ב"ה אינפי 1 תרגיל 7, מרצה: כהן לנדר, מתרגל: יורם חצאל, מגיש: חוליו קרלר, ת.ז. 039677588

I.

(1) (8)

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+8}{x^2-4}$$

א. $D: \mathbb{R}-\{2,-2\} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

~~הפונקציה אינה זוגית ($f(-x)\neq f(x)$) ואינה אי-זוגית~~

ב. בדיקת זוגיות:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-2(-x)^2+8}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3-2x^2+8}{x^2-4}\neq f(x),\ \neq -f(x)$$

$\Rightarrow$ הפונקציה אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

הפונק' אינה מחזורית.

אי-רציפות ונקודות גבולות:

יש 2 נקודות אי-רציפות, כאשר $x=\pm 2$, שלא נמצאות בתחום. נבדוק את הגבולות באותן נקודות אלו:

$$\lim_{x\to\pm 2}\left(x^3-2x^2+8\right)=\pm 8-8+8=\pm 8$$

המונה שואף למספר (± 8 בהתאמה), והמכנה לאפס,

ומכאן שהגבולות אינסופיים, ולכן הן $\boxed{\text{נקודות אי רציפות מסוג שני}}$ (אינסופיות)

ג. אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{\frac{x^3-2x^2+8}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2+\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\left(\lim_{x\to\pm\infty} x\right)-2+0}{1-0}=\pm\infty$$

נבדוק אם יש א. משופעת $(y=ax+b)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^3-2x^2+8}{x^3}}{\frac{x^2-4}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{8}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}=1\Rightarrow a=1$$

$(a=1)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+8}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2+8-x^3+4x}{x^2-4}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+4x+8}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=-2\Rightarrow b=2$$

(המשך בדף הבא)

[illegible] | I - 5 - המשך (2) | [illegible]

סימטריה לפי ציר [illegible]

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+8}{x^2-4}$$

$$D_f: (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \ , \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1 \ , \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = -2$$

=) אסימפטוטה כאשר $x\to\pm\infty$ יש $\boxed{\text{א. משופעת ישר } y=x-2}$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{2^3-2\cdot2^2+8}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^+}} = \frac{8}{(0^+)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{2^3-2^3+8}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^-}} = \frac{8}{(0^-)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-2^3-2^3+8}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^-}} = \frac{-8}{(0^-)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-2^3-2^3+8}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^+}} = \frac{-8}{(0^+)} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{א. אנכיות לציר } x \text{ בנקודות } x=\pm2}$

ב (ח):

$$f(0) = \frac{8}{-4} = -2 \Rightarrow (0,-2)$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3-2x^2+8=0$$

קיבלנו משוואה ממעלה שלישית. [illegible] את [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible].

ג. תחומי עליה וירידה (ונקודות [illegible] [illegible])

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(3x^2-4x)(x^2-4)-(x^3-2x^2+8)2x}{(x^2-4)^2} = \cancel{3x^4-4x^3-12x^2}$$

$$= \frac{3x^4-4x^3-12x^2+16x-2x^4+4x^3-16x}{x^4-8x^2+16} = \frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}$$

(המשך [illegible])

סיכום חלק ב' עיוני

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-8}{x^2-4}$$

$$D_f=D_{f'}=D_{f''}=\mathbb{R}-\{\pm2\}$$

כאשר $x\to\pm\infty$ יש א. משופעת שהיא $y=x-2$.

כאשר $x\to\pm2$ יש 2 א. אנכיות לציר ה-x.

$$f'(x)=\frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}$$

נבדוק תחומי עלייה וירידה

$$f'(x)=0\Rightarrow x^4-12x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-12)=0\Rightarrow x^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2,3}=\{0,\pm\sqrt{12}\}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$(-\sqrt{12},-2-3\sqrt{3})$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$(0,-2)$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$(\sqrt{12},3\sqrt{3}-2)$	↗	$+\infty$

מסקנות:

הפונק' עולה כאשר x באינטרוול: $(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},+\infty)$

הפונק' יורדת כאשר x באינטרוול: $(-\sqrt{12},-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,\sqrt{12})$.

ג. מינימום מקומי: $(\sqrt{12},3\sqrt{3}-2)$

ד. מקסימום מקומי: $(-\sqrt{12},-2-3\sqrt{3})$

ה. א' רלוונטי מאחר ש: $x=\pm2$

ו. בחיתוך עם ציר ה-y! $x=0$.

אחד גדול ויותר

עכשיו נחפש נקודה ? חיתוך את ציר ה-x. יש ~~שורש~~ ... הניתן לחשב

כי לא ניתן לפתור את $f(x)=0$ וכו' $(-2,0)$. נראה לבדוק בתחום זה בשיטת הנס':

$\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, $f(0)=-2$, $f(-1)=\frac{5}{-3}$, $f(-1.5)=\frac{-1}{14}$, $f(-1.75)=\frac{223}{60}$

$f(-1.62)=1.09\ldots$, $f(-1.56)=0.42\ldots$, $f(-1.53)=0.158\ldots$, $f(-1.52)=0.78\ldots$

$f(-1.51)=0.00183\ldots\Rightarrow x=-1.51$

$\Leftarrow$ 2 נק' עם הצירים: $\boxed{(0,-2),\ (-1.51,0)}$

10. קמירות קעירות ונ. פיתול!

נגזרת

$$f'(x)=\frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}$$

(נשים לב $D_f=D_{f'}=D_{f''}$)

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^4-8x^2+16)-(x^4-12x^2)(4x^3-16x)}{((x^2-4)^2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{\cancel{4x^7}-32x^5+64x^3-24x^5+\cancel{192x^3}-384x-\cancel{4x^7}+16x^5+48x^5-\cancel{192x^3}}{(x^2-4)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{8x^5+64x^3-384x}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 8x^5+64x^3-384x=0\Rightarrow 8x(x^4+8x^2-48)=0$$

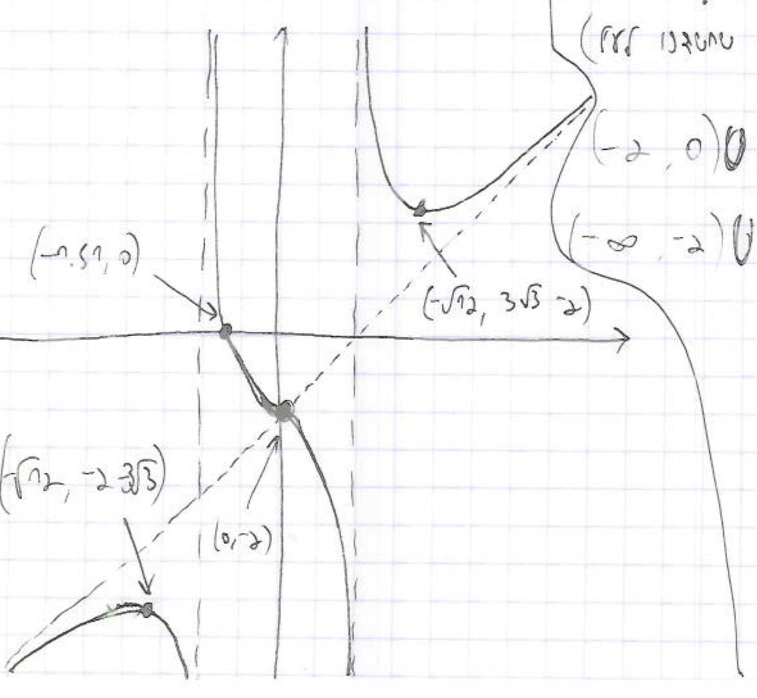
$$\Rightarrow 8x\underbrace{(x^2+12)}_{\text{חיובי לכל } x \text{ ממשי}}\underbrace{(x^2-4)}_{\text{שונה מאפס בתחום ההגדרה}}=0$$

$$\Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

נק' פיתול (כי משתנה סימן)

0 נקודות קיצון



מסקנות

תחומי קמירות כלפי מעלה ($\cup$): $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

תחומי קעירות כלפי מטה ($\cap$): $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

נ. פיתול: $(0,-2)$

נ. אי-רציפות: $x=\pm2$

(9)

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

~~א. D: $\ln x \Rightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in(0,\infty) \Leftrightarrow D: x$~~

ב. הפונקציה לא מוגדרת לשמאל אפס, ואין צורך לבדוק רציפות.
הפונ. רציפה ימנית.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{\overbrace{\lim_{x\to 0^+} x}^{0}}{\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\ln x}_{-\infty}}=0^-$$

א. D: $\ln x \Rightarrow x>0$
$\frac{(\ )}{\ln x} \Rightarrow \ln x\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$ } $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\overset{1}{x}}{\underset{0^-}{\ln x}}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{\overset{1}{x}}{\underset{0^+}{\ln x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\overset{+\infty}{x}}{\underset{+\infty}{\ln x}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

=> הנקודה $\boxed{x=1 \text{ היא נק' אי-רציפות מסוג שני}}$ (אינסופית)

ג. אסימפטוטות:

אנכיות ב-0 הפונ. מוגדרת רק מימין ואין צורך לבדוק א. אנכיות.

אנכית ב-1: הפונ. שואפת לאינסוף, לכן זוהי א. ~~אנכית~~ אנכית x=1.

~~מקביל~~ משופעות: f(∞) הפונ. שואפת לאינסוף. נבדוק אם יש א. משופעת!

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\underset{+\infty}{\ln x}}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-0\cdot x)=+\infty$$

אין א. משופעת.

מסקנה: $\boxed{\text{א. אנכית בנקודה } x=1}$

ד. נח:

$f(0)=$ לא מוגדר

$f(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ לא מוגדר.

אין נקודות חיתוך עם הצירים

רז"ח (דרך פתרון) | I - 9 (ב) | בג. פונקציה ... 7

ג. תחום עליה וירידה:

$$f(x)=\frac{x}{\ln x} \Rightarrow f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}=\underbrace{\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}}_{\text{חיובי כל תחום ההגדרה.}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e \quad , \quad f(e)=\frac{e}{1}=e$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	0^-	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	(e,e)	↗	$+\infty$

מסקנות:

א. עולה ~~...~~ בתחום $(e,+\infty)$, יורדת בתחום $(0,1)\cup(1,e)$

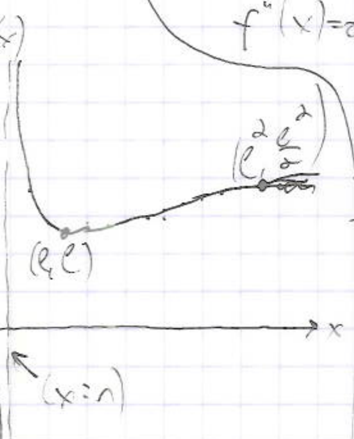
ב. אי-רציפות בנקודה $x=1$.

ג. מינימום מקומי בנקודה (e,e).

ד. קמירות קעירות ופיתול:

$$f''(x)=\frac{U'V-V'U}{V^2}=\frac{\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2\ln x}{x}(\ln x-1)}{((\ln x)^2)^2}=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{\underbrace{x(\ln x)^3}_{\text{חיובי כל תחום ההגדרה}}}$$

ה)



$$\Rightarrow f''(x)=\frac{2-\ln x}{x\cdot\ln^3 x}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=2 \Rightarrow x=e^2$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	$(e^2,\frac{e^2}{2})$	$\cap$	

מסקנות:

א. קמורה כלפי מעלה $(\cup)$ בתחום $(1,e^2)$

ב. קמורה כלפי מטה $(\cap)$ בתחום $(e^2,+\infty)\cup(0,1)$

ג. פיתול בנקודה $(e^2,\frac{e^2}{2})$

(16)

$$f(x)=\frac{e^x}{x-3}$$

א. $\frac{(\ )}{x-3} \Rightarrow x\neq 3$

$$\Rightarrow D: (-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$$

ב. הנ. אלה בגרף אלה א-סימפטוטות ואלה. מתורות
ע"י ג. א' ולשון בזוגת טאלה 0).

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\frac{\overset{0}{\lim_{x\to-\infty} e^x}}{\underbrace{\lim_{x\to-\infty}(x-3)}_{-\infty}}=0^-$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{e^3}{\underbrace{\lim_{x\to 3^-}(x-3)}_{0^-}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{e^3}{\underbrace{\lim_{x\to 3^+}(x-3)}_{0^+}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{\infty}{e^x}}{\underbrace{x-3}_{+\infty}}\ \overset{\text{לופיטל}}{=}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

⇐ ג. א' הגיעות ה.כ. $\underline{\text{מתכנסן}}$ (ט'(טלפון)).

ג. בבדיקה, אם ג א' חיובית אחד בכל ימין:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{\infty}{e^x}}{\underbrace{x^2-3x}_{\infty}}\ \overset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{\infty}{e^x}}{\underbrace{2x-3}_{\infty}}\ \overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

⇐ א' א' אנכית.

אסימפטוטות

א. אופקית $x\to-\infty,\ f(x)=0$

ב. אנכית $x\to 3^{\pm},\ f(x)=\pm\infty$

ב. נ"א:

$$f(0)=\frac{e^0}{0-3}=-\frac{1}{3}\Rightarrow\left(0,-\frac{1}{3}\right)$$

$f(x)=0 \Rightarrow$ א' פתרון.

$$\Rightarrow \boxed{\left(0,-\frac{1}{3}\right)}$$

ג.

$$f'(x)=\frac{U'V-V'U}{V^2}=\frac{e^x(x-3)-1e^x}{\underbrace{x^2-6x+9}_{\text{חיובי בכל התחום}}}=e^x\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=4$ (אין נקודות חשודות לא מתאפסים)

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	0^-	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	$(4,e^4)$	↗	$+\infty$

⇐ הנ. עולה בתחום $(4,+\infty)$
הנ. יורדת בתחום $(-\infty,3)\cup(3,4)$
ג. מינימום מקומי $(4,e^4)$
ג. א' רציפות $x=3$.

ד.

$$f''(x)=\cancel{\dots}\ e^x\left(\frac{x-4}{(x-3)^2}\right)+e^x\left(\frac{x-4}{(x-3)^2}\right)'$$

$$\left(\frac{x-4}{(x-3)^2}\right)'=\frac{(x-3)^2-(x-4)(2x-6)}{((x-3)^2)^2}=\frac{(x-3)^2-(x-4)(2x-6)}{(x-3)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=e^x\cdot\frac{(x-3)(x-3)^2+\ \dots\ 2x^2-14x+24}{(x-3)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=e^x\cdot\frac{x^3-\dots x^2+\ \dots\ -3}{(x-3)^4}$$

המשך בדף הבא

[illegible] | 7 יח' [illegible] I-מועד (2) | [illegible]

1. $f'(x)=e^x\left(\frac{x-4}{(x-3)^2}\right)$

$$(e^x\cdot u)'=e^x(u+u') \Rightarrow f''(x)=e^x\left(\frac{x-4}{(x-3)^2}+\frac{1(x-3)^2-(x-4)(2x-6)}{((x-3)^2)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{(x-3)^3-(x-4)(2x-6)}{(x-3)^4}=\frac{x^3-9x^2+27x-27-2x^2+14x-24}{(x-3)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{x^3-11x^2+41x-51}{(x-3)^4}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow x^3-11x^2+41x-51=0$$

ידוע מהנתון כי $x=3$ [illegible] לכן נחלק פולינומים:

$$\begin{array}{l} \quad x^2-8x+17 \\ x^3-11x^2+41x-51 \,|\, x-3 \\ -\ (x^3-3x^2) \\ = -8x^2+41x \\ -\ (-8x^2+24x) \\ = 17x-51 \\ \quad 17x-51 \\ = \ - \end{array}$$

$(x\neq 3$ לפי תחום$)$

$\Rightarrow x^2-8x+17=0$

$\Delta=64-68=-4$

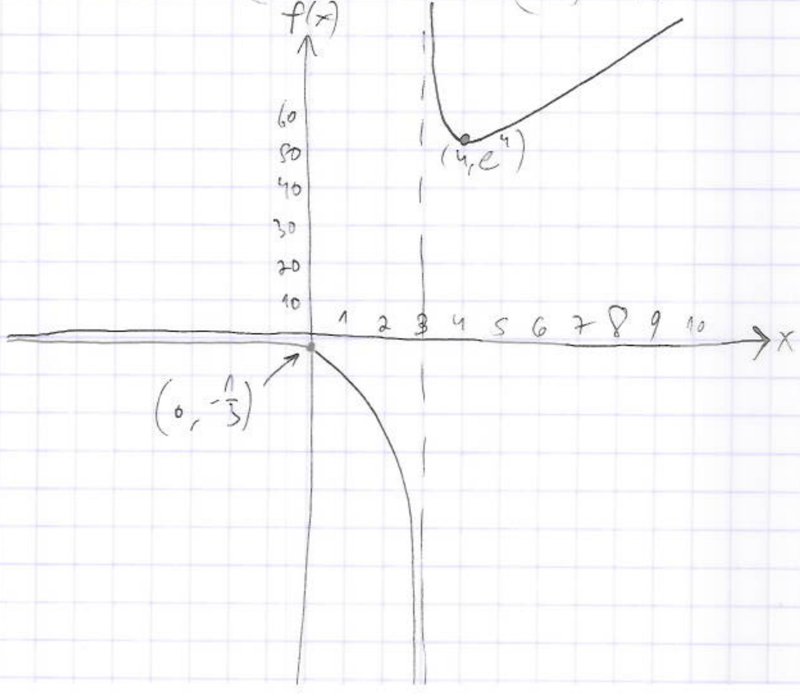
אין פתרון למשוואה $f''(x)=0$.

x	$-\infty$	3	∞
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

<u>מסקנות:</u>

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $(\cup)$ בתחום $(3,\infty)$ וכלפי מטה $(\cap)$ בתחום $(-\infty,3)$

<u>ב. (2)</u>



(1) 12 - I

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

א.

$$\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D: (-\infty, +\infty)$$

ב.

$$f(-x) = -x + \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x)$$

[illegible]

ג.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty}\right) = +\infty$$

$$\cancel{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}$$

[illegible]

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

[illegible]

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists N \in \mathbb{R}^- \ |N| > x \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

[illegible] (N) [illegible]

[illegible] $|f(x)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x + \sqrt{x^2+1}| < \varepsilon \quad /()^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{x^2+1} < \varepsilon^2 - x^2 - 1 \quad /()^2$$

$$\Rightarrow 4x^2(x^2+1) > \varepsilon^4 + x^4 + 1 + 2x^2 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 x^2$$

[illegible]

$$\Rightarrow 4x^4 + 4x^2 - \varepsilon^4 - x^4 - 1 - 2x^2 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 x^2 > 0$$

[illegible] $t = x^2$

$$\cancel{\Rightarrow 3t^2 + (2-2\varepsilon^2)t - (\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1) > 0}$$

$$\cancel{\Delta = 4 + 8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 + 12\varepsilon^4 + 24\varepsilon^2 + 12}$$

$$\cancel{\Delta = 16\varepsilon^4 + 32\varepsilon^2 + 16 = 16(\varepsilon^2+1)^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2\varepsilon^2 - 2 \pm 4(\varepsilon^2+1)}{6}}$$

$$\cancel{t_1 = \frac{6\varepsilon^2 + 2}{6} = \varepsilon^2 + \frac{1}{3}}$$

$$\cancel{t_2 = \frac{-2\varepsilon^2 - 6}{6} = -\frac{\varepsilon^2}{3} - 1}$$

~~[illegible]~~

$$\cancel{\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

[illegible] $t = x^2$

$$\Rightarrow 3t^2 + (2+2\varepsilon^2)t + (2\varepsilon^2 - 1 - \varepsilon^4) > 0$$

$$\Delta = 4 + 8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 + 12 + 12\varepsilon^4 - 24\varepsilon^2$$

$$\Delta = 16\varepsilon^4 - 16\varepsilon^2 + 16 = 16\underbrace{(\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 1)}_{[illegible]}$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 - 2\varepsilon^2 \pm 4\sqrt{\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 1}}{6}$$

[illegible] $\sqrt{\frac{-2-2\varepsilon^2+4\sqrt{\varepsilon^4-\varepsilon^2+1}}{6}} < |x|$ [illegible]

[illegible]

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

[illegible]

[illegible]

בגרות ... (2) 12-I | עמוד ...

סיכום עד עכשיו:

$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

$D: (-\infty, +\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

ב) חיתוך:

$f(0) = 0 + \sqrt{0+1} = 1 \Rightarrow (0,1)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = -x \; (\Rightarrow x<0)$

$\Rightarrow x^2+1 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$

⇐ אין פתרון.

⇐ רק חיתוך $\boxed{0,1}$

$f'(x) = 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

מכיון שלמדנו כי $f(x) \neq 0$ לכן אין נקודות קיצון.

⇐ הפונקציה $\boxed{\text{עולה}}$ בכל תחום ההגדרה.

$~~f''(x) = 0 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot 2x}{(\sqrt{x^2+1})^2}~~$

$~~f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - 2x^2}{x^2+1}~~$

$~~f''(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x^2~~$

$~~\Rightarrow x^2+1 = 4x^4~~$

$~~t = x^2 \quad t>0~~$

$~~\Rightarrow 4t^2 - t - 1 = 0~~$

$~~\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{8}~~$ $~~\frac{1+\sqrt{17}}{8} = 0.64\ldots~~$ $~~\frac{1-\sqrt{17}}{8} = -0.39~~$

$~~\Rightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}} = \pm 0.8\ldots~~$

x	$-\infty$		-0.8		0.8		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		∩		∪		∩	

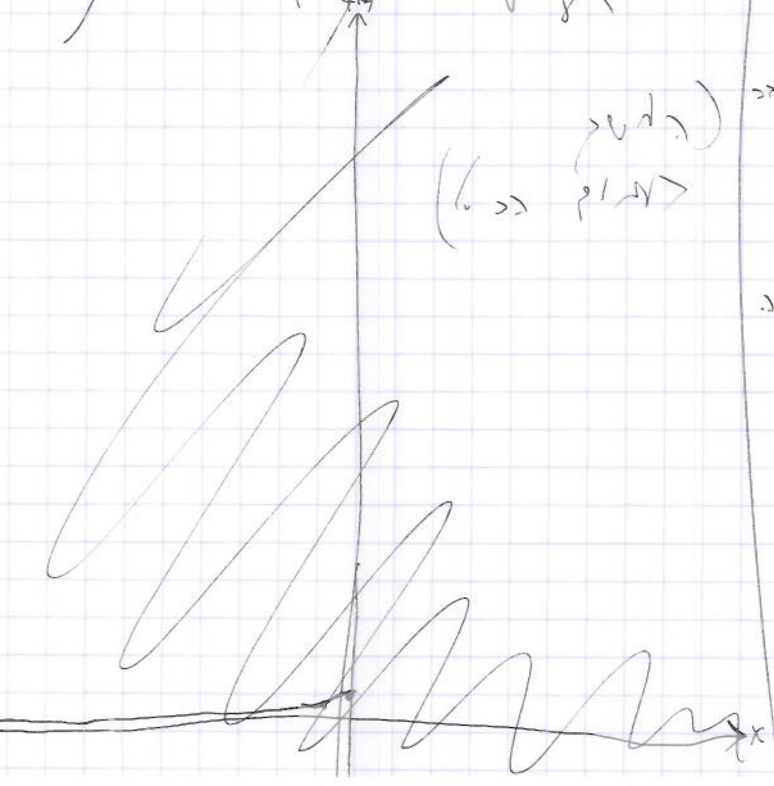
פיתול $(-0.8, 0.48\ldots)$

פיתול $(0.8, 2.08\ldots)$

~~קמירות: תח. קמורה כלפי מטה: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}, +\infty\right)$~~

~~תח. קעורה כלפי מעלה: $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}\right)$~~

~~פיתול $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}$~~



המשך: ו. לנסות ג - ה. אסימפטוטות

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \overset{(\lim)}{=} 1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{(\lim)}{=} 1+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$x>0$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=1+\sqrt{1+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}_{0}}$$

$$=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

(ס"ו) המינוס כנ"ל (גורם לכך)

⇐ ה. אסימפטוטה לישר $y=2x$

מסקנות:

כאשר $x\to-\infty$ יש ה. אופקית $y=0$

וכאשר $x\to+\infty$ יש ה. משופעת $y=2x$

ג.

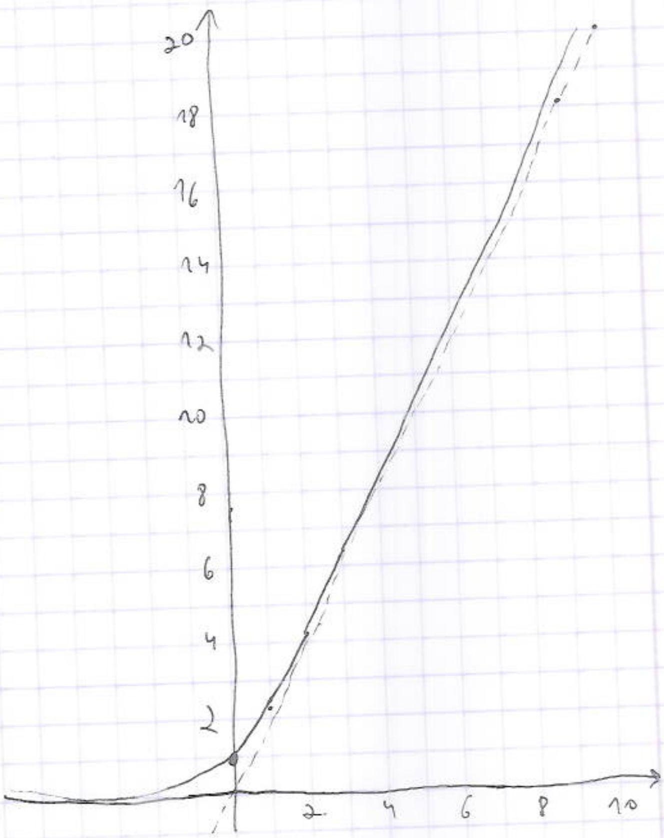
$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=0+\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}^3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

כמו כן הנגזרת השנייה אינה מתאפסת, ולכן חיובית תמיד, ולכן הפונקציה $\boxed{\text{תמיד}}$ קמורה כלפי מטה. $\boxed{(\cup)}$.

גרף:



ג'ו. לימון 7 | I - (13) (1) | נסים דף

$$f(x)=\frac{x+2}{|x|-1}$$

א. $|x|-1\neq 0 \Rightarrow x\neq\pm1 \Rightarrow D:(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

ב. ה.ה. אין בעזרת גבול ש-לבדוק גבולות אינסופיים

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{-1-\frac{1}{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{1}{\lim_{x\to1^+} x-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{1}{\lim_{x\to1^-} x-1}=-\infty$$

באותו חשבון (כמו) גבולות הנותרים (כשאיפה $x\to1$).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

מקור שני

ב. ה. הנקודות אין ~~[illegible]~~ (לחיתוכים)

ג. א. אסימפטוטות:

$x\to-\infty$, $y=-1$

$x\to+\infty$, $y=1$

$x\to\pm1^\pm$, $y=\pm\infty$

ב. אנכיות:

ד. נח:

$f(0)=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow \boxed{(0,-2)}$

$f(x)=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow \boxed{(-2,0)}$

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2}-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(|x|-1)-\frac{x}{\sqrt{x^2}}\cdot(x+2)}{(|x|-1)^2}=\frac{|x|-1-\frac{2x}{|x|}}{(|x|-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-|x|-2x}{|x|(|x|-1)^2} \Rightarrow D_{f'}:\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow |x|=-2x \Rightarrow x=0 \Rightarrow$

(המשך בעמוד הבא)

ג. תחומי עליה וירידה:

x	$-\infty$	-1		0		1	∞
$f'(x)$	+		+		−		−
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$		$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$

נ. קיצון $\boxed{\text{מקס.}}$

$(0,-2)$

מסקנות:

הפונקציה עולה כאשר x בתחום $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

הפונקציה יורדת כאשר x בתחום $(1,\infty)$

הנקודה $(0,-2)$ היא נקודת קיצון מקס. - מקסימום מקומי.

והנקודות $x=\pm 1$ הן נקודות אי-רציפות.

1.

$$f'(x)=\frac{1-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}}{(\sqrt{x^2}-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

$U=1-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}$; $U'=\frac{2\sqrt{x^2}-2x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{x^2}=0$

$V=x^2-2\sqrt{x^2}+1$; $V'=2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{0-\left(1-\frac{2x}{\sqrt{x^2}}\right)\left(2x\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)\right)}{\left((|x|-1)^2\right)^2}=\frac{-2x\left(\sqrt{x^2}-2x\right)\left(\sqrt{x^2}-1\right)}{\underbrace{x^2(|x|-1)^4}_{\text{מאשר וחיובי לכל x בתחום של f'}}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2x(|x|-2x)(|x|-1)=0 \;/:\big(x(|x|-1)\big) \Rightarrow |x|=2x \;/:x \Rightarrow \frac{|x|}{x}=2$$

שונים מאפס לכל x בתחום

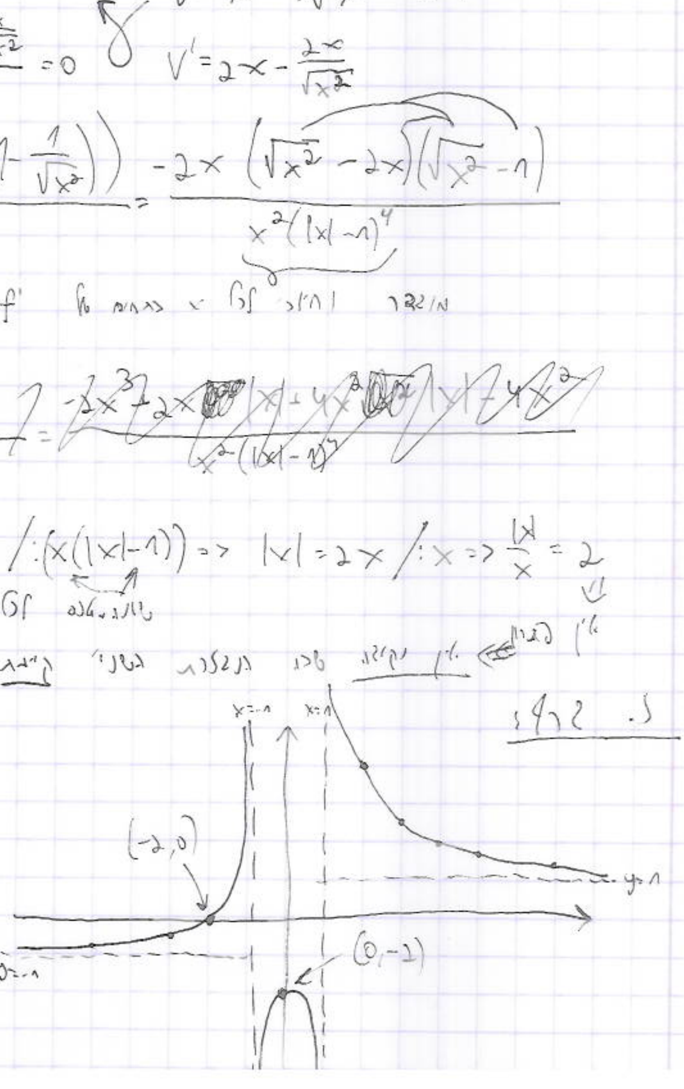
אין פתרון

אין נקודות פיתול כי הנגזרת השנייה קיימת ומתאפסת.

x	$-\infty$	-1		0		1	∞
$f''(x)$	+		−		−		+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$

נק. קיצון

ג. גרף:



מסקנות:

בתחום $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ הגרף קמור כלפי מעלה ($\cup$)

בתחום $(-1,0)\cup(0,1)$ - - - מטה ($\cap$)

כאשר $x=0$ יש נקודת קיצון, וכאשר $x=\pm 1$ יש אי רציפות.

$$\begin{cases} f(x) = x\cdot\ln x & x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

לחקור את הפונקציה משאלה I:

$D: [0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\overset{0}{x}\cdot\overset{-\infty}{\ln x}) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{\infty}{x^{-1}}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -x = 0$$

רנ. רציפה ~~מימין~~ בתחום הגדרה.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \overset{+\infty}{x}\,\overset{+\infty}{\ln x} = +\infty$$

נותר רק לבדוק האם יש אסימפטוטה משופעת?

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$$

מסקנה: אין אסימפטוטות!

חיתוך:

$f(0)=0 \quad f(x)=0 \Rightarrow x\ln x = 0 \Rightarrow$ $x=0$ (נפסל)

$\ln x = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

$$\Rightarrow \boxed{(0,0),\ (1,0)}$$

נגזרת: (כי חיוב מנקודת 0)

$f'(x) = uv'+u'v = 1+\ln x \qquad f'(x)=0 \Rightarrow x=e^{-1}$

x	0		e^{-1}	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$(e^{-1}, -e^{-1})$	$\nearrow +\infty$

נגדיר את הנגזרת הימנית ב-$x\to 0^+$

$$\frac{df(0)}{dx} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{h\ln h}{h} = \lim_{h\to 0^+}\ln h = -\infty$$

⇐ כלומר הגרף הפונקציה משיק לציר ה-y, האם כאן לגזור "משיק" אני מתכוון רציף.
כלומר: התשובה לשאלה "האם יש משיק בנקודה הזאת" היא לשאלה "האם יש משיק לגרף בנקודה"?

מסקנות:
הפונקציה עולה בתחום $(e^{-1}, +\infty)$
הפונקציה יורדת בתחום $(0, e^{-1})$
הנקודה $(e^{-1}, -e^{-1})$ שהיא ~~מקסימום~~ מינימום מקומי.
והנקודה $(0,0)$ היא נקודת מקסימום מקומי. (המשך בעמוד הבא)

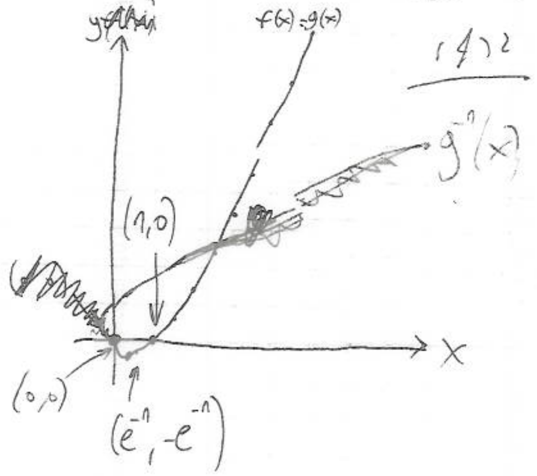
נמצא את החקירה בתחומי קמירות וקעירות:

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

x	0	∞
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	$\cup$	

⇐ הפונקציה "מחייכת" $(\cup)$ בכל תחום ההגדרה.

גרף:



ב. על תחומי העלייה, הירידה, והגבולות, וכפי שמשתקף בגרף - הפונקציה g בתחום הנתון היא חח"ע וגם על, ולכן היא הפיכה.

ג. הוספתי את גרף ההפיכה על הגרף הקודם, על ידי שיקוף כאמור לישר $y=x$.
(תחומי [illegible] ...)

ד. מגרף הפונקציות בגרף של $f(x)$ רואים כך:

⇐ כאשר $m<-e^{-1}$ אין פתרון ($f(x)\geq -e^{-1}$ לכל x)

כאשר $0\geq m>-e^{-1}$ יש 2 פתרונות (בקטע זה יש ירידה ועליה)

כאשר $0<m$ או $m=-e^{-1}$ אז יש פ. יחיד (בנקודות אלו הפ. עוברת רק פעם אחת)

[illegible] | $② - \mathrm{III}$ | [illegible]

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ \Rightarrow f'(x) &= 3ax^2+2bx+c \\ \Rightarrow f''(x) &= 6ax+2b \end{aligned}}$$

נתונים

$f(1)=3 \Rightarrow a+b+c+d=3$

$f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0$

$f(2)=-1 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=-1$

$f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0$

נקבל מערכת ליניארית של 4 משוואות, נפתור (גאוס) בעזרת מטריצות!

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_3-R_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \cdot \frac{1}{2} \\ R_2-R_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \frac{1}{2}R_4-\frac{1}{2}R_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} R_1-R_4 \\ R_2-12R_4 \\ R_3-3R_4 \\ R_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1-R_3 \\ R_2-4R_3 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} R_1-R_2 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \cancel{\boxed{f(x)=5x^3-6x+2}}$

$\Rightarrow \boxed{f(x)=2x^3-6x^2+7}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 6x^2-12x \\ f''(x) = 12x-12 \end{cases}$$

(4)

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x(x+3)}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a+\overset{0}{\frac{b}{x}}+\overset{0}{\frac{c}{x^2}}}{1+\underset{0}{\frac{3}{x}}}=a$$

$$\Rightarrow \boxed{a=-2}\quad\left(\Rightarrow f(x)=\frac{-2x^2+bx+c}{x+3}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x^2+bx+c}{x+3}+2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+bx+c+2x^2+6x}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(b+6)x+c}{x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b+6+\overset{0}{\frac{c}{x}}}{1+\underset{0}{\frac{3}{x}}}=b+6$$

$$\Rightarrow 3=b+6\Rightarrow b=-3\quad\left(\Rightarrow f(x)=\frac{-2x^2-3x+c}{x+3}\right)$$

$$f(1)=-3+2=-1\Rightarrow\frac{-2-3+c}{4}=-1\Rightarrow -5+c=-4\Rightarrow c=1$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{-2x^2-3x+1}{x+3}}$$

---

(6) עד כה [illegible] (2), הנקודה [illegible] של משוואת העקומות C_m היא:

$$f''(x)=6mx+6m$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6mx=-6m\Rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=-\cancel{m}+\cancel{3m}+\cancel{8m}-5-\cancel{10m}-3=-8$$

⇐ נקודת הפיתול היא: $\boxed{(-1,-8)}$ $\boxed{\text{מ.ש.}}$

(מכיוון ש $m\neq0$ לכן [illegible] [illegible] ו[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible])

דניאל סרגיי | ⑤, ④, ② IV | ליונ' ה' קבוצה 7 | ב"ה

② $1-\ln x = 6x+x^2 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^2+6x+\ln x \\ f(x)=1 \end{cases}$ $D: x>0$

נבחן, עם התחום של וריאנט

$f'(x)=2x+6+\frac{1}{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2+6x+1=0$, $x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-8}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$ → $-0.177...$, $-2.822...$ } נמצאים מחוץ לתחום ההגדרה!

$\Rightarrow f'(x)>0$

לכל x

$\Rightarrow$ ה.כ. חח"ע לכל תחום ההגדרה.

הפונקציה רציפה וגם ערכי הגבולות והקצוות של התחום שונים!

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \overset{0}{x^2}+\overset{0}{6x}+\overset{-\infty}{\ln x} = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \overset{+\infty}{x^2}+\overset{+\infty}{6x}+\overset{+\infty}{\ln x} = +\infty$

$\Rightarrow$ ה.ט. היא כל $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ לכל $y\in\mathbb{R}$ יש $\boxed{\text{פתרון אחד ויחיד}}$ x – כלומר שונה מן הכלל.

④ $3x^2=9x-x^3-7$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^3+3x^2-9x \\ f(x)=-7 \end{cases}$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\{1,-3\}$

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$(-3,27)$ $(1,-5)$

על התחום הזה (מינוס אינסוף – x^3) ועליה (מינוס אינסוף – x^3) ראינו כי הפונ' חותכת את $y=-7$ רק פעם

אחת בלבד, כלומר $x<-3$, ולכן $\boxed{\text{יש למשוואה פתרון יחיד}}$

⑤ $x^3+3x^2=9x-3 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^3+3x^2-9x \\ f(x)=-3 \end{cases}$

לכן, לאור הטבלה מסעיף ד, וראינו שערך $y=-3$ (נוגע) חותך 3 פעמים, ולכן $\boxed{\text{יש למשוואה 3 פתרונות}}$