ב"ה. אלגברה לינארית א' תרגיל 4, מרצה: ד"ר רייסין, מתרגל: יהושע אוליביה קוך

מגיש: עזריאל ברגר, ת.ז. 039677588

(1) כדי להוכיח שקבוצה היא תת-מרחב וקטורי צריך לבדוק 3 תנאים:

I. הקבוצה אינה ריקה ($A\neq\phi$).

II. הקבוצה סגורה תחת חיבור ($\forall a,b\in A\ \exists c\in A | c=a+b$)

III. הקבוצה סגורה תחת כפל בסקלר ($\forall a\in A\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \exists b\in A | b=\alpha\cdot a$)

ועכשיו לתרגילים:

(ג) $\left\{s\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix} : s,t\in\mathbb{R}\right\}$

I. הקבוצה אינה ריקה, לדוגמה היא מכילה את הוקטור "האפס" $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

II. סגורה תחת חיבור:

יהיו x,y איברים בקבוצה כך: $x=a\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$, $y=c\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow x+y=(a+c)\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}+(b+d)\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$ ✓ $\Rightarrow$ הקבוצה סגורה תחת חיבור.

III. סגורה תחת כפל בסקלר:

יהי x איבר בקבוצה (כנ"ל) ו-α סקלר כלשהו.

$\Rightarrow \alpha\cdot x=\alpha\left(a\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}\right)=\alpha a\begin{pmatrix}8\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha\cdot b\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$ ✓ $\Rightarrow$

הקבוצה סגורה תחת כפל בסקלר.

$\Leftarrow$ הקבוצה היא תת מרחב וקטורי (כי קיימים שלושת התנאים)

ב"ה לינארית תרגיל 4 | 1) ג - ו | עזריאל ברגר

ג. הקבוצה אינה ריקה (למשל: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$).

הקבוצה סגורה תחת חיבור:

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=(a+b)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

וכן היא סגורה תחת כפל בסקלר:

$$\alpha\cdot\left[a\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]=(\alpha a)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

⇐ הקבוצה היא מרחב וקטורי (תת מרחב). מ.ש.ל.

ד. 1. $ax^2+bx : a,b\in\mathbb{R}$

הקבוצה אינה ריקה (למשל: x^2+x ⟸ $a=b=1$).

הקבוצה סגורה תחת חיבור:

$$(a_1x^2+b_1x)+(a_2x^2+b_2x)=(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x \checkmark$$

והיא סגורה תחת כפל בסקלר:

$$\alpha(ax^2+bx)=(\alpha a)x^2+(\alpha b)x \checkmark$$

⇐ הקבוצה היא מרחב וקטורי (של פולינומים מעלה שניה ללא מקדם חופשי) מ.ש.ל.

ה. הקבוצה לא ריקה (לדוגמה: $t=1$).

היא סגורה תחת חיבור, ותחת כפל בסקלר - כמו הקבוצה בסעיף ג, רק ~~[illegible]~~ שצריך לזכור את השורש:

$$a^3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+b^3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\left(\sqrt[3]{a^3+b^3}\right)^3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \checkmark,\quad \alpha\left[a^3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]=\left(\sqrt[3]{\alpha}\cdot a\right)^3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

⇐ הקבוצה היא מרחב וקטורי. מ.ש.ל.

ו. הקבוצה לא סגורה תחת כפל בסקלר. לדוגמה:

$$t=i \Rightarrow i^2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix},\quad (-1)\cdot t^2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=(i)^2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$i\notin\mathbb{R}$, כלומר יצאנו ~~[illegible]~~ מהגדרת הקבוצה.

⇐ הקבוצה אינה מרחב וקטורי (היא לא סגורה תחת כפל בסקלר).

ב"ה ליניארית א' תרגיל 4 | (1) יב', (2) | עזריאל ברגר

יב. הקבוצה אינה מרחב וקטורי כיון שהיא אינה סגורה ~~בכפל בסקלר~~ תחת חיבור.
לדוגמא:

$f(x)=14x,\quad g(x)=x+6.5$

$f(0.5)=7,\quad g(0.5)=7$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=15x+6.5$

$\Rightarrow \cancel{(f+g)(x)}\ (f+g)(0.5)=\boxed{14}$

$14\neq 7$ מ.ש.ל.

יג. דוגמא לכך שהקבוצה אינה סגורה תחת חיבור:

$K_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad K_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad (K_1+K_2)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

מ.ש.ל.

(2) יב. נבדוק את התנאים של U:

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Rightarrow a-16a+b-8b+c-4c+d-2d+e-e=0$

$\Rightarrow 15a+7b+3c+d=0\ ,\quad e\in\mathbb{R}$ (כלומר)

הקבוצה כמובן אינה ריקה. לדוגמא:

$p(x)=x^4+3x^3-7x^2-15x+e \Rightarrow p(1)=1+3-7-15+e=-18+e$

$p(2)=16+24-28-30+e=-18+e$

$\Rightarrow p(1)-p(2)=0$

ניקח שני איברים כלליים, ונבדוק האם הם סגורים תחת חיבור:

$P_1(x)=a_1x^4+b_1x^3+c_1x^2+d_1x+e_1 \mid 15a_1+7b_1+3c_1+d_1=0\ ,\ e_1\in\mathbb{R}$

$P_2(x)=a_2x^4+b_2x^3+c_2x^2+d_2x+e_2 \mid 15a_2+7b_2+3c_2+d_2=0,\ e_2\in\mathbb{R}$

$(P_1+P_2)(x)=(a_1+a_2)x^4+(b_1+b_2)x^3+(c_1+c_2)x^2+(d_1+d_2)x+e_1+e_2$

כי כל אחד הוא סכום המשוואות, כך רק כסכום של סכומי שני המקדמים יהיה
$0+0=0$ ✓

$\alpha P_1(x)=\alpha(a_1x^4+b_1x^3+c_1x^2+d_1x+e)$

אם כך הסכום יהיה $\alpha\cdot 0=0$

מ.ש.ל.

ב"ה. לינארית 1 תרגיל 4 / (3) - (4) - (5) - (7) / עזריאל ברגר

(3) א. הקבוצה אינה ריקה לדוגמא:

$(a_2=0)$ $1+2x^3$

הקבוצה סגורה תחת חיבור:

$U_1: a_0+a_1x+a_3x^3$
$U_2: b_0+b_1x+b_3x^3$
$\Rightarrow (U_1+U_2)=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_3+b_3)x^3$ ✓

הקבוצה סגורה תחת כפל בסקלר:

$\alpha U_1=\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_3x^3$ ✓

מ.ש.ל.

ב. הקבוצה אינה סגורה תחת כפל בסקלר. לדוגמא:

$U: a_0+a_1x-x^2+a_3x^3$, $\alpha U=\alpha a_0+\alpha a_1-\alpha x^2+\alpha a_3x^3$

וזה $(\alpha\neq 1)$ יצא מהקבוצה.

מ.ש.ל.

---

(4) א. $A_1:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A_2:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $A_1+A_2:\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin U_1\cup U_2$

ב. $A_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $A_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $A_1+A_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}\notin U_1\cup U_2$

---

(5) ב.

$U_1:\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=0\}$

$U_2:\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2=0\} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$

$U_1\cup U_2=U_1$

שאלה 6 בקובץ נפרד

---

(7) ב. w אינו (בהכרח) תת-מרחב, כי:

$V_2=2\cdot V_1$

לכן צריך רק לבדוק אם w (בהכרח) תת-מרחב [illegible] ע"י v_1, וכו'
כי [illegible] (אפילו [illegible]).

מ.ש.ל.

ב"ה	לינארית א' תרגיל 4	שאלה 6-ג	עזריאל ברגר

ג' - 6

(הנחתי שהכוונה לפונקציות ממשיות על ℝ, ובתחום - כנראה)

א) הקבוצה אינה ריקה, כיון שיש לפחות פונקציה אחת שגזירה בנקודה a. לדוגמה: $f(x)=x \Leftarrow f'(x)=1$.

ב) הקבוצה סגורה תחת חיבור, כיון שנגזרת של סכום פונקציות הגזירות מסוים פונקציות שווה ~~[illegible]~~ לסכום הנגזרות של 2 הפונקציות. בנוסף, ולכן סכום של פונקציות גזירות נותן פונקציה גזירה.

$$\boxed{(u+v)' = u'+v'}$$

ג) הקבוצה סגורה תחת כפל בסקלר, כיון שהכפלת פונקציה גזירה בסקלר נותנת פונקציה גזירה, שנגזרתה שווה למכפלת הנגזרת המקורית באותו סקלר.

$$\boxed{(\alpha u)' = \alpha \cdot u'}$$

$\Leftarrow$ הקבוצה היא תת-מרחב של $C(a)$ מ.ש.ל.

ב"ה | ליניארית א' תרגיל 4 | 8-ב. | עזריאל ברגר

8) ב. טענה:

$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \middle| x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$ הוא מ.ו.

ביחס לפעולות:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}$$

ברצוני לבדוק את כל סח הכללים, ולראות שרק אחת מהן לא מתקיימת.

א. $U+V\in V$: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}$ ✓ (מכיוון ש-$\mathbb{R}$ סגורה תחת חיבור וחיסור)

ב. $V+U=U+V$: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}y_1+x_1\\y_2-x_2\end{pmatrix}\Rightarrow x_2-y_2\overset{?}{=}-(x_2-y_2)$

מתקיים רק כאשר $x_2=y_2$, ולכן ש-V איננו מ.ו.

למרות הנ"ל, אבדוק את האקסיומות של V את 8 הכללים האחרים:

ג. $U+(V+W)=(U+V)+W \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y_1+z_1\\y_2-z_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1+y_1+z_1\\x_2-y_2+z_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}x_1+y_1+z_1\\x_2-y_2-z_2\end{pmatrix}\Rightarrow z_2\overset{?}{=}-z_2$ מתקיים רק כאשר $z_2=0$. גם מכאן רואים ש-V איננו מ.ו.

ד. איבר ניטרלי

קיים איבר ניטרלי והוא $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ✓

ה. $U+V=V+U=0 \Leftrightarrow U=-V \Rightarrow U:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow V=\begin{pmatrix}-x_1\\x_2\end{pmatrix}$ ✓

ו. סגור תחת כפל ✓ (הגדרנו את הנתון)

ז. $\alpha(U+V)=\alpha U+\alpha V \Rightarrow \alpha\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]\overset{?}{=}\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\oplus\alpha\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha y_1\\\alpha x_2-\alpha y_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha y_1\\\alpha x_2-\alpha y_2\end{pmatrix}$ ✓

ח. $(\alpha+\beta)U=\alpha U+\beta U \Rightarrow (\alpha+\beta)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)x_1\\(\alpha+\beta)x_2\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)x_1\\(\alpha-\beta)x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\beta=-\beta$

מתקיים רק כאשר $\beta=0$, הראינו ש-V איננו מ.ו.!

ט. $\alpha(\beta V)=(\alpha\beta)V$ ✓

י. $1\cdot V=V$ ✓

סיכום: הקבוצה V מקיימת 7 אקסיומות, אך אינה מקיימת את הכללים: ב, ג, ח,

ולכן הטענה V $\boxed{\text{איננה מרחב וקטורי}}$.

ב"ה | ליניארית א תרגיל ד | 10 - ח | עזריאל ברגר

(10) נשים לב: שני איברים כלליים, ונוכיח סגירות תחת חיבור וכפל בסקלר:

$$A_1\begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & d & e \\ -c & -e & f \end{pmatrix} \quad A_2\begin{pmatrix} g & h & i \\ -h & j & k \\ -i & -k & l \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1+A_2=\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ -(b+h) & d+j & e+k \\ -(c+i) & -(e+k) & f+l \end{pmatrix}$$

$$\alpha A_1=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ -\alpha b & \alpha d & \alpha e \\ -\alpha c & -\alpha e & \alpha f \end{pmatrix}$$

מצאנו [illegible] סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר, ולכן היא תת-מרחב-וקטורי. מש"ל

(11) נבחר כנ"ל ונוכיח כנ"ל:

$$A_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+bi & c+di & e+fi \\ g+hi & j+ki & l+mi \end{pmatrix} \quad A_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n+oi & p+qi & r+si \\ t+ui & v+wi & x+yi \end{pmatrix}$$

שים לב: [illegible] אות z

$$\Rightarrow A_1+A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+n+(b+z)i & c+p+(d+q)i & e+r+(f+s)i \\ g+t+(h+u)i & j+v+(k+w)i & l+x+(m+y)i \end{pmatrix}$$

$$\alpha A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha a+\alpha bi & \alpha c+\alpha di & \alpha e+\alpha fi \\ \alpha g+\alpha hi & \alpha j+\alpha ki & \alpha l+\alpha mi \end{pmatrix}$$

קיבלנו סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר, ולכן היא תת-מרחב-וקטורי. מש"ל