

# 1 Einführung

## *Schwabl Kapitel 1.1*

Makroskopische Systeme aus  $N \gg 1$  Teilchen.

Mikrozustand und mikroskopische Gesetze

- Klassische Physik:

Punkt  $(\vec{r}, \vec{p}) \in$  Phasenraum  $\simeq \mathbb{R}^{6N}$

$$m_1 \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1$$

- Quantenmechanik:

Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3N})$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

Makrozustand und Makroskopische Gesetze

- Temperatur  $T$ , Volumen  $V$ , Druck  $P$ , ...
- $PV = nk_B T$ ,  $U = RI$

Mikroskopische Gesetze  $\implies$  makroskopische Gesetze.

Makrozustand  $\iff$  Zeitmittelung

- Klassische Physik:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t+t} dt' A(\vec{r}(t'), \vec{p}(t'))$$

- Quantenmechanik:

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t+t} dt' \langle \Psi(t) | \hat{B} | \Psi(t) \rangle$$

Mikroskopische Zeitskala  $\ll \Delta t \ll$  makroskopische Zeitskala

Statistische Mittelung

- Klassische Physik

$$\bar{A} = \int d^3r d^3p A(\vec{r}, \vec{p}) P(\vec{r}, \vec{p}), \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte } P(\vec{r}, \vec{p})$$

- Quantenmechanik:

$$\bar{B} = \text{tr}(\hat{B} \hat{\rho}) \quad \text{Dichteoperator } \hat{\rho}$$

Statistische Physik

- Bestimmung von  $P$  und  $\hat{\rho}$
- Berechnung der Ensemblemittelung

- Anwendung auf physikalische Probleme

Reduktionismus

$$\text{System} = \{\text{Einzelteile}\}$$

Elementarteilchenphysik  $\rightarrow$  Festkörperphysik, Chemie  $\rightarrow$  Biologie  $\rightarrow$  Medizin  $\rightarrow$  Psychologie  $\rightarrow$  Soziologie

“*More is different*” P.W. Anderson

## 2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Schwabl Kapitel 1.2, 1.5.1

### Einige Definitionen

**Zufallsvariable**  $x$  Wert von  $x$  hängt von einem Zufallsereignis ab Beispiel Messung:  $x = X_{\text{exakt}} + \text{Messfehler}$

**Häufigkeit**  $N$  identische Versuche,  $N_x = \text{Anzahl der Werte } x \implies \frac{N_x}{N}$

**Empirische Wahrscheinlichkeit**  $P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_x}{N}$ .

$$\sum_x P_x = 1, \quad 1 \geq P_x \geq 0$$

**Wahrscheinlichkeitsdichte**  $w(x)$   $x \in \mathbb{R}$ .

$w(x)\Delta x = \text{Wahrscheinlichkeit für einen Wert } \in [x, x + \Delta x]$

$$\int dx w(x) = 1, \quad w(x) \geq 0$$

Beziehung mit diskreter Wahrscheinlichkeit:

$$w(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$$

### Mittelwert/Erwartungswert

$$\langle f(x) \rangle = \sum_x f(x) P_x \text{ beziehungsweise } \int dx w(x) f(x)$$

### Schwankungsquadrat

$$\Delta X^2 = \langle (x - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad \Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

## 2.1 Zentraler Grenzwertsatz

Es gibt  $N$  unabhängige aber identische Zufallsvariablen  $x_i, i = 1, \dots, N$ .

$$P(x_1, \dots, x_N) = P(x_1)P(x_2) \dots P(x_N)$$

Außerdem existieren  $\langle x \rangle, \Delta x$  von  $P(x)$ .

Mittelwert  $Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  ist eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeit  $Q_N(Y)$

$$Q_N(Y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Y-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$a = \langle x \rangle, \quad \sigma = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$$

Abbildung 1: Normalverteilung,  $Y = \langle X \rangle \pm \frac{\Delta X}{\sqrt{N}}$

## 3 Klassische Physik

**N Teilchen** Mikrozustand  $(q, P) \in \text{Phasenraum} \simeq \mathbb{R}^{6n}$

**Kanonische Gleichungen**

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, 3N$$

## Anfangsbedingung

$$(q_0, P_0) = (q_0(t_0), P(t_0)) \implies \text{Bahn } (q(t|q_0, P_0), P(t|q_0, P_0))$$

## Kanonische Transformation

$$(q(t), P(t)) \iff (q(t'), P(t'))$$

## Ziel

$$\bar{A} = \int d^{3N}q d^{3N}p A(q, P) P_G(q, P)$$

Gleichgewichtsverteilung  $P_G(q, P) = ?$

## Unschärfe Anfangsbedingung

$$P(q, P, t_0) = P_0(q, P)$$

Scharfe Anfangsbedingung:  $P_0(q, P) = \delta(q - q_0)\delta(P - P_0)$ . Differentialgleichung für  $P(q, P, t)$ :  
Liouville-Gleichung.

$$P(t) = P(q, P, t) d^{3N}q d^{3N}p = P(t') = P(q, P, t') d^{3N}q' d^{3N}p'$$

## Liouville-Satz

$$d^{3N}q d^{3N}p = d^{3N}q' d^{3N}p' \quad \left[ \text{Jacobi-Matrix } \frac{d^{3N}q' d^{3N}p'}{d^{3N}q d^{3N}p} = 1 \right]$$

$$\implies P(q(t), P(t), t) = P(q(t'), P(t'), t'), \quad \text{Erhaltungsgröße } \frac{dP}{dt} = 0$$

## Kettenregel

$$\frac{dP(q(t), P(t), t)}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \{H, P\}$$

## Liouville-Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \{P, H\}$$

Bedingungen für  $P_G(q, P)$  (im Gleichgewicht)

- $\{P_G, H\} = 0$
- $P_G \geq 0$
- $\int d^{3N}q d^{3N}p P_G(q, P) = 1$ .

Superpositionsprinzip: Lösungen  $P_1, P_2 \implies P = a_1 P_1 + a_2 P_2$  mit  $a_1, a_2 \geq 0, \quad a_1 + a_2 = 1$ .

Makrozustand:  $T, V, P, \dots \implies P_0$  oder  $P_g$ ?

## 4 Quantenmechanik

Schwabl Kapitel 1.4, 1.5.2

$N$  Teilchen, Mikrozustand  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \simeq \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3N})$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

Anfangsbedingung  $|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle$  (eindeutig)

$$\text{Erwartungswert } A(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \langle \hat{A} \rangle$$

Ziel:

$$\text{Statistische Mittelung } \langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{A} \hat{\rho}_G), \quad \hat{\rho}_G = ?$$

### Definition

Statistischer Operator, Dichteoperator, Dichtematrix, ...

$$\hat{\rho} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \text{ linear}$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{+\dagger}$$

$$\text{positiv-semidefinit } \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \geq 0 \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\text{tr } \hat{\rho} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Spektrale Zerlegung} \quad \hat{\rho} &= \sum_n p_n |n\rangle \langle n| \\ &= \int d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| w(\lambda) \end{aligned}$$

$$\text{Dichteoperator} \implies \begin{aligned} p_n &\geq 0 \\ \sum_n p_n &= 1 \\ p_n &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\lambda) &\geq 0 \\ \int d\lambda w(\lambda) &= 1 \\ w(\lambda) &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n p_n \langle n | \hat{A} | n \rangle.$$

**Reiner Zustand :**

$$p_{n_0} = 1, p_n = 0 \forall n \neq n_0, \quad \hat{\rho} = |n_0\rangle \langle n_0| \implies \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

**Gemisch :**  $p_n \neq 0$  für 2 oder mehr  $n$ .

- Verschränkte Zustände
- Statistisches Gemisch

### Spektrale Zerlegung

$$\hat{A} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \sum_n \sum_{\alpha} \underset{\text{Stat. Zufall}}{p_n} \underset{\text{Q.M. Zufall}}{|\langle n | \alpha \rangle|^2} a_{\alpha}$$

$$\text{Gemisch: 2 Quellen: } I_1, \theta_1, \quad I_2, \theta_2 \implies I' = I_1(\cos \theta_1)^2 + I_2(\cos \theta_2)^2$$

$$p_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}, \quad p_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$$

## Von Neumann Gleichung

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [H, \hat{\rho}]$$

- Anfangsbedingung  $\hat{\rho}_0 \rightarrow \hat{\rho}(t)$
- Gleichgewicht:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = 0 \implies [H, \hat{\rho}] = 0$$

- Superpositionsprinzip  $\rho = a_1\rho_1 + a_2\rho_2$  mit  $a_1, a_2 \geq 0$ , und  $a_1 + a_2 = 1$
- Im Gleichgewicht:

$$\hat{\rho}_G = \sum_n p_n |E_n\rangle \langle E_n| = \int dE w(E) |E\rangle \langle E| \quad \text{mit } H |E\rangle = E |E\rangle$$

- Isoliertes System:

$$p_n = \frac{1}{Z_n} \text{ für } E_n = E_0, \quad Z_n = \text{Entartung des Niveaus } E_0$$

- Geschlossenes System:

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \text{ mit } \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

## Entropie und Ensemble

*Schwabl Kapitel 2.1-2.5*

**Definition** Entropie (Quantenstatistik)

$$S = -k_B \text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \quad k_B = k = \text{Boltzmann-Konstante} \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

### Eigenschaften

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n p_n |n\rangle \langle n| & p_n &\geq 0 & \sum_n p_n &= 1 \\ S(\{p_n\}) &= -k_B \sum_n p_n \ln p_n \end{aligned}$$

Hinweise:

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{A} &= \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle & f(\hat{\rho}) &= \sum_n f(p_n) |n\rangle \langle n| \\ e^{\hat{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n \end{aligned}$$

Die Entropie ist also über die Diagonalelemente der Dichtematrix in diagonalisierter Form berechenbar. Dies ist wohldefiniert, da jede Dichtematrix diagonalisiert werden kann.

Extrema mit Nebenbedingung  $\sum_n p_n = 1$

- Minimum  $S = 0$  für einen reinen Zustand ( $p_{n_0} = 1, p_n = 0 \quad \forall n \neq n_0$ )
- Maximum  $S = k_B \ln M$  für  $p_n = \frac{1}{M} \quad \forall 1, \dots, M$ .

Die Entropie ist maximal für Unkenntnis über den Zustand des Systems (Auch Maß für Unordnung).

### Extensivität

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

$$\hat{\rho}_A \rightarrow \hat{\rho}_A \otimes \hat{I}_B$$

$$\hat{\rho}_B \rightarrow \hat{I}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

$$\implies [\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B] = 0$$

$$\begin{aligned} S &= -k_B \operatorname{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \\ &= -k_B \operatorname{tr}[(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) \ln (\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B)] \\ &= -k_B \operatorname{tr}(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A) - k_B \operatorname{tr}(\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B) = S_A + S_B \end{aligned}$$

Nebenbedingung

$$S \leq S_A + S_B$$

(z.B. verschränkte Systeme)

**Beispiel** System von  $N$  Spins  $S$  ( $\vec{S}^2 = S(S+1)$ ).

Hilbert-Raum für einen Spin  $= \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^{2S+1}$ . Gesamter Hilbert-Raum

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$$

$$\dim \mathcal{H} = (2S+1)^N = M$$

- Minimum  $S = 0$  z.B. für  $|\Psi\rangle = |\uparrow, \uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow\rangle$ .
- Maximum  $S = k_B \ln M$  für  $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \hat{I} = k_B n \ln (2S+1)$

### Gleichgewicht

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\rho}{dt} &\iff [H, \hat{\rho}] = 0 \implies \rho = \sum_m p_n |E_n\rangle \langle E_n| \\ &\implies E = \langle \hat{H} \rangle = \operatorname{tr}(\hat{\rho} \hat{H}) = \sum_n p_n E_n \end{aligned}$$

$$\rho |E_n\rangle = p_n |E_n\rangle$$

$$H |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle$$

**Definition** Statistisches Ensemble oder Gesamtheit

Sie ist eine Gewichtete Menge der Mikrozustände, die einen Makrozustand entsprechen.

$$\{(|N\rangle, p_n)\} \equiv \hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$$

## Zentrales Postulat der statistischen Physik

System mit  $N \rightarrow \infty$  Freiheitsgraden im Gleichgewicht.

- $S$  ist maximal für einen gegebenen Makrozustand. Das erlaubt uns eine eindeutige Bestimmung des statistischen Operators  $\hat{\rho}$ .
- Statistische Mittelungen der Observablen erfüllen die makroskopischen Gesetze der Thermodynamik.

$$S = -k_B \operatorname{tr} \hat{\rho}_B = -k_B \langle \ln \hat{\rho}_G \rangle$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \operatorname{tr}(\hat{\rho}_G \mathcal{O}) \qquad U = \langle \hat{H} \rangle$$

### Definition Entropie (Thermodynamik)

Wir betrachten ein System in einem Bad, mit welchem es Energie austauschen kann. Eine ideale Situation, in welcher alle Prozesse die wir betrachten reversibel sind.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Zustandsfunktion oder thermodynamische Variable.

- Extensiv
- monoton steigend  $\frac{\partial S}{\partial E} > 0$
- $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{S}{N} = 0$ .

**Nebenbedingung** Für bestimmte Modelle statistische Entropie nicht gleich der thermodynamischen Entropie, das bedeutet das Modell ist nicht physikalisch. Eigentlich hat man in den letzten 100 Jahren in denen man Forschung betreibt kein Problem gefunden, das man nicht lösen konnte. Es gibt verschiedene Situationen in der Praxis, in denen man die Makrozustände beschreibt.

## Mikrokanonisches Ensemble

Es beschreibt ein isoliertes System.

### Freie thermodynamische Variablen

- Teilchenzahl  $N$
- Volumen  $V$
- Magnetisierung  $M$
- Energie  $E$

**Zustandsfunktion** Druck  $P(N, V, E)$

### Maximierung der Entropie

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Omega} P_E P_N \dots$$
$$\hat{\rho} \delta(\hat{H} - E) \delta(\hat{N} - N)$$



## Kanonisches Ensemble

Beschreibt ein geschlossenes System.

### Freie thermodynamische Variablen

- Temperatur  $T$
- $N, V, M$

### Zustandsfunktionen $E(T, N, V)$

Maximum der Entropie Für feste  $T, N, V, \dots$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \hat{P}_N \dots \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

### Zustandssumme

$$Z = \text{tr } e^{-\beta \hat{H}}$$

## Großkanonisches Ensemble

Beschreibt ein offenes System

### Freie Thermodynamische Variablen

- Chemisches Potential  $\mu$
- $T, V, \dots$

### Zustandsfunktionen $N(T, \mu, V)$

Maximum der Entropie für feste  $T, \mu, V$  falls

$$\hat{\rho}_G = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} P$$

### Großkanonische Zustandssumme $Z_{GK} \text{tr } e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$

## Viele weitere Ensembles

Zu jeder intensiven Variable gibt es eine Extensive Variable(Observable).

Äußeres Feld Intensive Variable	Observable Extensive Variable
$y$	$x$
$\hat{\rho}_G e^{-\beta y \hat{x}}$	$\hat{\rho}_G P_x \delta(\hat{x} - x)$
Beispiele	
$M$	$N$
$P$	$V$
$H$	$M$
Magnetfeld	Magnetisierung

## Mikrokanonisches Ensemble

Wir betrachten ein isoliertes System. Zum Beispiel ein Gas in einem Behälter welcher isoliert ist. Energie und Teilchenzahl sind fest. Genauso das Volumen. Eine Ähnliche Situation wäre auch ein magnetisches Material. Die Isolation wäre hier ein Material welches keine magnetischen Felder durchlässt. Typisch für das isolierte System ist, dass die Energie eine kontrollierbare Variable ist. Es gibt also eine freie thermodynamische Variable  $E$ . Die erlaubten Mikrozustände sind die Eigenzustände des Hamilton-Operators  $H$  zur Energie  $E$ . Das Ziel ist nun die Mikrozustände zu beschreiben und die makroskopischen Variablen zu berechnen. Man braucht dazu den statistischen Operator.

### Diskretes Eigenspektrum

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n| \quad : \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad p_n = 0 \quad \forall n \text{ mit } E_n \neq E$$

$$\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{w(E)} p_n |n\rangle \langle n| \quad w(E) = \text{Entartung der Eigenenergie } E$$

Wir verwenden das Postulat der Maximierung der Entropie:

$$S(E) = -k_B \sum_{n=1}^{w(E)} p_n \ln p_n, \quad \sum_{n=1}^{w(E)} p_n = 1$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial p_n} - \lambda \frac{\partial}{\partial p_n} \left( \sum_{m=1}^{w(E)} p_m - 1 \right)$$

$$= -k_B (\ln p_n + 1) - \lambda \quad \forall 1, \dots, w(E)$$

$$\text{Extrema für } \implies p_n = e^{-\frac{\lambda}{k_B} - 1} \implies p_n = \frac{1}{w(E)}$$

$$\implies S(E) = k_B \ln(w(E)) \text{ ist auch ein Maximum}$$

### Dichteoperator im Gleichgewicht

$$\hat{\rho}_G = \sum_{n=1}^{w(E)} \frac{1}{w(E)} |n\rangle \langle n| = \frac{1}{w(E)} P_E = \frac{1}{w(E)} \delta(H - E)$$

$$\text{tr } \hat{\rho}_G = 1$$

$$\text{tr } P_E = w(E)$$

## Kontinuierliches Spektrum

$$\hat{\rho} = \int d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| p(\lambda)$$

$$N(E) = \text{Anzahl der Zustände mit einer Eigenenergie} \leq E$$

Hinweis: Für ein diskretes System von Eigenzuständen für ein kontinuierliches Spektrum kann man die Anzahl der Eigenzustände kleiner als  $w$  definieren.

$$\begin{aligned} w(E) &= \frac{dN}{dE} = \text{Zustandsdichte} \\ \implies w(E)\Delta E &= \text{Anzahl der Eigenzustände in } [E, E + \Delta E] \\ S(E) &= k_B \ln(w(E)\Delta E) \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{w(E)} \delta(H - E) \end{aligned}$$

## Thermodynamische Variablen

Man macht eine Statistische Mittelung

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}_G \hat{\mathcal{O}})$$

## Beispiele

$$\text{Innere Energie: } U = \langle H \rangle = E$$

$$\text{Magnetisierung: } M_z = \langle S_z \rangle$$

## Thermodynamischer Limes ( $N \rightarrow \infty$ )

**Definition** Temperatur

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_x$$

**Definition** Konjugierte Variablen

Beispiele:

$$x = \left\{ \begin{array}{c} M \longleftrightarrow H \\ N \longleftrightarrow M \\ V \longleftrightarrow P \end{array} \right\} y$$

$$S(E, X) \qquad y = \pm T \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)_E$$

## Statistische Physik

Extensive Observable  $\hat{x}$ ,

$$\implies \langle \hat{x} \rangle = x$$

$$[\hat{x}, \hat{H}] \xrightarrow{N \gg 1} N^0, n^{-1}$$

$$S(E, X) = k_B \ln w(E, X)$$

## Beispiel: System von nicht-wechselwirkenden Spins

$$N \text{ Spins } s = 1, \quad H = \sum_{i=1}^N H_i = J \sum_{i=1}^N S_{iz}^z \quad (J > 0)$$

Eigenzustände:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Teilchen } & \begin{cases} H_i |m_j\rangle = JS_{jz}^z |m_j\rangle = J\hbar^2 m_j^2 \\ S_{zj} |m_j\rangle = \hbar m_j |m_j\rangle \end{cases} & m_j = -1, 0, 1 \\ N \text{ Teilchen } & \begin{cases} \text{Dim } \mathcal{H} = 3^N \\ |\{m_j\}\rangle = |m_j\rangle \otimes |m_j\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle \\ E(\{M_j\}) = J \sum_{j=1}^N m_j^2 \\ S_z |\{m_j\}\rangle = \sum_j m_j |\{m_j\}\rangle \\ H |\{m_j\}\rangle = E(\{m_j\}) |\{m_j\}\rangle \end{cases} & M = \sum_j m_j |\{m_j\}\rangle \end{aligned}$$

**Problem** Entartung  $w(E, M)$

$$\begin{aligned} N_+ &= \text{Anzahl der Spins mit } m_j = +1 \text{ in } \{m_j\} \\ N_0 &= \text{Anzahl der Spins mit } m_j = +0 \text{ in } \{m_j\} \\ N_- &= \text{Anzahl der Spins mit } m_j = -1 \text{ in } \{m_j\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = J(N_+ + N_-) \\ M = N_+ - N_- \\ N = N_+ + N_- + N_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_+ = \frac{R+M}{L} = \frac{r+m}{L} N \\ N_- = \frac{R-M}{L} = \frac{r-m}{L} N \\ N_0 = N - R = (1-r)N \end{cases}$$

$$\text{Energie pro Spin ist } r = \frac{R}{N} = \frac{E}{NJ} \in [0, 1]$$

$$\text{Magnetisierung pro Spin } m = \frac{M}{N} \in [-1, 1]$$

Problem:  $N_+$  unterscheidbare Zustände  $m_j = +1$  auf  $N$  Spins verteilen.

$$\Rightarrow \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} \text{ Möglichkeiten}$$

Danach:  $N_-$  unterscheidbare Zustände auf  $N - N_+$  Spins mit  $m_j = -1$  verteilen.

$$\Rightarrow \binom{N - N_+}{N_-} \text{ Moeglichkeiten}$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned} w(E, M) &= w(N_+, N_-) \\ &= \binom{N}{N_+} \binom{N - N_+}{N_-} \\ &= \frac{N!}{N_+! N_-! N_0!} \end{aligned}$$

Damit folgt die Entropie:

$$\begin{aligned} S(E, M) &= S(N_+, N_-) \\ &= k_B \ln \left( \frac{N!}{N_+! N_-! N_0!} \right) \end{aligned}$$

Annahme:  $N, N_+, N_0, N_- \gg 1$  aber

$$\begin{aligned} \frac{N_+}{N}, \frac{N_-}{N}, \frac{N_0}{N} &\text{ fest und endlich} \\ \Leftrightarrow m, n &\text{ fest und endlich} \\ \Leftrightarrow M, E &\text{ sind extensiv } (M, E \propto N) \end{aligned}$$

Stirling Formel

$$\begin{aligned} \ln N! &\approx N \ln N - N \\ \Rightarrow S(E, M) &= k_B N f(r, m) \\ f(r, m) &= - \left[ \frac{r+m}{2} \ln(r+m) + \frac{r-m}{2} \ln \frac{(r-m)}{2} + (1-r) \ln(1-r) \right] \end{aligned}$$

**Temperatur**

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_M = \frac{k_B}{J} \ln \left( \frac{2(1-r)}{\sqrt{r^2 - m^2}} \right)$$

**Ohne Magnetisierung**  $M = 0$  genau dann, wenn  $m = 0$ .

$$S(E) = -kN \left[ r \ln \frac{r}{2} + (1-r) \ln(1-r) \right]$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{J} \ln \left( \frac{2(1-r)}{r} \right) \begin{cases} > 0 & \text{falls } 0 < r < \frac{2}{3} \\ < 0 & \text{falls } \frac{2}{3} < r < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow r(T) &= \frac{2}{e^{\beta J} + 2}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \\ E(T) &= NJ \frac{2}{e^{\beta J} + 2} \\ S(T) &= kN \left[ \frac{2}{e^{\beta J} + 2} \ln(e^{\beta J} + 2) - \frac{1}{e^{\beta J} + 2} \ln(1 + 2e^{-\beta J}) \right]\end{aligned}$$

## Diskussion

Tiefe Temperaturen

$$k_B T \ll J \iff \beta J \longrightarrow \infty \implies \begin{cases} E \longrightarrow 0 \\ S \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Nebenbedingung für  $J < 0$ :

$$\implies \begin{cases} E = NJ \\ S = k_B N \ln(z) \end{cases}$$

Hohe Temperatur  $k_B T \gg J$

$$\iff \beta J \longrightarrow 0 \implies \begin{cases} E = \frac{2}{3} NJ \\ S = \frac{1}{3} k_B N \ln(3) \end{cases}$$

## Kanonisches Ensemble

Schwabl Kapitel 2.6

Schwabl nimmt an, dass man das gesamte System mikrokanonisch behandeln kann.  $\hat{\rho} \propto \delta(\hat{H} - E)$ . Das innere Teilsystem 2 ist viel kleiner als das äußere Teilsystem 1. Also ist auch die Änderung der Energie des Systems 1  $\Delta E_1 \gg \Delta E_2$ . Man benutzt dann das Prinzip der Maximierung der Entropie  $S$  woraus folgt, dass

$$\hat{\rho}_2 = e^{-\hat{H}_2/(k_B T_2)}$$

Quantenmechanik Anmerkung:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad \text{Basis } \{|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle\} \text{ von } H$$

$$\text{tr } \hat{A} = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \langle n_1 n_2 | \hat{A} | n_1 n_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{A} = \sum_{n_2} \langle n_2 | \hat{A} | n_2 \rangle \\ &= \sum_{n_2} \sum_{n_1} \sum_{n'_1} \langle n_1 n_2 | \hat{A} | n'_1 n_2 \rangle |n_1\rangle \langle n'_1|\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_1 = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{\rho} \implies S_1(E_1) = \frac{1}{T_1} = \left( \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right) = \frac{1}{T}.$$

Wir betrachten ein geschlossenes System im Gleichgewicht mit Wärmebad der Temperatur  $T$ . Was ist der statistische Operator  $\hat{\rho}$ ?

**Definition** Freie Energie (Thermodynamik, makroskopisch)

$$F(T) = U(S(T)) - TS(T)$$

Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_X &\iff T_X = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_X \\ &\implies S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_X \end{aligned}$$

**Postulat** Im thermischen Gleichgewicht ist die Entropie maximal. Dies gilt genau dann wenn die freie Energie minimal ist.

**Definition** Funktional der freien Energie In der mikroskopischen statistischen Physik.

$$\begin{aligned} F[\hat{\rho}] &= E[\hat{\rho}] - TS[\hat{\rho}] \\ \text{mit } E[\hat{\rho}] &= \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{H}}) \end{aligned}$$

**Minimierung von**  $F[\hat{\rho}]$

Variationsrechnung  $\delta F = 0 \quad \forall \delta \hat{\rho}$

1.

$$\begin{aligned} \delta F &= F(\hat{\rho} + \delta \hat{\rho}) - F(\hat{\rho}) \\ &= \text{tr}(H \delta \hat{\rho}) + k_B T \text{tr}(\delta \hat{\rho} \ln \hat{\rho}) + k_B T \text{tr} \delta \hat{\rho} \\ &= \text{tr}((H + k_B T \ln \hat{\rho}) \delta \hat{\rho}) \end{aligned}$$

Wir verwenden, dass man kompakte operatoren in der Spur vertauschen kann.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{A} \hat{B}) &= \text{tr}(\hat{B} \hat{A}) \\ \text{tr} \hat{\rho} &= 1 \implies \text{tr} \delta \hat{\rho} = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\delta F = 0 \quad \forall \delta \hat{\rho} \implies H + k_B \ln \hat{\rho} = c \iff \hat{\rho} = e^{\frac{\hat{H}}{k_B T}} e^{\frac{c}{k_B T}}$$

Die folgenden drei Formeln sollte man sich merken:

$$\implies \hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

*Kanonische Zustandssumme*

$$Z = \text{tr} e^{-\beta \hat{H}}$$

Minimum von  $F[\hat{\rho}] \equiv$  Freie Energie.

$$F = -k_B T \ln Z$$

Bemerkung:  $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}} P_N$

Weitere thermodynamische Variablen

$$x = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{x}) \text{ z.B. } M, N$$

$$\text{Thermodynamik } y = \pm \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_T, \text{ z.B. } P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, B = \left( \frac{\partial F}{\partial M} \right)_T$$

## Statistische Bedeutung der Wärme

$$\begin{aligned} dE &= d \text{tr}(\hat{\rho}\hat{H}) = \text{tr}(d\hat{\rho}\hat{H}) + \text{tr}(\hat{\rho}d\hat{H}) \\ dS &= -k_B d \text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -k_B \text{tr}(d\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) - k_B \text{tr} d\hat{\rho} \\ &= \frac{1}{T} \text{tr}(d\hat{\rho}\hat{H}) \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \\ \implies dE &= T dS + \text{tr}(\hat{\rho} d\hat{H}). \end{aligned}$$

### 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$dV = \delta Q + \delta A$$

- Reversibler Prozess

$$\delta Q = T dS = \text{tr}(d\hat{\rho}\hat{H})$$

$$\delta A = \text{tr}(\hat{\rho} d\hat{H}) \implies \text{Änderung der Wärme} \equiv \text{Änderung der Wahrscheinlichkeit der Mikrozustände}$$

## Energiefluktuationen

Wahrscheinlichkeit für Mikrozustand mit Energie  $E$ . Diskretes Spektrum

$$P(E) = \begin{cases} \frac{1}{Z} e^{-\beta E} & \text{Falls Eigenenergie } E \text{ existiert} \\ 0 & \text{Falls Eigenenergie } E \text{ nicht existiert} \end{cases}$$

Kontinuierliches Spektrum

$$P(E) = W(E) \Delta E$$

$$W(E) = w(E) \frac{1}{Z} e^{-\beta E}$$

Definition einiger Größen

- Mittelwert

$$\bar{E} = \int dE w(E) E = \langle \hat{H} \rangle = U$$

Nebenbedingung

$$\langle H \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$



- Schwankungsquadrat

$$\Delta E^2 = \int dE W(E) (E - \bar{E})^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2$$

Nebenbedingung

$$\Delta E^2 = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \langle \hat{H} \rangle}{\partial \beta}$$

- Wärmekapazität

$$C_x = \left( \frac{dU}{dT} \right)_x = \frac{1}{k_B T^2} \Delta E^2 \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

3. Hauptsatz

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_x = 0 \implies \lim_{T \rightarrow 0} \Delta E^2 = 0$$

### Relation mit dem mikrokanonischen Ensemble

Experiment:  $U$  und  $C_x$  sind extensiv. Das bedeutet mathematisch, dass  $U$  und  $C_x$  proportional zur Teilchenzahl  $N$  sind. Das bedeutet auch, dass der Mittelwert  $\bar{E}$  und das Schwankungsquadrat  $\Delta E$  proportional zur Teilchenzahl sind. Das bedeutet für die relative Breite:

$$\frac{\Delta E}{\bar{E}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{Thermodynamischer Limes}} 0$$

$$P(\bar{E}) = W(\bar{E}) \Delta E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

oder  $W(E) \rightarrow \delta(E - \bar{E})$

Äquivalenz der mikrokanonischen und kanonischen Ensembles im thermodynamischen Limes ( $\frac{\Delta E}{N} \rightarrow 0$ ).

### Beispiel: Spin System

$$\hat{H} = J \sum_{i=1}^N S_{iz}^z - B \sum_{i=1}^N S_{iz} = \sum_{i=1}^N H_i$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad [H_j, H_l] = 0 \quad \forall j, l = 1, \dots, N$$

$$Z = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta \hat{H}} = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} e^{-\beta \hat{H}_1} \text{tr} e^{-\beta \hat{H}_2} \dots \text{tr}_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta \hat{H}_N}$$

$$Z_1 = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} e^{-\beta \hat{H}_1} = \sum_{m_1=1,0,1} \langle m_1 | e^{-\beta \hat{H}_1} | m_1 \rangle$$

$$\hat{H}_1 |m_1\rangle = (J m_1^2 - \beta m_1) |m_1\rangle$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z_1 &= 1 + e^{-\beta(J+B)} + e^{-\beta(J-B)} \\ \Rightarrow Z &= \left(1 + e^{-\beta(J+B)} + e^{-\beta(J-B)}\right)^N = \left(1 + 2e^{-\beta J} \cosh(\beta B)\right)^N\end{aligned}$$

$$Z = \left(1 + Ze^{-\beta J} \cosh(\beta B)\right)^N$$

*Freie Energie*

$$F(T, X) = -k_B T \ln Z(T, X) \quad X = V, M$$

*Freie Enthalpie*

$$G(T, Y) = -k_B T \ln Z(T, X) \quad y = P, B$$

*Legendre Transformation*

$$G(T, B) = F(T, M(T, B)) - M(T, B)B$$

$$B = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_T \quad M = -\left(\frac{\partial G}{\partial B}\right)_T$$

$$\Rightarrow G(T, B) = -k_B T N \ln \left(1 + 2e^{-\beta J} \cosh \beta B\right)$$

**Magnetisierung**

$$\begin{aligned}M &= \langle S_z \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}} \hat{S}_z) \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial B} \\ &= N \frac{2e^{-\beta J} \sinh(\beta B)}{1 + 2e^{-\beta J} \cosh(\beta B)}\end{aligned}$$

anmerkung:

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} \quad H = J \sum_i \hat{S}_{iz}^z - B \sum_i S_{iz}$$

- Tiefe Temperatur  $kT \ll J, |B|$ 
  - Falls  $|B| < J$  so geht  $M \rightarrow 0$
  - Falls  $|B| > J$  so geht  $M \rightarrow \tanh(\beta B) \rightarrow N \text{sign}(B)$  Im Grundzustand  $|m_1 = \text{sign } B\rangle$ .
- Hohe Temperatur  $kT \gg J, |B|$

**Curie-Gesetz**

$$M = N \frac{2}{3} \frac{B}{k_B T}$$

## Großkanonisches Ensemble

*Schwabl Kapitel 2.7*

Wir haben einen offenen Behälter, in dem sich ein Untersystem befindet. Man kontrolliert nicht die Teilchenzahl und die Energie, sondern nur die Temperatur und das chemische Potential. Es handelt sich also um ein offenes System im Gleichgewicht mit

- Einem Wärmebad bei Temperatur  $T$ .
- Einem Teilchenreservoir mit chemischem Potential  $\mu$ .

**Beispiel.** *Wasserspiegel*

**Definition.** *Großkanonisches Potential der Thermodynamik*

$$\Phi(T, \mu) = U(S(T, \mu), N(T, \mu)) - TS(T, \mu) - \mu N(T, \mu)$$

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{X, N} & \mu &= \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_{X, T} \\ S &= - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{X, \mu} & N &= - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{X, T} \end{aligned}$$

**Postulat.** *Thermodynamisches Gleichgewicht besteht genau dann, wenn die Entropie  $S$  maximal ist. Oder Äquivalent, das großkanonische Potential  $\Phi$  minimal ist.*

**Definition.** *Funktional des großkanonischen Potentials (Statistische Physik)*

$$\Phi[\hat{\rho}] = E[\hat{\rho}] - TS[\hat{\rho}] - \mu N[\hat{\rho}]$$

wobei

$$N[\hat{\rho}] = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{N})$$

Wir minimieren nun  $\Phi[\hat{\rho}]$  unter  $\hat{\rho}$  mit  $\text{tr} \hat{\rho} = 1$ . Daraus folgt der statistische Operator.

Statistischer Operator	$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Zustandsumme	$Z = \text{tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Großkanonisches Potential	$\Phi(T, \mu) = -k_B T \ln Z$

## Kanonisch und Großkanonisch

- Kanonisch

Hilbert-Raum für $N$ -Teilchen	$\mathcal{H}_N$ .
Hamilton-Operator	$H_N : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N$ .
Statistischer Operator	$\hat{\rho}_{K,N} = \frac{1}{Z_K(N)} e^{-\beta \hat{H}_N} : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N$
Zustandsumme	$Z_K(N) = \text{tr}_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta \hat{H}_N}$

- Großkanonisch

Hilbert-Raum für beliebige Teilchenzahl	$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N$
Projektor	$\hat{P}_N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_N$
Hamilton-Operator	$\hat{H} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \hat{H}_N = \hat{P}_N \hat{H} \hat{P}_N$
Statistischer-Operator	$\hat{\rho}_{GK} = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$
Teilchenzahl-Operator	$\hat{N} = \sum_{N=0}^{\infty} N \hat{P}_N$ oder $\hat{N}  \Psi\rangle = N  \Psi\rangle \quad \forall  \Psi\rangle \in \mathcal{H}_N$
Zustandsumme	$Z_{GK} = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{N,K} &= \hat{P}_N \hat{\rho}_{GK} \hat{P}_N e^{-\beta \mu N} \frac{Z_{GK}}{Z_{K,N}} \\
\hat{\rho}_{GK} &= \frac{1}{Z_{GK}} \sum_{N=0}^{\infty} Z_K(N) \hat{\rho}_{K,N} e^{\beta \mu N} \\
Z_{GK}(\mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_K(N) = \text{tr}_{\mathcal{H}} \left( e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \text{tr}_{\mathcal{H}_N} \left( e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \underbrace{\text{tr}_{\mathcal{H}} \left( e^{-\beta \hat{H}_N} \right)}_{Z_K(N)} e^{\beta \mu N}
\end{aligned}$$

## Fluktuation der Teilchenzahl

Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System sich in einem Mikrozustand mit  $N$  Teilchen befindet.

$$\begin{aligned}
P(N) &= \langle \hat{P}_N \rangle = \langle \delta(\hat{N} - N) \rangle = \frac{1}{Z_{GK}} \text{tr}_{\mathcal{H}} = \hat{P}_N e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \\
&= \frac{Z_K(N)}{Z_{GK}} e^{\beta \mu N}
\end{aligned}$$

## Mittlere Teilchenzahl

$$\bar{N} = \langle \hat{N} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N P(N)$$

## Nebenbedingung

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \hat{P}}{\partial \mu}$$

## Fluktuationen

$$\begin{aligned}\Delta N^2 &= \left\langle \left( \hat{N} - \langle \hat{N} \rangle \right)^2 \right\rangle \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N) (N - \bar{N})^2 \propto \bar{N}\end{aligned}$$

$$P(N) \xrightarrow{N \gg 1} \delta(N - \bar{N})$$

Das bedeutet die Äquivalenz zwischen kanonischem und großkanonischem Ensemble.

Ensemble	mikrokanonisch	kanonisch	großkanonisch
Physikalisches System	isoliert	geschlossen	offen
Thermodynamische Variablen	$N, E$	$T, N$	$T, \mu$
Thermodynamische Funktionen	$T, \mu$	$E, \mu$	$E, N$
Zustandsumme	$w(E, N)$ $\text{tr}_{\mathcal{H}_{E,N}} \hat{I}$ $\text{tr}_{\mathcal{H}} \hat{P}_E \hat{P}_N$	$Z_K(T, N)$ $\text{tr}_{\mathcal{H}_N} e^{-\beta \hat{H}}$ $\text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta \hat{H}} \hat{P}_N$	$Z_{\text{GK}}(T, \mu)$ $\text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Statistischer Operator	$\hat{\rho} = \frac{1}{w} \hat{\rho}_E \hat{\rho}_N$	$\hat{\rho}_K$ $\frac{1}{Z_K} e^{-\beta \hat{H}_N}$ $\frac{1}{Z_K} \hat{\rho}_N e^{-\beta H} \hat{\rho}_N$	$\hat{\rho}_{\text{GK}}$ $\frac{1}{Z_{\text{GK}}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$
Thermodynamische Potentiale	$S(E, N)$ $k_B \ln w(E, N)$	$F(T, N)$ $-k_B T \ln Z_K$	$\Phi$ $-k_B T \ln Z_{\text{GK}}$

Tabelle 1: Übersicht der Ensembles der statistischen Physik

## Klassische Statistische Physik

*Schwabl Kapitel 2, Nolting Band 6 Kapitel 1* Das Problem besteht aus Mikrozuständen eines Systems von  $N$ -Teilchen.

### Problem

$$\begin{array}{ll}\text{Mikrozustände} & (q, p) \in \mathbb{R}^{6N} \\ \text{Zeitmittelung} & A_z = \frac{1}{T_z} \int_0^{T_z} dt A(q(t), p(t)) \\ \text{Ensemblemittelung} & A_E = \int dq dp A(q, p) \rho(q, p)\end{array}$$

### Ergodenhypothese

$$A_E = \lim_{T_z \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} A_z$$

Klassische Physik und das Postulat der statistischen Physik bestimmen  $\rho(q, p)$  nicht. Deshalb benutzt man die Quantentheorie und das Postulat der klassischen statistischen Physik. Auf diese Art und Weise erhält man die Quantenstatistik. Diese ergibt im klassischen Grenzfall wieder die klassische Statistische Physik.

**Klassischer Grenzfall** Beispiel: Fermi-Gas mit Fermi-Temperatur  $T_F$

$$\begin{aligned} T < T_F : \quad & \text{Fermi-Dirac-Verteilung } f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon - \mu)}} \\ T \gg T_F : \quad & \text{Maxwell-Boltzmann-Verteilung } f(\varepsilon) = c e^{-\beta\varepsilon} \end{aligned}$$

Elektronen im Metall:  $T_F \approx 10 \times 10^3 \text{ K}$  bis  $10 \times 10^4 \text{ K}$

$$H_e^3 \quad : \quad T_F \approx 3 \text{ K}$$

**Mikrokanonisches Ensemble**  $(q, p) \in \mathbb{R}^{6N}$

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= \frac{1}{w(E)} \delta(H(q, p) - E) \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \\ w(E, N) &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int dq dp \delta(H(q, p) - E) \\ \text{Entropie } S(E, N) &= k_B \ln w(E, N) \end{aligned}$$

$w(t)\Delta E$  entspricht dem Phasenraumvolumen der Mikrozustände mit Energie  $m[E, E + \Delta E]$ .

**Kanonisches Ensemble**

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= \frac{1}{Z_K} e^{-\beta H(q, p)} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \\ Z_K &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int dq dp e^{-\beta H(q, p)} \end{aligned}$$

Die freie Energie schreibt sich als

$$F(T, N) = -k_B T \ln Z_K(T, N)$$

**Großkanonisches Ensemble**

$$\begin{aligned} Z_{\text{GK}}(T, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu} Z_K(T, N) \\ \implies \Phi(T, \mu) &= -k_B T \ln Z_{\text{GK}}(T, \mu) \\ \rho(q, p) &= \frac{1}{Z_{\text{GK}}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(H_N(q_N, p_N) - \mu N)} \frac{1}{N h^{3N}} \delta(q - q_N) \delta(p - p_N) \end{aligned}$$

•

$$0 = \{H, P\} = \{H, H\} \frac{dp}{dH}$$

- Entropie

$$\begin{aligned} S &\neq -k_B \int dq dp \rho(q, p) \ln \rho(q, p) \\ &= -k_B \int dq dp \rho(q, p) \ln (\rho(q, p) N! h^{3N}) \end{aligned}$$

- Mit  $Z$  Zwangsbedingungen wird  $6N$  zu  $6N - 2Z$  und  $3N$  zu  $3N - Z$ .
- Vorfaktor  $h^{-3N}$
- Erwartungswert

$$\langle A \rangle \propto \frac{h^{3N}}{h^{3N}} = 1$$

- Die Entropie  $S$  und die Freie Energie  $F$  sind von der Form

$$\begin{aligned} S(h) &= S + cN \ln h \\ F(h) &= F + c'N \ln h \end{aligned}$$

Als Schlussfolgerung sind diese Werte nicht experimentell messbar. Bemerkung: die Konstante  $c'$  widerspricht dem 3. Hauptsatz der Thermodynamik, aber das ist wegen des klassischen Limits kein Problem.

**Vorfaktor  $N!$**  In der Quantentheorie gibt es austauschsymmetrie zwischen identischen Teilchen.

- Erwartungswert

$$\langle A \rangle \propto \frac{N!}{N!} = 1$$

- $S, F, \Phi \propto N$ , also sind sie extensive Größen.

**Gibbs-Paradoxon** Wir haben zwei ursprünglich getrennte Systeme die addiert werden. Es gibt ein Gleichgewicht, also

$$T_1 = T_2 \qquad P_1 = P_2$$

Für eine Mischung von 2 Gasen

$$N! \rightarrow N_1! N_2!$$

Mit  $N$  unterscheidbare Teilchen.

**Beispiel** Klassisches ideales Gas.  
 $N$  Teilchen im Potential  $V$ .

$$\begin{aligned} H(\vec{r}, \vec{p}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N V(\vec{r}_j) \\ V(\vec{r}) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{r} \in V \\ \infty & \text{für } \vec{r} \notin V \end{cases} \end{aligned}$$

## Mikrokanonisches Ensemble

$$\Omega(E) = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N}r \int d^{3N}p \quad \Theta(E - H(\vec{r}, \vec{p}))$$

Wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Die Heaviside Theta Funktion ist. Die Integrale stellen ein Phasenraumvolumen der Energie  $< E$  dar. Wir werden nun diese Größe berechnen. In diesem Integral können wir anstatt über  $R^{3N}$  nur über das Volumen integrieren.

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \underbrace{\int_{V^N} d^{3N}r}_{V^N} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p \Theta(E - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2M}) \\ &= \frac{V^N}{N! h^{3N}} C_{3N} R^{3N} \end{aligned}$$

mit

$$R = \sqrt{2mE} \qquad C_{3N} = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!}$$

Damit folgt

$$\Omega(E) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{(\frac{3N}{2})!} (2mE)^{\frac{3N}{2}}$$

und

$$w(E) = \frac{d\Omega}{dE} = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \frac{\pi^{3n/2}}{(\frac{3N}{2} - 1)!} (2m)^{3N/2} E^{3N/2-1}$$

$$S = -k_B \ln w(E) = k_B N \left[ \ln V - \ln h^3 - \ln N + 1 + \frac{3}{2} \ln(\pi) + \frac{3}{2} \ln(2m) + \frac{3}{2} \ln E - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}N\right) + \frac{3}{2} \right]$$

Wobei die Stirling Formel benutzt wurde für

$$N \gg 1 \quad \left( \frac{E}{N}, \frac{V}{N} \text{ endlich} \right)$$

$$S(E, N, V) = k_B N \left\{ \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{E}{N} \right)^{3/2} \left( \frac{4\pi m}{h^2 3} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right\}$$

## Ideales klassisches Gas im kanonischen Ensemble

$$Z_K = \frac{1}{N!} h^{3n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} d^{3N}r \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p e^{-\beta H(\vec{r}, \vec{p})}$$



$$\begin{aligned}
H(\vec{r}, \vec{p}) &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{r}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i) & V(\vec{r}) &= \begin{cases} 0 & \vec{r} \in V \\ \infty & \vec{r} \notin V \end{cases} \\
&= \sum_{i=1}^N H(\vec{r}_i, \vec{r}_2)
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
Z_k &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N} r e^{-\beta \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i)} \right)}_{=\left( \int d^3 r \cdot 1 \right)^N} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N} p e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}} \right)}_{=\left( \int_{\mathbb{R}} dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \right)^{3N}} \\
Z_K &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} V^N \left( \sqrt{2\pi} \sqrt{mk_B T} \right)^{3N} \\
F(T, N, V) &= -k_B T \ln Z_K = -k_B T N \left\{ \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{2\pi mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 1 \right\}
\end{aligned}$$

Wobei die Stirling-Formel benutzt wurde für  $N \gg 1$ .

$$\begin{aligned}
S(T, N, V) &= - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N, V} \\
&= k_B N f(T, V, N) + \frac{3}{2} k_B N
\end{aligned}$$

Die Nebenbedingung lautet, dass

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) \neq 0$$

Für die Innere Energie gilt

$$U(T, V, N) = F + TS = \frac{3}{2} N k_B T \quad (1)$$

Der Druck ist

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N} = k_B T N \frac{1}{V} \quad (2)$$

$$\iff PV = N k_B T \quad (3)$$

A und B sind Zustandsgleichungen des idealen Gases.

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{3}{2} N k_B \quad \text{Gleichverteilungssatz}$$

**Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung**

$$dN = m(\vec{v}) d^3 v$$

Dies entspricht der Anzahl der Teilchen mit Geschwindigkeiten in einem Volumen  $d^3v$  um  $\vec{v}$ .  $m(\vec{v})$  ist die Geschwindigkeitsverteilung.

$$\begin{aligned}
n(\vec{v}) &= \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) \right\rangle = \frac{1}{Z_K} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}r \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}p \sum_{i=1}^N \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) e^{-\beta H(\vec{r}, \vec{p})} \\
&= \frac{1}{Z_K} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} V^N \left( \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}v \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) e^{-\beta \sum_{i=1}^N v^2} \right) \\
&= \frac{1}{Z_K} \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} V^N \left( \sum_{i=1}^N e^{-\beta \frac{m}{2} \vec{v}^2} \left( \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{kT}{M}} \right)^{3(N-1)} \delta(\vec{v} - \vec{v}_i) e^{-\beta \sum_{i=1}^N v^2} \right) \\
&\Rightarrow N(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{m}{2} \vec{v}^2} d^3v = \sum_{i=1}^N v^2 dv \frac{m}{2} \vec{v}_i^2
\end{aligned}$$

Wir schreiben für die Delta-Funktion  $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ .

### Großkanonisches Ensemble

$$\begin{aligned}
Z_{\text{GK}} &= \sum_{n=0}^{\infty} Z_k(N) e^{\beta \mu N} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{V^N}{N!} \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}N} e^{\beta \mu N} \\
&= \exp \left[ V e^{\beta \mu} \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right].
\end{aligned}$$

$$\Phi_{\text{GK}}(T, \mu, V) = -k_B T \ln Z_{\text{GK}} = -k_B T V e^{\beta \mu} \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Thermodynamik

$$\begin{aligned}
N(T, \mu, V) &= - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{T, V} = -\beta \Phi \\
P(T, \mu, V) &= - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, \mu} = -\frac{\Phi}{V} \\
&\Rightarrow PV = N k_B T
\end{aligned}$$

Die Teilchenzahlfluktuationen werden klein. In unserem Fall können wir die mittlere Teilchenzahl berechnen, das haben wir schon gemacht. Aber auch das Schwankungsquadrat.

### Flukuationen der Teilchenzahl

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \sum_{N=1}^{\infty} P(N) N = \langle N \rangle = N(T, \mu, V) = -\beta \Phi \\
\Delta N^2 &= \sum_{N=0}^{\infty} P(N) (N - \bar{N})^2 = \left\langle (\hat{N} - \bar{N})^2 \right\rangle = kT \frac{\partial \langle \hat{N} \rangle}{\partial \mu} \\
&= k_B T \frac{\partial N}{\partial \mu}
\end{aligned}$$

Die Relativen Fluktuationen sind von der Ordnung

$$\frac{\Delta N}{\bar{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{Thermodynamischer Limes}} 0$$

oder  $P(N) \rightarrow \delta(N - \bar{N})$

## Thermodynamik I

Theorie der Wärme. Sie ist eine rein Makroskopische Theorie. Das bedeutet die Theorie ist selbst dann gültig, wenn die Materie nicht aus Atome bestünde. Das ist zuerst einmal eine phänomenologische Theorie, das bedeutet sie ist basiert auf Beobachtungen. Man hat später auch versucht sie mathematisch kompakt zu beschreiben. Es geht hier um Systeme im Gleichgewicht und deren Quasi-Statistische-Transformation. Was genau das bedeutet werden wir genauer auch in der nächsten Vorlesung diskutieren. Die Theorie der Systeme die sich schnell ändern ist nicht die Theorie der Thermodynamik, sondern eine andere. Wir beginnen mit den Grundlagen, den 4 Hauptsätzen, oder auch die 3 Hauptsätze der Thermodynamik mit dem "nullten" Hauptsatz. Beginnen wir mit den Grundbegriffen.

**Thermodynamische Variablen** Temperatur, Druck Volumen, Magnetisierung und so weiter. Es gibt in dieser Theorie zwei Größen, welche man variieren kann, die Temperatur und die Entropie. Wichtig ist auch der Begriff:

**Thermodynamischer Zustand (Makrozustand)** Er ist eine Charakterisierung des Makroskopischen Systems durch thermodynamische Variablen. Zum Beispiel Temperatur, Druck für ein ideales Gas.

## Zustandsgleichungen

$$PV = Nk_B T \qquad M = \frac{\Theta}{T} B$$

Wir haben damit außerdem

## Zustandsfunktionen

$$\rho(T, P) = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T}$$

Sie können sehen, dass wir hier 4 Variablen haben, die Gleichungen eliminieren 2 davon. Wir brauchen also noch eine Gleichung.

**Keine Zustandsgrößen** Dazu zählen die Wärme und Arbeit

$$\delta Q$$

**Zustandsgrößen** Volumen  $V$ , Innere Energie  $U$  werden zu  $dV$  und  $dU$ . Physikalisch gesehen beschreiben die Zustandsgrößen den echten Zustand. In einem Gleichgewichtszustand sind die anderen Größen fest gegeben.

In einem Gedankenexperiment haben wir zwei Systeme mit einer undurchlässigen Wand. Es gibt dann Variablen der folgenden Form

- Extensive Variablen

$$X_{AB} = X_A + X_B \quad \Longleftrightarrow \quad X \propto N, V,$$

Zum Beispiel für  $X = V, N, M, U, F$ .

- Intensive Variablen

$$X_{AB} = X_A = X_B \quad \Longleftrightarrow \quad X \propto N^0, V^0$$

zum Beispiel für  $X = T, P, B$ .

Die obigen Gleichungen gelten im Gleichgewicht. Wenn man nicht im Gleichgewicht ist, so kann es sein dass einer der VARIablen nicht mehr extensiv ist. Wir fangen nun mit dem nullten Hauptsatz an.

### Der nullte Hauptsatz

Es gibt für jeden Hauptsatz formulierungen, welche äquivalent sind. Wir brauchen für die Temperatur ein zusätzliches Postulat, da wir die Temperatur nicht nur aus den mikroskopischen Postulaten ableiten können.

- I) Die Temperatur ist eine messbare charakteristische Eigenschaft eines thermodynamischen Systems.
- II) Im thermodynamischen Gleichgewicht ohne zeitliche änderung. Wir können dann eine Notation einführen  $A \overset{T}{\simeq} B$

**Satz.**

$$A \overset{T}{\simeq} B \text{ und } B \overset{T}{\simeq} C \implies A \overset{T}{\simeq} C$$

Der beweis bleibt dem Leser als Hausaufgabe überlassen. Mathematisch gesehen ist  $\overset{T}{\simeq}$  eine Äquivalenzrelation

$$\text{reflexiv } A \overset{T}{\simeq} A$$

$$\text{symmetrisch } A \overset{T}{\simeq} B \iff B \overset{T}{\simeq} A$$

transitiv 0. Hauptsatz

- Die Äquivalenzklassen sind alle thermodynamischen Systeme, die miteinander im thermodynamischen Gleichgewicht stehen.
- Thermometer
  - Referenz System mit messbarer Eigenschaft  $\Theta$ , die verschieden für jede Klasse ist.
- Empirische Temperatur  $\Theta$
- Schlussfolgerung: Alle Systeme in einer Klasse haben die gleiche Temperatur  $\Theta$ . Zwei Systeme in verschiedenen Klassen haben immer zwei verschiedene Temperaturen. Sie müssen die Temperatur als eine Zahl mit index verstehen, die charakterisiert welche Systeme im Gleichgewicht sind.

Man kann dasselbe auch mit der Masse eines Körpers vergleichen.  $A \overset{M}{\simeq} B$ . Wir werden sehen, dass man die empirische Temperatur durch eine Absolute Temperratur ersetzen kann. Aber das muss man schritt für Schritt konstruieren.