λ 騎士団
Lemma 2.8 の証明

mmichish

Lemma (2.8). [p.46]

$$if\ H \vdash M : t\ and\ H' \vdash M : t\ then\ H(x) = H'(x)\ for\ every\ x \in Fv(M)$$

Proof. 項 M の構造に関する帰納法による

a. M が変数である場合

このとき, ある変数 z について, $M = z$ であるとする. 仮定より,

$$H \vdash z : t \tag{1}$$

$$H' \vdash z : t \tag{2}$$

という型判断が成り立つ. ここで [Proj], (1) より

$$z \in H, H(z) = t \tag{3}$$

である. また, 同様に [Proj], (2) より

$$z \in H', H'(z) = t \tag{4}$$

である. (3), (4) より,

$$H(z) = H'(z) \tag{5}$$

また, Fv の定義より, $\forall z.\ M = z$ について

$$Fv(M) = Fv(z) = \{z\} \tag{6}$$

である. (5), (6) より補題は成立する.

b. M が抽象である場合

このとき, ある変数 z, 項 M', 型 r, s について

$$M = \lambda z : r.M' : r \to s \tag{1}$$

である. ただし, $t \equiv r \to s$ である. 型判断 $H \vdash \lambda z : r.M' : t$ が成立する仮定より, 以下の導出が成立する.

$$\frac{H, z : r \vdash M' : t}{H \vdash \lambda z : r.M' : r \to t}\,[Abs] \tag{2}$$

同様に型判断 $H' \vdash \lambda z : r.M' : t$ についても

$$\frac{H', z : r \vdash M' : t}{H' \vdash \lambda z : r.M' : r \to t}\,[Abs] \tag{3}$$

である. i.h より,

$$\forall x.\ x \in Fv(M'),\ (H, z : r)(x) = (H', z : r)(x) \tag{4}$$

が成立する. ここで,

$$Fv(M) = Fv(\lambda z : r.\ M') = Fv(M') - \{z\} \tag{5}$$

であるため, $x \neq z$ である. したがって,

$$(H, z : r)(x) = H(x) \tag{6}$$

$$(H', z : r)(x) = H'(x) \tag{7}$$

(4), (6), (7) より

$$H(x) = H'(x) \tag{8}$$

以上より補題は成立する.

c. M が適用である場合

このとき, ある項 L, N について

$$M \equiv L(N) \tag{1}$$

である. また, 型判断 $H \vdash L(N) : t$ が成立する仮定より, ある型 s について, 以下の導出が成立する.

$$\frac{H \vdash L : s \to t \quad H \vdash N : s}{H \vdash L(N) : t}\,[Appl] \tag{2}$$

同様に型判断 $H' \vdash L(N) : t$ が成立する仮定より,

$$\frac{H' \vdash L : s \to t \quad H' \vdash N : s}{H' \vdash L(N) : t}\,[Appl] \tag{3}$$

が成立する.

i.h より, 項 L, N に関して,

$$\forall x.\ x \in Fv(L),\ H(x) = H'(x) \tag{4}$$

$$\forall x.\ x \in Fv(N),\ H(x) = H'(x) \tag{5}$$

が成立する. ここで, Fv の定義より

$$Fv(M) = Fv(L(N)) = Fv(L) \cup Fv(N) \tag{6}$$

(9), (10), (11) より, 補題は成立する.

(a), (b), (c) より, 補題は成立する.

$\square$