A. הוכח ע"י שימוש בהגדרה:

$1. \lim_{x\to 1}(3x-1)=2$

ההגדרה היא:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+|\delta>|x-a|>0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

כלומר צריך לברר מתי מתקיים האי-שוויון: $|(3x-1)-2|<\varepsilon$, ובהתאם לו $\delta>|\mathrm{x}-1|>0$

$$\Rightarrow|3x-3|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

מסקנה: כאשר $\delta\geq\frac{\varepsilon}{3}$ מתקיים התנאי. מ.ש.ל.

$3. \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

ההגדרה היא:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+|\delta>a-x>0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

כלומר צריך לברר מתי מתקיים האי-שוויון: $\left|e^{\frac{1}{x}}-0\right|<\varepsilon$, ובהתאם לו $\delta>0-x>0$

פונקציית האקספוננט מחזירה רק ערכים חיוביים, ולכן ניתן לוותר על הערך המוחלט, ולומר:

$$e^{\frac{1}{x}}<e^{\ln\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{x}<\ln\varepsilon$$

ע"פ הגדרת הגבול – x שלילי, ומכיון שמדברים על ε קטן, גם הln שלו שלילי, ולכן כשנכפיל ב $\frac{x}{\ln\varepsilon}$ יישאר סימן האי-שוויון:

$$x>\frac{1}{\ln\varepsilon}\Rightarrow(0-x)<-\frac{1}{\ln\varepsilon}$$

מסקנה: כאשר $\delta\geq-\frac{1}{\ln\varepsilon}$ מתקיים התנאי. מ.ש.ל.

$5. \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$

ההגדרה היא:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+|\delta>x-a>0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

כלומר צריך לברר מתי מתקיים האי-שוויון: $\left|\frac{1}{\ln x}-0\right|<\varepsilon$, ובהתאם לו $\delta>x-0>0$

מדברים על x קטן מאוד, ולכן הln שלו שלילי, והערך המוחלט הופך את הסימן:

$$\Rightarrow-\frac{1}{\ln x}<\varepsilon$$

אמרנו שהln שלילי, ולכן כשנכפול בו יתהפך סימן האי-שוויון:

$$\Rightarrow-1>\varepsilon\ln x\Rightarrow\ln x<-\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\ln x<\ln e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\Rightarrow x<e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

מסקנה: כאשר $\delta\geq e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ מתקיים התנאי. מ.ש.ל.

---

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-2^x}{1+2^x}=-1$

ההגדרה היא:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{R}^+|N<x\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$$

צריך למצוא מאיזה N מתקיים האי שוויון: $\left|\frac{1-2^x}{1+2^x}+1\right|<\varepsilon$

$$\Rightarrow\left|\frac{1-2^x+1+2^x}{1+2^x}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{2}{1+2^x}<\varepsilon$$

(הביטוי חיובי תמיד, ולכן ניתן לוותר על הערך המוחלט)

$$\Rightarrow 2<\varepsilon+\varepsilon 2^x\Rightarrow\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}<2^x\Rightarrow 2^{\log_2\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}<2^x\Rightarrow x>\log_2\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

מסקנה: כאשר $N\geq\log_2\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$ מתקיים האי-שוויון. מ.ש.ל.

---

9. $\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$

ההגדרה היא:

$$\forall M\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+|\delta>x-a>0\Rightarrow f(x)>M$$

כלומר צריך לברר מתי מתקיים האי-שוויון: $e^{\frac{1}{x}}>M$, ובהתאם לו $\delta>x-0>0$

$$e^{\frac{1}{x}}>e^{\ln M}\Rightarrow\frac{1}{x}>\ln M$$

מדברים על x חיובי, ועל M גדול מאוד (שהln שלו חיובי), ולכן כשנכפול ב$\frac{x}{\ln M}$ יישאר סימן האי-שוויון:

$$\frac{1}{\ln M}>x$$

מסקנה: כאשר $\delta\geq\frac{1}{\ln M}$ מתקיים התנאי. מ.ש.ל.

B. חשב את הגבול, או הסבר מדוע איננו קיים:

---

1. $\lim_{x\to a}\frac{x+4}{(x-1)^2}$

I. a=1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{(x-1)^2}=\frac{5^{\pm}}{0^+}=\infty$$

זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.

II-III. $a = \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+4}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{x-2+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+0}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-2+0)}=\frac{1}{\pm\infty}=0^{\pm}$$

כאשר x שואף לאינסוף – הביטוי שואף ל0 (ביחס ישר בין סימנו של x לסימנו של הביטוי).

---

3. $\lim_{x\to a}\frac{x^3-x+3}{(x-1)^2}$

I. a=1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x+3}{(x-1)^2}=\frac{3^{\pm}}{0^{+}}=\infty$$

זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.

II-III. $a = \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x+3}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\right)-0+0}{1-0+0}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

בשאיפה לאינסוף החיובי או השלילי – הביטוי שואף לאינסוף החיובי או השלילי – בהתאמה.

---

5. $\lim_{x\to a}\frac{7x^2-2x-5}{x^2-3x+2}$

$$\frac{7x^2-2x-5}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(7x+5)}{(x-1)(x-2)}=\left\{\frac{7x+5}{x-2}\middle| x\neq 1\right\}$$

I. $a = 1$:

[מותר לצמצם ב$(x-1)$, כי x **שואף** ל-1 אך אינו **שווה** אחד (יש "חור" בגרף)].

$$\lim_{x\to 1}\frac{7x+5}{x-2}=\frac{12}{-1}=-12$$

זוהי נקודת אי-רציפות סליקה – בנקודה זו הביטוי לא-מוגדר, אך ערכיו משני הצדדים שווים זל"ז.

II. $a = 2^{\pm}$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{7x+5}{x-2}=\frac{19}{0^{\mp}}=\mp\infty$$

זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.

III. $a = -1$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{7x+5}{x-2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

זוהי נקודה בה הפונקציה רציפה!

IV. $a = -2^{\pm}$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{7x+5}{x-2}=\frac{-9}{-4}=\frac{9}{4}$$

זוהי נקודה בה הפונקציה רציפה!

---

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{7+4\log x}{-4+3\log x}$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \log x = \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{7+4\log x}{-4+3\log x} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{\log x}+4\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{\log x}+3\right)} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\infty}+4}{\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{\infty}+3} = \frac{0+4}{0+3} = \frac{4}{3}$$

כאשר x שואף לאינסוף החיובי (או ל0) – הביטוי שואף לאחד ושליש.

---

9. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3x+8}+\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}(x^2)\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}\right)} + \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}(x^2)\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= 2\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}(x^2)\cdot(1+0)} = 2\lim_{x\to\pm\infty}|x| = +\infty$$

כאשר x שואף לאינסוף (החיובי או השלילי) – הביטוי שואף לאינסוף החיובי!

---

11. $\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{\lim_{x\to0} 3\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to0} 5\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}{5\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3\cdot1}{5\cdot1} = \frac{3}{5}$$

זוהי נקודת אי-רציפות סליקה – בנקודה זו הביטוי לא-מוגדר, אך ערכיו משני הצדדים שווים זל"ז.

---

13. $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 10x}{4x}$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2\sin^2 x \\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1 \end{Bmatrix}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 10x}{4x} = \lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2 5x)}{4x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 5x}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\right)^2}{2x}$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to0}\frac{25x^2}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{25x}{2} = \frac{25\lim_{x\to0}x}{2} = 0$$

זוהי נקודת אי-רציפות סליקה – בנקודה זו הביטוי לא-מוגדר, אך ערכיו משני הצדדים שווים זל"ז.

---

15. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\tan(x+2)}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

הצבה: $t=x+2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{\tan(x+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-4)(t)}{\tan(t)}=\frac{\lim_{t\to 0}\big((t-4)\cos t\big)}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{\lim_{t\to 0}\big((t-4)\cos t\big)}{1}$$

$$=(0-4)\cdot 1=-4$$

זוהי נקודת אי-רציפות סליקה – בנקודה זו הביטוי לא-מוגדר, אך ערכיו משני הצדדים שווים זל"ז.

---

17. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}$

הצבה: $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{3\pi}{2}\cos 3t+\sin\frac{3\pi}{2}\sin 3t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\cdot\lim_{t\to 0}\left(-\frac{3t}{t}\right)=1\cdot(-3)=-3$$

זוהי נקודת אי-רציפות סליקה – בנקודה זו הביטוי לא-מוגדר, אך ערכיו משני הצדדים שווים זל"ז.

---

19. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5\sin x}{5x-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5\sin x}{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5\sin x}{x}}{5-\frac{2}{x}}$$

$$|\sin x|\le 1\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5\sin x}{x}}{5-\frac{2}{x}}=\frac{2+0}{5-0}=\frac{2}{5}$$

כאשר x שואף לאינסוף (החיובי או השלילי) – הביטוי שואף ל0.4.

C. חשב את הגבולות

---

1. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

הצבה: $t=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2t$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2=e^2$$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$

הצבה: $t=2x \Rightarrow x=\frac{t}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3t}{2}}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{1.5}=\sqrt{e}^{3}$$

D. $\{a_n+b_n\}$ ו-$\{a_n\cdot b_n\}$ הם הסכום והמכפלה של הסדרות $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$, בהתאמה.

1. ידוע שגם סכום וגם הפרש של שתי סדרות מתכנסות הם גם סדרות מתכנסות.

א) הוכח שאם $\{a_n\}$ היא סדרה מתכנסת ואילו הסדרה $\{b_n\}$ מתבדרת אז הסדרה $\{a_n+b_n\}$ מתבדרת.

נוכיח בדרך השלילה:

נניח כי הסדרה $\{a_n+b_n\}$ מתכנסת, ונסמן אותה $\{c_n\}$.

$$\Rightarrow \{c_n-a_n\}=b_n$$

ע"פ הכלל – הסדרה $\{b_n\}$ מתכנסת (כי היא הפרש סדרות מתכנסות), אבל היא מתבדרת (ע"פ ההגדרה)!
הגענו לסתירה, ולכן הטענה המקורית נכונה. מ.ש.ל.

ב) הביא דוגמה של שתי סדרות $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$ כך ששתיהן מתבדרות, אבל הסדרה $\{a_n+b_n\}$ מתכנסת.

$$\begin{Bmatrix} a_n=1+n^2 \\ b_n=5+\frac{1}{n}-n^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_n+b_n=6+\frac{1}{n}\blacksquare$$

ג) הביא דוגמה של שתי סדרות $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$ כך שגם שתיהן מתבדרות, וגם הסדרה $\{a_n+b_n\}$ מתבדרת.

$$\begin{Bmatrix} a_n=1+n^2 \\ b_n=5-n^3 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_n+b_n=6+n^2-n^3\blacksquare$$

2. ידוע שמכפלה של שתי סדרות מתכנסות היא גם סדרה מתכנסת.

א) הביא דוגמה של שתי סדרות $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$ כך שהסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת, הסדרה $\{b_n\}$ מתבדרת, ואילו הסדרה $\{a_n\cdot b_n\}$ מתכנסת.

$$\begin{Bmatrix} a_n=n^{-2} \\ b_n=5-n^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow a_n\cdot b_n=5n^{-2}-1\blacksquare$$

ב) נניח שסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת, ואילו סדרה $\{b_n\}$ מתבדרת. עבור איזה תנאי על הערך של $\lim_{n\to\infty}a_n$ ניתן לטעון שהסדרה $\{a_n\cdot b_n\}$ בהכרח מתבדרת?

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$$