תרגיל 1 - A
[illegible]

ב"ה

אינפי - תרגיל 1

A

1+3) הוכח ש-$\sqrt{3}$ אינו רציונלי (וכן ש-$\sqrt{6}$ אינו רציונלי).

נוכיח בדרך השלילה:

נניח כי $\sqrt{3}$ $(\sqrt{6})$ הוא רציונלי, כלומר $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ $(\sqrt{6})$ $(m,n \in \mathbb{Z})$, נצמצם את השבר $\frac{m}{n}$ עד "הסוף" כך שהמספרים m,n זרים זה לזה, ונבדוק האם הם זרים באמת:

$$\sqrt{3} \; (\sqrt{6}) = \frac{m}{n} \; /()^2 \Rightarrow 3 \; (6) = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 3n^2 \; (6n^2) = m^2$$

$$3|3n^2 \; (3|6n^2) \Rightarrow 3|m^2 \; (3|m^2) \Rightarrow 3|(m\cdot m) \Rightarrow 3|m$$

3 הוא מספר ראשוני, והוא מחלק מכפלת שלמים,
ולכן הוא מחלק לפחות אחד מהם. שני הגורמים הם m, ולכן:

$$3|m \Rightarrow \frac{m}{3} = m_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n^2 \; (6n^2) = 9m_1^2 \; /:3 \Rightarrow n^2 \; (2n^2) = 3m_1^2$$

$$3|m_1^2 \Rightarrow 3|n^2 \; (2n^2) \Rightarrow 3|(n\cdot n) \; (2n\cdot n) \Rightarrow 3|n \Rightarrow \frac{n}{3} = n_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\cancel{3}m_1}{\cancel{3}n_1} = \frac{m_1}{n_1}$$

⇐ השבר $\frac{m}{n}$ חייב להיות ניתן לצמצום ע"י 3, וזה סותר את הנחתנו שצמצמנו אותו עד הסוף,
לנתון שניתן לצמצם אותו כך שהמספרים זרים זה לזה.

---

2) הוכח כי $1+\sqrt{2}$ אינו רציונלי.

נוכיח בדרך השלילה:

נניח כי $1+\sqrt{2}$ רציונלי. ⇐ $1+\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{m-n}{n} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \rightarrow$$ דבר זה אינו נכון

שהוכחנו בכיתה - הוכחה כי המספר $1+\sqrt{2}$ אינו רציונלי!

---

4) הוכח כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ אינו רציונלי.

נוכיח בדרך השלילה:

נניח כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ רציונלי. ⇐ $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{m}{n}$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \frac{m^2}{n^2} \; /-5 \Rightarrow 2\sqrt{6} = \frac{m^2}{n^2} - 5 \; /:2$$

$$\sqrt{6} = \frac{m^2 - 5n^2}{2n^2} \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q} \rightarrow$$ דבר זה אינו נכון, וכפי שהוכחנו בסעיף א'.

מרצה: ד"ר ולדימיר לנדר
מתרגל: יורם חדאד

מגיש: עזריאל ברגר
ת.ז. 039677588

ב"ה

אינפי - תרגיל 1

עזריאל ברגר | תרגיל 1-B (1-7)

B

הוכחת נכונות הטענות
ובדיקה אם יש טענות השגויות ע"י דוגמא נגדית.

1. סכום של שני מספרים רציונליים הוא רציונלי.
2. הפרש ~ ~ ~ ~ ~ ~

נסמן את המספרים $r_1=\frac{m_1}{n_1}$, $r_2=\frac{m_2}{n_2}$

$$r_1\pm r_2=\frac{m_1}{n_1}\pm\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2\pm m_1n_1}{n_1n_2}$$

סכום הפרש ומכפלת מספרים שלמים הוא שלם, ולכן קיבלנו מספר רציונלי. ✓

3. מכפלה של מספרים רציונליים נותנת מספר רציונלי.

$$r_1=\frac{m_1}{n_1},\ r_2=\frac{m_2}{n_2} \Rightarrow r_1\cdot r_2=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}$$

מכפלת מספרים שלמים נותנת מספר שלם ולכן קיבלנו מספר רציונלי. ✓

4. סכום של שני מספרים אי-רציונליים הוא אי-רציונלי.

✗ לא נכון! לדוגמא:

$r_1=1+\sqrt{2},\ r_2=-\sqrt{2}$

$$r_1+r_2=1+\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=1\in\mathbb{Q}$$

5. הפרש של שני מספרים אי-רציונליים הוא אי-רציונלי.

✗ לא נכון! לדוגמא:

$r_1=1+\sqrt{2},\ r_2=\sqrt{2}$

$$r_1-r_2=1+\sqrt{2}-(\sqrt{2})=1\in\mathbb{Q}$$

6. מכפלת שני מספרים אי-רציונליים נותנת מספר אי-רציונלי.

✗ לא נכון! לדוגמא:

$r_1=\sqrt{2},\ r_2=\sqrt{8}$

$$r_1r_2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4\in\mathbb{Q}$$

7. חיבור מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי נותן מספר אי-רציונלי.

הוכחה בדרך השלילה:

נניח כי קיימים שני מספרים רציונליים Q_1, Q_2 ומספר אי-רציונלי r_1 המקיימים:

$$Q_1+r_1=Q_2 \Rightarrow r_1=Q_2-Q_1 \Rightarrow r_1\in\mathbb{Q}$$

הגענו לסתירה!

(המשך בדף הבא)

עזריאל ברגר | תרגיל 2

B-8

C

אינפי - תרגיל 2

B-8

(אם הטענה נכונה - הוכח, אם לא - הבא דוגמה נגדית)

המכפלה של שני מספרים: האחד רציונלי שונה מאפס, והשני אי-רציונלי - היא מספר ~~רציונלי~~ אי-רציונלי.

הוכחה בשלילה:

נניח כי קיים מספר אי-רציונלי (r_1), ושני מספרים רציונליים ($Q_1=\frac{m_1}{n_1}, Q_2=\frac{m_2}{n_2}$)

המקיימים את השוויון: $Q_1 r_1 = Q_2$

$\Rightarrow \frac{m_1 r_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \quad / \cdot \frac{n_1}{m_1} \Rightarrow \frac{n_1 m_2}{m_1 n_2} = r_1 \Rightarrow r_1 \in Q$

קיבלנו סתירה, מה שמוכיח את הטענה.

הגבלה: תקפה אם-ורק-אם $m_1 \neq 0$, אך אם $Q_1 = m_1 = 0$ אז $Q_2 = 0$.
$(0 \cdot r_1 = 0 \in Q)$

ב"ה

תרגיל 1
תרגיל זכור
C(1-5)

אינפי א

1) $\lim \frac{1}{n+1} = 0$

משפט זה שקול לטענה:
$\forall \varepsilon \in R^+ \exists N \in R^+ \forall n (n>N \Rightarrow |\frac{1}{n+1} - 0| < \varepsilon$

נברר מה זה ערך של n מקיים את השוויון $|\frac{1}{n+1} - 0| < \varepsilon$

~~$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$~~
~~אפשר לבחור $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$~~

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$
חיובי על הגבלה
חיובי תמיד כי n טבעי

ניתן לבחור $\boxed{N = \frac{1}{\varepsilon} - 1}$

---

3) $\lim \left(\frac{2}{3n-100}\right)^{\frac{1}{3}} = 0$

יש להוכיח כי $\left|\left(\frac{2}{3n-100}\right)^{\frac{1}{3}} - 0\right| < \varepsilon$ עבור n הגדול ממספר N מסוים (התלוי ב-ε)

$= \left|\left(\frac{2}{3n-100}\right)^{\frac{1}{3}}\right| < \varepsilon \quad /\uparrow^3 \Rightarrow \left|\frac{2}{3n-100}\right| < \varepsilon^3 \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon^3} < |3n-100|$

אם $3n-100 < 0$ לא נכון לאחר (כי $n < \frac{100}{3}$, וזה סותר $n > N$).
ולכן נבחר עבור $3n-100 > \frac{2}{\varepsilon^3} > 0$ (ε חיובי).

$3n-100 > \frac{2}{\varepsilon^3} \Rightarrow 3n > 100 + \frac{2}{\varepsilon^3} \Rightarrow n > \frac{100 + \frac{2}{\varepsilon^3}}{3} = \frac{100\varepsilon^3 + 2}{3\varepsilon^3}$

ניתן לבחור $\boxed{N = \frac{100\varepsilon^3 + 2}{3\varepsilon^3}}$

---

5) $\lim \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

יש להוכיח כי $\left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ לכל n הגדול מ-(N).

$\Rightarrow \left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{6n+3-6n-4}{9n+6}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-1}{9n+6}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3\varepsilon} < |3n+2|$

המשך (בעמוד הבא)

ב"ה

אינפי 1

תרגיל 1
עזריאל ברגר
C(5-11)

⑤ - המשך

הגענו לאי-שוויון: $\frac{1}{3\varepsilon}<|3n+2|$

אם $0>3n+2$ [illegible] שיש ל-n [illegible] $(n<x)$,

לכן נתייחס רק לאפשרות שבה [illegible] חיובי:

$0<\frac{1}{3\varepsilon}<3n+2$

$\Rightarrow 3n+2>\frac{1}{3\varepsilon}\Rightarrow 3n>\frac{1-6\varepsilon}{3\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1-6\varepsilon}{9}$

ניתן לבחור $\boxed{N=\frac{1-6\varepsilon}{9}}$

---

⑦ $\lim_{n\to\infty}(n-100)=\infty$ ~~$\Leftrightarrow \forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{R}^+|\forall n>N\Rightarrow|a_n-A|<\varepsilon$~~

$\Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{R}^+|\forall n>N\Rightarrow a_n>M$

להוכיח: צ"ל כי $a_n>M$ לכל $n>N$ (כאשר N תלוי ב-M)

$\Rightarrow n-100>M\Rightarrow n>M+100$

$\Leftarrow$ ניתן לבחור $\boxed{N=M+100}$

---

⑨ $\lim_{n\to\infty}3^{-n}=0$

צ"ל כי $|3^{-n}-0|<\varepsilon$ לכל $n>M$

$\Rightarrow 3^{-n}<\varepsilon\Rightarrow 3^{-n}<3^{\log_3\varepsilon}\Rightarrow -n<\log_3\varepsilon\Rightarrow n>-\log_3\varepsilon$

ניתן לבחור $\boxed{N=-\log_3\varepsilon}$

---

⑪ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_2 n}=0$

צ"ל כי $\left|\frac{1}{\log_2 n}-0\right|<\varepsilon$

נפתח את הא"י-שוויון לפי שתי האפשרויות:

את הביטוי הזה:

אם $\log_2 n<0\Rightarrow\log_2 n<\log_2(2^0)\Rightarrow n<1$

אפשרות זו לא קיימת לכל n טבעי.

כי הביטוי חיובי:

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}<\log_2 n\Rightarrow\log_2\left(2^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right)<\log_2 n\Rightarrow\sqrt[\varepsilon]{2}<n$

ניתן לבחור $\boxed{N=\sqrt[\varepsilon]{2}}$

תרגיל 10

עזריאל ברגר

D(1-19)

אינפי-א

ב"ה

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{2-0}=\boxed{\frac{1}{2}}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+1}{n}}{\frac{2^n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+\frac{1}{n}}{2^{n-1}-\frac{1}{n}}=\frac{2^{n-1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2^{n-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{2^{n-1}+0}{2^{n-1}-0}=\boxed{1}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+3}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2n+2)+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n})}$

$=\frac{+\infty+0}{3}=\boxed{+\infty}$

(7) $\lim_{n\to\infty}(3n^2+5n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\left(\lim 3+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)=+\infty\cdot(3+0+0)=\boxed{+\infty}$

(9) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-5n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\,(3-0+0)=\boxed{+\infty}$

(11) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(3n-5)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{\lim(3n-5)+0}{1+0}=\lim_{n\to\infty}(3n-5)$

$=\lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{5}{n}\right)=\boxed{+\infty}$

(13) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}1=\sqrt{\lim(n^2+1)}+1=+\infty+1=\boxed{+\infty}$

(15) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}=\cancel{\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-\frac{n}{n}\right)}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}(n^2+1)}+\lim_{n\to\infty}(-n)$

$=\sqrt{\lim_{n\to\infty}n\left(n+\frac{1}{n}\right)}+\lim_{n\to\infty}(-n)=\sqrt{\lim_{n\to\infty}n^2}+\lim_{n\to\infty}(-n)=\lim_{n\to\infty}(|n|-n)=\lim_{n\to\infty}0=\boxed{0^+}$

(הגבול שואף לאפס מלמעלה)

(17) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{n2^n}+\frac{2^n}{n2^n}}{\frac{3^n}{n2^n}-\frac{2^n}{n2^n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n2^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n2^n}+0}{\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n2^n}-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{n2^n}}{\frac{3^n}{n2^n}}=\boxed{1}$

(19) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+0=\boxed{\frac{1}{2}}$