# תרגול מסכם

## נתונה פירמידה משולשת (טטראדר) PQRS:

### מהי הזוית בין הפאות PQR ו-PRS?

מכיון שידוע לנו כבר ישר החיתוך ביניהן, שהוא PR, ננסה למצוא את הוקטור המאונך לו בכל אחת מהפאות:

נסמן נקודה כללית A על פני הישר PR, ונבטא את הוקטורים AQ ו-AS:

נסמן וקטור U כמכפלה בסקלר של AQ:

נסמן וקטור V כמכפלה בסקלר של AS:

הזוית בין U לבין V היא הזוית המבוקשת:

### מהי הזוית בין המקצוע PQ והפאה QRS?

ראשית נמצא וקטור המאונך לפאה QRS, ע"י מכפלה וקטורית:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נסמן וקטור U כמכפלה בסקלר של QR x QS:

הזוית בין U לבין PQ היא , וע"פ הזהות , נשתמש במכפלה סקלרית, ונחליף את הארקוסינוס בארקסינוס:

### מהו המרחק בין המקצועות PQ ו-RS?

ראשית נבנה מישור המכיל את PQ ומקביל לRS, ע"י מכפלה וקטורית ביניהם:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נכפול וקטור זה ב, נקבל את הוקטור , ומכאן למשוואת המישור הקרטזית:

נציב את הנקודה Q, ונקבל:

ועכשיו נחשב את מרחק הנקודה R ממישור זה, והוא המרחק בין הישרים:

### מהו נפח הפירמידה?

נחשב את בסיס הפירמידה QRS, והגובה יהיה מרחק הנקודה P מהמישור הזה.

שטח QRS שווה למחצית הנורמה של המכפלה הוקטורית QR x QS:

נבנה את משוואת המישור הקרטזית ע"פ הוקטור :

נציב את הנקודה Q, ונקבל:

ועכשיו נחשב את מרחק הנקודה P ממישור זה, והוא גובה הפירמידה:

נפח פירמידה הוא שליש ממכפלת הגובה בבסיס:

## נתונה פירמידה מרובעת ABCDS, שראשה S:

### האם בסיס הפירמידה הוא מרובע בעל שם מיוחד? הוכח!

כל זוג וקטורים היוצרים זוג צלעות נגדיות במרובע ABCD שוים (ראה לעיל את המספרים), כלומר מקבילים ובאורך זהה.

קיבלנו שני זוגות צלעות מקבילות ושוות, ומכאן נובע שהמרובע הוא **מקבילית**.

*מקבילית בה יש זוג צלעות (סמוכות) המאונכות זו לזו – היא* ***מלבן****.*

*נותר לברר האם המרובע הוא גם ריבוע, ואת זאת נעשה ע,"י בדיקת אורכי הצלעות:*

*מסקנא: בסיס הפירמידה הוא* ***מלבן****, אך* ***איננו ריבוע****.*

### מהי הזוית בין הפאות ABS ו-BCS?

נמצא וקטרים המאונכים לשני המישורים ע"י מכפלה וקטורית:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נכפול וקטור זה ב, ונקבל את הוקטור .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נסמן וקטור זה: .

הזוית בין וקטורים אלו היא גם הזוית בין המישורים. נמצא את הזוית ע"י נוסחת המכפלה הסקלרית:

### מהי הזוית בין הפאות ABS ו-CDS?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נכפול וקטור זה בשליש, ונקבל .

הזוית בין וקטורים אלו היא גם הזוית בין המישורים. נמצא את הזוית ע"י נוסחת המכפלה הסקלרית:

### מהי הזוית בין הפאה ABS והבסיס ABCD?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נכפול וקטור זה ב, ונקבל .

הזוית בין וקטורים אלו היא גם הזוית בין המישורים. נמצא את הזוית ע"י נוסחת המכפלה הסקלרית:

### מהו נפח הפירמידה?

הבסיס הוא מלבן, ולכן שטחו הוא מכפלת אורך צלעותיו. הגובה הוא מרחק הנקודה S ממישור הבסיס.

נעביר את הבסיס למשוואה קרטזית, ע"פ הוקטור המאונך לו :

נציב את הנקודה D, ונקבל:

ועכשיו נחשב את מרחק הנקודה S ממישור זה, והוא גובה הפירמידה:

נפח פירמידה הוא שליש ממכפלת הגובה בבסיס:

### מהי הזוית בין המקצוע AS לבסיס?

הזוית בין AS לבין הוקטור המאונך לבסיס היא , וע"פ הזהות , נשתמש במכפלה סקלרית, ונחליף את הארקוסינוס בארקסינוס:

## טטראדר ABCS:

SM הוא גובה בטטראדר (כלומר: M הוא היטלה של S על ABC), ואורכו .

### מהי הנקודה M?

ראשית נבנה את המישור ABC, ע"י המכפלה הוקטורית AB x AC:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נסמן את הוקטור , ומכאן למשוואת המישור הקרטזית:

נציב את הנקודה A, ונקבל:

ועכשיו נחשב את מרחק הנקודה S ממישור זה, והוא הקטע SM:

הנקודה M נמצאת על הישר MS, שהוא:, והיא גם במישור ABC. נציב את הנקודה הכללית של הישר MS במשוואת המישור ABC:

### מהו המרחק מהנקודה S לישר AC?

נסמן נקודה כללית של הישר AC באות N, והיא:

*(דרך החישוב של המקדמים בביטוי האחרון מבוססת על אחת ההוכחות לפתרון משוואה ריבועית)*

*אנו מחפשים את המרחק הקצר ביותר, והוא יתקיים כאשר הביטוי שווה לאפס (דהיינו כאשר ). במצב זה ריבוע-המרחק יהיה האיבר החופשי שאינו תלוי בK:*

### מהו נפח הטטראדר?

נפח פירמידה הוא שליש ממכפלת שטח הבסיס בגובה. את שטח הבסיס ניתן לקבל מהנוסחא:

הגובה נתון מתחילת התרגיל. נשאר רק להציב ולקבל את הנפח:

## מהן משוואות המישורים הניצבים למישור שמשוואתו ואשר מרחקם מהישר הוא ?

המישורים המדוברים מאונכים למישור הנ"ל, ולכן הוקטור-הניצב למישור הנ"ל מקביל למישורים המבוקשים.

מדברים על מרחק מישור מישר, ולכן הישר מקביל למישור.

נבצע מכפלה וקטורית בין וקטור הכיוון של הישר לוקטור המאונך למישור הנתון:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

נכפיל את הוקטור ב, ונקבל , ומכאן למשוואת המישור הקרטזית:

נותר לנו לברר מהם הערכים האפשריים לD, ובשביל זה נשתמש בנתון של מרחק המישור מהישר. כלומר: כל נקודה על הישר הנתון מרוחקת ב מהמישור. נציב את הנתון בנוסחת מרחק נקודה מישר, ונקבל:

## דרך נוספת לפתרון שאלה 3-א:

### (עשיתי את זה בהתחלה, לפני ששמתי לב שניתן להשתמש בישר MS. דרך ארוכה אבל מעניינת)

כדי למצוא את הנקודה M, נבצע חיתוך בין משוואת המישור, לבין משוואת המרחק SM (שהיא משוואת כדור):

הערה: למרות שיש 2 משוואות ו3 נעלמים, יהיה פתרון יחיד, בגלל שהמישור משיק לכדור (מהגדרת השאלה).

נסמן כלליים, כשהכוונה לקואורדינטות הנקודה M.

נבודד את z ממשוואת המישור , ונציב כאן:

בשביל שיהיו פתרונות ממשיים למשוואה זו, צריך להיות שהדיסקרימננטה שלה אינה קטנה מאפס:

מ.ש.ל.

נ.ב. כמובן שאפשר לעשות את אותו תהליך גם בסדר אחר של המשתנים (לדוגמא: לבודד את x ממשוואת המישור, ואח"כ לפתור לפי y, ולגלות את z לפי השוואת הדיסקרימננטה לאפס).