העתקה היא ליניארית אמ"מ לכל שני וקטורים $\bar{U},\bar{V}$ ולכל שני סקלרים a,b מתקיים: $T(a\bar{U}+b\cdot\bar{V}) = a\cdot T(\bar{U})+b\cdot T(\bar{V})$

הערה: התרגילים עונים לפי סדר. כתבתי קיצור (נראה).

(1) א. ליניארית (ניתן להראות $\bar{U},\bar{V},a,b$ ולהראות).

ב. לא ליניארית. דוגמה נגדית: $a=b\neq0,\ \bar{U}=-\bar{V}\neq\bar{0}$

$$T(a\bar{U}-a\bar{V})=T(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$aT(\bar{U})+aT(-\bar{U})=a\left[\begin{pmatrix}x_1+|x_2|\\x_1-2x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x_1+|-x_2|\\-x_1+2x_2\end{pmatrix}\right]=\boxed{\begin{pmatrix}2a|x_2|\\0\end{pmatrix}\neq\bar{0}}$$

מ.ש.ל.

ג. לא ליניארית. דוגמה נגדית: $\bar{U}=-\bar{V}\neq0,\ a=b\neq0,\ x_1\neq-x_2$

(באופן כללי: ערך מוחלט לא, כ. לינארי והפונקציה הזו מקבלת רק ערך חיובי)

ד. ליניארית.

הוכחה: צ"ל כי:

$$T(a\bar{U}+b\bar{V})\overset{?}{=}a\cdot T(\bar{U})+b\cdot T(\bar{V})$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}aU_1+bV_1\\aU_2+bV_2\\aU_3+bV_3\end{pmatrix}\overset{?}{=}aT\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix}+bT\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{aU_1+bV_1\overset{?}{=}aU_1+bV_1\ \checkmark}$$

מ.ש.ל.

ה. ליניארית. (הלכ ובוכח) (באופן כללי: כ. א המקדמים הם קבועים, ליניארית!)

ו. לא ליניארית. דוגמה נגדית - כבר - $a=b\neq0,\ \bar{U}=-\bar{V}\neq0$

$$T(a\bar{U}-a\bar{V})=T(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$aT(\bar{U})+aT(-\bar{U})=a\begin{pmatrix}x_1^2+x_2\\x_1-2x_2\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}(-x_1)^2-x_2\\-x_1+2x_2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2a\cdot x_1^2\\0\end{pmatrix}\neq\bar{0}}$$

מ.ש.ל.

ז. ליניארית. (הלכ ובוכח.)

ח. לא ליניארית. דוגמה נגדית: $\bar{U}=\begin{pmatrix}e^0=1\\0\end{pmatrix}\ \bar{V}=\begin{pmatrix}e^{i\pi}=-1\\0\end{pmatrix},\ a=b=1$

$$T(a\bar{U}+b\bar{V})=T\begin{pmatrix}1-1\\0\end{pmatrix}=T(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad aT(\bar{U})+bT(\bar{V})=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|1|\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}|-1|\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2=2e^0\\0\end{pmatrix}\neq\bar{0}$$

(באופן כללי: ערך מוחלט הוא לא ליניארי ...)

ב"ה. ליניארית ב | מרצה: ד"ר [illegible] | ① (ו-יב), ② | שם: [illegible]
תרגיל ② | מתרגל: ד"ר [illegible] | | ת.ז. 039627588

① ו. לא ליניארית. דוגמא נגדית: $a=b=\bar{u}=\bar{v}=i$

(באופן כללי אם נסמן
$a=a_1+a_2 i$
$b=b_1+b_2 i$
$\bar{u}=u_1+u_2 i$
$\bar{v}=v_1+v_2 i$
ונציב בתנאי הליניאריות, התנאי מתקיים אמ"מ מתקיימים שני השוויונות הבאים:

$$\begin{cases} a_2u_2+b_2v_2=0 \\ a_2u_1+b_2v_1=0 \end{cases}$$
)

ז. ליניארית. (כאן מתקיים התנאי הנ"ל כי $a_2=b_2=0$)

יא. ליניארית.
הוכחה: נבדוק:

$$T(a\bar{u}+b\bar{v})\overset{?}{=}aT(\bar{u})+bT(\bar{v})$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} au_1+bv_1 \\ au_2+bv_2 \\ au_3+bv_3 \end{pmatrix}\overset{?}{=}aT\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}+bT\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(au_1+bv_1)+5(au_2+bv_2)+\pi(au_3+bv_3)\overset{?}{=}2au_1+2bv_1+5au_2+5bv_2+\pi au_3+\pi bv_3 \checkmark$$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

יב. ליניארית. הנ"ל הוכחה.

② א. [האופרטור T הוא אופרטור הגזירה] T ליניארית.
נבדוק:

$$T(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v})\overset{?}{=}\alpha T(\bar{u})+\beta T(\bar{v})$$

נסמן: $\bar{u}=f(x)$, $\bar{v}=g(x)$

$$\Rightarrow (\alpha f(x)+\beta g(x))'\overset{?}{=}\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

כלל: סכום נגזרות שווה לנגזרת סכומים

$$\Rightarrow (\alpha f(x))'+(\beta g(x))'\overset{?}{=}\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

כלל: נגזרת של מכפלה בקבוע (סקלר) שווה למכפלת הנגזרת באותו סקלר.

$$\Rightarrow \alpha f'(x)+\beta g'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$ $\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

ב. ליניארית.
כי: { עפ"י ניוטון-לייבניץ: $T(f)(x)=f(x)$
סכום ומכפלה בקבוע של פונקציות רציפות נותן פונקציה רציפה. }

~~[illegible]~~ ג. ליניארית. הנ"ל הוכחה.

~~[illegible]~~ 3.
T כי β, b פונקציות ולכן כי ליניארית.

[illegible] כהן
ת.ז. 039677588

3, 4

[illegible]

(3)

א.

$T(L_1)=L_1$

$T(L_2)=\{2x+y=0\}$

ב.

$L_1: \{t\binom{0}{1} \mid t\in R\}$

$T(L_1)=\{\frac{1}{2}t\binom{0+1}{0-1} \mid t\in R\} \Rightarrow \boxed{T(L_1)=\{t\binom{1}{-1} \mid t\in R\}}$

$L_2=\{t\binom{2}{1} \mid t\in R\}$

$T(L_2)=\{\frac{1}{2}t\binom{2+1}{2-1} \mid t\in R\} \Rightarrow \boxed{T(L_2)=\{t\binom{3}{1} \mid t\in R\}}$

ג.

$\pi_1: \{x_1-3x_2+x_3=0$

$x_2=s,\ x_3=t \Rightarrow x_1=3s-t$

$\Rightarrow \pi_1: t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow T(\pi_1)=\begin{pmatrix}4s-t\\s+t\\3s\end{pmatrix}=t\overset{\bar u}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}+s\overset{\bar v}{\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}} \Rightarrow \bar u\times\bar v=\begin{pmatrix}3\\3\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{3x_1+3x_2-5x_3=0}$

$\pi_2: (3x_1+2x_2=0) \Rightarrow x_2=3t,\ x_3=s \Rightarrow x_1=-2t$

$T(\pi_2)=\begin{pmatrix}t\\3t+s\\s-2t\end{pmatrix}=s\overset{\bar u}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}+t\overset{\bar v}{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}} \Rightarrow \bar u\times\bar v=\begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{5x_1-x_2+x_3=0}$

(4) א. נניח כי $\{v_1,\dots,v_n\}$ [illegible] תלויה לינארית, כלומר:

$\exists i\in(\{1,2,\dots,n\}\subset N) \Rightarrow v_i=v_1+v_2+\dots+v_{i-1}+v_{i+1}+\dots+v_n$

מכיון שנתון, T לינארית אז מתקיים:

$T(v_i)=T(v_1)+T(v_2)+\dots+T(v_{i-1})+T(v_{i+1})+\dots+T(v_n)$

כלומר $\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)\}$ תלויה לינארית.

בניגוד לנתון ולכן לא ייתכן כי $\boxed{\{v_1\dots v_n\}\ \text{ת"ל.}}$ מ.ש.ל.

(4) ב. לא נכון. [illegible]: $T:R^3\to R^2$ כך ש: $T\binom{x_1}{x_2}=\binom{0}{0}$ [illegible] $\left(\binom{0}{1},\binom{1}{0}\right)$

(5) הוכח כי אם $T(x)$ לינארית אז $T = ax \mid a\in \mathbb{R}$

$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

נסמן $T=f(x)$ כלומר גזירה:

נבדוק מה התנאי של הנגזרת.

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{T\text{ לינארית}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x-x_0)}{x-x_0}\overset{T\text{ לינארית}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(x-x_0)}f(1)}{\cancel{x-x_0}}=f(1)$$

$\Leftarrow$ המסקנה: שיפוע של הישר המשיק ולנגזרת שווה $f(1)$.

נעשה אינטגרל לנגזרת כדי לקבל את הפונקציה!

קבוע!

$$f(x)=\int f(1)\,dx=f(1)\int dx=\boxed{f(1)\cdot x+C}$$

נותר רק להוכיח כי $C=0$.

$$f(2)+f(3)\overset{T\text{ לינארית}}{=}f(5)$$

$$\Rightarrow f(1)\cdot 2+C+f(1)\cdot 3+C=f(1)\cdot 5+C$$

$$\Rightarrow 5f(1)+2C=5f(1)+C\Rightarrow C=0\quad\Rightarrow f(x)=f(1)\cdot x$$

נסמן $f(1)=a$

וקיבלנו $\boxed{T=f(x)=a\cdot x\mid a\in\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$