sigma(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_l} + \mu_B \cdot B \cdot \sigma \quad \text{mit } \sigma = \pm 1 \quad S^z |\vec{k}\sigma\rangle = \frac{\hbar}{2} \sigma |\vec{k}\sigma\rangle$$

Man kann die Physik sehr gut verstehen wenn man das System bei $T = 0$ betrachtet. In diesem Fall hat man die Situation, dass dispersion bei $B = 0$ eine Parabel ist. Die Niveaus unter der Fermi-Energie sind besetzt, die anderen nicht. Man hat dabei für jedes Niveau ein up und ein down elektron. Wenn man nun das magnetfeld einschaltet, dann muss man die Dispersion nach oben oder unten verschieben, je nachdem ob man Spin Up oder Spin Down hat. Die Verschiebung ist dabei proportional zu $B\mu_B$. Man hat also nun mehr Elektronen mit Down Spin als mit Up. Man kann dann die Magnetisierung in z -Richtung explizit berechnen. Die magnetisierung ist der Erwartungswert des magnetischen Momentes. man bekommt dann

$$M_z = -\frac{e}{m_e} \left\langle \sum_i S_i^z \right\rangle = -\mu_B (N_+ - N_-) > 0$$

Wir bekommen tatsächlich eine magnetisierung die Positiv oder Negativ ist, je nach orientierung des Magnetfeldes. Man kann dies auch für tiefe Temperaturen berechnen aber man führt das letztlich nur auf den vorigen Weg zurück. Man bekommt dann einen Wert für die Suszeptibilität die auch Pauli-Suszeptibilität genannt wird

$$\chi_P = \mu_B^2 Z(\epsilon_F) V$$

Da der Wert größer als 0 ist nennt man das Phänomen auch Pauli-Paramagnetismus. Mit Kopplung zu L^z und $x^2 + y^2$: $\chi_L = -\frac{\xi_p}{3}$. Dies ist der *Landau-Diamagnetismus*. Wenn das Magnetfeld in einem Metall sehr groß wird kann man kreisbewegung der Elektronen beobachten. Man kann das auch quantenmechanisch erklären.

Es gibt Verschiedene Konventionen in der Physik, also sieht das ERgebnis nicht immer so aus wie oben. Man muss dann aufpassen in welchen Einheiten die Werte definiert sind.

Ising Modell Wir haben lokalisierte Elektronen auf einem d -dimensionalen hyperkubischen Gitter. Lokalisierte heißt hier, dass sie sich nicht bewegen können, der einzige Freiheitsgrad ist also der Spin der Elektronen. Wir werden nun annehmen, dass es in dem System eine sehr anisotrope Austauschkopplung gibt. Wir beschränken uns dabei auf kurzreichweitige Wechselwirkungen, also solche mit den nächsten Nachbarn. Dass die Richtung sehr anisotrop ist, bedeutet dass auch nur z.B. die z -Komponente des Spins koppelt. Der Hamilton operator schreibt sich dann zu

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} I_{i,j} S_i^z S_j^z + \frac{2\mu_B}{\hbar} \sum_{i=1}^N B_i S_i^z$$

Die Summe geht dabei über alle Gitterplätze. Die standardnotation

$$\sum_{\langle i,j \rangle}$$

Bedeutet eine Summer über alle Paare von nächsten Nachbarn. Das könnte man noch aus der Quantenmechanik kennen:

$$H = -J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \rightarrow -J_x S_1^x S_2^x + J_x S_1^x S_2^x + J_z S_1^z S_2^z$$

Das wichtige ist hier, dass es zwei räume gibt. Einen raum des Gitters und einen Raum des Spins. Wir nehmen allerdings an, dass für die richtung des Spins nur eine Komponente wichtig ist. I ist nur ein Platzhalter für die Austauschkopplung. Wir werden das später noch konkretisieren. Jetzt müssen wir jedoch vorerst das Problem lösen. Dazu müssen wir wissen was Der Hilbert-Raum eines Elektronenspins eigentlich ist.

Hilbert-Raum \mathbb{C}^{2N}

Wir dürfen und werden ein Tensorprodukt der Basen verwenden.

Stellen sie sich nun vor man hätte keine Wechselwirkung. Dann wäre die Lösung einfach, die eigenzustände sind dann

$$|\{s_i\}\rangle = |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle \otimes \dots \otimes |s_N\rangle \text{ mit } S_i^z |s_i\rangle = \frac{\hbar}{2} |s_i\rangle, \quad s_i = \pm 1$$

Alle Operatoren die wir hier haben kommutieren miteinander. Wir können das System also fast wie ein klassisches System behandeln. Der Grund warum wir dass Problem in 2 Dimensionen überhaupt lösen können ist, dass die Eigenzustände eine so einfache Form haben. Die Eigenenergien sind

$$E(\{s_i\}) = - \sum_{\langle i,j \rangle} I_{i,j} \frac{\hbar}{4} s_i s_j + \sum_i \underbrace{B_i \mu_B}_{-H_i} s_i$$

Wir haben also die eigenzustände und die Eigenenergien, wir können also die Magnetisierung eines Eigenzustandes $|\{s_i\}\rangle$ berechnen

$$M(|\{s_i\}\rangle) = -\frac{2\mu_B}{\hbar} \left\langle \{s_i\} \left| \sum_i S_i^z \right| \{s_i\} \right\rangle = \underbrace{-\mu_B}_{=1} \sum_i s_i$$

aus historischen Gründen haben wir μ_B gleich 1 gesetzt. Das ist alles für die Eigenzustände gewesen. Wir haben nun also alles um die Zustandssumme zu schreiben:

$$\begin{aligned} Z &= \text{tr } e^{-\beta H} = \sum_{\{s_i\}} \left\langle \{s_i\} \left| e^{-\beta H} \right| \{s_i\} \right\rangle \\ &= \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta E(\{s_i\})} \end{aligned}$$

Damit ist dann,

$$G(T, H) = -k_B T \ln Z$$

Man kann damit zum Beispiel die Magnetisierung berechnen

$$M(T, H) = - \left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_T = \left\langle \sum_i s_i \right\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} \left(\sum_j s_j \right) e^{-\beta E(\{s_i\})}$$

Das Problem sind nun die Wechselwirkungen, wir haben also eine Summe über 2^N Terme

$$\sum_{\{s_i\}} = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1}$$

Angenommen wir haben nun ein Quadratisches Gitter mit $d = 2$. Und Kantenlänge 10. Das bedeutet wir haben $N = 10^2$. Und damit $2^{100} \approx 10^{30}$ Terme. Exakte Lösung in $d = 1$ und z . Die Lösung in einer Dimension wird eine Hausübung sein, die Lösung in zwei Dimensionen ist jedoch viel schwieriger. Interessant ist jedoch, dass es exakte Lösungen gibt für Phasenübergänge bei $T_c > 0$ in $d = 2$.

Es gibt jedoch auch Näherungsverfahren, ein Beispiel ist die

- Tief- und Hochtemperaturentwicklung
 - Molekularfeldnäherung
 - Monte-Carlo-Simulationen
- Diese werden auch Teil der dritten Computerübung sein.

Vorlesung 20: Ising-Modell und Transfermatrix-Methode

Schwabl Kapitel 6.5 und Anhang F

Das Ising Modell ist für uns wie eine klassische Energie, die von der Spinkonfiguration abhängt

$$E(\{s_i\}) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i \quad s_i = \pm 1$$

Tiefe Temperatur Wir werden nur den Fall $T = 0$ diskutieren.

- $H = 0$
Grundzustand. Eine Konfiguration ist die einfache Formel für Paare in einem kubischen Gitter:

$$\begin{cases} s_i = +1 & \forall i & E_0 = -JNd, & m = \frac{M}{N} = +1 \\ s_i = -1 & \forall i & E_0 = -JNd, & m = -1 \end{cases}$$

Neben der Entartung haben wir auch eine spontane Symmetriebrechung. ($Z \rightarrow -Z$). Dies entspricht in unserem Modell $s_i \rightarrow -s_i$. Das System hat eine Spiegelsymmetrie, der Grundzustand jedoch nicht mehr. Dies ist charakteristisch für Phasenübergänge. Wenn der spin immer in die Gleiche richtung zeigt, dann nennt man das auch einen Ferromagneten. Es gibt also auch eine spontane Magnetisierung (Permanentmagnet). Antiferromagnetismus erhält mann wenn die Kopplung negativ ist ($J < 0$). In diesem Fall gibt es auch eine Symmetriebrechung und zwei Grundzustände. In diesem Fall wird die Energie edoch maximiert, das ist jedoch nicht was wir wollen. Wir beschränken uns hier auf den Fall des Ferromagnetismus.

- $H > 0$

Es gibt nur einen Zustand

$$s_i = +1 \quad \forall i, \quad E_0 = -JNd - HN$$

- $H < 0$

Es gibt nur einen Zustand

$$s_i = -1 \quad \forall i, \quad E_0 = -JNd + HN$$

Hohe Temperaturen Wir machen eine Taylor-Entwicklung für hohe Temperaturen.

$$k_B T \gg J, H$$

Die Temperatur ist also viel größer als die Wechselwirkungsenergie die wir haben. Wir machen jetzt also eine Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta E(\{s_i\})} = \sum_{\{s_i\}} \left[1 - \beta E(\{s_i\}) + \frac{1}{2\beta^2 E^2(\{s_i\})} + \mathcal{O}(\beta^3) \right] \\ &= \sum_{\{s_i\}} \left[1 + \beta J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + \beta H \sum_i s_i + \frac{1}{2} (\beta J)^2 \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\langle k,l \rangle} s_i s_j s_k s_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\beta H)^2 \sum_i \sum_j s_i s_j + \beta J \beta H \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_k s_i s_j s_k \right] + \mathcal{O}(\beta^3) \end{aligned}$$

$$\sum_{s=\pm 1} f(s) = \begin{cases} 0 & \text{ungerade} \\ 2f(1) & \text{gerade} \end{cases}$$

Wir haben hier zum beispiel 3 Spin $s_i s_j s_k$, wir können also nie eine gerade Potenz haben, deswegen wird der Term 0.

$$\begin{aligned} \implies Z &= Z^N + \frac{1}{2} (\beta J)^2 \sum_{\{s_i\}} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i^2 s_j^2 + \frac{1}{2} (\beta H)^2 \sum_{\{s_i\}} \sum_i s_i^2 \\ &= Z^N \left[1 + \frac{1}{2} (\beta J)^2 dN + \frac{1}{2} (\beta H)^2 N \right] + \mathcal{O}(\beta^3) \end{aligned}$$

$$\implies G(T, H) = -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln Z - \left\{ \frac{N}{2k_B T} J^2 d + H^2 \right\} + \mathcal{O}(\beta^2)$$

$$\Rightarrow M(T, H) = - \left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_T = N \frac{H}{k_B T}$$

Wir können daraus zwei wichtige Punkte folgern:

$$\begin{cases} \lim_{H \rightarrow 0} M = 0 & \text{keine Spontane Magnetisierung} \\ \chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \frac{N}{k_B T} & \text{(Curie Gesetz)} \end{cases}$$

$T = 0$	$T \gg J, H$
Ferromagnet	Paramagnet
$M \neq 0$	$M = 0$
Symmetriebrechung	Symmetrieerhaltung

Phasenübergang bei $H \rightarrow 0$ Damit ist die Kritische Temperatur $T_c \geq 0$. Wir könnten jetzt einfach eine Taylor-Entwicklung für hohe und tiefe Temperaturen machen, aber diese Vorgehensweise ist nicht besonders gut. Man kann damit nie wirklich Singularitäten untersuchen wegen des endlichen konvergenzradius der Entwicklung. Man müsste dann eine unendliche Anzahl von Termen berücksichtigen. Eine der wichtigsten Methoden ist die der Transfermatrix.

Transfermatrix-Methode Wenn man eine Zustandssumme eines klassischen d Dimensionalen Systems berechnen möchte kann man das über eine Matrix machen. Man versucht Probleme zurückzuführen auf solche, die man bereits gelöst hat. Deswegen ist diese Methode sehr beliebt. Es geht um die Berechnung des größten Eigenwertes meiner Transfermatrix. Dies ist gleichbedeutend mit der Berechnung des Grundzustandes eines d -dimensionalen Quantensystems. In zwei dimensionen hat man ein system von nicht wechselwirkenden Fermionen, deswegen kann man es in diesem Fall einfach lösen.

Das eindimensionale Ising-Modell Um das Problem in einer Dimension zu verstehen muss man die Energie explizit ausschreiben

$$E(\{s_i\}) = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - H \sum_{i=1}^N s_i$$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s_i\}} \exp \left[\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \beta H \sum_{i=1}^N s_i \right] \\ &= \sum_{\{s_i\}} \prod_{i=1}^N \exp \left[\beta J s_i s_{i+1} + \frac{1}{2} \beta H (s_i + s_{i+1}) \right] \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt die Transfermatrix

$$\begin{aligned} T(s, s') &= \exp \left[\beta J s s' + \frac{1}{2} \beta H (s + s') \right] & s, s' = \pm 1 \\ &= \begin{pmatrix} e^{\beta(J+H)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-H)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} T(s_1, s_2) \cdot T(s_2, s_3) \cdot \dots \cdot T(s_{N-1}, s_N) \cdot T(s_N, s_1)$$

Das ganze ist ein Matrixprodukt

$$\sum_{s'=\pm 1} T(s, s') T(s', s'') = T^2(s, s'')$$

Daraus folgt

$$Z = \sum_{s_i=\pm 1} T^N(s_1, s_1) = \text{tr} T^N \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

Wir schreiben direkt die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \cosh(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta H) + e^{-2\beta J}}$$

Nebenbedingung $\lambda_+ > \lambda_- > 0$

Der Logarithmus einer Summe ist nicht besonders einfach zu behandeln.

$$G(T, H) = -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln \lambda_+ - \underbrace{k_B T \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right)}_{\rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty}$$

Eine funktion die analytisch in β ist bleibt es auch. Der Rest ist standard. Wir haben die freie Enthalpie, also berechnen wir nun die Physikalischen Größen.

$$M(T, H) = - \left(\frac{\partial G}{\partial H} \right)_T = N \frac{\sin(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta J}}}$$

$$\stackrel{H \rightarrow 0}{=} \begin{cases} N \text{ sign } H & \text{für } T \rightarrow 0 \\ 0 & \text{für } T > 0 \end{cases} \implies T_c = 0$$

Die nächste gröÙe ist die Suszeptibilität

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \frac{N}{k_B T} \frac{(\cosh(\beta H) e^{-4\beta J})}{(\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta J})^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{N}{k_B T} e^{2\beta J} = \begin{cases} \frac{N}{k_B T} & \text{für } k_B T \gg J \\ \infty & \text{für } T \rightarrow 0 \end{cases}$$

Dies ist auch ein allgemeines Ergebnis bei der Kritischen Temperatur. Als übungsaufgabe dürfen wir einen Teil dieser Rechnung durchführen. Für die Freie Energie selbst braucht man nur den Größten Eigenwert. Wir fassen jetzt kurz zusammen was das in Zwei dimensionen bedeutet.

Zweidimensionales Ising-Modell Wir haben ein periodisches Gitter mit der Kantenlänge L .

$$s_{x,y} = s_{x+L,y} = s_{x,y+L}$$

$$E(\{s_i\}) = -J \sum_{x=1}^L \sum_{y=1}^L (s_{x,y} s_{x+1,y} + s_{x,y} s_{x,y+1}) - H \sum_{x=1}^L \sum_{y=1}^L s_{x,y}$$

Wir definieren die Transfermatrix als eine $(2^L \times 2^L)$ Matrix:

$$T(s_{x,1} s_{x,2} \dots s_{x,L}, s_{x+1,1} s_{x+1,2}, \dots s_{x+1,2}) \\ = \exp \left[\beta J \sum_{y=1}^L s_{x,y} s_{x+1,y} + \frac{1}{2(s_{x,y} s_{x,y+1} + s_{x+1,y} s_{x+1,y+1})} + \frac{\beta H}{2} \sum_{y=1}^L (s_{x,y} + s_{x+1,y}) \right]$$

Wir können wieder die Zustandssumme als Produkt dieser Matrizen schreiben. Die wechselwirkung zwischen dem Nachbarspin ist hier relevant.

$$Z = \text{tr } T^L = \sum_{i=1}^{2^L} \lambda_i^L$$

$$\implies GL \xrightarrow{=} \infty - k_B T L \ln \lambda_1$$

Weil λ_1 der größte Eigenwert ist. Das Problem ist, dass wir hier eine riesige matrix haben, die wir diagonalisieren müssen. Für das zweidimensionale Modell kann man das aber noch machen. Wenn man die Matrix nicht per hand diadonalisieren kann, dann muss man numerische Simulationen starten. Mann kann schnell risiege Matrizen diagonalisieren die dünn besetzt sind. Eine beliebte Methode ist die Transfermatrix analytisch zu berechnen und sie dann numerisch zu diagonalisieren. Wir kehren nun zurück zum zweidimensionalen Ising-modell. Wir wollen die Ergebnisse kurz zusammenfassen. Man findet hier einen Phasenübergang vom Paramagnet zum Ferromagnet bei einer endlichen kritischen Temperatur T_c

$$k_B T_c = \frac{2J}{\text{asinh}(1)} = \frac{2J}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.269 \text{ J}$$

An diesem Punkt geschehen sehr interessante Dinge.

Kritisches Verhalten

$$\begin{aligned} M &\propto (T_c - T)^\beta, & \beta &= \frac{1}{8} & (T < T_c) \\ C_H &\propto |T_c - T|^{-\alpha}, & \alpha &= 0 \\ \chi_T &\propto |T_c - T|^{-\gamma}, & \gamma &= \frac{7}{4} \\ M &\propto |H|^{\frac{1}{8}}, & \delta &= 15 & (T = T_c) \end{aligned}$$

Dieser Exponent ist ein sehr wichtiges Ergebnis der theoretischen Physik. Man findet bei Phasenübergängen immer die Gleichen exponenten finden. Diese hängen von der Dimension des Systems ab. Die berechnung dieses Exponenten einer der Hauptaufgaben der statistischen Physik. Das Ising-Modell ist sehr interessant, da es eine der wenigen ist, mit denen man diese Parameter berechnen kann.

Vorlesung 21 Molekularfeldnäherung

Schwabl Kapitel 6.5

Auf Englisch auch *Mean-Field approximation*, Näherung des mittleren Feldes genannt. Sie werden beide Namen selbst z.B. in der deutschsprachigen Literatur finden. Diese Methode ist grundlegend für die statistische Physik und der Vielteilchenphysik. Man findet sie in vielen Feldern der Physik unter verschiedenen Namen. In der Festkörperphysik gibt es z.B. die *Hartree-Fock* Näherung. Es stellt ein *Variationsverfahren* dar. Zuerst kommt eine Wiederholung einiger notwendiger Grundlagen.

Wir haben ein System von N -Teilchen

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i, \quad H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Wir beschreiben einen Zustand durch den hermiteschen Dichteoperator

$$\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Das Grundkonzept der statistischen Physik war, dass wir ein Funktional der freien Energie formulieren können.

$$F[\rho] = \text{tr}_{\mathcal{H}}(\rho H) + k_B T \text{tr}_{\mathcal{H}}(\rho \ln \rho)$$

Im Gleichgewicht muss man einen Zustand haben, der die freie Energie minimiert. Aus dieser Minimierung bekommen wir ρ

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta H}, \quad F = F[\rho_{\min}] = -k_B T \ln Z$$

Das ist im wesentlichen das Problem, dass wir für die Systeme lösen müssen. Wir berechnen entweder die Zustandssumme, oder die Erwartungswerte auf eine andere Art- und Weise.

Für ideale Systeme ohne Wechselwirkung gilt

$$H = \sum_{i=1}^N H_i, \quad [H_i, H_j] = 0$$

in diesem Fall ist es einfach. Wir können dann den Dichteoperator faktorisieren.

$$\rho = \prod_{i=1}^N \rho_i \quad \rho_i = e^{-\beta H_i} \frac{1}{Z_i} \quad Z_i = \text{tr}_{\mathcal{H}_i} e^{-\beta H_i} \quad [\rho_i, \rho_j] = 0$$

$$Z = \prod_{i=1}^N Z_i, \quad F = -k_B T \sum_{i=1}^N \ln Z_i$$

Physikalisch ist das Problem dann gelöst. Auch wenn Mathematisch das ganze nicht so klar ist. Der Ansatz der Molekularfeldnäherung ist, dass der Dichteoperator die obige Form hat

$$\rho^{\text{MF}} = \prod_{i=1}^N \rho_i^{\text{MF}} \quad [\rho_i^{\text{MF}}, \rho_j^{\text{MF}}]$$

Wir Minimieren $F[\rho]$ in der Untermenge der ρ^{MF} . Wir erhalten dadurch eine Obergrenze der Freien Energie.

$$F^{\text{MF}} = F[\rho_{\min}^{\text{MF}}] \geq F^{\text{exakt}} = F[\rho_{\min}]$$

Man kennt das aus der Quantenmechanik, da versucht man zum Beispiel die Schrödinger-Gleichung durch ein Variationsverfahren zu lösen. Ohne Wechselwirkung funktioniert das Modell exakt. Mit Wechselwirkung jedoch hat man nur die erwähnte Obergrenze.

Auch sieht man dem Ausdruck nicht an wie gut oder schlecht die Approximation ist. Wenn man zum Beispiel Hartree-Fock auf Atome mit mehreren Elektronen anwendet, bekommt man sehr gute Eigenenergien, aber die Wellenfunktionen sind trotzdem völlig falsch.

Beispiel Zweikörper-Wechselwirkung

$$H = \sum_{i \neq j=1}^N V_{ij} \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j$$

Wenn man zum Beispiel die Coloumb-Wechselwirkung schreibt als

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^N -\frac{e^Z}{\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} n_i n_j$$

Wir müssen nun die Spur des Hamilton-Operators ausrechnen

$$[\rho^{\text{MF}}] = \sum_{i \neq j=1}^N V_{ij} \langle \mathcal{O}_i \rangle_i \langle \mathcal{O}_j \rangle_j + k_B T \sum_{i=1}^N \text{tr}_{\mathcal{H}_1} (\rho_i^{\text{MF}} \ln \rho_i^{\text{MF}})$$

wobei

$$\langle \mathcal{O}_i \rangle_i = \text{tr}_{\mathcal{H}_i} (\mathcal{O}_i \rho_i^{\text{MF}})$$

$$\langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \rangle \simeq \langle \mathcal{O}_i \rangle \langle \mathcal{O}_j \rangle$$

Minimierung bezüglich ρ_i^{MF} liefert

$$\rho_i^{\text{MF}} = \frac{1}{Z_i} e^{-\beta H_i^{\text{MF}}} \quad Z_i = \text{tr}_{\mathcal{H}_i} e^{-\beta H_i^{\text{MF}}} \quad (3)$$

mit dem Hamilton Operator in der Midfield Näherung

$$H_i^{\text{MF}} = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j V_{ij} \mathcal{O}_i = f_i \mathcal{O}_i \quad (1)$$

die mittleren Felder sind

$$m_i = \langle \mathcal{O}_i \rangle_i, \quad f_i = \sum_{j \neq i} V_{ij} m_j \quad (2)$$

Wir haben hier eine Selbstkonsistente Gleichungen: (1), (2) und (3).

Alternatives Verfahren Wir können jetzt ein bisschen weiter gehen und nicht nur den Produktsatz machen von vorhin sondern man kann die f_i und f_j variieren.

$$F[\rho^{\text{MF}}]_{(1)+(3)} = F(\{m_i\}) = F(\{f_i\})$$

Wir minimieren nun bezüglich $\{m_i\}$ beziehungsweise $\{f_j\}$.

$$F[\rho^{\text{MF}}] = \langle H - H^{\text{MF}} \rangle_{\text{MF}} - k_B T \ln Z^{\text{MF}}$$

Unsere Näherung vernachlässigt die Wechselwirkung der Teilchen und erzeugt ein mittleres Potential der Wechselwirkung.

Anwendung auf das Ising-Modell

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} I S_i^Z S_j^Z + \frac{2\mu_b}{\hbar} B \sum_i S_i^Z$$

Dies ist der Wechselwirkungsteil welcher schon die richtige Form besitzt. Wir ersetzen nun den Erwartungswert des Produktes durch das Produkt der Erwartungswerte.

$$H_i^{\text{MF}} = -f_i \frac{2}{\hbar} S_i^Z$$

Wir machen zusätzlich die Näherung, dass das Feld nicht vom Gitterplatz abhängt. Wir können die Energie der Spinkonfiguration schreiben

$$E(\{s_i\}) = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H_i \sum_i s_i \quad s_i = \pm 1$$

Damit bekommen wir

$$E_i = -f s_i$$

Durch den Vergleich erhält man

$$f_i = J \sum_{\langle ij \rangle} \langle s_i \rangle_j + H = 2dJm + H$$

$$m = \langle s_i \rangle_i = \frac{M}{N} = \frac{1}{Z_j} \sum_{s_i=\pm 1} e^{-\beta E_i} = \tanh(\beta f)$$

$$Z_i = \sum_{s_i=\pm 1} e^{-\beta E_i} = 2 \cosh(\beta f)$$

Man kann die Zwei Gleichungen eliminieren, um eine Selbstkonsistente zu bekommen.

$$f = 2dJ \tanh(\beta f) + H$$

Äquivalent bekommen wir

$$m = \tanh(\beta 2dJm + \beta H)$$

d ist die Dimension des Gitters. Wir haben jetzt Gleichungen welche die Felder bestimmen. Wenn wir sie lösen haben wir das Problem gelöst. f ist einfach das effektive Magnetfeld das auf den Spin i wirkt.

Alternativ könnte man die Freie Energie als Funktion der Parameter bestimmen mit dem Ansatz

$$H^{\text{MF}} = -f s_i \quad \text{mit } f = 2dJm + H$$

Daraus folgt die Gibbsche-Freie-Enthalpie (wir haben ein Magnetfeld).

$$G(m) = N \left[-Jd \tanh^2(\beta 2dJm + \beta H) + J2dm \tanh(\beta 2dJm + \beta H) - k_B T \ln(2 \cosh(\beta 2dJm + \beta H)) \right]$$

Am Minimum ist $\frac{dG}{dm} = 0$ also $m = \tanh(\beta 2dJm + \beta H)$. Die zweite Gleichung ist wichtig für die Hausübung. Man kann dann überprüfen ob man wirklich ein Minimum hat:

$$\frac{d^2 G}{dm^2} > 0$$

Wir fangen ohne Magnetfeld an ($H = 0$)

$$m = \tanh(\beta 2dJm) \implies \frac{x}{\beta 2dJ} = \tanh(x)$$

Man kann die Lösung graphisch untersuchen. Man stellt dann fest

$$\beta 2dJ < 1 \iff k_B T > 2dJ : \quad 1 \text{ Lösung } m = 0 \quad (\text{Paramagnet})$$

$$\beta 2dJ > 1 \iff k_B T < 2dJ : \quad 3 \text{ Lösungen } m = 0 \text{ aber } G''(m=0) < 0 \implies \text{Maximum} \quad \pm m_0 \text{ mit } G''(\pm m_0)$$

Der kritische Punkt ist

$$T_c^{\text{MF}} = \frac{2dJ}{k_B}$$

Wie lautet die Magnetisierung in der Nähe der kritischen Temperatur aus? Magnetisierung für $T \rightarrow T_c (m_0 \rightarrow 0)$.

$$m_0 = \tanh(2dJ\beta m_0) = \beta 2dJm_0 - \frac{1}{3}(\beta 2dJm_0)^3 + \mathcal{O}(m_0^3)$$

Dies kann man einfach lösen

$$m_0 = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \frac{T}{T_c} \quad (T < T_c)$$

Wärmekapazität

$$T > T_c : G(m=0) = -Nk_B T \ln Z \implies C_H = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_H = 0$$

$$T < T_c : G(m_0) \simeq -Nk_B T \ln Z - \frac{3}{4} Nk_B T \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^3 \right)$$

$$T \rightarrow T_c \implies C_H = \frac{3}{2} Nk_B + \mathcal{O} \left(\left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \right)$$

Wenn das Magnetfeld nicht Null ist:

$$m = \tanh(\beta 2dJm + \beta H) \iff \tanh(x) = \frac{x - \beta H}{\beta 2dJ}$$

Magnetisierung

$$|\beta H|, \beta J \gg 1 (T \rightarrow 0) \implies m = \text{sign}(H)$$

Eine weitere Näherung sind kleine Magnetisierung und Magnetfelder. Da kann man eine Taylor-Entwicklung machen

$$\begin{aligned} m, H \rightarrow 0 : m &\simeq \beta 2dJm + \beta H - \frac{1}{3}(\beta 2dJm + \beta H)^3 + \dots \\ &= \beta 2dJm - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\beta 2dJm)^3 + \beta H \\ \iff \frac{1}{3}m^3 + m\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) &= \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{H}{k_B T_c} \end{aligned}$$

Für $T = T_c$ ist

$$m = \left(\frac{3H}{k_B T_c}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Für $T > T_c$

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow 0} m = 0 \implies |m|^3 \ll |m| \implies m &= \frac{H}{k_B(T - T_c)} \\ \chi_T &= \frac{1}{k_B(T - T_c)} \end{aligned}$$

Für $T < T_c$

$$\lim_{H \rightarrow 0} m = m_0 \text{sign } H$$

Für $T \rightarrow T_c$

$$\begin{aligned} m = m_0 \text{sign } H = \delta m \implies m &= m_0 \text{sign } H + \frac{H}{2k_B(T_c - T)} \\ \implies \chi_T &= \frac{1}{2k_B(T_c - T)} \end{aligned}$$

Vorlesung 22 Phasenübergänge

Schwabl Kapitel 7.1, 7.2, 7.4

Phase Beispiel: Schmelzen und Verdampfung

Kritischer Bereich Punkt an dem Phasenübergang stattfindet.

Kritische Parameter T_c, P_c, H_c, \dots

Phasendiagramm Beispiel: Van-der-Waals Isotherme

Beispiel II: Ising-Ferromagnet

Definition Phasenübergang

Thermodynamisches Potential ist eine nicht analytische Funktion einer thermodynamischen Variable. Das bedeutet auch, dass der kritische Bereich der Punkt ist, an dem die Funktion nicht mehr analytisch ist. Es gibt eine Klassifizierung von Phasenübergängen:

Ehrenfest-Klassifizierung Es sei $\Phi(x)$ ein thermodynamisches Potential. Ein Phasenübergang n -ter Ordnung bedeutet, dass

$$\begin{cases} \frac{d^m \Phi}{dx^m} & \text{stetig ist für } m < n \\ \frac{d^m \Phi}{dx^m} & \text{nicht stetig ist sonst} \end{cases}$$

Ein Phasenübergang erster Ordnung wird auch unstetig oder diskret oder nicht-kontinuierlich genannt. Solche zweiter Ordnung werden kritische Phänomene oder kontinuierliche Phasenübergänge genannt. Eine unendliche Ordnung bedeutet ein unendlich oft differenzierbares Potential. Im Ising-Modell beispielsweise divergiert die Suszeptibilität, welche eine Antwortfunktion darstellt.

Spontane Symmetriebrechung

Beispiel:

- Paramagnet $T > T_c$: Spiegelsymmetrie $z \rightarrow -z$
- Ferromagnet $T < T_c$: bevorzugte Richtung

Ordnungsparameter • Magnetisierung M

- Van-der-Waals Theorie $\rho - \rho_c$
- BEC, Suprafluidität, Supraleitung $\Psi, N_0 = |\psi|^2$

Kritische Exponente Potenzgesetze (Potenzen der Singularitäten)

Beispiel I)

$$v - v_c \propto \rho - \rho_c (T_c - T)^\beta \quad \forall T_c > T$$

$$\kappa_T \propto |T - T_c|^{-\gamma}$$

Beispiel II)

$$M \propto (T_c - T)^\beta \quad \forall T < T_c$$

$$\chi_T \propto |T - T_c|^{-\gamma}$$

$$M \propto |H|^{\frac{1}{\gamma}} \quad \forall T = T_c$$

Universalität Die Exponenten von vorhin sind nicht vom eigentlichen System abhängig sondern nehmen immer nur bestimmte Werte an. Alle Modelle die eine ähnliche Charakteristik haben ergeben die gleichen Exponenten. Man kann also z.B. das Ising-Modell benutzen um einen realen Exponenten eines anderen Systems zu berechnen. Deswegen ist es unter anderem so nützlich.

- Die Exponenten hängen nur von “globalen” Eigenschaften ab, sie sind
- Dimension und Symmetrie des Ordnungsparameters
- Raumdimensionen
- Reichweite der Wechselwirkung

Ein wichtiges Beispiel hier ist, dass die Magnetisierung in einem Axialen Ferromagneten und Van-der-Waals Gas die gleichen kritischen Exponenten haben. Dies ist eine wichtige Entdeckung der Physik in der Zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Die Erklärung dafür kommt über den Begriff der Korrelationslänge. Diesen führen wir jetzt ein.

Korrelationslänge Wenn man ein Subsystem betrachtet mit dem Volumen $V = \xi^d$ dann verhält es sich wie eins mit nur einem einzelnen Freiheitsgrad. Man kann sich das so vorstellen: Wenn man einen Ising Magnet hat bei hoher Temperatur hat man viele spins die an alle Richtungen zeigen. Wenn man das System jetzt kühlt dann zeigen irgendwann alle Spins in dieselbe Richtung.

Schalentheorie kritische Phänomene.

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \xrightarrow{T \rightarrow T_c} \infty$$

Deswegen ist die Mikroskopische Struktur nicht wichtig. Es gibt also eine gewisse Universalität und Skalengesetze. Z.B. $\gamma = \beta(\delta - 1)$. In der Molekularfeldnäherung ist

$$\delta = 3, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1$$

Im 2D Ising Modell

$$\delta = 15, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad \gamma = \frac{7}{4}$$

Ginzburg-Landau-Theorie

Sie ist eine Phänomenologische Theorie für Phasenübergänge der 1. und 2. Ordnung mit Symmetriebrechung und Ordnungsparameter. Sie stellt eine Theorie für den kritischen Bereich dar. Sie ist äquivalent zur Molekularfeldnäherung (Landau) mit Fluktuationen (Ginzburg-Landau). Beispiel Axiales Ferromagnet (Ising-Modell).

A) Landau freie Energie

$$\mathcal{G}(T, B, m)$$

Wir haben die thermodynamischen Variablen T und B . Der Ordnungsparameter m ist die Magnetisierung. Im thermodynamischen Gleichgewicht haben wir ein Minimum, daraus bestimmen wir den noch freien Parameter. Im Gleichgewicht haben wir

$$m(T, B) = m_{\min}$$

$$G(T, B) = \mathcal{G}(T, B, m_{\min})$$

Wir haben also ein System mit gegebener Temperatur, ein Magnetfeld M . Das \mathcal{G} haben wir bereits im Rahmen der Molekularfeldnäherung bereits berechnet. Der Herr Landau war aber ein bisschen schlauer als das. Anstatt das jetzt einfach zu berechnen, hat er das vereinfacht und in der Nähe des Phasenüberganges betrachtet. Dann muss die Magnetisierung sehr klein sein. Wir machen also eine Taylor-Entwicklung.

Der kritische Bereich

$$\mathcal{G}(T, B, m) = \mathcal{G}(T, B, 0) + m\mathcal{G}'(T, B, 0) + \frac{1}{2}m^2\mathcal{G}''(T, B, 0) + \frac{m^3}{6}\mathcal{G}'''(T, B, 0) + \frac{m^4}{24}\mathcal{G}''''(T, B, 0) + \mathcal{O}(m^5)$$

Für $B = 0$ haben wir eine Symmetrie $z \leftrightarrow -z$ also auch $m \leftrightarrow -m$. Für die Taylor-Entwicklung bedeutet das, wir wollen nicht dass vom Vorzeichen abhängt. Also müssen die Ungeraden Ordnungen verschwinden.

$$\mathcal{G}'(T, 0, 0) = \mathcal{G}'''(T, 0, 0) = \mathcal{G}^{(v)}(T, 0, 0) = 0$$

Darum ist

$$\mathcal{G}(T, B, m) = \mathcal{G}_0(T) + a(T)m^2 + \frac{b(T)}{2}m^4 - Bm + \mathcal{O}(m^6)$$

Dies ist korrekt für ein schwaches Magnetfeld. Die Form der Landau-Freien Energie die wir verwenden werden: Wir minimieren $\mathcal{G}' = 0, \mathcal{G}'' = 0$

$$\begin{cases} a(T)m + b(T)m^3 - \frac{B}{2} = 0 \\ a(T) + 3b(T)m^2 > 0 \end{cases}$$

- $B = 0$

$$m = 0 \implies a(T) > 0$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{-a(T)}{b(T)}}$$

Das gilt nur, falls $\frac{a(T)}{b(T)} < 0$, darum ist falls $-2a(T) > 0 \implies a(T) < 0$ und $b(T) > 0$.

$$\implies \begin{cases} a(T) > 0 & \implies m = 0 \text{ (Paramagnet)} \\ a(T) < 0 & \implies m = \pm \sqrt{\frac{-a(T)}{b(T)}} \text{ (Ferromagnet)} \end{cases}$$

Wir haben einen Phasenübergang bei $a(T_c) = 0$

$$a(T) = \alpha(T - T_c) + \imath((T - T_c)^2)$$

Also ist die Magnetisierung

$$m(T) = \sqrt{\frac{\alpha}{b(0)}}(T_c - T)$$

und

$$\beta = \frac{1}{2}$$

der kritische Exponent.

Wiederholung: Landau-Theorie

$$\mathcal{G}(T, B, m) = \mathcal{G}_0(T) + a(T)m^2 + \frac{b(T)}{2}m^4 - Bm$$

$$a(T) \equiv \alpha(T - T_c), \quad b(T) = b > 0$$

Ginzburg-Landau-Theorie

Man hat ein Magnetfeld und zusätzlich auch Fluktuationen.

$$\mathcal{G}(T, B, m(\vec{r})) = \mathcal{G}_0(T) + \int_{L^d} d^d r$$

$$\mathcal{G}(T, B, m(\vec{r})) = \mathcal{G}_0(T) + \left[\int d^d r a(T)m^2(\vec{r}) + \frac{b(T)}{2}m^4(\vec{r}) - B(\vec{r})m(\vec{r}) + c(T)(\vec{\nabla}m(\vec{r}))^2 \right]$$

Damit das funktioniert brauchen wir

$$a(T) = \begin{cases} < 0 & T < T_c \\ > 0 & T > T_c, \end{cases} \quad b(T), c(T) > 0$$

Die Zustandssumme ist

$$Z = \int D[m(\vec{r})] e^{-\beta \mathcal{G}(T, B, m(\vec{r}))}$$

Das Funktionalintegral ist eine Summe über alle möglichen Magnetisierungen. Wie kann man das genau definieren? Man diskretisiert dazu einfach diese Funktion D und dann hat man ein Integral in einer höheren Dimension. Nachher nimmt man dann einfach den Limes der den Abstand der Punkte gegen null gehen lässt. Es ist immer problematisch zu zeigen, dass der Limes auch wirklich existiert. In der Physik nehmen wir das aber einfach an. Die Berechnung dieses Ausdruckes ist allgemein kompliziert. Im Fall, dass der erste Term $a(T)$ positiv ist, bekommt man einfach ein Gauß Integral und das ganze ist einfach. Diese Näherung ist aber sehr schlecht. Für Temperaturen in der Nähe von T_c .

Wir machen hier die einfachste Näherung, die immer noch interessante Ergebnisse liefert. Wir definieren dazu die Wahrscheinlichkeit einer Konfiguration

$$P[m(\vec{r})] = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{G}(T, B, m(\vec{r}))}$$

Welche Konfiguration hat die maximale Wahrscheinlichkeit? Der Ausdruck P ist maximal wenn \vec{G} ein Minimum hat. Dies ist nebenbei bemerkt auch derselbe Trick den wir benutzt haben um unsere ganze Theorie zu begründen.

Variationsrechnung

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta m(\vec{r})} = 2a(T)m(\vec{r}) + 2b(T)m^3(\vec{r}) - B(\vec{r})$$

Die Idee ist die gleiche wie das Variationsprinzip in der Quantenmechanik. Um eine eindeutige Lösung zu bekommen muss man einige Sachen vorgeben, so wie das Magnetfeld und die Randbedingungen (z. B. periodische). Das ist die Differentialgleichung die man im Rahmen der Ginzburg-Landau Theorie lösen muss.

Diese Theorie ist eine wichtige Grundlage der modernen theoretischen Physik. Anwendungen sind

- Supraleitung $m(\vec{r}) \rightarrow \Psi(\vec{r})$.
- Suprafluidität und Bose-Einstein Kondensation. Die Gleichungen dazu sind unter dem Namen *Gross-Pitaevskii-Gleichungen* bekannt.
- Quasi eindimensionalität
 - CDW (Ladungsdichtewelle)
 - SDW (Spindichtewelle)

Teil III Systeme außerhalb des Gleichgewichts

Schwabl Kapitel 8-10

Bisher untersuchten wir Systeme im Gleichgewicht oder sehr langsame Transformationen. Wir untersuchen nun die Frage, wie das System ins Gleichgewicht kommt.

Es gibt Theorien, die auf der klassischen Physik basieren, oder auch auf der Quantenmechanik. Die Klassische Theorie ist zwar nicht ausreichend, aber Trotzdem soll das der Beginn dieses Abschnittes sein.

Vorlesung 23 Brownsche Bewegung

Schwabl Kapitel 8.1

Wir betrachten ein Makroskopisches System, dass mindestens Zwei arten von Freiheitsgraden besitzt. Die anderen Freiheitsgrade werden wir zuerst nicht nennen und bezeichnen sie als versteckt (Wärmebad). Wir haben sogenannte *Brownsche-Teilchen*. Die wichtige Entdeckung von Brown im 19. Jahrhundert stand in Beziehung zu einem schweren Staubkorn in Wasser.

Wir haben also Wasser mit Verunreinigungen wie zum Beispiel Staub. Der Staub im Wasser pulsiert und bewegt sich zufällig. Brown ging zuerst davon aus, der Pollen wäre lebendig und würde sich eigenständig bewegen.

Die Erklärung kam dann später von Einstein (1905). Die Bewegung ist durch elastische Stöße mit dem umgebenden Wasser begründet. Damals stand in Frage ob die Materie kontinuierlich ist oder aus Atomen besteht.

Die Theorie um diese Bewegung zu beschreiben ist die *Langevin-Gleichung*.

Langevin-Gleichung

Sie ist eine Stochastische Gleichung die die Newton-Gleichung für das Brownsche Teilchen darstellt.

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-m\gamma\dot{\vec{r}}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\vec{f}(t)}_{\text{Stochastische Kraft}}$$

Zuerst untersuchen wir die Reibungskraft. Die Lösung ohne Zufallskraft also $f(t) = 0$ ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 e^{-\gamma t} \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} 0$$

γ^{-1} ist die Relaxationszeit des Systems.

Jetzt definieren wir die stochastische Kraft genauer

Stochastische Kraft

Die Ursache der Kraft sind Zusammenstöße mit den Wassermolekülen in den Zeiten $0 < t_1 < t_2 < \dots < T$. Das bedeutet

$$\vec{f}(t) = \sum_i \vec{f}_i \delta(t - t_i) \tau_c$$

Die Kraft ist die Summe von diskreten Zusammenstößen (Delta-Distribution). Der Parameter $\tau_c \approx 1 \times 10^{-11} \text{ s} \ll \gamma^{-1}$ ist die Stoßdauer.

Wir haben Zufällige Kräfte \vec{f}_i mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\vec{f})$ wobei $\langle \vec{f} \rangle = 0$ und der Schwankungsbreite $\langle \vec{f}^2 \rangle = \frac{d\lambda}{\tau_c^2} \Delta t$. Die Stoßzeit $\delta t \approx 1 \times 10^{-21} \text{ s} \ll \tau_c$ ist die Zeit zwischen den zusammenstößen.

Eine Folgerung davon ist, dass bei Summierung

$$\sum_{i, 0 < t_i < T} \delta(t - t_i) \Delta t \approx \int_0^T dt' \delta(t - t') = 1$$

Wir haben Molekulares Chaos. Wir gehen also davon aus, dass die Zusammenstöße unabhängig sind. Mathematisch bedeutet das,

$$P(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = P(\vec{f}_i)P(\vec{f}_j) \quad \forall i \neq j$$

Wir faktorisieren also die Wahrscheinlichkeiten. Das bedeutet für den Erwartungswert

$$\langle \vec{f}_i \vec{f}_j \rangle = \frac{d\lambda}{\tau_c^2} \Delta t \delta_{ij}$$

Hierbei ist λ ein Parameter.

$$\langle \vec{f}(t) \vec{f}(t') \rangle = \lambda d \delta(t - t')$$

Wir werden diese mathematische Eigenschaft verwenden um die Physik dieser Gleichung zu untersuchen.

Lösung der Langevin Gleichung

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} f(t')$$

Dies ist eine Differentialgleichung die man lösen kann. Man kann formal die Position berechnen

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t dt' \vec{v}(t')$$

Wir haben eine Zufallsvariable und wollen etwas über erwartungswert und Schwankungsquadrat rausfinden.

$$\langle \vec{v}(t) \rangle = \vec{v}_0 e^{-\gamma t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \underbrace{\langle \vec{f}(t') \rangle}_{=0} \underbrace{\langle \vec{f}(t') \rangle}_{=0} \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} 0$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}^2(t) \rangle &= \vec{v}_0^2 e^{-2\gamma t} + 2e^{-\gamma t} \vec{v}_0 \frac{1}{m} \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} \underbrace{\langle \vec{f}(t) \rangle}_{=0} \\ &\quad + \int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{-\gamma(2t-t'-t'')} \frac{1}{m^2} \underbrace{\langle \vec{f}(t') \vec{f}(t'') \rangle}_{\lambda d \delta(t'-t'')} \end{aligned}$$

$$\langle \vec{v}^2(t) \rangle = \vec{v}_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\lambda d}{m^2} e^{-\gamma t} \vec{v}_0 \frac{1}{m} \int_0^t dt' e^{-2\gamma(t-t')} = \vec{v}_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\lambda d}{2\gamma m^2} (1 - e^{-2\gamma t})$$

Und nach langer zeit, wenn die Anfangbedingungen keine Rolle spielen.

$$\Rightarrow \Delta v^2(t) = \langle \vec{v}^2 \rangle - \langle \vec{v}(t) \rangle^2 = \frac{\lambda d}{2\gamma m^2} (1 - e^{-2\gamma t}) \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} \frac{\lambda d}{2\gamma m^2}$$

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 0$$

$$\langle \vec{r}^2(t) \rangle = \frac{\lambda d}{\gamma^2 m^2} t$$

für $t \gg \gamma^{-1}$.

Wir haben also einen Zufallsweg gefunden. Dies entspricht einer Diffusion. Im thermischen Gleichgewicht gibt es ein *Äquipartitionsgesetz*

$$\frac{1}{2} m \Delta \vec{v}^2(t) = \frac{d}{2} k_B T$$

$$\lambda = 2\gamma m k_B T$$

Einstein Relation

Diese Gleichung ermöglichte erstmals die experimentelle bestimmung der Boltzmann-Konstante k_B . Ein paar Jahre später (1908) hat Perrin diese Gleichung auch experimentell bestätigen können. Dafür erhielt Perrin auch den Nobelpreis (1926).

Moderne Anwendungen

- Thermische Fluktuationen
- Rauschen in einem Elektrischen Schwingkreis
- Simulation von Wertpapierkursen, Risikioanalyse von Finanzinstituten

Fokker-Planck-Gleichung

Schwabl Kapitel 8.1.2-8.3.1

Langevin-Gleichungen in einer Dimension

Langevin-Gleichung

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + f(t)$$

Stochastische Kraft

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f'(t') \rangle = \lambda\delta(t-t')$$

Lösung der Gleichung ist selbst eine Zufallsvariable

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')} f(t') \frac{1}{m}$$

mit

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} 0 \quad \langle v^2(t) \rangle \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} \frac{\lambda}{2\gamma m^2} = \frac{k_B T}{m}$$

Die Zweite Gleichung ist die Einstein-Relation für diesen Fall.

Wir wollen mehr über die Lösung wissen als uns nur konkrete Lösungen anzuschauen. Wir berechnen nun also die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(v, t) = \delta(\langle v - v(t) \rangle)$. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen mit Geschwindigkeit v zur Zeit t zu finden. Man kann diese Wahrscheinlichkeit tatsächlich berechnen. Dies tut man, indem man eine Differentialgleichung für sie herleitet. Wir nehmen dazu an, dass die Funktion Normalverteilt (Gausskurve) ist. Man nennt diese Differentialgleichung dann *Fokker-Planck-Gleichung*.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = \underbrace{\gamma \frac{\partial}{\partial v} (v P(v, t))}_{\text{Driftterm}} + \underbrace{\gamma \frac{k_B T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} P(v, t)}_{\text{Diffusionsterm}}$$

Sie ist eine partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte. Es gibt eine eindeutige Lösung mit der Anfangsbedingung $P(v, t_0)$ und Randbedingungen $\lim_{v \rightarrow \infty} P(v, t) = \lim_{v \rightarrow -\infty} P(v, t) = 0$. Außerdem muss

$$P(v, t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dv P(v, t) = 1$$

Da sie homogen und linear ist, gilt das Superpositionsprinzip. Für eine Familie von Lösungen

$$P_l(v, t), l = 1, \dots, N \implies P(v, t) = \sum_{l=1}^N a_l P_l(v, t) \quad \text{mit } a_l \geq 0 \text{ und } \sum_{l=1}^N a_l = 1$$

Die Gleichung ist wie eine Schrödinger Gleichung in imaginärer Zeit. Diffusion heißt, wenn etwas propagiert dann wird der Abstand größer proportional zur Zeit. Um eine echte Diffusionsgleichung zu haben, sollte da natürlich eigentlich der Ort stehen.

Lösung der Fokker-Planck Gleichung

- Man kann sich zuerst fragen was die stationäre Lösung ist, also jene unabhängig von der Zeit. Wir haben dann eine gewöhnliche Differentialgleichung. Man erhält durch sie eine Maxwell Geschwindigkeitsverteilung.

$$P_n(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{k_B T}} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T} v^2\right)$$

- Eine Fundamentale Lösung

$$P_{v_0}(v, t) = \left[\frac{m}{2\pi k_B T (1 - e^{-2\gamma t})} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m (v - v_0 e^{-\gamma t})^2}{2k_B T (1 - e^{-2\gamma t})} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{v_0}(v, t) = \delta(v - v_0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{v_0}(v, t) = P_n(v)$$

- Die Allgemeine Lösung ist

$$P(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_0 P_0(v_0) P_{v_0}(v, t) \text{ mit } P(v, t=0) = P_0(v)$$

Für sehr große t gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(v, t) = P_n(v)$$

Also konvergieren alle Lösungen mit großer Zeit gegen die Maxwell-Verteilung.

Brownsches Teilchen im Potentialfeld $V(x)$

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + f(t) + K(x) \text{ mit } K(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(x, v, t) = \langle \delta(x - x(t)) \delta(v - \dot{x}(t)) \rangle$$

Wie für die Fokker Planck Gleichung für das freie Teilchen kann man hier eine Fokker-Planck Gleichung Herleiten. Man nennt sie die *Kramers-Gleichung*. Sie stellt eine Verallgemeinerte Fokker-Planck Gleichung dar.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K(x)}{m} \frac{\partial P}{\partial v} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} (vP) + \frac{\gamma k_B T}{m} \frac{\partial^2}{\partial v^2} P$$

Sie ist eine Partielle Differentialgleichung mit einer zusätzlichen Variable. Sie ist damit viel schwerer als die Fokker-Planck Gleichung zu lösen.

- Es gibt eine eindeutige Lösung für die Anfangsbedingungen

$$P(x, v, t_0) = P(x, v)$$

und der Randbedingung

$$\lim_{v \rightarrow \infty} P = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} P = 0 \text{ oder } P(x) = 0 \quad \forall x \in \partial \text{Vol}$$

- Es gilt das Superpositionsprinzip
- Die Funktion ist normiert und positiv

$$P \geq 0 \qquad \int_V \int_{-\infty}^{\infty} dv P = 1$$

- Die allgemeine Lösung ist nicht bekannt, wir kennen aber eine stationäre Lösung. Sie ist eine Maxwell-Boltzmann Verteilung. Wir können nicht beweisen, dass dies alle Lösungen der stationären Gleichung sind.

$$P_{\text{MB}}(x, v) = C \exp \left[- \left(\frac{m}{2} v^2 + V(x) \right) / (k_B T) \right]$$

- Die Gleichung hat eine mathematische Ähnlichkeit mit der Schrödinger Gleichung mit imaginärer Zeit $t \rightarrow it$.
- Wir haben ein klassisches, deterministisches Teilchen und versteckte Variablen. Deswegen suchen wir eine statistische Beschreibung der Bewegung.
- Es gibt eine orthodoxe Quantenmechanische Interpretation. Man betrachtet die Bewegung als rein Zufällig. Eine alternative Interpretation ist eine deterministische Bewegung mit versteckten Variablen.
- Es gibt Lösungsverfahren der Quantentheorie die man verwenden kann

Beispiel

$$V(x) = \frac{1}{2} m W_0^2 x^2$$

$$P(x, v, t) = \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} x^2 + V(x) \right) / (k_B T) \right] W(x, v, t)$$

Man setzt diesen Ansatz in die Kramers Gleichung ein und erhält eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L W$$

mit dem Linearen Differentialoperator

$$L = -\gamma b^+ b + w_0 (b a^+ - b^+ a)$$

und den Leiteroperatoren

$$b = v_T \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{v}{v_r}, \quad b^+ = -v_T \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{v}{v_T} \quad v_T^2 = \frac{k_B T}{m} a = \frac{v_T}{w_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{w_0}{v_T} x, \quad a^+ = -\frac{v_T}{w_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{w_0}{v_T} x$$

$$C_+^{(+)} = \left(\sqrt{\lambda_+} b^+ - \sqrt{\lambda_-} a^+ \right) / \sqrt{\delta}$$

$$C_+^{(-)} = \left(\sqrt{\lambda_+} b + \sqrt{\lambda_-} a \right) / \sqrt{\delta}$$

$$C_-^{(+)} = \left(-\sqrt{\lambda_-} b^+ + \sqrt{\lambda_+} a^+ \right) / \sqrt{\delta}$$

$$C_-^{(-)} = \left(\sqrt{\lambda_-} b + \sqrt{\lambda_+} a \right) / \sqrt{\delta}$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4m_0^2} \right) \delta = \lambda_+ - \lambda_- = \sqrt{\gamma^2 - 4w_0^2}$$

$$\left[C_+^{\pm}, C_-^{(\pm)} \right] = 0,$$

$$\left[C_{\pm}^-, C_{\pm}^{(+)} \right] = 1,$$

$$\left[L, C_{\pm}^{(\pm)} \right] = \mp \lambda_{\pm} C_{\pm}^{(\pm)},$$

$$L = -\lambda_+ C_+^{(+)} C_+^{(-)} - \lambda_- C_-^{(+)} C_-^{(-)}$$

Eigenwerte von L

$$-\lambda(n_+, n_-) = -\lambda_+ n_+ - \lambda_- n_-$$

Quantenzahlen

$$n_{\pm} \in \mathbb{N}$$

Eigenzustände

$$|n_+ n_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+!}} \frac{1}{\sqrt{n_-!}} \left(C_+^{(+)} \right)^{n_+} \left(C_-^{(+)} \right)^{n_-} |00\rangle W_{00}(x, v) = \langle xv | 00 \rangle = \sqrt{\frac{w_0}{2\pi v_T^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{2} m \right) \right]$$

Die Lösungen sind

$$W_{n_+ n_-}(x, v, t) = e^{-\lambda(n_+, n_-)t} \underbrace{W_{n_+ n_-}(x, v)}_{\langle xv | n_+ n_- \rangle}$$

Die Allgemeine Lösung lässt sich nun mit dem Superpositionsprinzip schreiben

$$W(x, v, t) = \sum_{n_+=0}^{\infty} \sum_{n_-=0}^{\infty} Z(n_+ n_-) e^{-\lambda(n_+, n_-)t} W_{n_+ n_-}(x, v)$$

Es ist interessant zu bemerken, dass

$$\Re \lambda(0, 0) = 0, \Re \lambda(n_+, n_-) > 0 \quad \forall n_+ + n_- > 0$$

Damit folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x, v, t) = Z(0, 0) W_{00}(x, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x, v, t) = P_{\text{MB}}(x, v)$$

Wir sehen hier also, dass für einen harmonischen Oszillator alle Lösungen gegen eine Maxwell-Boltzmann verteilung konvergieren. Für alle Bekannten Lösungen ist dies So. Auch bei numerischen Berechnungen.

A) Überkritische Dämpfung $\gamma \geq 2w_0$. Die λ sind also Reell und positiv: $\lambda(n_+, n_-) \geq 0$.

B) Unterkritische Dämpfung $\gamma < 2w_0$, dann ist

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\gamma \pm iW \text{ mit } W = \frac{1}{2}\sqrt{4W_0^2 - \gamma^2}$$

Vorlesung 25, Kinetische Gastheorie und Boltzmann-Gleichung

Schwabl Kapitel 9.1, 9.2 Wir betrachten ein Gas mit den Eigenschaften:

- Monoartiges Gas
- Hohe Temperaturen, wegen klassischer Betrachtung
- Niedrige Dichte, also einem Großen Abstand im vergleich zum Durchmesser der Punkte. Wir betrachten also defakto Punktteilchen.
- Neutrale Moleküle, folglich kurzreichweitiger Wechselwirkung. Dadurch können wir Wechselwirkung als einfache Stöße betrachten, unter denen Energie- und Impulserhaltung gilt.
- Es gibt äußere Kräfte, wie zum Beispiel das Gravitationsfeld. Die äußeren Kräfte sollen jedoch konservativ sein.

Makroskopische Eigenschaften

Die Energie pro Teilchen ist

$$E_i = \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 + v(\vec{r}_i, t)$$

Die Gesamtenergie

$$U = \sum_{i=1}^N E_i \quad N$$

Der Druck gegen die Wand des Behältnisses. Es ist nicht so einfach dies zu definieren, zum Beispiel für den Fall, dass es keine Wand gibt. Man muss für die Berechnung einfach nur verstehen was der Druck gegen die Wand einfach ist. Die Teilchen stoßen elastisch gegen die Wand und verlieren dabei keine Energie. Es gibt einen Anteil der Geschwindigkeit senkrecht, und eine parallel zur Wand. Die parallele Komponentenete ändert sich nach dem Stoß nicht.

$$\vec{v}_{\perp} = -\vec{v}'_{\perp} \implies v_{\perp} = v'_{\perp} \vec{v}_{\parallel} = -\vec{v}'_{\parallel} \implies v_{\parallel} = v'_{\parallel}$$

Wir berechnen jetzt die Impulsänderung

$$\Delta P = 2mv_{\perp}$$

$$P = \frac{\sum_i 2mv_{i\perp}}{\Delta F \Delta t}$$

Die Summer geht dabei über alle Stöße gegen die Fläche ΔF im Intervall Δt . Die Fluktuation dieses Wertes wird wie $\frac{1}{\sqrt{N}}$ verschwinden. Wir haben hier also eine vollständige mikroskopische Theorie. Sie ist dynamisch und deterministisch. Man kann das Ganze nicht wirklich berechnen, aber heutzutage macht man oft Simulation.

Statistische Beschreibung

Wir benutzen eine einteilchen-Verteilungsfunktion.

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \delta(\vec{v} - \vec{v}_i(t))$$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$$

ist Die Anzahl der Teilchen im Volumen $d^3r d^3v$ um (\vec{r}, \vec{v}) zum Zeitpunkt t . Wir machen die Annahmen, dass

$$d^3r d^3v \ll 1$$

$$f d^3r d^3v \gg 1$$

Beispiel Wir betrachten ein Gas unter normalen Bedingungen. Wir können dann eine Dichte finden

$$n = 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Das Volumenelement ist $(1 \times 10^{-5} \text{ m})^{-3}$, also gibt es 3×10^{10} Teilchen in einem Volumenelement.

$$U = \int_V d^3r \int_{\mathbb{R}^3} d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(\vec{r}) \right)$$

Wir können dieses Integral über Deltafunktionen leicht ausführen.

$$P = \frac{2m}{\Delta F \Delta t} \int_V d^3r \int_{\mathbb{R}^3} d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t) v_x \Theta(x - x_N + v_x \Delta t)$$

Die bedingung ist, dass

$$X_w - X < v_x \delta t$$

Man benutzt diese Gleichungen tatsächlich um Simulationen zu machen. Wir haben jetzt eine statistische Beschreibung, wie aber berechnet man f ? Wir müssen jetzt eine Gleichung für f herleiten. Wir betrachten in Zwei-Dimensionen einen Schnitt des Phasenraumes, und dort zur Zeit t einen Punkt. Wir wissen, dass der Punkt eine Bahn machen wird. $x(t) \rightarrow x(t')$. Wir definieren ein kleines Volumen $d^3r d^3v$ um den Punkt. Die Punkte in dem Volumen geben uns eine Menge von Bahnen. Wir fragen uns dabei, was die Änderung der Teilchenzahl ist.

$$dN = f(\vec{r}', \vec{v}', t') d^3r' d^3v' - f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$$

Ohne Zusammenstöße können keine Teilchen vernichtet oder erzeugt werden. Wir werden dann in einem Moment auch diskutieren, was passiert wenn wir Ströme haben, aber zunächst erstmal ohne Zusammenstöße. Man kann jetzt einen Satz erkennen, den

Liouville-Satz

$$d^3v d^3r = d^3r' d^3v'$$

Nach der Analytischen Mechanik ist

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = 0$$

eine Erhaltungsgröße. Wenn \vec{r} und \vec{v} physikalische Bahnen sind und nicht beliebig. Man erhält dann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}_r f \vec{v} + \vec{\nabla}_v f \frac{\vec{K}}{m} = 0$$

Wir diskutieren jetzt, was mit dem zweiten Term passiert.

Streuung Es kann passieren, dass ein Teilchen in diesem Volumen mit anderen Teilchen wechselwirkt und aus dem Volumen hergestreut wird. Die Änderung der Teilchenzahlen sind die Differenz der Gewinn- mit den Verlustprozessen.

$$dN_{\text{stoß}} = G - V$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}}$$

Ist keine partielle Ableitung, sondern eine historische Notation. Modern schreibt man dafür

$$F_{\text{Stoß}}[f]$$

Boltzmann-Gleichung

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla}_r f + \frac{\vec{K}}{m} \vec{\nabla}_v f}_{\text{Strömungsterm}} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}}}_{\text{Stoßterm}}$$

Boltzmann-Stoßanzahl

Wir diskutieren direkt das Ergebnis von Boltzmann.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stoß}} = \int_{\mathbb{R}^9} d^3v_2 d^3v_3 d^3v_4 W(\vec{v}, \vec{v}_2; \vec{v}_3, \vec{v}_4)$$

$$[f(\vec{r}, \vec{v}_3, t)f(\vec{r}, \vec{v}_4, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t)f(\vec{r}, \vec{v}_2, t)]$$

$$W(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$$

ist die Übergangswahrscheinlichkeit

$$f(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rightarrow (\vec{v}_3, \vec{v}_4)$$

Allgemeine Eigenschaften

$$\begin{aligned} W(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_3) &= W(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \\ W(-\vec{v}_1, -\vec{v}_2, -\vec{v}_3, -\vec{v}_4) &= W(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \\ W(-\vec{v}_3, -\vec{v}_4, -\vec{v}_1, -\vec{v}_2) &= W(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \\ W(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_4, \vec{v}_3) \delta(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4) \delta(\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 - \vec{v}_3^2 - \vec{v}_4^2) &= W(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \end{aligned}$$

Verlustprozesse

$$V \approx - \int_{\mathbb{R}^9} d^3v_2 d^3v_3 d^3v_4 W(\vec{v}, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) P(\vec{r}, \vec{v}, \vec{v}_2, t)$$

Gewinnprozesse

$$G \approx \int_{\mathbb{R}^9} d^3v_2 d^3v_3 d^3v_4 W(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}, \vec{v}_2) P(\vec{r}, \vec{v}_3, \vec{v}_4, t)$$

Wir führen nun die Hypothese des molekularen Chaos ein

$$P(\vec{r}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, t) \alpha f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) f(\vec{r}, \vec{v}_2, t)$$

Boltzmann Gleichung Sie ist eine Nichtlineare partielle Integrodifferentialgleichung.

Aus den Newton-Gleichungen (Mikroskopisch, dynamisch, deterministisch) haben wir die Boltzmann-Gleichung (Mikroskopisch, dynamisch, statistische Theorie) abgeleitet. Daraus folgte dann die Maxwell-Boltzmann-Verteilung (mikroskopisch statisch, statistisch). Aus dieser können wir wieder die thermodynamik des idealen Gases herleiten (makroskopisch). An einer Stelle haben wir die Zeitumkehrinvarianz gebrochen, denn das ideale Gas vergrößert seine Entropie mit der Zeit. Dies ist schon bei der Boltzmann Gleichung geschehen.