

707 (125) 1
0967588 .S.A

2, 1

מחלקה 1 (2017)
מחלקה 2 (2017)

3 פתרון

1) $U = \sqrt{1-x^2-y^2} \mid x^2+y^2 < 1$

~~U_x = -x~~

$U_x = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$

~~U_y = -y~~

$U_y = \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$U_x = U_y = 0 \Rightarrow (0,0)$

(2017) מחלקה 1

$f_{xy} = \left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{-\sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -1$

$f_{yy} = \left(\frac{U}{V} \right)'' = -1$

$f_{yx} = f_{xy} = \left[-x \cdot (1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \right]'_y = (-x) \cdot (-2y) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}^3} = 0$

$\Delta = f_{xy}f_{yx} - f_{xx}f_{yy} = 0 - (-1)(-1) = -1$

$f_{xx} < 0$

15.10.17

מחלקה 1 (2017)

$\Delta < 0$

ה'17

מחלקה 1 (2017) מחלקה 2 (2017)

15.10.17

$(0,0,1)$

15.10.17 מחלקה 1 (2017)

$f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

2

$f_x = 2x + y + 3 \Rightarrow f_x = 0 \Rightarrow 2(-2) + y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (-2, 1)$

$f_y = x + 2 \Rightarrow f_y = 0 \Rightarrow x = -2$

15.10.17 מחלקה 1 (2017)

$f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = 0 \Rightarrow f_{xy}f_{yx} - f_{xx}f_{yy} = 1$

$\Delta > 0$

15.10.17 מחלקה 1 (2017)

$(-2, 1, 3)$

15.10.17 מחלקה 1 (2017)

$$f(x,y) = x^2 - e^{y^2}$$

(1) (4)

$$f_x = 2x \quad \begin{cases} f_{xx} = 2 \\ f_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$f_y = -2ye^{y^2} \quad \begin{cases} f_{yx} = 0 \\ f_{yy} = -2e^{y^2} - 2y \cdot (2ye^{y^2}) = -2e^{y^2}(1+2y) \end{cases}$$

$$f_x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad f_y = 0 \Rightarrow y = 0$$

(20) 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

$$f_{xx}(0,0) = 2, \quad f_{yy}(0,0) = -2$$

$$\Rightarrow f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 0 - 4 = -4 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$k(x,y) = e^x \sin y$$

$$k_x = e^x \sin y, \quad \begin{cases} k_{xx} = e^x \sin y \\ k_{xy} = e^x \cos y \end{cases}$$

$$k_y = e^x \cos y, \quad \begin{cases} k_{yx} = e^x \cos y \\ k_{yy} = -e^x \sin y \end{cases}$$

$$k_x = k_y = 0 \Rightarrow e^x \sin y = e^x \cos y = 0 \Rightarrow \sin y = \cos y = 0$$

$$(\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = \cos y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } y = \pi) \quad \sin y = \cos y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } y = \pi$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = e^{xy}$$

$$\begin{aligned} f_x &= ye^{xy} & f_{xx} &= y^2 e^{xy} \\ f_y &= xe^{xy} & f_{xy} &= xy e^{xy} + e^{xy} \\ f_{yy} &= x^2 e^{xy} & f_{yx} &= xy e^{xy} + e^{xy} \end{aligned}$$

$$(0,0) \Rightarrow$$

(3)

$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow y = x = 0 \quad (0 \neq e^{xy})$$

$$f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

$f_x = 2x + y - 6$

$f_y = x + 2y$

$f_x = f_y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow 2(-2y) + y - 6 = 0 \Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 4$

נקודה קיצונית (4, -2) היא נקודה קיצונית

$f_x = 2$ $(-3 \leq y \leq 0)$ $x = 0$
 $f_x = f_y = 2$ $(-3 \leq y \leq 0)$ $x = 5$
 $f_y = 2$ $(0 \leq x \leq 5)$ $y = 0$
 $f_y = 2$ $(0 \leq x \leq 5)$ $y = -3$

נקודה קיצונית (0, 0) היא נקודה קיצונית

$\Rightarrow A = f(4, -2) - f(0, 0) = 10 - 2 = 8$

$f'(y) = f_y$ כל $f(x, y) = f(5, y)$ כל x וכל y $x=0$ $x=5$
 $f_y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$
 $x=5 \Rightarrow y=-2.5$

$f'(x) = f_x$ כל $f(x, y) = f(x, 0)$ כל x וכל y $y=0$ $y=-3$
 $f_x = 0 \Rightarrow 2x = 6 - y \Rightarrow x = 3 - \frac{y}{2}$
 $y=0 \Rightarrow x=3$
 $y=-3 \Rightarrow x=4.5$

נקודה קיצונית (5, -3) היא נקודה קיצונית

(x, y) | f(x, y)

(0, 0) | 2

(0, -3) | 11

(3, 0) | -7

(4, -2) | -10

(4.5, -3) | -9.25

(5, 0) | -3

(5, -3) | -9

(5, -2.5) | -9.25

נקודה קיצונית (0, -3) היא נקודה קיצונית

(0, -3, 11)

נקודה קיצונית (4, -2) היא נקודה קיצונית

(4, -2, -10)

ניגן וסולא ענגען האט

$$f_y = 2\cos x - 3\sin y$$

$$f'(x) = f_x \text{ s.t. } (y = \pm \frac{\pi}{2}) \quad x > y \quad y > x \quad x, y > 1$$

$$f_x = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

• $x=0, f_y=0 : 1/k$ $y=\pm \frac{\pi}{2}, f_x=0 : 1/k$ $f_x=f_y=0$: 12 116 1160/k

9 (ק/ר) - 10 (ק/ר)

$$\frac{\text{מספר ימים}}{4} \sqrt{\frac{\text{מספר ימים}}{\text{מספר ימים}}}$$
 מספר ימים $\sqrt{\frac{\text{מספר ימים}}{\text{מספר ימים}}}$

$$f(x, y) = 0 \quad \text{for } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 5\right)$$

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$f(a,b) = \int_a^b (6-x-x^2) dx$$

(4.5.1) (1/17) 7/17

$$f_a = -(6-a-a^2) = -6 + a + a^2$$

$$f_b = 6 - b - b^2$$

6.17.1 (1/17) 7/17

$$f_a = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow a \in \{-3, 2\}$$

$$f_b = 0 \Rightarrow -b^2 - b + 6 = 0 \Rightarrow (-b+2)(b+3) = 0 \Rightarrow b \in \{-3, 2\}$$

(a,b)	$f(a,b)$
2,2	0
2,3	$-\frac{11}{2}$
3,2	$\frac{11}{2}$
3,3	0

(2,2) : מקסימום
(-3,2) : מינימום
(-3,-3) : מינימום

(2,3) : מינימום

7/17 > 1/158

$$f_{aa} = 2a, f_{ab} = 0, f_{ba} = 0, f_{bb} = -2b$$

$$\Delta = f_{ab}^2 - (f_{aa})(f_{bb}) = 0 - (2a)(-2b) = 4ab$$

7/17 > 1/158

$$\Delta(2,2) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 > 0$$

$$\Delta(-3,2) = 4(-3) \cdot 2 = -24 < 0$$

$$f_{aa}(-3,2) = 2(-3) = -6 < 0$$

7/17 > 1/158

7/17 > 1/158

$$\Delta(-3,-3) = 4(-3)(-3) = 36 > 0$$

7/17 > 1/158

7/17 > 1/158

$$(-3,2,20\frac{5}{2})$$

w, x, y

המספר

כספן, יוג, סטר

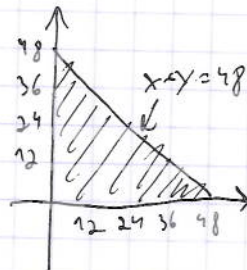
(2)

$$w + x + y = 48 \Rightarrow w = 48 - x - y$$

$$x + y < 48 \Leftrightarrow 48 - x - y > 0 \Leftrightarrow x > 0, y > 0$$

$$f(x, y) = xy(48 - x - y) = 48xy - x^2y - xy^2$$

$$48 = x + y \Rightarrow y = -x + 48$$



גאומטריה. המושל

אנו נכנסים לפונקציה הזו, הכוללת מספרים, ונחפש את המקסימום. נגזרת ראשונה: $f_x = 48y - 2xy - y^2 = y(48 - 2x - y)$ ונשווה ל-0. נקבל $y = 0$ או $48 - 2x - y = 0$. נגזרת שנייה: $f_y = 48x - x^2 - 2xy = x(48 - x - 2y)$ ונשווה ל-0. נקבל $x = 0$ או $48 - x - 2y = 0$. נפתור את המערכת: $48 - 2x - y = 0$ ו- $48 - x - 2y = 0$. נחסר: $(48 - 2x - y) - (48 - x - 2y) = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow y = x$. נציב ב- $48 - 2x - y = 0$: $48 - 2x - x = 0 \Rightarrow 48 - 3x = 0 \Rightarrow x = 16$. נקבל $y = 16$. נציב ב- $f(x, y)$: $f(16, 16) = 16 \cdot 16 \cdot (48 - 16 - 16) = 16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$. נבדוק: $f(0, 48) = 0$, $f(48, 0) = 0$. לכן, המקסימום הוא 4096.

$$f(x, y) = 48xy - x^2y - xy^2$$

$$f_x = 48y - 2xy - y^2 = y(48 - 2x - y)$$

$$f_y = 48x - x^2 - 2xy = x(48 - x - 2y)$$

הזו תהיה נקודת מקסימום או מינימום? נבדוק את הנגזרת השנייה. $f_{xx} = -2y$, $f_{yy} = -2x$, $f_{xy} = -2y$. $f_{xx} = -2y < 0$, $f_{yy} = -2x < 0$, $f_{xy} = -2y < 0$. לכן, נקודת המקסימום היא ב- $(16, 16)$.

$$\begin{aligned} f_x = 0 &\Rightarrow 48y - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow y(48 - 2x - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ או } 48 - 2x - y = 0 \\ f_y = 0 &\Rightarrow 48x - x^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x(48 - x - 2y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ או } 48 - x - 2y = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 16, y = 16, w = 16, f(x, y) = 16^3 = 4096$$

(אם נרצה, נוכל לבדוק גם את הנקודות $(0, 48)$ ו- $(48, 0)$, אבל הן לא הן מקסימום.)

$$f_y = x$$

$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow f(x,y) = 0$
 $f(x,y) = 0$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$g_y = 2y$$

$$f_x = \lambda g_x \Rightarrow Y = 12x \Rightarrow (x-y) = 2\lambda(x-x)$$

$$f_y = 19x \Rightarrow x = 12y$$

$$g(x,y)=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$x=y \quad | \quad 1 = -2\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad | \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 = 1$$

2.1

$$X \sim \sqrt{2}$$

$x^{(1)}$

$$Y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$y = -x$$

2. 16

$$f(x,y) = xy \text{ in } (1,1,2) \quad \text{in } (1,1,2) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{in } (1,1,2) \quad \text{in } (1,1,2)$$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\frac{\sin 2\alpha}{2} = \sin \alpha \cos \alpha$ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $\sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{2}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad g(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0$$

$$f_x = x, f_y = y, g_x = x, g_y = 2y$$

$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow (0,0) \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$f_x = \lambda g_x \rightarrow x = \lambda \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \quad (1)$$

$$f_y^2 \lambda g_y \Rightarrow Y = X \quad \left. \begin{array}{l} X=Y=0 \quad (s_p) \quad 1 \neq \lambda \sim \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right\}$$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}$$

$$f(x, \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}) = \frac{x^2 - 1 - \frac{x^2}{2}}{2} = \frac{x^2 - 2}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x}{2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$$

$x = 71$ $n > 1$ $y = 0$ $n = 8672$ \dots

$$(x, y) \mid f(x, y) \quad (11)$$

$(0,0)$	\emptyset
---------	-------------

$(0, \pm 1)$	$\pi/2$
--------------	---------

$(\pm 1, 0)$	$n/2$
--------------	-------

$$(0, 1, 0) : \text{Urrd} \frac{\text{Lippon}}{\text{Mittid}}$$

$$: \text{Urrd} \quad \text{Mittid} \quad \text{Lippon}$$

$$(0, \pm 1, 1/2), (\pm 1, 0, 1/2)$$

(17)

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$C: y = x + 1$$

$$f(C) = f(x, x+1) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

למצוא את הנקודה הנמוכה ביותר של f על C (הנקודה הנמוכה ביותר של f על C)

ולכן נחפש את הנקודה הנמוכה ביותר של f על C

$$f'(x) = 4x + 2$$

\Rightarrow

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : \text{הנקודה הנמוכה ביותר של } f \text{ על } C$$

(2)

$$(3) f(x, y, z) = x + y + z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36 \Rightarrow z^2 = 36 - x^2 - y^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

נמצא את הנקודה הנמוכה ביותר של f על C (הנקודה הנמוכה ביותר של f על C)

$$f_1(x, y) = x + y + \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

$$f_2(x, y) = x + y - \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

$$f_1(x, y) = x + y$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$f_1(x, y) = x + y$$

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 36 = 0$$

$$g_x = 2x = 0, g_y = 2y = 0$$

$$f_x = \lambda g_x \Rightarrow 1 = 2\lambda x, f_y = \lambda g_y \Rightarrow 1 = 2\lambda y \Rightarrow x = y$$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$$

$$2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow y = \pm 3\sqrt{2}$$

$$f_{1,2} = x + y \pm \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

$$f_{1,2} = 1 \pm \frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

$$f_{1,2} = 1 \pm \frac{49}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

(21/3) $f(x,y,z) = x+y+z$; $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-36=0$

$\begin{cases} \text{grad}(f(x,y,z)) = \lambda \text{grad}(g(x,y,z)) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$

הנגזרות

$f_x = f_y = f_z = 1$

$g_x = 2x, g_y = 2y, g_z = 2z$

$\Rightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \Rightarrow 1 = 2\lambda x \\ f_y = \lambda g_y \Rightarrow 1 = 2\lambda y \\ f_z = \lambda g_z \Rightarrow 1 = 2\lambda z \\ g(x,y,z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases}$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow 2x = 8y = 16z$
 $\Rightarrow x = 4y = 8z \Rightarrow y = \frac{x}{4}, z = \frac{x}{8}$
 $\Rightarrow x^2 + (\frac{x}{4})^2 + (\frac{x}{8})^2 = 36$
 $\Rightarrow x^2(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}) = 36$
 $\Rightarrow x^2 \cdot \frac{81}{64} = 36$
 $\Rightarrow x^2 = \frac{36 \cdot 64}{81} = \frac{256}{3}$
 $\Rightarrow x = \pm \frac{16}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow y = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}, z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x^2(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}) = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{\frac{81}{64}} = \frac{256}{3}$
 $x = \pm \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}, z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $f(x,y,z) = \pm 7$

הנקודות הקיצוניות הן $(\frac{16}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ ו- $(-\frac{16}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.
הערך המקסימלי של f הוא 7 והערך המינימלי הוא -7 .

הנקודות הקיצוניות הן $(\frac{16}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ ו- $(-\frac{16}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$.
הערך המקסימלי של f הוא 7 והערך המינימלי הוא -7 .

(4) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $g(x,y,z) = x+y+z-1=0$; $h(x,y,z) = x+2y+3z-6=0$
 $f_x = 2x, f_y = 2y, f_z = 2z$; $g_x = g_y = g_z = 1$; $h_x = 1, h_y = 2, h_z = 3$

$\begin{cases} f_x = \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x \Rightarrow 2x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ f_y = \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y \Rightarrow 2y = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ f_z = \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z \Rightarrow 2z = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ g(x,y,z) = 0 \Rightarrow x+y+z=1 \\ h(x,y,z) = 0 \Rightarrow x+2y+3z=6 \end{cases}$

$x+2= \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$
 $x+3z = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} - 3z$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3z=2 \Rightarrow 3x=2-3z \\ 3x+9z=16 \Rightarrow 2-3z+9z=16 \Rightarrow 6z=14 \Rightarrow z = \frac{7}{3} \end{cases}$
 $\Rightarrow 3x = 2 - 3 \cdot \frac{7}{3} = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$
 $\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{25+1+49}{9} = \frac{75}{9} = \frac{25}{3}$

$f(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{25}{3}$
 $f(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{25}{3}$
 $f(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{25}{3}$
 $f(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{25}{3}$

הנקודות הקיצוניות הן $(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ ו- $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
הערך המקסימלי של f הוא $\frac{25}{3}$ והערך המינימלי הוא $\frac{25}{3}$.