מטלה ~~[illegible]~~ תרגיל נוסחאות נסיגה

① א

```
f(n)
if n<3
{
  m=⌊n/4⌋;
}
return (f(m)+f(2m));
```

תנאי עצירה $n<3$

תנאי עצירה / עצירה $n<3$

$$T(n)=\begin{cases} \Theta(1) & n\le 2 \\ T(n)=T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)+C \end{cases}$$

זמן ריצה $\to T(n)$

I $T(n)=T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)+C$

$\boxed{n\le 2 \quad m=\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}$ כי העצירה

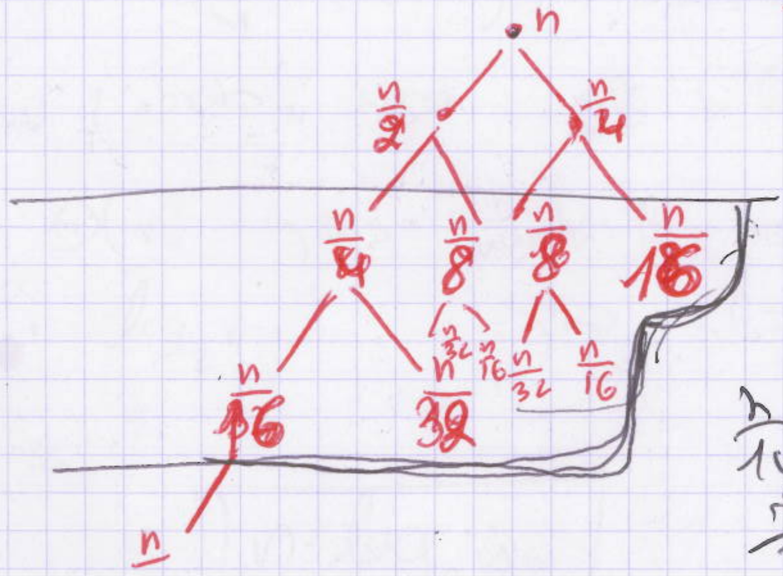
II $T(n)=T(\lfloor \frac{n}{16} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)+3C$

III זמן ריצה $T(n)=T(\lfloor \frac{n}{64} \rfloor)+3T(\lfloor \frac{n}{32} \rfloor)+3T(\lfloor \frac{n}{16} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor)+C$

$T(\lfloor \frac{n}{16} \rfloor)+2T(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor)+3C.$

זוהי נוסחת הנסיגה

② ב



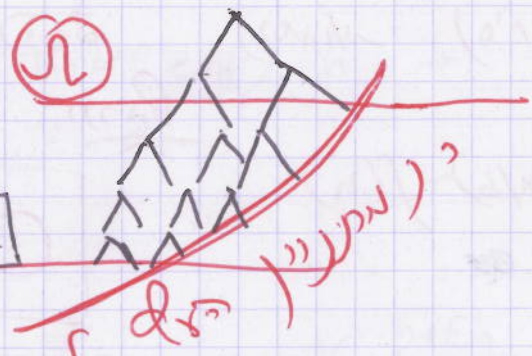
$\frac{n}{16}<3$

נניח שזה תנאי העצירה

$\frac{n}{16}$ נניח

רואים פה
שהפלט לפעמים הגיע לעצירה רקורסיה לפני
ס דרגות שמשמאל לו והדרגות הכי שמאליות
נעצרות ואחרונות כך...

$h_1 \leftarrow n_1$ ② Ω



n_1 ובכל
יהיו עם

$h_2 \rightarrow h_2$

O גדול

העץ מתנוונים

לעבך

וכ״כ העץ שנמצאו סבוריים

גובה
$\Omega(h_1)$

כוסים בין 2 גבהים שונים

גובה
$O(h_2)$

רואים פה שהסיבוכיות
כלנוה בין הגובה של העץ
שבני מגיע הדרגות הרושנה
לתנאי העצירה
ועכ׳ זה הדרגה
הימני של העץ

$2^h =$ מספר צמתים בעץ
חשוב

$h_1 = \log_2 n_1$

$h_2 = \log_2 n_2$

צריך לבין הגובה של מגיע הדרגה ההחרירה משמאל של העץ

h_1 h h_2

הם בכריעה פלנקה בכב

$h_1 = \log_2 \frac{n}{16}$

$h_1 = \log_2 16 - \log_2 n$

$2^{h=2^{\log n}}$

$2^{\log n_1} \Rightarrow \lfloor n_1 \rfloor$

$2^{\log n_2} \Rightarrow \lceil n_2 \rceil$

חסם
$2^{\log n} < x < 2^{\log n}$

$T = \Theta n$

סוף הכתבה

חסם תחתון
$k_1 \cdot 2^{\log n_1} \leq T \leq k_2 \cdot 2^{\log n_2}$

חסם עליון
$k_1 n_1 \leq T \leq k_2 n_2$

$T = \Theta(n)$

משל

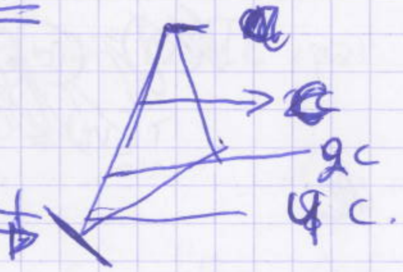
המשך שאלה 1 תרגיל (נוסחת נסיגה)

5 כעין ~~[illegible]~~ שהענף השמאלי הסופי

$T\left(\frac{n}{2^i}\right)$

תנאי העצירה

$$\left\lfloor n \cdot \frac{1}{2^i} \right\rfloor \le 2.$$



$$\frac{n}{2^i} \le 2 \qquad n \le 2^{i+1} \qquad \log n \le \log 2^{i+1}$$

$$\log n \le (\log 2)\cdot i + \log 2$$

$$\boxed{\log n - 1 \le i}$$

$$\sum_{i=0}^{\log n - 1} c \cdot 2^i = c\left(\frac{2^{\log n - 1} - 1}{2-1}\right)$$

סכום סדרה

$$c\left(2^{\log n} \cdot \frac{1}{2}\right) = c \cdot \frac{n}{2} = O(n)$$

סגורה

$$\boxed{\Theta(n)}$$

ולכן קשה גבולי $\Omega(n)$ כך יצא

$$\left\lceil n \cdot \frac{1}{4^i} \right\rceil \le 2,$$

$$c \cdot \frac{n}{4} = \Omega\left(\frac{n}{4}\cdot 1\right) = \Omega(n)$$

וכלה יוצא שזה הדבר הימני שנעצר הכי מהר

$$\boxed{\Theta(n)}$$

בסיס נוסחאות נסיה

תרגול

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

③

① $T(n) = 4T(n/3) + n^3$

$a=4 \quad b=3 \quad f(n)=n^3 \qquad \log_b a = \log_3 4 = 1.261$

Case 3: $f(n) = \Omega(n^{\log a + \varepsilon}) \quad \varepsilon > 0$

$$n^3 = n^{1.261+\varepsilon} \quad \varepsilon > 0$$

regularity condition.

$af(n/b) \leq C f(n) \quad C<1$

$4\left(\frac{n}{3}\right)^3 \leq \cancel{C} \cdot \cancel{n^3} \qquad \frac{4}{27} \cdot n^3 \leq C \cdot n^3$

עבור $C = \frac{5}{27}$ ו $n>1$ מתקיים שפה הכל ונוב

$T(n) = \Theta(f(n))$

② $T(n) = T(n/2) + \log n. \qquad a=1 \quad b=2 \qquad f(n) = \log n$

$\log_2 1 = 0$

case 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$

$\log n = \log^1 n \qquad k=1$

then. $T(n) = \Theta(n^0 \cdot \log^2 n) \qquad T(n) = \Theta \log^2 n$

Master Theorem מ- שאלה זו נפתרה ע״י המתרגל
Practice Problems.

שפך וגרי רני המתרגל אלנר

Case 2: If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$. $k \geq 0$ Then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$

(5)

$T(n) = T(\frac{7n}{8}) + n \rightarrow T(n) = T\left(\frac{n}{\frac{8}{7}}\right) + n$ (3)

$f(n) = n \quad b = 8/7 \quad a = 1$

$\log_b a = \log_{8/7} 1 = 0$

case 3: $n = \Omega(n^{0+\epsilon}) = \Omega(n^{\frac{1}{2}}) \quad \epsilon = \frac{1}{2}$

$\epsilon > 0$

Regularity condition

$1 \cdot \frac{n}{\frac{8}{7}} \le c\, n \qquad n \cdot \frac{7}{8} \le c\, n$

עבור $n_0 = 1$, $c = \frac{8}{9}$

$n > n_0$,

$\Downarrow$

ומתקיים.

$\frac{7}{8} n \le \frac{8}{9} n.$

$\Downarrow$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n)}$$

תרגיל (2)

2 יש דפוס שמסבירים שלפי הפתרון מגיעה לך מוסבר.

שיטת האיטרציה

$T(n) = T(n/2) + \log n$ — איטרציה 1 — $i = 1$ $T(\frac{n}{2^i}) + \log \frac{n}{2^{i-1}}$

$T(n) = T(n/4) + \log \frac{n}{2} + \log n$ — איטרציה 2 — $i = 2$ $T(\frac{n}{2^i}) + \log \frac{n}{2^{i-1}} + \log \frac{n}{2^i}$

$T(n) = T(n/8) + \log \frac{n}{4} + \log \frac{n}{2} + \log n$ — איטרציה 3 — $T(\frac{n}{2^i}) + \log \frac{n}{2^{i-1}} + \log \frac{n}{2^i} + \log \frac{n}{2^{i-1}}$

$\frac{n}{2^i} = n \qquad i = \log n$ — איטרציה k

⑥

$T(n) = T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \log\left(\frac{n}{2^{i-1}}\right) \ldots$

$= n + (\log n - \log 2^{i-1}) + (\log n - \log 2^{i}) / i$

$= 1 + ($ סכום $i) \ldots$

$$T(n) = n + \sum_{i=0}^{\log n} i = 1 + \Theta(\log n)^2$$

$$= \Theta(\log n)^2$$

הרקורסיה | עץ

$n + \log_2 n$

$\frac{n}{2} + \log n$

$\frac{n}{4} + \log \frac{n}{2}$

$\frac{n}{8} + \log \frac{n}{4}$

$\log_2 n$

הם לפי כל הסכום

$\frac{a_1}{1-q} =$

$\log_2 n \cdot \log n \cdot \left(\sum_{i=0}^{\log n} \log \frac{1}{2^i}\right)$

$\Theta(\log n)^2 = \Theta(\log_2 n)^2$

---

④

$T(n) = 9T(n/3) + n^2$

$a=9 \quad b=3$

$\log_b a = \log_3 9 = 2$

$f(n) = n^2$

if $n^2 = \Theta(n^2)$ then $\rightarrow \boxed{T(n) = \Theta(n^2 \log n)}$

case 2:

⑤

$T(n) = 7T(n/2) + n^2$

$a=7$
$b=2 \quad \log_2 7 = 2.807$

$f(n) = n^2$

Case 1: if $n^2 = O(n^{2.807 - 0.807}) \quad \varepsilon > 0$

then $T(n) = \Theta(n^{2.807})$

$T(n) = 3T(n/9) + \sqrt{n}$ $\quad a=3 \quad b=9 \quad \log_9 3 = +\frac{1}{2}$ (6)

$f(n) = n^{\frac{1}{2}}$

Case 2: if $n^{\frac{1}{2}} = \Theta(n^{\log_9 3}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}})$

$T(n) = \Theta(n^{\frac{1}{2}} \cdot \log n)$ נכון

$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$ $\quad a=1 \quad b=1 \quad \log_1 1 = 0.$ (7)

$\boxed{m = \log_2 n}$ סימון

$T(2^m) = T(\cancel{2}^{\frac{m}{2}}) + 1 \quad \leftarrow \quad n = 2^m$

$T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + 1 \qquad n^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{m}{2}}$

$\downarrow$

נסמן

$Z(m) = T(2^m)$

לפי כלל (נוסחת נסיגה) באמצעות החלפת משתנים.

$T(n) = T(2^m) = S(m) =$

$m = \lg n \quad n = 2^m \quad \sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}$

$S(m) = T(2^m)$

$Z(m) = Z(m/2) + 1$ $\qquad$ ✓ נכון

כלל המאסטר

$a=1 \quad b=2 \quad f(m)=1 \qquad \log_b a = \log_2 1 = 0$

Case 2: if $1 = n^0$ ✓

Then $Z(m) = \Theta(m^0 \cdot \log m)$ $\quad$ זוהי התשובה עבור n

$m = \log_2 n \Rightarrow T(n) = T(2^m) \Rightarrow Z(m) = \Theta(\log m) \Rightarrow \boxed{\Theta(\log \log n)}$

נחזיר חזרה

8

$T(n)=2T(n/2)+n/\lg n$ $\quad a=2 \quad b=2 \quad \log_2 2=1$

$f(n)=n/\log n$

$$T(n)=2\left(2T(n/4)+\frac{\frac{n}{2}}{\log\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{\log n}$$

$$T(n)=2\left(2\left(2T(n/8)+\frac{\frac{n}{4}}{\log\frac{n}{4}}\right)+\frac{\frac{n}{2}}{\log\frac{n}{2}}\right)+\frac{n}{\log n}$$

$$T(n)=2(2\ldots\left(T(1)+\frac{2}{\log 2}\right)+\frac{4}{\log 4}\Big)+\frac{8}{\log 8}$$

$$n\left(1+\frac{1}{\log 2^1}+\frac{1}{\log 2^2}+\cdots\frac{1}{\log 2^i}\right) \qquad 2^i=n \quad i=\log n$$

$$n\left(1+\sum_{i=1}^{\log n}\frac{1}{\log 2^i}\right)=n\left(1+\sum_{i=1}^{\log n}\frac{1}{i\log 2}\right)=$$

$$=n+\frac{n}{\log 2}\sum_{i=1}^{\log n}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=O(\log n)=\Theta(n\log(\log n))$$

9

$T(n)=5T(n/3)+n\lg n$ $\quad a=5 \quad b=3 \quad \log_3 5=1.464$

$f(n)=n\log n$

Master Theorem practice... לפי

If $f(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log^k n)$ with $k\geq 0$: Case 2 טעה

$$\Downarrow$$

$n\log n=O(n^{1.464-\varepsilon})$ $\quad \varepsilon>0$

$$\Downarrow$$

$n\log n=O(n^{1.4})$ $\quad \varepsilon=0.064$ $\qquad$ צריך ג

$$\Downarrow \qquad\qquad O(n^{\frac{1}{4}})=\lg n$$

$n\lg n\leq c\cdot n^{1.4}$ $\qquad c\geq\frac{n\lg n}{n\cdot n^{\frac{1}{4}}}$

$n_0=2$ $\quad C=2$ $\quad$ כך צריך $\qquad c\geq\frac{\lg n}{n^{\frac{1}{4}}}$

$n>n_0$

$n\lg n\leq 2\cdot n^{1.4}$ $\qquad n=3: \frac{0.4771}{1.316}=0.362$, $\quad n=2: \frac{0.301}{1.189}=0.253$

7

Case 1: $T(n) = \Theta(n^{\log_3 5}) = \Theta(n^{1.464})$

10

$T(n) = T(n-1) + 2\log n$

$i=1$ $T(n) = T(n-1) + \log n^2$

יש בעיה

עפ"י האינדוקציה

$b>1$ לפתרון בשלב הזה

ופה

$i=2$ $T(n) = T(n-2) + 2\log n^2 + \log(n-1)^2$ $b \geq 1$

כאשר

$i=3$ $T(n) = T(n-3) + $ $b=1$

$\hookrightarrow + \log(n-2)^2 + \log(n-1)^2 + \log n^2$

$T(n) = T(n-i) + 2\log\big((n-i)(n-(i+1))(n-(i+2))\ldots\big)$

$\prod (n-i+1)(n-i+1)\ldots\ldots$

n $n-1$ $n-2 \ldots 1$

$n-i=1$ $i=n-1$ נציב

$n-1 \neq n-1$

ולכן

$T(n) = T(1) + 2\log(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots n)$

$T(n) = \Theta\, 2\log n! =$

$T(n) = \Theta \log n!$

שאלה 2

נוסחות נסיגה תהיה

$$T(n) \begin{cases} \Theta(1) & \text{from} >= \text{to} \quad \text{אם} \quad \mathrm{I} \\ \Theta(1) & v[\text{from}] != v[\text{to}] \quad \text{condition } \mathrm{II} \end{cases}$$

$T(f,t)$ $\quad T(f+1, t-1)$ $\quad$ I & II לא מתקיימים $\quad$ אם from, to

ולכן הכי V זה מערך וחצי ו״ס ישלו

מספר וברת מוגב כך

$$\xrightarrow{f+1} \big| \xleftarrow{t-1}$$

פה יקרה

תנאי העצירה II שקרא

הכרח כיוקר ע״ר תמיד מתקיים

$\Downarrow$

$$T(f+1, t-1) = T(n-2)$$

לפי דק $T(n-1)$ $\quad$ לפי דק $T(n-1)$ $\quad$ ״גודל מערך״ V

$\Downarrow$

~~[illegible]~~

$$T(n) \begin{cases} \Theta(1) & \text{condition I } f >= t \text{ return true} \\ \Theta(1) & \text{condition II } v[f] != v[t] \text{ return false} \\ T(n-2) + C. & \text{if I \& II לא מתקיימים} \end{cases}$$

$$T(n) \begin{cases} \Theta(1) & n \leq 1 \quad \text{condition II או } n = 1 \\ T(n-2) + C & n > 1 \end{cases}$$

(11)

שיטת האינדוקציה

2 ב

$$T(n) = T(n-2) + c \qquad i=1$$

$$T(\quad T(n-4) + 2c \qquad i=2$$

$$T(n-6) + 3c \qquad i=3$$

$$\vdots$$

$$T(n-2i) + ic$$

העצירה בעצירה
בתנאי העצירה.

$$n-2i=1$$

$$i = \frac{1-n}{-2} = \frac{n-1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$T(n) = T\left(n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) + c\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$T(n) = T(2n-2n+1) + c\left(\frac{n-1}{2}\right) = T(1) + c\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$= \text{קבוע} + \frac{c}{2} n - \frac{c}{2} = \text{קבוע} + \text{קבוע} \cdot n = \Theta(n)$$

בתנאי ה
בסדר גם בעץ בכפל ועוד בקבועים שונים שנוה
ובעבודת

$$i = h$$

n	O_1
$n-2$	O_1
$n-4$	O_1
$n-6$	O_1

$$O(1) h = \Theta(1) \cdot \frac{n-1}{2} = \Theta(n)$$

$$h = i$$