מבנה נתונים 1 | מרצה: ד"ר קרנר | מגישים: קרוה, ת.ז. 039677588 | ① (א)-(ה)
קבוצה 2 | מתרגל: נגה טוויזר | אליעזר וקנין ת.ז. 300965332

ציון: 30 ?

① $5 \overset{א}{<} \log\log n \overset{ב}{<} \log^2 n \overset{ג}{<} n \overset{ד}{<} n\log n \overset{ה}{<} n^2 \overset{ו}{<} 2^n \overset{ז}{<} 5^n \overset{ח}{<} (n+1)!$

א. (טיעון) $5<\log\log n$ כי 5 הוא קבוע ו-$\log\log n$ הוא פונקציה עולה.

ב. (הוכחה) נוכיח כי $\log^2 n > \log\log n$ לכל $n>n_0$

$\log n \cdot \log n > \log\log n \Rightarrow 2^{\log n \log n} > 2^{\log\log n}$

$\Rightarrow n^{\log n} > \log n$

$n > \log n$ לכל $n$ טבעי
$\log n > 1$ לכל $n>2$
$\Rightarrow n^{\log n} > n^1 > \log n$

$(n_0 = 1)$ $\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

ג. $\log^2 n < n$ (טיעון - עם כלל לופיטל)

כלל: $\log^2 n < n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log^2 n} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log^2 n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\log n \cdot \frac{1}{n\ln 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{n}{\log n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{לופיטל}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\ln 2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 2 \cdot n}{2} = \infty$$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

ד. (הוכחה) $n < n\log n$

כלומר

$\Rightarrow 1 < \log n$
נכון לכל $n>2$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

ה. (טיעון) $n\log n < n^2 \Leftarrow \log n < n$ נכון לכל $n$ טבעי. $\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

(טיעון בהמשך...)

חלק ? . מבני נתונים ואלגו' 2 | מרצה: דר' קרנר / מתרגל: ניר ... | מגישים: עמית כהן, ת.ז. 039677588 / אלה ... 300965332 | (1) $(n-1)$, (2) ...

א. $n^2<2^n$ (נכון)

$$n^2<2^n \Rightarrow \log_2(n^2)<\log_2 2^n \Rightarrow 2\log n<n$$

~~...~~ $n > \log n$ לכל $n>2$, ... ...

---

ב. $2^n<5^n$ (נכון) $\Leftarrow$ $2<5$ ~~...~~ $\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

($n\geq 1$ כי $n$ טבעי).

---

ג. $5^n<(n+1)!$ לכל $n>8$

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: $n=9 \Leftarrow 5^9<10!$

הנחה: נניח לכל $n=k \Leftarrow 5^k<(k+1)!$

הוכחה: צ"ל נכון כי הנכון לכל $n=k+1 \Leftarrow 5^{k+1}<(k+2)!$

$$\Rightarrow 5\cdot 5^k<(k+2)(k+1)!$$

נחסר 5 פעמים את שלב ההנחה, ונקבל:

$$0<(k-3)(k+1)!$$

$(k+1)!$ חיובי לכל $k$ טבעי, וגם $(k-3)$ חיובי כאשר הנתון $(k>8)$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

---

(2) א. טענה: $f(n)=O(g(n))$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\exists C\in\mathbb{R}\\ \exists n_0\in\mathbb{N}\end{array} \Bigg|\ n>n_0 \Rightarrow f(n)\leq C\cdot g(n)$$

נבחר $C=1$

$$\Rightarrow n\log_2 n+5n\leq 5n\log_3(n^5)\ /:n$$

$$\Rightarrow \log_2 n+5\leq 25\frac{\log_2 n}{\log_2 3}$$

$$\Rightarrow 5\leq\left(\frac{25}{\log_2 3}-1\right)\log n \Rightarrow \log n\geq\frac{5\log 3}{25-\log 3} \Rightarrow n\geq 2^{\left(\frac{25\log 3}{25-\log 3}\right)}$$

די אם נבחר $n_0\geq 2^{\left(\frac{25\log 3}{25-\log 3}\right)}$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

(נכון כמו שרצינו)

| | | | |
|---|---|---|---|
| (ב-1)4, 3, ב-2 | 039627888 / 300965332 | מגישים: ... / ... | ... |

## 2 ב.

מוכיח: $\log(n!) f(n) = \Theta(g(n))$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\exists C \in \mathbb{R} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\end{array} \Big| \; n > n_0 \Rightarrow f(n) \leq C \cdot g(n)$$

נבחר $C=1$.

$$\Rightarrow \log(n!) < n \log n$$

$$\Rightarrow \log(n!) < \log(n^n)$$

$$\Rightarrow n! < n^n$$

נכתוב הביטוי שני הצדדים כך n איברים ...

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 < n \cdot n \cdot n \ldots n \cdot n \cdot n$$

ברור כי ... $(n_0=2)$.

מ.ש.ל

## 3

$g(n)$

| | |
|---|---|
| $(\log_4 n)+1$ | while $n>=1$ do |
| $\log_4 n \cdot n^2$ | $x = h(n)$ |
| $\log_4 n$ | print(x) |
| $\log_4 n$ | $n = n/4$ |

$$\Theta(g(n)) = 1 + \log_4 n(3+n^2) = \boxed{n^2 \log n}$$

## 4 א. נכון.

הוכחה: כי

$$\begin{array}{l}\exists C \in \mathbb{R} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\end{array} \Big| \; n > n_0 \Rightarrow 2^{f(n)} \leq C \cdot 2^{g(n)}$$

נבחר $C=1$

$$\Rightarrow 2^{f(n)} \leq 2^{g(n)}$$

$$\Rightarrow f(n) \leq g(n)$$

נכון לפי הגדרה כי $f(n) = O(g(n))$

מ.ש.ל

ב. לא נכון! דוגמא נגדית: $f(n) = \frac{1}{n}$, ...

$$\begin{array}{l}\exists C \in \mathbb{R} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\end{array} \Big| \; n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{C}{n^2} \Rightarrow n < C$$

... $n > C$ ... לכל $C > 0$ ...

מ.ש.ל

בס"ד מבנה נתונים א' תרגיל 2 | מרצה: ד"ר קרמר מתרגל: ... | מגישים: ... ת.ז. 039674588 אליה יקנין 300965332 | (4) (ב-ד)

(4) לשאלות ב-ד: הגדרת $\Theta$:

$g(n)=\Theta(f(n))$

$\exists c_1 \in R,\ \exists c_2 \in R,\ \exists n_0 \in N \mid n \geq n_0 \Rightarrow c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$

אם $f(n)$ שווה לאפס אז אם $g(n)$ שווה לאפס מתקיים שוויון, ואם $g(n) \neq 0$ לא מתקיים השוויון.

אם $f(n) \neq 0$ - נחלק את שלושת חלקי הביטוי ב-$(f(n))$ ונקבל:

$$f(n)=\Theta(g(n)) \iff c_1 \leq \frac{g(n)}{f(n)} \leq c_2$$

ובמילים: הביטוי $\frac{g(n)}{f(n)}$ חסום בין שני מספרים ממשיים כששואף לאינסוף.

ב. $f(n)=\Theta f(\frac{n}{2})$ לא נכון! לדוגמא:

$f(n)=e^{n}$

$$\lim \frac{f(\frac{n}{2})}{f(n)} = \frac{e^{2n}}{e^{n}} = e^{n} = \infty$$

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$ ביטוי השואף לאינסוף. לכן לא יכול להיות חסום בין מספרים ממשיים.

ג. $n^{1/3}=\Theta n^{\frac{1}{4}} \Rightarrow c_1 \leq \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{4}}} \leq c_2 \Rightarrow c_1 \leq n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} \leq c_2 \Rightarrow c_1 \leq \sqrt[12]{n} \leq c_2$ (לא נכון)

$\Rightarrow n \leq c_2^{12}$

כאשר n שואף לאינסוף ולכן הוא לא יכול להיות קטן מ-$(c_2^{12})$ $\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$

ד. $n! = \Theta(n\log n) \Rightarrow c_1 \leq \frac{n!}{n\log n} \leq c_2$

לא נכון!

נראה כי הביטוי $\frac{n!}{n\log n}$ שואף לאינסוף ולכן הוא לא יכול להיות חסום בין מספרים ממשיים.

$\frac{n!}{n\log n} > \frac{n!}{n(n-1)} \Rightarrow \frac{n!}{n\log n} > (n-2)!$

כי $n-1 > \log n$ לכל $n>2$

הביטוי $(n-2)!$ שואף לאינסוף, והביטוי שלנו גדול ממנו.

$\boxed{\text{מ.ש.ל.}}$