[illegible] [illegible] | (1), (ג - [illegible]), (3) | מרצה: [illegible] / מתרגל: [illegible] | ב"ה אלגברה לינארית / תרגיל 3
ת.ז. 039677588

1) א. $T(x_1, x_2, x_3) = x_1$

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= 1 \\ T(0,1,0) &= 0 \\ T(0,0,1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [T] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

ב'. $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 5x_2 + \pi x_3$

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= 2 \\ T(0,1,0) &= 5 \\ T(0,0,1) &= \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow [T] = \begin{pmatrix}2\\5\\\pi\end{pmatrix}$$

ג'. $T(z_1, z_2, z_3) = 2iz_1 - 5z_2 + iz_3$

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= 2i \\ T(0,1,0) &= -5 \\ T(0,0,1) &= i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}2i\\-5\\i\end{pmatrix}$$

---

(3) $T(x,y,z) = (x+z,\ x+y-z,\ x-3y-2z)$

א. סגירות לחיבור:

$$T(x_1,y_1,z_1) + T(x_2,y_2,z_2) = (x_1+z_1,\ x_1+y_1-z_1,\ x_1-3y_1-2z_1) + (x_2+z_2,\ x_2+y_2-z_2,\ x_2-3y_2-2z_2)$$
$$= \big((x_1+x_2)+(z_1+z_2),\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2),\ (x_1+x_2)-3(y_1+y_2)-2(z_1+z_2)\big) = T(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

מ.ש.ל.

סגירות לכפל בסקלר:

$$T(\alpha(x,y,z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha z,\ \alpha x + \alpha y - \alpha z,\ \alpha x - 3\alpha y - 2\alpha z) = \alpha T(x,y,z)$$

מ.ש.ל.

ב.

$$\begin{aligned} x+z&=0 \\ x+y-z&=0 \\ x-3y-2z&=0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3R_2+R_3]{R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+\frac{1}{9}R_3 \\ R_2-\frac{2}{9}R_3 \\ -\frac{1}{9}R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \bar{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$$

ג. מכיוון שהשורות הבלתי תלויות ליניארית - לכן $\boxed{\operatorname{Ker} T = \{\bar{0}\}}$

ד. מכיוון שהגרעין $(\operatorname{Ker} T)$ הוא וקטור האפס, לכן התמונה $(\operatorname{Im} T)$ היא R^3 [illegible]

$$B(\operatorname{Im} T) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

[illegible] | [illegible]
ת.ז. 039677588

[illegible] | [illegible] (5)

(5) **2.** $\bar{V}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}$ $[T]\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $T(\bar{V})=[T]\bar{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1+V_2+V_3\\V_1+V_2\\V_1\end{pmatrix}$

נסמן $T(\bar{V})=\bar{U}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix}$ ונוכל לבטא את $\bar{V}$ באמצעות רכיבי הוקטור $\bar{U}$!

$$\begin{aligned}V_1+V_2+V_3&=U_1 \longrightarrow \cancel{U_3}+U_2-\cancel{U_3}+V_3=U_1 \Rightarrow V_3=U_1-U_2\\ V_1+V_2&=U_2 \rightarrow U_3+V_2=U_2 \Rightarrow V_2=U_2-U_3\\ V_1&=U_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{-1}=\begin{pmatrix}U_3\\U_2-U_3\\U_1-U_2\end{pmatrix}} \Rightarrow [T^{-1}]=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

ואכן זו בדיוק המטריצה ההפכית של $[T]^{-1}$.

---

2. $\bar{V}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}$ $[T]=\begin{pmatrix}1&1&i\\1&i&1\\i&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow T(\bar{V})=[T]\cdot\bar{V}=\begin{pmatrix}1&1&i\\1&i&1\\i&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1+V_2+iV_3\\V_1+iV_2+V_3\\iV_1+V_2+V_3\end{pmatrix}$

נסמן $T(\bar{V})=\bar{U}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix}$ ונוכל לבטא את $\bar{V}$ באמצעות רכיבי הוקטור $\bar{U}$:

(הערה: את החישובים המסובכים ביצעתי במחשבון-מדעי בשביל-מהירות)

$$\left.\begin{aligned}V_1+V_2+iV_3&=U_1\\V_1+iV_2+V_3&=U_2\\iV_1+V_2+V_3&=U_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&i&U_1\\1&i&1&U_2\\i&1&1&U_3\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-iR_1]{R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&i&U_1\\0&i-1&1-i&U_2-U_1\\0&1-i&2&U_3-iU_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&i&U_1\\0&i-1&1-i&U_2-U_1\\0&0&3-i&U_2+U_3-U_1(1+i)\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}\frac{1}{i-1}R_2\\ \frac{1}{3-i}R_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&i&U_1\\0&1&-1&\frac{1}{1-i}(U_1-U_2)\\0&0&1&\frac{1}{3-i}(U_2+U_3)-\left(\frac{1+2i}{5}\right)U_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1+i&\frac{1-i}{2}U_1+\frac{(1+i)}{2}U_2\\0&1&-1&\leftarrow \text{כנ"ל}\\0&0&1&\end{array}\right)$$

(אין לי מקום לפירוט)

$$\begin{matrix}R_1-(1+i)R_3\\R_2+R_3\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{3+i}{10}(U_1+U_2)-\frac{1+2i}{5}U_3\\0&1&0&\frac{3+i}{10}(U_1+U_3)-\frac{1+2i}{5}\cdot U_2\\0&0&1&\frac{3+i}{10}(U_2+U_3)-\frac{1+2i}{5}\cdot U_1\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3+i}{10}(U_1+U_2)-\frac{1+2i}{5}U_3\\\frac{3+i}{10}(U_1+U_3)-\frac{1+2i}{5}\cdot U_2\\\frac{3+i}{10}(U_2+U_3)-\frac{1+2i}{5}\cdot U_1\end{pmatrix}}\Rightarrow[T^{-1}]=\begin{pmatrix}\frac{3+i}{10}&\frac{3+i}{10}&\frac{1+2i}{-5}\\\frac{3+i}{10}&\frac{1+2i}{-5}&\frac{3+i}{10}\\\frac{1+2i}{-5}&\frac{3+i}{10}&\frac{3+i}{10}\end{pmatrix}$$

נבדוק שאכן מתקיים $[T^{-1}]\cdot[T]=I$

$$\begin{pmatrix}1&1&i\\1&i&1\\i&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3+i}{10}&\frac{3+i}{10}&\frac{1+2i}{-5}\\\frac{3+i}{10}&\frac{1+2i}{-5}&\frac{3+i}{10}\\\frac{1+2i}{-5}&\frac{3+i}{10}&\frac{3+i}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3+i}{10}\cdot2-\frac{i(1+2i)}{5}&\frac{(1+i)(3+i)}{10}-\frac{1+2i}{5}&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$$

נשים לב שאיברי האלכסון הראשי שווים "a" ושאר ה-"b" [illegible]

$$a=\frac{3+i}{10}\cdot2-\frac{i(1+2i)}{5}=\frac{3+i-i-2i^2}{5}=1$$

וכך האיברים שערכם "b" בכל המקומות:

$$\frac{(1+i)(3+i)}{10}-\frac{1+2i}{5}=\frac{3+4i+i^2-2-4i}{10}=0$$

$$\boxed{\Rightarrow [T^{-1}][T]=I \quad \boxed{\text{מ.ש.ל.}}}$$

(7) יש לציין בהקשר השאלה: לא ייתכן שהמטריצה A איננה 3x3...

עבור העתקה הנתונה, כך ש: $A \in M_{(3\times3)}\mathbb{R}$, $T(x)=AxA$, האם $T(x)$ לינארית?

(כמו שכבר (V)-סגור בחיבור וכפל בסקלר (דבר שנראה אינטואיטיבי...), ונוכיח לינאריות:

~~הכפלת מטריצות~~ העתקה סגורה לכפל בסקלר מכיוון שכפל בסקלר כפול מטריצות,

$(\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A(\alpha B))$

~~נבדוק חיבור~~ נותר רק לבדוק סגירות לחיבור:

נסמן:

$$A\begin{pmatrix} A & B & C\\ D & E & F\\ G & H & I\end{pmatrix},\quad \bar V_1\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c\\ d_1 & e_1 & f\\ g_1 & h_1 & i\end{pmatrix},\quad \cancel{\bar V_2\begin{pmatrix} j & k & l\\ m & n & o\\ p & q & r\end{pmatrix}}\quad V_2\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ d_2 & e_2 & f_2\\ g_2 & h_2 & i_2\end{pmatrix}$$

צ"ל:

$A(V_1)A+A(V_2)A=A(V_1+V_2)A$

$\cancel{A(V_1)A+A(V_2)A=A(V_1+V_2)A}$

~~נבדוק...~~

$$\cancel{(AV_1)A=\begin{pmatrix} Aa+Bd+Cg & Ab+Be+Ch & Ac+Bf+Ci\\ Da+Ed+Fg & Db+Ee+Fh & Dc+Ef+Fi\\ Ga+Hd+Ig & Gb+He+Ih & Gc+Hf+Ii\end{pmatrix}A}$$

(נפרק את השאלה לשני שלבים, ...:

$AV_1+AV_2=A(V_1+V_2)$

$\cancel{(AV_1)V_1A+AV_2A=A(V_1+V_2)A}$

צ"ל: הגדרה של העתקה לינארית האם היא נכונה גם כאן.

עבור (נסמן):

$\{AV_1=U_1,\ AV_2=U_2\}\Rightarrow A(V_1+V_2)=U_1+U_2$

אז U_1,U_2 הן מטריצות רגילות, ונשאר להוכיח לגבי V_1,V_2 ולומר:

$V_1A+V_2A=(V_1+V_2)A$

~~$\ker(A)=0$~~

(ידוע מהכפלת מטריצות כפול... העתקות לינאריות ... ש-$\bar V$ היא מרחב וקטורי)

ניקח את התבנית $V\cdot A$ היא:

$$V\cdot A=\begin{pmatrix} aA+bD+cG & aB+bE+cH & aC+bF+cI\\ dA+eD+fG & dB+eE+fH & dC+eF+fI\\ gA+hD+iG & gB+hE+iH & gC+hF+iI\end{pmatrix}\Rightarrow (V_1+V_2)A=\begin{pmatrix} (a_1+a_2)A+(b_1+b_2)D+(c_1+c_2)G & \cdots\\ \vdots & \vdots\\ \end{pmatrix}$$

(אין צורך לראות כי התבנית שהתקבלה לעיל מתקיימת $(V_1+V_2)A$ מתקיים גם לגבי V_1A+V_2A

מ.ש.ל.

ב"ה. לינארית ב' | מרצה: [illegible] | (9), (10) | [illegible]
תרגיל 3 | מתרגל: [illegible] | ת.ז. [illegible]

(9) א.

~~$\mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ [illegible] T [illegible]~~

$$\cancel{T\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\quad T\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}}\qquad T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

נסמן: $z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i,\ \alpha\in\mathbb{R}$

נבדוק סגירות לכפל בסקלר:

$$\alpha T(z_1)\overset{?}{=}T(\alpha z_1)\Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}a_1&b_1\\-b_1&a_1\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}\alpha a_1&\alpha b_1\\-\alpha b_1&\alpha a_1\end{pmatrix}\ \checkmark$$

(הוכחנו שהמטריצות שוות איבר איבר).

נבדוק סגירות לחיבור:

$$T(z_1+z_2)\overset{?}{=}T(a_1+b_1i+a_2+b_2i)=T((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i)$$

לפי חיבור מטריצות

$$=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2\\-(b_1+b_2)&a_1+a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\-b_1&a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2&b_2\\-b_2&a_2\end{pmatrix}=T(z_1)+T(z_2)\ \checkmark$$

מ.ש.ל.

ב.

$$T(z_1\cdot z_2)=T((a_1+b_1i)(a_2+b_2i))=T(a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i)=\begin{pmatrix}a_1a_2-b_1b_2&a_1b_2+a_2b_1\\-(a_1b_2+b_1a_2)&a_1a_2-b_1b_2\end{pmatrix}$$

$$T(z_1)T(z_2)=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\-b_1&a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2\\-b_2&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2-b_1b_2&a_1b_2+b_1a_2\\-a_2b_1-a_1b_2&a_1a_2-b_1b_2\end{pmatrix}$$

מ.ש.ל.

(10) א. הוכחה בתוך [illegible] כי הנדרש לא יתכן. אין העתקה כזו לינארית [illegible]

$$T(1,2,-1)+T(1,-1,2)=T((1,2,-1)+(1,-1,2))=T(2,1,1)$$

ולכן בהכרח גם לא רק $(1,1,2)\neq(1,1,1)$

ב. נניח כי קיימת העתקה כזאת, ונמצא לגבי את הצורה. אם נקבל תשובה חד משמעית - הטענה נכונה, ואם לא - לא.

$$T\left(\tfrac{2}{3}(1,-1)+\tfrac{1}{3}(1,2)\right)=T\left(\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}\right)\right)=T(1,0)=\tfrac{2}{3}T(1,-1)+\tfrac{1}{3}T(1,2)=\left(\tfrac{4}{3},-\tfrac{2}{3}\right)+\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=\left(1,-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$T\left(-\tfrac{1}{3}(1,-1)+\tfrac{1}{3}(1,2)\right)=T\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)=T(0,1)=-\tfrac{1}{3}T(1,-1)+\tfrac{1}{3}T(1,2)=\left(-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)+\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=\left(-1,\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow T(a,b)=aT(1,0)+bT(0,1)=\left(a,-\tfrac{a}{3}\right)+\left(-b,\tfrac{2b}{3}\right)=\left(a-b,\tfrac{2b-a}{3}\right)$$

אכן הראינו כי קיימת העתקה לינארית יחידה שמקיימת את שני התנאים הראשונים ונבדוק האם היא מקיימת את השלישי:

$$T(1,-7)=\left(1-(-7),\tfrac{2(-7)-1}{3}\right)=(8,-5)\ \checkmark$$

אכן זוהי העתקה לינארית יחידה. מ.ש.ל.

שרית כהן | ת.ז. [illegible]

(12) | [illegible] | ב"ע. לינארית 1 תרגיל 3

---

(12) $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi \Rightarrow z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=2bi$

א. $z_1=a_1+b_1 i\ ,\ z_2=a_2+b_2 i\ ,\ \alpha_0=\alpha_1+\alpha_2 i$ ~~[illegible]~~

נבדוק סגירות תחת כפל בסקלר:

$\alpha T(z_1)=(\alpha_1+\alpha_2 i)\cdot 2b_1 i=-2\alpha_2 b_1+2\alpha_1 b_1 i$

$T(\alpha z_1)=T(\alpha_1 a_1-\alpha_2 b_2+(\alpha_1 b_2+\alpha_2 b_1)i)=2(\alpha_1 b_2+\alpha_2 b_1)i$

מכיוון ששני הגדלים שווים רק כש $\alpha_2=0$, ולכן ~~[illegible]~~

(ב) $\boxed{\text{ההעתקה איננה לינארית מעל } C}$. אך מעל R ההעתקה סגורה תחת כפל בסקלר.

נבדוק סגירות תחת חיבור:

$T(z_1+z_2)=T(a_1+a_2+(b_1+b_2)i)=2(b_1+b_2)i=T(z_1)+T(z_2)$ ✓

$\boxed{\Leftarrow \text{(ג) ההעתקה היא לינארית מעל } R}$

---

2. $T^3(z)=T^3(a+bi)=T^2(T(a+bi))=T^2(2bi)=T(T(2bi))=T(4bi)=8bi=3T(z)$

(נכון!) $\boxed{\text{הטענה נכונה!}}$

---

3. טענה: ~~[illegible] $T(z)=2bi$~~

כי לכל z שאינו שייך ל-R $T^n(z)=2^n bi$ הוא מדומה טהור (כלומר z)

ורק לכל מספר השייך ל-R $T^n(z)$ הוא אפס.

(מכיוון ש) $T^n(z)$ הוא: $2^n bi$.

דוגמא נגדית: $T(i)=2i\notin R$