מרצה: ד"ר ולדימיר לנדר
מתרגל: יורם חדאד
מגיש: עזריאל ברגר
ת.ז. 039677588

הערה כללית: התרגיל היה מאוד לא ברור! כמה שאלות לא-ברורות, הגרפים והשאלות עליהם נראים איום-ונורא, ובסוף התרגיל כתוב "הבעיות הפילוסופיות" במקום "שאלות להגשה" – מה שגרם לי לפתור את כל התרגיל (למעט ציור הגרפים). חבל...

I. חקירת אי-רציפות הפונקציות הבאות, ע"פ הפירוט:

א. מציאת נקודות אי-הרציפות.

ב. חישוב הגבולות החד-צדדיים בנקודות אלו, או הוכחה שאינם קיימים.

ג. שרטוט גרף סביב נקודות אלו.

ד. הגדרת סוג הנקודה.

---

1. $f(x) = \frac{2}{x-4}$

הפונקציה מוגדרת באופן אחיד, כך שאי-הרציפות הוא בנקודה שאינה בתחום ההגדרה, כלומר: כאשר $x = 4$

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{2}{x-4} = \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

גרף

זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.

---

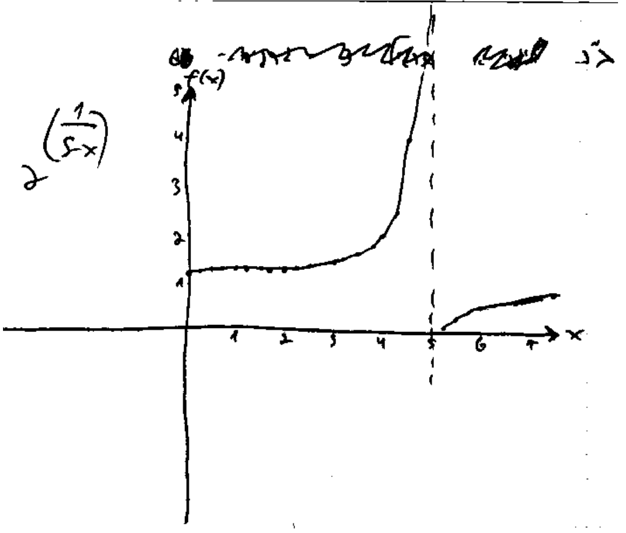
2. $f(x) = 2^{\left(\frac{1}{5-x}\right)}$

גם כאן אי הרציפות הוא רק בנקודה שאיננה בתחום ההגדרה, כלומר כאשר x=5. נחשב את הגבול ע"י הצבה:

$$t = \frac{1}{5-x}$$

$$\lim_{x\to 5^{\pm}} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 5^{\pm}} 5-x} = \lim_{t\to\mp\infty} t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^{+}} 2^{\left(\frac{1}{5-x}\right)} = \lim\limits_{t\to -\infty} 2^{t} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^{-}} 2^{\left(\frac{1}{5-x}\right)} = \lim\limits_{t\to +\infty} 2^{t} = +\infty \end{cases}$$



גרף:

גם כאן זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.

---

3. $f(x)=\frac{1}{1+5^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}$

גם כאן אי הרציפות הוא רק בנקודה שאיננה בתחום ההגדרה, כלומר כאשר x=1 (המכנה הכללי לא יכול להתאפס עבור x ממשי, כיון שמספר חיובי בחזקת מספר ממשי נשאר חיובי). נחשב את הגבול ע"י הצבה:

$$t=\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1^{\pm}}x-1}=\lim_{t\to\pm\infty}t$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{1}{1+5^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{1+5^{t}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^{+}}\frac{1}{1+5^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{1+5^{t}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{t\to+\infty}5^{t}}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to1^{-}}\frac{1}{1+5^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1}{1+5^{t}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{t\to-\infty}5^{t}}=\frac{1}{1+0}=\frac{1}{1}=1\end{cases}$$

גרף

כאן זוהי נקודת קפיצה מסוג א'.

---

4. $f(x)=\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

$$f(x)=\frac{x(x+3)}{(x-2)(x+3)}$$

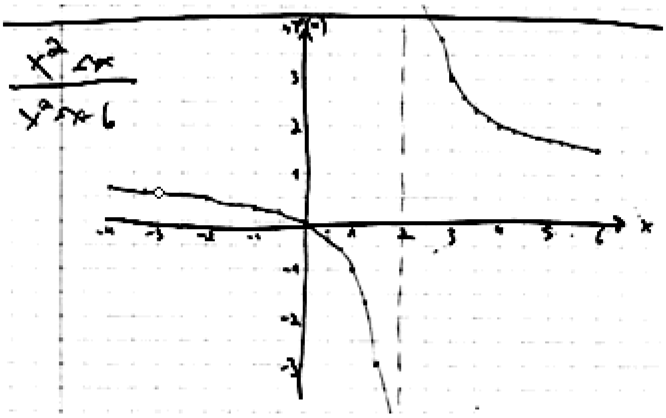
יש כאן 2 נקודות אי-רציפות, האחת כאשר x=-3, והשניה כאשר x=2.

הנקודה הראשונה היא נקודת אי-רציפות סליקה, מכיון שכאשר $x\neq-3$ ניתן לצמצם את השבר, וכתוצאה מזה ניתן להגדיר פונקציה עם שבר מצומצם ולהגדיר אותה באופן רציף:

$$g(x)=\begin{Bmatrix}f(x):x\neq-3\\0.6:x=-3\end{Bmatrix}=\frac{x}{x-2}$$

הנקודה השניה היא נקודת אי-רציפות-אינסופית, ע"פ ההוכחה דלקמן:

$$\lim_{x\to2^{\pm}}\frac{x}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to2^{\pm}}x}{\lim\limits_{x\to2^{\pm}}(x-2)}=\frac{2}{0^{\pm}}=\pm\infty$$



גרף

---

5. $f(x) = \begin{cases} 2x+3: x<4 \\ 7+\frac{16}{x}: x \geq 4 \end{cases}$

למרות ההגדרה המקוטעת, הפונקציה רציפה בנקודה x=4, כיוון ששתי ההגדרות מתלכדות בנקודה זו.

נקודת אי הרציפות של הפונקציה היא אך ורק x=0, וזה ברור שכאשר יש שאיפה ל0 במכנה – הפונקציה שואפת לאינסוף, כדלקמן:

$$\lim_{x\to 0^\pm}\left(7+\frac{16}{x}\right) = \lim_{x\to 0^\pm} 7 + \frac{\lim_{x\to 0^\pm} 16}{\lim_{x\to 0^\pm} x} = 7 + \frac{16}{0^\pm} = 7 \pm \infty = \pm\infty$$

גרף

זוהי נקודת אי רציפות אינסופית.

---

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}: x<-2 \\ x^2-3: -2 \leq x < 1 \\ x+1: x \geq 1 \end{cases}$

לפונקציה זו יש 2 נקודות אי-רציפות:

א. X=-2, כי מצד שמאל $\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$, ובנקודה עצמה $f(-2)=1$. זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.
ב. X=1, כי מצד שמאל $f(1^-)=-2$, ובנקודה עצמה $f(1)=2$. זוהי נקודת קפיצה.

גרף

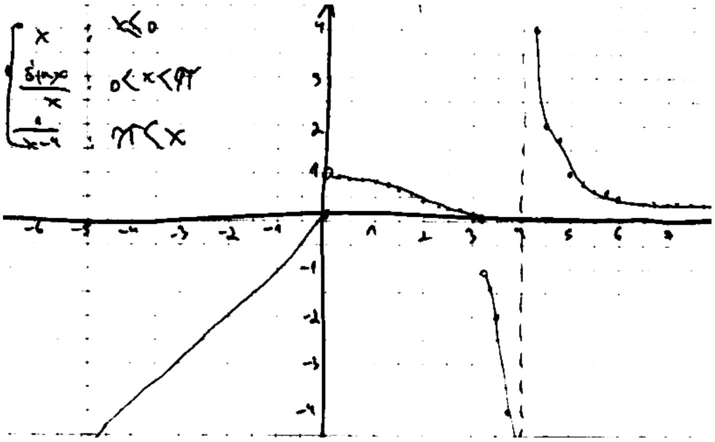
---

7. $f(x) = \begin{cases} x: x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}: 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x-4}: x > \pi \end{cases}$

לפונקציה זו יש 3 נקודות אי-רציפות:

א. X=0, כי בנקודה עצמה $f(0)=0$, ומצד ימין (ע"פ השוויון הידוע) $f(0^+)=1$. זוהי נקודת קפיצה.
ב. X=π, כי בנקודה עצמה $f(\pi)=0$, ומצד ימין $f(\pi^+) = \frac{1}{\pi-4} = -(1.16\ldots)$. זוהי נקודת קפיצה.
ג. X=4, כאן הפונקציה לא מוגדרת. $\lim_{x\to 4^\pm} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$. זוהי נקודת אי-רציפות אינסופית.

מרצה: ד"ר ולדימיר לנדר
מתרגל: יורם חדאד
מגיש: עזריאל ברגר
ת.ז. 039677588



גרף

---

8. $u(x) = \begin{cases} \mathbf{0}: x < 0 \\ \mathbf{1}: x \geq \mathbf{0} \end{cases}$

גרף

כאן יש רק נקודת-קפיצה, כאשר x=0, שמצד שמאל $f(0^-) = 0$, ובנקודה עצמה $f(0) = 1$.

---

9. $u(x-3) = \begin{cases} \mathbf{0}: x < \mathbf{3} \\ \mathbf{1}: x \geq \mathbf{3} \end{cases}$

גרף

כאן יש רק נקודת-קפיצה, כאשר x=-3, שמצד שמאל $f(0^-) = -3$, ובנקודה עצמה $f(-3) = 1$.

II. כתיבה באמצעות פונקציית הוויסייד:

---

1. I.6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}: x < -2 \\ x^2 - 3: -2 \leq x < 1 \\ x + 1: x \geq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+2} + u(x+2)\left(x^2 - 3 - \frac{1}{x+2}\right) + u(x-1)(x - x^2 + 4)$$

---

2. I.7) $f(x) = \begin{cases} x: x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}: 0 < x \leq \pi \\ \frac{1}{x-4}: x > \pi \end{cases}$

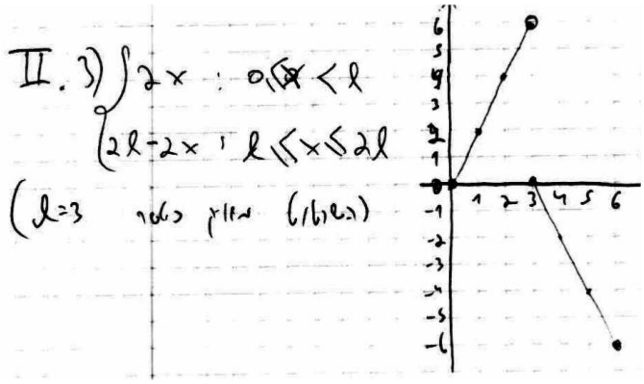
$$\Rightarrow f(x) = u(-x)\left(x - \frac{\sin x}{x}\right) + u(\pi - x)\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x-4}\right) + \frac{1}{x-4}$$

---

3. $f(x) = 2x + u(x-l)(2l-4x) | 0 \leq x \leq 2l$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x: 0 \leq x < l \\ 2l - 2x: l \leq x \leq 2l \end{cases}$$

נקודת אי הרציפות היא כאשר $x = l$, שמצד שמאל $f(l^-) = 2l$, ובנקודה עצמה $f(l) = 0$. זוהי נ.קפיצה.



גרף

III. מצא את ערכי A וB עבור הפונקציות רציפות, וכתוב את הפונקציות ע"י שימוש בפונקציית הוויסייד:

---

1. $f(x)=\begin{cases} x^3: x<2 \\ Ax+B: 2\le x<3 \\ x^2+2: x\ge 3\end{cases}$

הרציפות בנקודה 2 נותנת משוואה ראשונה:

$$2^3=2A+B\Rightarrow 2A+B=8$$

והרציפות בנקודה 3 נותנת משוואה שניה:

$$3^2+2=3A+B\Rightarrow 3A+B=11$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}2A+B=8\\3A+B=11\end{Bmatrix}\Rightarrow A=3\Rightarrow B=2$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+u(x-2)(3x+2-x^3)+u(x-3)(x^2-3x)$$

---

2. $f(x)=\begin{cases} Ax^3: x<2 \\ 3x+50: 2\le x<3 \\ x^2+B: 3\le x\end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^-}Ax^3=f(2)\Rightarrow 2^3A=3\cdot 2+50\Rightarrow A=\frac{56}{8}=7$$

$$\lim_{x\to 3^-}3x+50=f(3)\Rightarrow 3\cdot 3+50=3^2+B\Rightarrow B=59-9=50$$

$$\Rightarrow f(x)=7x^3+u(x-2)(3x+50-7x^3)+u(x-3)(x^2-3x)$$

---

3. $f(x)=\begin{cases} x-1: x\le 1 \\ ax^2-2: x>1\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+}ax^2-2=f(1)\Rightarrow 1^2A-2=1-1\Rightarrow A=2$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-2+u(1-x)(x+1-x^2)$$

---

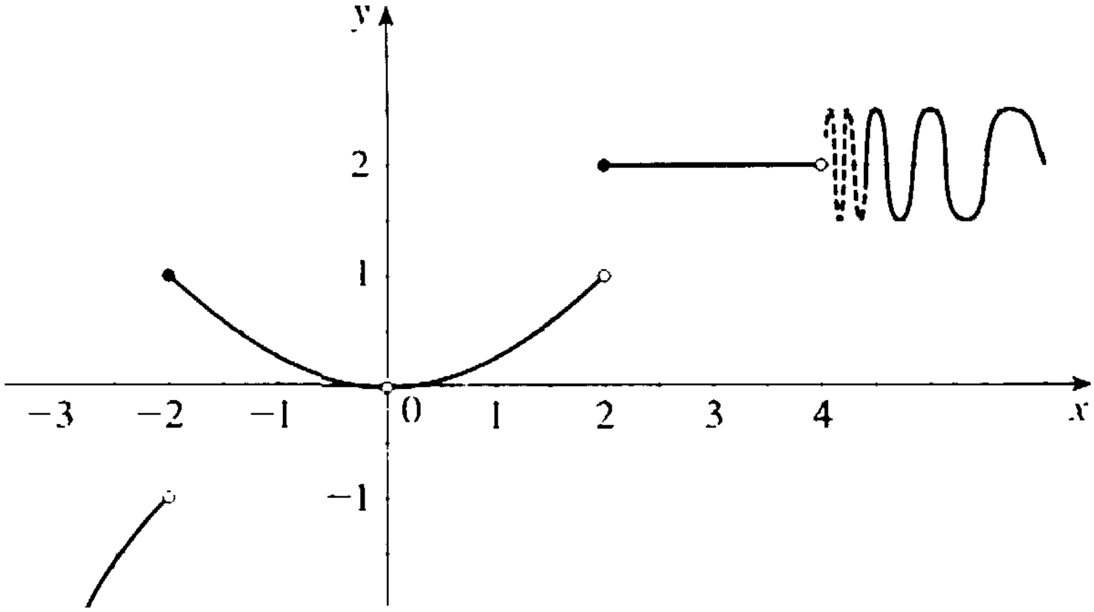
4. $f(x)=\begin{cases} ax+1: x\le \frac{\pi}{2} \\ \sin x+b: x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sin x+b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}+b=a\frac{\pi}{2}+1\Rightarrow b=a\frac{\pi}{2}$$

לא שייך לגלות גם את a וגם את b, כי יש כאן משוואה אחת ושני נעלמים. ניתן רק לבטא אחד באמצעות השני.

$$\Rightarrow f(x) = \sin x + \frac{a\pi}{2} + u\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(ax - \sin x + 1 - \frac{a\pi}{2}\right)$$

IV.חישוב גבולות לפי הגרפים הנתונים בציורים. במקרה וגבולות לא קיימים – הסבר.



1.

א. $\lim_{x\to-2^-} g(x) = -1$

ב. $\lim_{x\to-2^+} g(x) = 1$

ג. $\lim_{x\to-2} g(x)$

הגבולות החד-צדדיים אינם שוים זה לזה, ולכן הגבול לא קיים!

ד. $g(-2)=1$

ה. $\lim_{x\to2^-} g(x) = 1$

ו. $\lim_{x\to2^+} g(x) = 2$

ז. $\lim_{x\to2} g(x)$

הגבולות החד-צדדיים אינם שוים זה לזה, ולכן הגבול לא קיים!

ח. $g(2) = 2$

ט. $\lim_{x\to4^+} g(x) = 2$

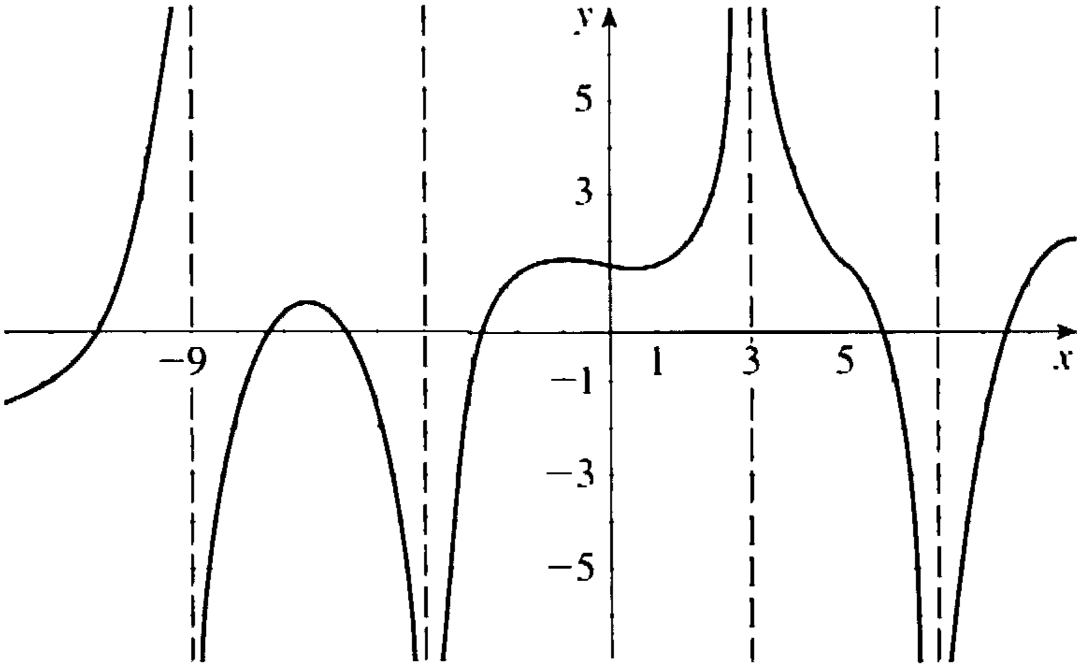
בהתבוננות מדוקדקת בגרף נראה שהפונקציה ממשיכה קצת אחרי החור שבנקודה 4, ורק אח"כ היא מתחילה "לקפוץ". אם לא לזה התכוון מי שצייר את הגרף – אז מאחרי הנקודה x=4 הפונקציה "מחוררת", ולא ניתן להגדיר את הפונקציה בשאיפה אליה.

י. $\lim_{x\to4^-} g(x)=2$

יא. $g(0)$

בנקודה זו הפונקציה אינה מוגדרת.

יב. $\lim_{x\to0} g(x) = 0$



2.

א. $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$

הפונקציה שואפת לאינסוף משני הצדדים, ולכן הגבול לא קיים!

ב. $\lim_{x\to 7} f(x) = -\infty$

הפונקציה שואפת לאינסוף השלילי משני הצדדים, ולכן הגבול לא קיים!

ג. $\lim_{x\to -4} f(x) = -\infty$

הפונקציה שואפת לאינסוף השלילי משני הצדדים, ולכן הגבול לא קיים!

ד. $\lim_{x\to -9^-} f(x) = \infty$

הפונקציה שואפת לאינסוף, ולכן הגבול לא קיים!

ה. $\lim_{x\to -9^+} f(x) = -\infty$

הפונקציה שואפת לאינסוף השלילי, ולכן הגבול לא קיים!

V. חקירת הפונקציות הבאות, ע"פ הפירוט:

א. תחום הגדרה.

ב. תמונת הפונקציה.

ג. נקודות אי-רציפות.

ד. תחומי העליה ותחומי הירידה הגדולים ביותר.

ה. הגדרת הפונקציה ההפוכה לפונקציה הנתונה, אם אי אפשר הסבר מדוע.

הערה כללית לתרגיל זה: השאלות לא היו כ"כ ברורות, בהתחלה הבנתי דברים מסוימים, ואח"כ חברים אמרו לי שההסבר הוא אחרת. שיניתי קצת, ואני מקווה שתתחשבו בכך שהשקעתי, גם אם עניתי על דברים קצת-שונים ממה שהתכוונו בכתיבת השאלה.

---

1. $f(x) = 3x + 5$

פונקציה ליניארית עולה, דהיינו: מוגדרת ורציפה לכל $\mathbb{R}$. עולה מהאינסוף השלילי לאינסוף החיובי.

תמונה: כל $\mathbb{R}$.

פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{x-5}{3}$

---

2. $f(x)=-2x+8$

פונקציה ליניארית יורדת, דהיינו: מוגדרת ורציפה לכל $\mathbb{R}$. יורדת מהאינסוף החיובי לאינסוף השלילי.

תמונה: כל $\mathbb{R}$.

פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{8-x}{2}$

---

3. $3x^2+5$

פונקציה זוגית המתארת פרבולה ישרה ו"שמחה", דהיינו: מוגדרת ורציפה לכל $\mathbb{R}$, יורדת (מהאינסוף ל5) לכל x שלילי, ועולה (מ5 לאינסוף) לכל x חיובי.

תמונה: $[5,+\infty)$

אין פונקציה הפוכה, כיון שלכל Y גדול מ5 יש שני מקורות $\left(x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{y-5}{3}}\right)$.

---

4. $f(x)=\frac{x}{x-2}$

תחום הגדרה: $x\neq 2$

תמונה: $\mathbb{R}-\{1\}$

נקודת אי רציפות ישנה ביציאה מתחום ההגדרה, כלומר כאשר x=2, וזוהי **נקודת אי-רציפות אינסופית**, כי:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^{\pm}}=\pm\infty$$

נגזרת:

$$f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{u}{v}\Rightarrow\begin{Bmatrix}u=x & \circlearrowleft & v=x-2\\ u'=1 & & v'=1\end{Bmatrix}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}$$

הנגזרת שלילית בכל תחום הגדרתה, שהוא זהה לתחום הגדרת הפונקציה, ומכאן, שהפונקציה **יורדת בכל תחום הגדרתה** (יורדת מאסימפטוטה אופקית y=1 עד לאינסוף השלילי, אסימפטוטה אנכית בx=2, ואח"כ יורדת מהאינסוף החיובי עד לאסימפטוטה אופקית y=1).

פונקציה הפוכה:

$$y=\frac{x}{x-2}\Rightarrow xy-2y=x\Rightarrow x(y-1)=2y\Rightarrow x=\frac{2y}{y-1}\Rightarrow\boxed{f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}}$$

הערות: א. הפונקציה ההפוכה לא מוגדרת כאשר x=1, ומכאן שטווח הפונקציה המקורית הוא $\mathbb{R}-\{1\}$, כפי מה שנכתב לעיל שיש שם אסימפטוטה אופקית בשני הצדדים. ב. טווח הפונקציה ההפוכה הוא $\mathbb{R}-\{2\}$, מכיון שזהו תחום הפונקציה המקורית.

---

5. $f(x)=\frac{x+3}{2-x}$

תחום הגדרה: $x\neq 2$

תמונה: $\mathbb{R}-\{-1\}$

נקודת אי רציפות ישנה ביציאה מתחום ההגדרה, כלומר כאשר x=2, וזוהי **נקודת אי-רציפות אינסופית**, כי:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{x+3}{2-x}=\frac{5}{0^{\mp}}=\mp\infty$$

נגזרת:

$$f(x)=\frac{x+3}{2-x}=\frac{u}{v}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=x+3\\u'=1\end{matrix}\circlearrowleft\begin{matrix}v=2-x\\v'=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{(2-x)^2}$$

הנגזרת חיובית בכל תחום הגדרתה, שהוא זהה לתחום הגדרת הפונקציה, ומכאן, שהפונקציה **עולה בכל תחום הגדרתה** (עולה מאסימפטוטה אופקית y=-1 עד לאינסוף החיובי, אסימפטוטה אנכית בx=2, ואח"כ עולה מהאינסוף השלילי עד לאסימפטוטה אופקית y=-1).

פונקציה הפוכה:

$$y=\frac{x+3}{2-x}\Rightarrow 2y-xy=x+3\Rightarrow x(1+y)=2y-3\Rightarrow x=\frac{2y-3}{1+y}\Rightarrow\boxed{f^{-1}(x)=\frac{2x-3}{1+x}}$$

הערות: א. הפונקציה ההפוכה לא מוגדרת כאשר x=-1, ומכאן שטווח הפונקציה המקורית הוא $\mathbb{R}-\{-1\}$, כפי מה שנכתב לעיל שיש שם אסימפטוטה אופקית בשני הצדדים. ב. טווח הפונקציה ההפוכה הוא $\mathbb{R}-\{2\}$, מכיון שזהו תחום הפונקציה המקורית.

---

6. $f(x)=3^{\frac{x}{x-2}}$

תחום הגדרה: $x\neq 2$

תמונה: $(0,3)\cup(3,\infty)$

נקודת אי רציפות ישנה ביציאה מתחום ההגדרה, כלומר כאשר x=2, וזוהי **נקודת אי-רציפות אינסופית**, כי:

$$\lim_{x\to 2^{+}}3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}=3^{\left(\frac{2}{0^{+}}\right)}=3^{(+\infty)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^{-}}3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}=3^{\left(\frac{2}{0^{-}}\right)}=3^{(-\infty)}=0$$

נגזרת:

$$f(x)=3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}=g\circ h(x)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}g(x)=3^x\Rightarrow g'(x)=3^x\ln 3\\h(x)=\frac{x}{x-2}\Rightarrow h'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))\cdot h(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}\cdot\ln 3\cdot\frac{-2}{(x-2)^2}=-\frac{2\cdot 3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}\cdot\ln 3}{(x-2)^2}$$

הביטוי $3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}\cdot\ln 3$ חיובי לכל x בתחום, ומכאן שהנגזרת שלילית בכל תחום הגדרתה, שהוא זהה לתחום הגדרת הפונקציה, ומכאן, שהפונקציה **יורדת בכל תחום הגדרתה** (יורדת מאסימפטוטה אופקית y=3 עד לאפס (שאיפה לאפס כאשר x קרוב ל2 מלמטה), ואח"כ יורדת מהאינסוף החיובי (אסימפטוטה אנכית כאשר x קרוב ל2 מלמעלה) עד לאסימפטוטה אופקית y=3).

פונקציה הפוכה:

$$y=3^{\left(\frac{x}{x-2}\right)}\Rightarrow\log_3 y=\frac{x}{x-2}\Rightarrow x\log_3 y-2\log_3 y=x\Rightarrow x(\log_3 y-1)=2\log_3 y$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\log_3 y}{\log_3 y-1}\Rightarrow\boxed{f^{-1}(x)=\frac{2\log_3 x}{\log_3 x-1}}$$

הערות: א. הפונקציה ההפוכה מוגדרת רק כאשר x גדול מאפס ושונה מ3, ומכאן שטווח הפונקציה המקורית הוא $\mathbb{R}^+-\{0,3\}$, כפי מה שנכתב לעיל שיש אסימפטוטה אופקית בשני הצדדים לישר y=3, וכן שהפונקציה שואפת ל0. ב. טווח הפונקציה ההפוכה הוא $\mathbb{R}-\{2\}$, מכיון שזהו תחום הפונקציה המקורית.

---

7. $f(x)=2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}$

תחום הגדרה: $x\neq 2$

תמונה: $(0,0.5)\cup(0.5,\infty)$

נקודת אי רציפות ישנה ביציאה מתחום ההגדרה, כלומר כאשר x=2, וזוהי **נקודת אי-רציפות אינסופית**, כי:

$$\lim_{x\to 2^-}2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}=2^{\left(\frac{5}{0^+}\right)}=2^{(+\infty)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}=2^{\left(\frac{5}{0^-}\right)}=2^{(-\infty)}=0$$

נגזרת:

$$f(x)=2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}=g\circ h(x)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}g(x)=2^x\Rightarrow g'(x)=2^x\ln 2\\ h(x)=\dfrac{x+3}{2-x}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{5}{(2-x)^2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(x)=g'(h(x))\cdot h(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}\cdot\ln 2\cdot\frac{5}{(2-x)^2}=\frac{5\cdot 2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}\cdot\ln 3}{(2-x)^2}$$

הביטוי $2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}\cdot\ln 2$ חיובי לכל x בתחום, ומכאן שהנגזרת חיובית בכל תחום הגדרתה, שהוא זהה לתחום הגדרת הפונקציה, ומכאן, שהפונקציה **עולה בכל תחום הגדרתה** (עולה מאסימפטוטה אופקית y=0.5 עד לאינסוף החיובי (אסימפטוטה אנכית כאשר x שואף ל2 מלמטה), ואח"כ עולה מהאפס (שאיפה לאפס כאשר x שואף ל2 מלמעלה) עד לאסימפטוטה אופקית y=0.5).

פונקציה הפוכה:

$$y=2^{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}\Rightarrow\log_2 y=\frac{x+3}{2-x}\Rightarrow 2\log_2 y-x\log_2 y=x+3\Rightarrow x(1+\log_2 y)=2\log_2 y-3$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\log_2 y-3}{1+\log_2 y}\Rightarrow\boxed{f^{-1}(x)=\frac{2\log_2 x-3}{1+\log_2 x}}$$

הערות: א. הפונקציה ההפוכה מוגדרת רק כאשר x גדול מאפס ושונה מ0.5, ומכאן שטווח הפונקציה המקורית הוא $\mathbb{R}^+-\{0,0.5\}$, כפי מה שנכתב לעיל שיש אסימפטוטה אופקית בשני הצדדים לישר y=3, וכן שהפונקציה שואפת ל0. ב. טווח הפונקציה ההפוכה הוא $\mathbb{R}-\{2\}$, מכיון שזהו תחום הפונקציה המקורית.

VI.חשב את הגבולות הבאים כאשר הם קיימים, וכאשר הם אינם קיימים נמק מדוע.

---

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^{-1}3x}{3x}}{\frac{x}{3x}}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{3x}=3$$

---

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{\tan 5x}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1\\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\end{array}}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{\tan 5x}=\frac{3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{3x}}{5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{5x}}=\frac{3}{5}$$

---

3. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\tan^{-1}(x+2)}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1}x}=1\\ t=x+2\Rightarrow x=t-2\end{array}}\Rightarrow\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\tan^{-1}(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{\tan^{-1}(x+2)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(t-4)}{\tan^{-1}t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan^{-1}t}\cdot\lim_{t\to 0}(t-4)=\lim_{t\to 0}(t-4)=-4$$

---

4. $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1}x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1\\ t=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t}\end{array}}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\tan^{-1}t}{t}=1$$

VII. מצא לפחות שורש אחד עבור כל אחת מהמשוואות הבאות ברמת דיוק של 0.01 ע"י שימוש בשיטת החצייה. השתמש במחשבון, כתוב את החישובים וציין מדוע ניתן להפעיל את השיטה (כלומר, נמק מדוע משפט ערך הביניים ניתן ליישום).

---

1. $\tan^{-1}x=2+x^3$

$$f(x)=2+x^3-\tan^{-1}x$$

(הנקודה בה הפונקציה מתאפסת היא הפתרון של המשוואה).

הפונקציה רציפה לכל x (היא סכום של 3 פונקציות רציפות, ולכן היא רציפה).

בשאיפה לאינסוף החיובי או השלילי היא שואפת לאינסוף החיובי או השלילי בהתאמה (כי arctan חסומה ע"י $\pm\frac{\pi}{2}$), ולכן טווח הפונקציה הוא הקבוצה $\mathbb{R}$ בשלימותה.

מסקנה: משפט ערך הביניים ניתן ליישום.

נבדוק ערכים כדי לראות מאיפה להתחיל את שיטת החציה:

$$f(0) = 2$$

$$f(-1) = 1.785 \dots$$

$$f(-2) = -4.892 \dots$$

אנו רואים שהפתרון נמצא בתחום שבין 1- לבין 2-. מכאן נעבוד בשיטת החציה:

$$f\left(\frac{-1+(-2)}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -0.392 \dots$$

$$f\left(\frac{-\frac{3}{2}-1}{2}\right) = f(-1.25) = 0.942 \dots$$

$$f\left(\frac{-1.25-1.5}{2}\right) = f(-1.375) = 0.342 \dots$$

$$f\left(\frac{-1.375-1.5}{2}\right) = f(-1.44) = -0.022 \dots$$

$$f\left(\frac{-1.44-1.375}{2}\right) = f(-1.41) = 0.150 \dots$$

$$f\left(\frac{-1.41-1.44}{2}\right) = f(-1.42) = 0.093 \dots$$

$$f\left(\frac{-1.42-1.44}{2}\right) = f(-1.43) = 0.036 \dots$$

המספר שנתן לנו את הערך הכי קרוב ל0 הוא 1.44-, ולכן נאמר שפתרון המשוואה הוא: x=-1.44

---

2. $\tan x = 1 - \log_2 x \,|0 < x < \frac{\pi}{2}$

(החלפתי את סימני האי-שוויון לאי-שוויון-ממש, כדי שהביטוי יהיה מוגדר. בנקודות x=0 וכן x=π/2 הביטוי אינו מוגדר)

$$f(x) = \tan x + \log_2 x - 1$$

הפונקציה רציפה לכל התחום הנתון.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x \ln 2} = \frac{x \ln 2 + \cos^2 x}{x \ln 2 \cos^2 x}$$

הנגזרת חיובית לכל התחום הנתון, ולכן הפונקציה עולה לכל התחום הנתון.

נבדוק ערכים כדי לראות מאיפה להתחיל את שיטת החציה:

$$f(1) = 0.557 \dots$$

$$f(0.5) = -1.453 \dots$$

אנו רואים שהפתרון נמצא בתחום שבין 0.5 לבין 1. מכאן נעבוד בשיטת החציה:

$$f(0.75) = -0.483 \dots$$

$$f(0.88) = 0.025\ldots$$

$$f(0.82) = -0.214\ldots$$

$$f(0.85) = -0.096\ldots$$

$$f(0.87) = -0.015\ldots$$

המספר שנתן לנו את הערך הכי קרוב ל0 הוא 0.87, ולכן נאמר שפתרון המשוואה הוא: x=0.87.

.VIII

1. **הוכח שלפולינום $p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{(2n-1)}x^{2n+1} + \cdots + a_0$ יש שורש ממשי.**

ראשית נחשב את גבולותיו של הפולינום בשאיפה לאינסוף:

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{(2n-1)}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n+1} = \pm\infty$$

אנו רואים שהפונקציה $f(x) = p(x)$ עולה מהאינסוף השלילי ועד האינסוף החיובי, וע"פ משפט ערך הביניים הפונקציה מחזירה כל ערך בין התחומים האלו, ולכן לכל משוואה מצורת $P(x) = a|a \in \mathbb{R}$ יהיה לפחות פתרון אחד. מ.ש.ל.

2. **הוכח שלפולינום $p(x) = x^{2n} + a_{(2n-1)}x^{2n+1} + \cdots + a_0$ המקיים $p(0) < 0$ יש שני שורשים ממשיים.**

ראשית נחשב את גבולותיו של הפולינום בשאיפה לאינסוף:

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n}\left(1 + \frac{a_{(2n-1)}}{x} + \frac{a_{(2n-2)}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n} = \infty$$

אנו רואים שהפונקציה $f(x) = p(x)$ שואפת לאינסוף החיובי בשני קצותיה, ומאידך יש נקודה שבה היא שלילית (נקודה זו לא חייבת להיות דווקא $p(0)$, אלא $P(a)|a \in \mathbb{R}$).

ע"פ משפט ערך הביניים, בקטע $(0, +\infty)$ הפונקציה מחזירה כל ערך בטווח שבין $[P(0), +\infty)$,ומכיון ש0 נמצא בטווח זה – הוא חייב להמצא על הפונקציה בקטע הנתון, וזהו שורש אחד של הפולינום.

אותו כלל תקף גם לקטע $(-\infty, 0)$, וזהו השורש השני של הפולינום.

ראינו שישנם לפחות שני שורשים לפולינום כזה. מ.ש.ל.

.IX x_1, x_2 הם השורשים של המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$. כאשר $a \to 0$ מקבלים משוואה מסדר ראשון $bx + c = 0$ שיש לה רק פתרון אחד. לאן נעלם השורש השני?

אם נתבונן טוב בשאלה, נראה שנעלמו שני השורשים, והופיע שורש חדש, כי הפתרון החדש $\left(-\frac{c}{b}\right)$ אינו קשור כלל לפתרונות ה"ישנים" $\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$.

נחשב מהו ערכם של הפתרונות האלו כאשר a שואף ל0:

$$\lim_{a\to0}\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \lim_{a\to0} 4ac}}{2\lim_{a\to0} a} = \frac{-b \pm b}{2\cdot 0}$$

כלומר: פתרון אחד שואף ל$\frac{0}{0}$ שזהו ביטוי בלתי מוגדר, והפתרון השני שואף ל$\left(-\frac{b}{0}\right)$ דהיינו לאינסוף. לכל $a \neq 0$ ניתן למצוא את שני הפתרונות האלו, שהם יאפסו **באמת** את הביטוי, ואילו הפתרון $\left(-\frac{c}{b}\right)$ לא יאפס את הביטוי, אלא הוא **שואף** ל0, כי:

$$\lim_{a\to 0}(\mathrm{a}\left(-\frac{c}{b}\right)^2 + \mathrm{b}\left(-\frac{c}{b}\right) + \mathrm{c}) = \lim_{a\to 0}\left(a \cdot \frac{c^2}{b^2} + 0\right)$$

שזהו ביטוי שאמנם **שואף** ל0, אך הוא לא שווה לאפס כל זמן שa שונה מ0!