.I

---

2. מצא משוואת ישר שהוא נורמל לגרף הנתון ע"י המשוואה $y = x\ln x$ וגם מקביל לישר שמשוואתו היא $y = x$.

$$f(x) = x\ln x$$

$$f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

הישר מקביל לישר y=x, ומכאן ששיפועו הוא 1. הישר הוא נורמל לגרף, ולכן הוא מאונך למשיק-לו, כלומר שמכפלת שיפוע הישר בנגזרת תתן לנו (-1), ומכאן ששיפוע הנגזרת בנקודת החיתוך של הישר עם הפונקציה הוא (-1).

$$\Rightarrow \ln x + 1 = -1 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \Rightarrow f(e^{-2}) = e^{-2}\cdot\ln(e^{-2}) = -2e^{-2}$$

נמצא את משוואת הישר ע"פ שיפועו (1 – כנ"ל), ונקודת החיתוך שלו עם הפונקציה $(e^{-2}, -2e^{-2})$:

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)} \Rightarrow y — 2e^{-2} = 1(x - e^{-2}) \Rightarrow \boxed{x - y + e^{-2} = 0}$$

---

3. באיזה זווית נחתכים העקומות הנתונות ע"י המשוואות $y = \tan x$ ו $y = \cos x$ בתחום $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

$$\cos x = \tan x \Rightarrow \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} = \begin{matrix} -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

המספר הראשון אינו יכול להוות פתרון של סינוס כיון שהוא קטן מ(-1), ולכן:

$$\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

נתון לעיל כי בנקודה זו מתקיים: $\cos^2 x = \sin x$, נשתמש בזה בחישוב הנגזרת:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}$$

אנו רואים שמכפלת השיפועים נותנת (-1), ומכאן **שהזווית היא $\frac{\pi}{2}$ (הגרפים מאונכים זל"ז).**

---

4. שרטט את הגרף הנתון ע"י המשוואה $y = e^{-|x|}$. מה הזווית הנוצרת בגרף בנקודה $x = 0$?

$$f(x) = e^{-\sqrt{x^2}} \Rightarrow f'(x) = e^{-\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \frac{-x\cdot e^{-|x|}}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{-x\cdot e^{-x}}{x} = -e^{-x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{-x\cdot e^{x}}{-x} = e^{x} = 1$$

אנו רואים שמכפלת השיפועים נותנת (-1), ומכאן **שהזווית היא $\frac{\pi}{2}$ (הגרפים מאונכים זל"ז).**

---

6. עבור איזה ערך של c הישר שמשוואתו היא $y = 2x+3$ משיק לגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{c}{x}$?

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2}$$

שיפוע הישר הוא 2, ומכאן:

$$-\frac{c}{x^2} = 2$$

נקודת ההשקה נמצאת גם על גרף הפונקציה וגם על הישר, לכן נוכל להציב את משוואת הפונקציה במשוואת הישר, ולומר:

$$\frac{c}{x} = 2x + 3 \Rightarrow c = 2x^2 + 3x$$

נציב זאת בנתון שהתקבל מהשפוע:

$$-\frac{2x^2+3x}{x^2} = 2 \Rightarrow -2 - \frac{3}{x} = 2 \Rightarrow -2x - 3 = 2x \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \Rightarrow c = 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-9}{8}$$

II. חשב את הנגזרות $\frac{dy}{dx}$ של הפונקציות הסתומות $y = y(x)$, המוגדרות ע"י המשוואות הבאות:

---

2. $y = x + \arctan(xy^2)$

$$y' = 1 + \frac{(xy^2)'}{1+(xy^2)^2} = 1 + \frac{2yy'}{1+x^2y^4} \Rightarrow y'\left(1 - \frac{2y}{x^2y^4+1}\right) = 1 \Rightarrow y'\left(\frac{x^2y^4+1-2y}{x^2y^4+1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{x^2y^4+1}{x^2y^4-2y+1}}$$

III. הפונקציה f מוגדרת ע"י הנוסחה הנתונה:

א. מצא את התחום D הגדול ביותר שבו f גזירה לפחות פעמיים.

ב. מצא את הנגזרת השנייה של f על D.

---

2. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

תחום הגדרת הפונקציה הוא כאשר x גדול-ממש מ0 (פונקציית הln מחייבת x גדול-ממש מ0, כך שהמכנה לא משנה את התחום). הפונקציה מוגדרת באופן אחיד ורציף לכל תחום הגדרתה, כך שצפוי שתחומי הגזירה יהיו זהים לתחום ההגדרה. נוודא זאת אלגברית באמצעות הגזירה:

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{x\cdot\frac{1}{x} - 1\cdot\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{x^2\cdot\frac{-1}{x} - 2x\cdot(1-\ln x)}{x^4} = \boxed{\frac{2\ln x - 3}{x^3}}$$

כצפוי – תחום הגזירה השניה הוא זהה לתחום הגדרת הפונקציה.

.3 $f(x)=\sin(\cos x)$

כאן הפונקציה מוגדרת לכל x, אך מכיון שמדובר בפונקציה מורכבת, ייתכן שניתקל בתחומי הגדרה נוספים בתהליכי הגזירה. נגזור ונבדוק:

$$f'(x)=\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)$$

$$f''(x)=(u\cdot v)'=(-\sin(\cos x))\cdot(-\sin x)^2+(-\cos x)(\cos(\cos x))$$

$$f''(x)=-\sin^2 x\cdot\sin(\cos x)-\cos x\cdot\cos(\cos x)$$

IV. הפונקציה f נתונה בצורה פרמטרית.

א. מצא את התחום D הגדול ביותר שבו f גזירה לפחות פעמיים.

ב. מצא את הנגזרות $\frac{dy}{dx}$ ו- $\frac{d^2y}{dx^2}$ של f על D.

.2 $\begin{cases} y=1-\cos t \\ x=t-\sin t \end{cases}$

נגדיר את תחום הגזירה תוך-כדי התהליך, כיון שאין לנו כרגע שום דבר גלוי שמפריע לגזירה.

גם x וגם y נתונים לנו כפונקציות של t. נסמן:

$$\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{-(-\sin t)}{1-\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

תחום הגדרה ראשון: $1-\cos t\neq 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{g'(t)}=\frac{\cos t\,(1-\cos t)-\sin t\,(-(-\sin t))}{(1-\cos t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}=-\frac{1-\cos t}{(1-\cos t)^3}=\boxed{\frac{-1}{(1-\cos t)^2}}$$

לא נוספה לנו שום דרישה לתחום ההגדרה, ולכן נוכל לומר:

$$1-\cos t\neq 0\Rightarrow \cos t\neq\cos 0\Rightarrow \boxed{t\neq 2\pi n|n\in\mathbb{Z}}\Leftrightarrow\boxed{D:(2n\pi,(2n+2)\pi)|n\in\mathbb{Z}}$$

.3 $\begin{cases} y=5t+8 \\ x=t^5+2t-1 \end{cases}$

נגדיר את תחום הגזירה תוך-כדי התהליך, כיון שאין לנו כרגע שום דבר גלוי שמפריע לגזירה.

גם x וגם y נתונים לנו כפונקציות של t. נסמן:

$$\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{5}{5t^4+2}$$

כאן לכאורה מתבקש תחום הגדרה שהמכנה יהיה שונה מאפס, אך זה מתקיים לכל t ממשי.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\frac{\left(\frac{5}{5t^4+2}\right)'}{g'(t)}=\frac{0(5t^4+2)-5(20t^3)}{(5t^4+2)^3}=-100\left(\frac{t}{5t^4+2}\right)^3$$

לא מצאנו שום הגבלה על גזירת הפונקציה, ולכן נאמר שהפונקציה גזירה לכל t ממשי.

$$\mathrm{D}:(-\infty,+\infty)\Leftrightarrow D:\mathbb{R}$$

V. נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ **כאשר n מספר שלם.**

הוכח: (א) עבור $n>0$, הפונקציה f רציפה על **R**. (ב) עבור $n>1$ הפונקציה f גזירה על **R** (ג) עבור $n>2$, הפונקציה f' רציפה על **R**.

(ברשימת "השאלות הטיפוסיות" לשאלה V נכתב לפתור את סעיפים 3,4, אך לצערי לא מצאתי אותם בתרגיל, אז אני פותר את מה שיש ☺)

א. הוכחת רציפות הפונקציה לכל n טבעי גדול מ0.

נחשב את גבולות הפונקציה בשאיפה ל0:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x^n\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$$

המעבר האחרון התבצע ע"פ הכלל שכאשר דבר השואף לאפס מכפיל פונקציה חסומה – התוצאה תהיה 0, ופונקצית הסינוס היא חסומה מלעיל ומלרע ע"י ± 1.

הוכחנו שבשאיפה לנקודת אי-רציפות-ההגדרה הפונקציה שואפת לערכה בנקודה, ומכאן שהפונקציה רציפה. מ.ש.ל.

ב. הוכחת גזירות הפונקציה לכל n טבעי גדול מ1.

נחשב את נגזרת הפונקציה בנקודה 0:

$$\frac{df(0)}{dx}=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{h^n\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\left(h^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{h}\right)=0$$

המעבר האחרון כבר הוכח בסעיף הקודם, אך הוא מוגבל בכך שn גדול מ0, אחרת נקבל את פונקציית הסינוס כשהארגומנט שלה שואף לאינסוף, ופונקציה מחזורית מתבדרת-בהחלט בשאיפה לאינסוף.

וכעת נחשב את הנגזרת של הפונקציה (המוגדרת למקוטעין) $f(\mathrm{x})=x^{\mathrm{n}}\cdot\sin\frac{1}{x}|x\neq 0$:

$$f'(x)=x^n\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+nx^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{x}=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}=x^{n-2}\left(nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

הצלחנו לחשב את הנגזרת לכל x ממשי. מ.ש.ל.

ג. הוכחת רציפות הנגזרת לכל n טבעי גדול מ2.

נחשב את גבולה של הנגזרת בשאיפה ל0, כדי לבדוק אם היא רציפה בנקודה 0:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^{n-2}\left(nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} x^{n-2}\lim_{x\to 0}\left(nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

כאשר n גדול מ2 נקבל מכפלה בין 0 לבין פונקציה חסומה (הגורם הראשון שבסוגריים הוא מכפלה של אפס בפונקציה חסומה, והשני חסום בעצמו), וכנ"ל מכפלה כזו שווה ל0.

מכיון שהוכחנו לעיל שהנגזרת בנקודה 0 שווה ל0, וגם שהנגזרת שואפת ל0 בשאיפה ל0 – הרי שהנגזרת רציפה. מ.ש.ל.

VI. חשב את הגבולות הבאים. אם בבעיה ישנו מצב בלתי מוגדר פתור את הבעיה ע"י כלל לופיטל.

---

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{12x}}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{12x}}{x}\right) = \frac{1-\lim\limits_{x\to 0}(e^{12x})}{\lim\limits_{x\to 0} x}\left(=\frac{1-1}{0}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{12x})'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{12e^{12x}}{1} = 12$$

---

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^2}{\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^2}{\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{3}}}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{((\ln x)^2)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\frac{2\ln x}{x}\right)}{\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{3}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(6\ln x)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\frac{6}{x}\right)}{\left(\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{3}\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{18}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{18}{\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[3]{x}} = 0$$

---

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sinh 5x}{3x}$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sinh 5x}{3x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{5x}-e^{-5x}}{6x} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} e^{5x} - \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-5x}}{\lim\limits_{x\to +\infty} 6x}\left(=\frac{\infty-0}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(\sinh 5x)'}{(3x)'}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\cosh 5x}{3} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{5x}+e^{-5x}}{6} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} e^{5x}+0}{6} = +\infty$$

---

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\left(=\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{0-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$

---

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln x)$

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to +\infty} x\cdot\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(1-\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot(1-0) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

---

14. $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan^{-1}x)^x = e^{\left(\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln\tan^{-1}x\right)}$

לצורך החישוב נחקור רק את המעריך של e, ובסיום נציב את גבולו של המעריך בחזקה, ונקבל את גבולו של הביטוי המקורי.

$$\lim_{x\to0^+} x\cdot\ln\tan^{-1}x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}}\left(=\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan^{-1}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{\tan^{-1}x+x^2\tan^{-1}x}$$

$$\left(=\frac{0}{0}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{-2x}{\frac{1}{1+x^2}+x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}+2x\tan^{-1}x} = \lim_{x\to0^+}\frac{-2x}{\frac{1+x^2}{1+x^2}+2x\tan^{-1}x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to0^+} -2x}{1+\lim\limits_{x\to0^+} 2x\tan^{-1}x} = \frac{0}{1} = 0$$

אנו רואים שהמעריך שואף לאפס, ומכאן שהביטוי עצמו שואף ל1!

VII.

הגדרה: (1) אם $0<\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\infty$ אז משתמשים בסמון $f(x)=O(g(x))$ עבור $x\to a$.

(2) אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ אז משתמשים בסמון $f(x)=o(g(x))$ עבור $x\to a$.

(3) אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ אז משתמשים בסמון $f\sim g$ עבור $x\to a$.

A. הוכח עבור $x\to0$:

---

2. $x^2\sin\frac{1}{x}=o(|x|)$

צ"ל כי: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|x|}=0$

נחקור ע"פ שני הגבולות החד-צדדיים כדי להפטר מהערך המוחלט:

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|x|} = \lim_{x\to0^\pm}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\pm x} = \lim_{x\to0}\pm x\sin\frac{1}{x} = 0$$

המעבר האחרון התבצע ע"פ הכלל שכאשר דבר השואף לאפס מכפיל פונקציה חסומה – התוצאה תהיה 0, ופונקצית הסינוס היא חסומה מלעיל ומלרע ע"י ± 1. מ.ש.ל.

---

4. $\ln x = o(x^{-p})\ \ p>0$

צ"ל כי: $\forall P>0, \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-P}}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-P}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^P}}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-Px^{-P-1}}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^P}{P}=0$$

מ.ש.ל.

החישוב התבסס על כך שמספר השואף לאפס בחזקת כל מספר הגדול מאפס נותן אפס, וכשהוא במכנה מקבלים שאיפה לאינסוף.

---

6. $\frac{\arctan x}{x}\sim 1$

צ"ל כי: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

ניתן להוכיח זאת בכמה דרכים, אחת מהן באמצעות משפט לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}\left(=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1}=1+\lim_{x\to 0}x^2=1$$

מ.ש.ל.

דרך נוספת, ע"י הצבה:

$$t=\tan^{-1}x \Leftrightarrow x=\tan t \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan^{-1}\tan t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^{-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t\cos t}\right)^{-1}=\cos 0\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{-1}=1\cdot 1^{-1}=1$$

מ.ש.ל.

(הסיום מבוסס על הכלל הידוע האומר: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$)

B. הוכח עבור $x\to\infty$:

---

1. $2x^3-3x^2+1=O(x^3)$

צ"ל כי: $0<\left|\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3}\right|<+\infty$

אפשר להוכיח ע"י אריתמטיקה של גבולות שגבול זה שואף ל2, אפשר להוכיח זאת גם ע"י הגדרת הגבול, אבל אני מעדיף להשתמש עכשיו בלופיטל. ברור שהמונה והמכנה שואפים לאינסוף ולכן אתחיל ישר מפעולת הגזירה הראשונה:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-6x}{3x^2}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12x-6}{6x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1}=2$$

מ.ש.ל.

---

3. $x+x^2\sin x=o\left(x^3\right)$

צ"ל כי: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+x^2\sin x}{x^3}=0$

כאן לא ברור מהו ערכו של המונה בשאיפה לאינסוף (הוא מתאפס מדי פעם), ולכן נשתמש באריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+x^2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}x}=\frac{0+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}x}=0$$

המעבר האחרון היה ע"פ הכלל שפונקציה חסומה המחולקת במספר השואף לאינסוף – נותנת 0.

---

5. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$

צ"ל כי: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=1$

נחשב ע"פ אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}$$

$$=\sqrt{1\pm\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|}+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}=\sqrt{1\pm\sqrt{0+\lim_{x\to\pm\infty}x^{-1.5}}}=\sqrt{1\pm\sqrt{0+0}}=1$$

מ.ש.ל.

---

7. $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$

צ"ל כי: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x\ln^{100}x}{x^2}=1$

כאן ברור שהמונה והמכנה שואפים לאינסוף – אשתמש בלופיטל, כאשר שוב אני מתחיל ישר משלב הגזירה:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1\cdot\ln^{100}x+x\cdot\frac{100\ln^{99}x}{x}}{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+\ln^{100}x+100\ln^{99}x}{2x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{100\ln^{99}x}{x}+\frac{9900\ln^{98}x}{x}}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+50\ln^{99}x+99\cdot50\ln^{98}x}{x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{99\cdot50\ln^{98}x}{x}+\frac{98\cdot99\cdot50\ln^{97}x}{x}}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+99\cdot50\ln^{98}x+98\cdot99\cdot50\ln^{97}x}{x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

כך ניתן להמשיך בגזירות, כאשר בכל שורה המעלה של הln יורדת, ואילו המקדמים עולים, כאשר המבנה של הגזירה הn הוא:

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+(102-n)(103-n)\cdots101\cdot\frac{1}{202}\ln^{101-n}x+(101-n)(102-n)\cdots100\cdot\frac{1}{2}\ln^{100-n}x}{x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ובצורה מקוצרת יותר:

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{101!}{(101-n)!\cdot 202}\ln^{101-\mathrm{n}} x+\frac{100!}{(100-n)!\cdot 2}\ln^{100-n} x}{x} \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ובצורה יותר ברורה:

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(101-n)!\cdot 2x+100!\cdot \ln^{100-n} x\,(\ln x+101-n)}{(101-n)!\cdot 2x}\right) \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

כך נמשיך עד שהגזירה מספר 99 תראה כך:

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2\cdot 2x+100!\cdot \ln x\,(\ln x+2)}{2\cdot 2x}\right) \left(=\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ועכשיו נמשיך לגזור בצורה מסודרת:

$$\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4+100!\cdot\left(\ln x\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x+2)\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x+100!\cdot(2\ln x+2)}{4x}\right)$$

מכאן נמשיך באריתמטיקה רגילה של גבולות:

$$= \lim_{x\to\pm\infty} 1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{100!\ln x}{2x}+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}$$

קיבלנו 3 איברים, הראשון קבוע ושווה 1, השלישי שואף ל0, ונשאר לחקור את האמצעי, נוכיח שהוא שואף לאפס, ובזה הוכחנו את הטענה הכללית של תרגיל זה:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{100!\ln x}{2x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{100!\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{100!}{2x} = 0$$

מ.ש.ל.