(ex) $\mathrm{Add}(\bar{2})(\bar{1}) = (\bar{3})$ を示す.

(定義) $\mathrm{Add} = \mu\, add : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.$
$\quad \mathrm{if}\ iszero(y)\ \mathrm{then}\ x\ \mathrm{else}\ succ(add(x)(pred(y))) : num \to num \to num.$

$\mathrm{Add}(\bar{2})(\bar{1})$

$= (\mu\, add : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.$
$\quad \mathrm{if}\ iszero(y)\ \mathrm{then}\ x\ \mathrm{else}\ succ(add(x)(pred(y))))(\bar{2})(\bar{1})$

$\boxed{\begin{array}{l} \mu\, add : num \to num \to num.\ M \\ = M[add := \mu\, add : num \to num \to num.\ M] : \sigma \end{array}}$

(μ)
$= \lambda x : num.\ \lambda y : num.\ \mathrm{if}\ iszero(y)\ \mathrm{then}\ x\ \mathrm{else}\ succ($
$\quad \mu\, add : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.\ \mathrm{if}\ iszero(y)\ \mathrm{then}\ x\ \mathrm{else}\ succ(add(x)(pred(y)))$
$\quad)(x)(pred(y)))(\bar{2})(\bar{1})$

$\boxed{\begin{array}{l} ((\lambda x : num.\ N)(\bar{2}))(\bar{1}) \\ = (N[x := \bar{2}])(\bar{1}) \end{array}}$

$(\lambda)(\lambda)$
$= \mathrm{if}\ iszero(\bar{1})\ \mathrm{then}\ \underbrace{(\bar{2})}_{M}\ \mathrm{else}\ succ($
$\quad \mu\, add : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.\ \mathrm{if}\ zero(y)\ \mathrm{then}\ (x)\ \mathrm{else}$
$\quad \underbrace{succ(add(x)(pred(y)))}_{N}$
$\quad)(\bar{2})(pred(\bar{1})))$

(iszero, if false)
$\to$
$succ(\mu\, add : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.$
$\quad \mathrm{if}\ iszero\ y\ \mathrm{then}\ x\ \mathrm{else}\ succ(add(x)(pred(y))))(\bar{2})(pred(\bar{1})))$

($M = N$ ならば $succ(M) = succ(N)$ より $M \simeq N$ で計算)

(μ)

$= \text{succ}\Big(\lambda x{:}\text{num}.\ \lambda y{:}\text{num}.\ \text{if zero } y \text{ then } x \text{ else succ}\big($

$\mu\, \text{add}: \text{num} \to \text{num} \to \text{num}.\ \lambda x{:}\text{num}.\ \lambda y{:}\text{num}.\ \text{if iszero } y \text{ then } x \text{ else}$

$\text{succ}\big(\text{add}(x)(\text{pred}(y))\big)$

$\big)\ (\bar{2})\ (\text{pred}\ (\bar{1}))\Big)$

λ, λ

$= \text{succ}\Big(\text{if zero } (\underline{\text{pred}\ (\bar{1})}) \text{ then } (\bar{2}) \text{ else } \underline{\quad\quad}\Big)$

$\downarrow$

$\underline{\text{pred}\,(\text{succ}\,(0))}$

$\shortparallel$

$\underline{\text{is zero}\ (\ 0\ )}$

$\shortparallel$

$\underline{\text{if}\quad \text{true} \quad \text{then} \quad (\bar{2})}$

$\shortparallel$

$(\bar{2})$

$= \text{succ}\ (\bar{2})$

$= (\bar{3})$

$\square$

Examples

Lemma 4.1 を示す.

まず, 型に対する二項関係 ≡ は以下のような帰納的定義である (chapter 2, p37)

$$\sigma \equiv \tau \iff \begin{cases} \sigma = 0 \wedge \tau = 0 \\ \sigma_1 \equiv \tau_1 \wedge \sigma_2 \equiv \tau_2 \quad \left(\text{where } \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 \to \sigma_2 \\ \tau = \tau_1 \to \tau_2 \end{array}\right) \end{cases}$$

Lemma 4.1 (1)

if $H \vdash M : \sigma \wedge H \vdash M : \tau$, then $\sigma \equiv \tau$.

M の構造に関する帰納法で示す.

(i) Case: $M \equiv 0$

仮定より $H \vdash 0 : \sigma \wedge H \vdash 0 : \tau$ が成り立つ.

Typeing rule [zero] より. 上記の型付けは $H \vdash 0 : num$ 唯一に決まる. よって $\sigma \equiv \tau \equiv num$.

(ii) Case: $M =$ true, false.

同上. [True], [False] と仮定より成立する.

(iii) Case: $M \equiv$ succ(M), pred(M)

同上, [Succ], [Pred] と仮定より成立する.

(項 Succ(M), Pred(M) が H によって型付けされる → 型は num になる)

(iv) Case: $M \equiv$ zero?(M)

同上, [IsZero] より, bool に型付けされ, $\sigma \equiv \tau$

(v) Case : $M \equiv x$ 　　既にchapter2で示しているが、確認も含めて.

仮定より $H \vdash x : \sigma \ \wedge\ H \vdash x : \tau$. が成立する.

[Proj] より, $x : u \in H$ となる型 u は高々一つしかない. 　$H, x:u \vdash M : \tau$.

以上より $\sigma \equiv u \equiv \tau$ であり, 成立する.

(vi) Case : $M \equiv \lambda x:u.M$

仮定より, $H \vdash \lambda x:u.M : \underbrace{u \to \sigma'}_{\sigma} \ \wedge\ H \vdash \lambda x:u.M : \underbrace{u \to \tau'}_{\tau}$ が成立する.

(示したいのは $u \to \sigma' \equiv u \to \tau'$)

この導出が成立することから, $H, x:u \vdash M : \sigma' \ \wedge\ H, x:u \vdash M : \tau'$ が成立する.

i.h より 型割り当て $H, x:u$ に対して, $\sigma' \equiv \tau'$ が成り立つ.

従って, $u \to \sigma' \equiv u \to \tau'$ が成り立つ.

(vii) Case : $M \equiv LN$

仮定より, $H \vdash LN : \sigma$, $H \vdash LN : \tau$ が成立する.

この導出が成立することから, ある型 u, v について以下の導出木が存在.

$$\frac{H \vdash L : u \to \sigma \qquad H \vdash N : u}{H \vdash LN : \sigma} \qquad\qquad \frac{H \vdash L : v \to \tau \qquad H \vdash N : v}{H \vdash LN : \tau}$$

i.h より 項 L について, $u \to \sigma' \equiv v \to \tau$ が成り立つ.

定義より, $u \equiv v \ \wedge\ \sigma \equiv \tau$ より, 成立する.

(viii) Case : $M \equiv$ if L then M else N

仮定より, $H \vdash$ if L then M else $N : \sigma \ \wedge\ H \vdash$ if L then M else $N : \tau$. が成立する

この導出が成立することから, 以下の導出木が存在.

$$\frac{H \vdash L : \mathrm{bool} \quad H \vdash M : \sigma \quad H \vdash N : \sigma}{H \vdash \mathrm{if}\ L\ \mathrm{then}\ M\ \mathrm{else}\ N : \sigma}$$

$$\frac{H \vdash L : \mathrm{bool} \quad H \vdash M : \tau \quad H \vdash N : \tau}{H \vdash \mathrm{if}\ L\ \mathrm{then}\ M\ \mathrm{else}\ N : \tau}$$

i.h より、項 M, N において、$\sigma \equiv \tau$ が成立する。従って成立。

(IX) Case $M \equiv \mu x . M$

仮定より、$H \vdash \mu x : \sigma . M : \sigma$ $\cap$ $H \vdash \mu x : \tau . M : \tau$ が成立する。

この導出が成立することから、以下の導出木が存在。

$$\frac{H, x : \sigma \vdash M : \sigma}{H \vdash \mu x : \sigma . M : \sigma} \qquad \frac{H, x : \tau \vdash M : \tau}{H \vdash \mu x : \tau . M : \tau}$$

i.h より、型割当て

$H, x : \sigma$ に対して $\sigma \equiv \tau$.

{ p.101 中段. PCF includes a new binding .... より

bound variable の性質は [abs] と同じ. }

□

Lemma 4.1 (2) のために {Weakening}, {Contraction}, {Lemma 2.5} の PCF 拡張を示す

Lemma 2.5

if $H, x:r, y:s, H' \vdash M : t$ then $H, y:s, x:r, H' \vdash M : t$.

項の構造に関する帰納法

(i) Case $M \equiv 0$ のとき.

$x \equiv 0$ のとき $r \equiv num$ で 仮定と [zero] から成立.

$y \equiv 0$ のとき $s \equiv$ 〃

$x \not\equiv 0 \wedge y \not\equiv 0$ のとき, 仮定と 〃

(ii) true, false は (i) と同様

(iii) Case $M \equiv Succ(M)$ のとき.

仮定より, $H, x:r, y:s, H' \vdash Succ(M) : num$.

導出木より $H, x:r, y:s, H' \vdash M : num$

i.h より $H, y:s, x:r, H' \vdash M : num$

{Succ} より $H, y:s, x:r, H' \vdash Succ(M) : num$. より成立.

(iv) pred, zero? は (iii) と同様.

(v) {Proj} {Abs} {App} は 証明済.

(vi) Case $M \equiv$ if L then M else N のとき

仮定より $H, x:r, y:s, H' \vdash$ if L then M else $N : t$

導出木より　　　　i.h より

$$\begin{cases} H, x:r, y:s, H' \vdash L : bool \\ H, x:r, y:s, H' \vdash M : \tau \\ H, x:r, y:s, H' \vdash N : \tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H, y:s, x:r, H' \vdash L : bool \\ H, y:s, x:r, H' \vdash M : \tau \\ H, y:s, x:r, H' \vdash N : \tau \end{cases}$$

[Cond] より

$H, y:s, x:r, H' \vdash \text{if } L \text{ then } M \text{ else } N : \tau$. よって成り立つ

(vii) Case $M \equiv \mu z:\tau. M : \tau$ のとき.

仮定より.　$H, x:r, y:s, H' \vdash \mu z:\tau. M : \tau$

導出木より.　$H, x:r, y:s, H', z:\tau \vdash M : \tau$.

i.h より　$H, y:s, x:r, H', z:\tau \vdash M : \tau$

[Rec] より　$H, y:s, x:r, H' \vdash \mu z:\tau. M : \tau$ よって成り立つ　□

Lemma (Weakening)

if $H \vdash M : t \wedge x \notin H$ then $H, x:s \vdash M : t$.

項の構造に関する帰納法

(i) Case $M \equiv 0$ のとき.

仮定より, $x \neq 0$ としてよい. 従って成り立つ.

(ii) true, false のとき, (i) と同様

(iii) Case $M \equiv \mathrm{Succ}(M)$ のとき.

仮定より $H \vdash \mathrm{Succ}(M) : num$.

導出より $H \vdash M : num$.

i.h より $H, x:s \vdash M : num$.

[Succ] より $H, x:s \vdash \mathrm{Succ}(M) : num$.

(iv) Pred (M), zero?(M) のとき (iii) と同様.

(v) {Proj} {Abs} {App} は証明済 @suumajir.

(vi) Case $M \equiv$ if L then M else N のとき.

仮定より $H \vdash$ if L then M else $N : t$ … ① $\wedge$ $x \notin H$

① の導出より

$$\left\{\begin{array}{l} H \vdash L : bool \\ H \vdash M : t \\ H \vdash N : t \end{array}\right. \longrightarrow$$

i.h より

$$\left\{\begin{array}{l} H, x:s \vdash L : bool \\ H, x:s \vdash M : t \\ H, x:s \vdash N : t \end{array}\right.$$

[Cond] より

$H, x:s \vdash$ if L then M else $N : t$.

よって成り立つ

(vii') Case $M \equiv \mu y{:}u.\ M : u$

$y \neq x$ としてよい

仮定より $H \vdash \mu y{:}u.\ M : u$ …① ∩ $x \notin H$

導出より $H, y:u \vdash M : u$ [Rec] より

i.h より $H, y:u, x:\tau \vdash M : u.$ $H, x:\tau \vdash \mu y{:}u.\ M : u$

{Lemma 2.5} より $H, x:u, y:\tau \vdash M : u$ よって成り立つ

□

Lemma {Contraction}

if $H, x:s \vdash M:t \wedge x \notin Fv(M)$ then $H \vdash M:t$.

項の構造に関する帰納法による.

(i) Case $M \equiv 0$ のとき.

仮定より $x \neq 0$, $H, x:s \vdash 0 : num$ より [Zero] から成立.

(ii) true, false は (i) と同様.

(iii) Case $M \equiv Succ(M)$ のとき

仮定より. $H, x:s \vdash Succ(M) : t. \wedge x \notin Fv(Succ(M))$.

~~導~~出木より $H, x:s \vdash M : t.$

i.h より $H \vdash M : t$

[Succ] より $H \vdash Succ(M) : t.$ よって成立.

(iv) Pred. Zero? は (iii) と同じ

(v) {Proj} {Abs} {App} は証明済.

(vi) Case $M \equiv$ if L then M else N

仮定より. $H, x:s \vdash$ if L then M else $N : t.$

導出木より

$$\begin{cases} H, x:s \vdash L : bool \\ H, x:s \vdash M : \tau \\ H, x:s \vdash N : \tau \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} H \vdash L : bool \\ H \vdash M : \tau \\ H \vdash N : t \end{cases}$$

i.h より

[Cond] より $H \vdash \text{if } L \text{ then } M \text{ else } N : \tau$. よって成り立つ.

(vii) Case $M \equiv \mu y:t. M : \tau$ のとき.

仮定より $H, x:s \vdash \mu y:\tau. M : t$.

導出木より $H, x:s, y:\tau \vdash M : \tau$.

{Lemma 2.5} より $H, y:\tau, x:s \vdash M : t$.

i.h より $H, y:\tau \vdash M : t$.

[Rec] より $H \vdash \mu y:\tau. M : t$ よって成り立つ.

□

以上で Lemma 2.5, Weakening, Contraction の

拡張ができたので, 本題の Lemma 4.1 (2) に入る

Lemma 4.1 (2)

if $H, x:s \vdash M:t \cap H \vdash N:s$ then $H \vdash [N/x]M:t$

項の構造に関する帰納法で示す.

(i) Case $M \equiv 0$ のとき.

仮定より. $H, x:s \vdash 0:t \quad \cdots ①$ $\cap$ $H \vdash N:s$

① & Contraction より

$H \vdash 0:t \quad \cdots ③$

また substitution の定義より.

$[N/x]0 = 0 \quad \cdots ②$

②, ③ より

$H \vdash [N/x]0:t.$

従って成立する.

(ii) Case $M \equiv$ true のとき.

仮定より. $H, x:s \vdash \text{true}:t \quad \cdots ①$ $\cap$ $H \vdash N:s$

① & Contraction より,

$H \vdash \text{true}:t \quad \cdots ②$

また. substitution より

$[N/x]\text{true} = \text{true} \quad \cdots ③$

②, ③ より

$H \vdash [N/x]\text{true}:t$

従って成立する.

(iii) Case $M \equiv$ false のとき.

(ii) と同じ

(iv) Case $M \equiv Succ(M)$ のとき.

仮定より. $H, x:s \vdash Succ(M) : t$ …① ∩ $H \vdash N : s$

導出木より

$H, x:s \vdash M : num$.

Substitution より

$[N/x]Succ(M) = Succ([N/x]M)$ …④

i.h より $H \vdash [N/x]M : num$ …②

②, [Succ] より

$H \vdash Succ([N/x]M) : num$ …③

③, ④ より

$H \vdash [N/x]Succ(M) : num$

よって成り立つ

(v) Pred, IsZero について

(iv) と同様

(vii) Proj, Abs, App は Lemma 2.6 より省略.

(viii) Case $M \equiv$ if O then P else Q のとき.

仮定より. $H, x:s \vdash$ if O then P else Q $: t$ …① ∩ $H \vdash N : s$

導出より.

$H, x:s \vdash O : bool$

$H, x:s \vdash P : t$

$H, x:s \vdash Q : t$

各 i.h より.

$H \vdash [N/x]O : bool$

$H \vdash [N/x]P : t$

$H \vdash [N/x]Q : t$

[Cond] より

$H \vdash$ if $[N/x]O$ then $[N/x]P$ else $[N/x]Q : t$

Substitution より

$H \vdash [N/x]$ if O then P else Q.

よって成り立つ

(ix) Case $M \equiv \mu y{:}u.\ M : t.$ のとき.

仮定より, $H, x{:}s \vdash \mu y{:}u.\ M : t$ … ① $\cap$ $H \vdash N : s$ … ②

(a) $y \neq x$ のとき.

導出より.

$H, x{:}s, y{:}u \vdash M : t$ … ③

Lemma 2.5 より

$H, y{:}u, x{:}s \vdash M : t$ … ④

② と Weakening より

$H, y{:}u \vdash N : s$ … ⑤

④ . ⑤ , i.h より

if $H, y{:}u, x{:}s \vdash M : t$ $\cap$ $H, y{:}u \vdash N : s$

then $H, y{:}u \vdash [N/x]M : t.$

[Rec] より

$H \vdash \mu y{:}u.\ [N/x]M : t.$

Substitution より

$H \vdash \mu y{:}u.\ [N/x]M : t$

$= H \vdash [N/x]\mu y{:}u.\ M : t$ よって 成立.

(b) $y = x$ のとき.

仮定より $H, x:s \vdash \mu x:s.\ M : s$ ...① $H \vdash N : s$.

① と Contraction より.

$H \vdash \mu x:s.\ M : t$ ...②

Substitution より

$[N/x]\mu x:s.\ M : t = \mu x:s.\ M : t$ ...③

②, ③ より

$H \vdash [N/x]\mu x:s.\ M : t$

よって成立.

$\square$

Lemma 4.2.

If $M \to N$ and $M \to N'$ then $N \equiv N'$

(リダクションが一意に定まる)

項の構造に関する帰納法で示す

(i) Case $M = 0$, true, false のとき. これ以上リダクションされない.

(ii) Case $M =$ pred (M) のとき. さらに場合分けを行う

(a) $M \equiv 0$ のとき. 仮定より

$$\text{pred}(0) \to N \ \cap \ \text{pred}(0) \to N'$$

rule より, pred(0) は 0 のみに評価されるため, $N \equiv 0 \equiv N'$

(b) $M \equiv \text{Succ}(V)$ のとき, 仮定より

$$\text{pred}(\text{Succ}(V)) \to N \ \cap \ \text{pred}(\text{Succ}(V)) \to N'$$

rule より, pred(Succ(V)) は V のみに評価されるため. $N \equiv V \equiv N'$

(c) $M \equiv M' \cap M' \not\equiv 0$ or $\text{Succ}(V)$ のとき, 仮定より,

pred $(M') \to N$, pred $(M') \to N'$ が成立する.

rule より ある項 O', P' について. 以下が成り立つ.

$$\begin{cases} \text{pred}(M') \to \text{pred}(O') \equiv N \\ \text{pred}(M') \to \text{pred}(P') \equiv N' \end{cases}$$

リダクションの ~~導~~ 導出より,

$M' \to O'$

$M' \to P'$

i.h より $O' \equiv P'$

rule より,

$$\text{pred}(M') \to \text{pred}(O') \equiv N$$
$$\equiv \text{pred}(P') \equiv N'$$

従って $N \equiv N'$

(iii) Case $M \equiv Succ(M')$ のとき.

仮定より,

$$Succ(M') \to N \quad \cap \quad Succ(M') \to N'$$ が成立する.

ruleより, ある項 O', P' に関して.

$$Succ(M') \to N \equiv Succ(O')$$
$$Succ(M') \to N' \equiv Succ(P')$$

~~導出~~より
$$M' \to O'$$
$$M' \to P'$$

i.h より
$$O' \equiv P'$$

ruleより

$$Succ(M') \to Succ(O') \equiv N$$
$$\equiv Succ(P') \equiv N'$$

従って $N \equiv N'$

(iv) Case $M \equiv zero?(M)$ のとき. 更に場合分けを行う

(a) $M \equiv 0$ のとき. 仮定より,

$$zero?(0) \to N \quad \cap \quad zero?(0) \to N'$$ が成立する.

ruleより $zero?(0)$ は true にのみ評価されるため, $N \equiv true \equiv N'$

(b) $M \equiv Succ(V)$ のとき, (a) と同様に成り立つ.

(c) $M \equiv M' \cap M \not\equiv 0 \cap M \not\equiv Succ(V)$ のとき. 仮定より,

$$Succ(M') \to N, \quad Succ(M') \to N'$$ が成り立つ.

ruleより. ある項 O', P' に関して.

$$\begin{cases} Succ(M') \to N \equiv Succ(O') \\ Succ(M') \to N' \equiv Succ(P') \end{cases}$$

リダクションの~~導出~~より

$$M' \to O' \cap M' \to P'$$

i.h より. $O' \equiv P'$

ruleより

$$Succ(M') \to Succ(O') \equiv N$$
$$\equiv Succ(P') \equiv N'$$

従って $N \equiv N'$

(v) $M \equiv$ if O then P else Q

(a) $O \equiv$ true の場合、仮定より

$$\text{if true then } P \text{ else } Q \to N \ \cap \ \text{if true then } P \text{ else } Q \to N'$$

rule より if true then P else Q は P にのみ評価されるため、$N \equiv P \equiv N'$

(b) $O \equiv$ false のとき、(a) と同様。

(c) $O \equiv L \cap L \not\equiv$ true $\cap L \not\equiv$ false のとき、仮定より

if L then P else $Q \to N$ $\cap$ if then P else $Q \to N'$ が成り立つ

rule より、ある項 L', L'' について

$$\begin{cases} \text{if } L \text{ then } P \text{ else } Q \to N \equiv \text{if } L' \text{ then } P \text{ else } Q \\ \text{if } L \text{ then } P \text{ else } Q \to N' \equiv \text{if } L'' \text{ then } P \text{ else } Q. \end{cases}$$

リダクションの導出より

$$L \to L' \ \cap \ L \to L''$$

i.h より $L' \equiv L''$

rule より

$$\begin{aligned} \text{if } L \text{ then } P \text{ else } Q \to \text{if } L' \text{ then } P \text{ else } Q &\equiv N \\ \equiv \text{if } L'' \text{ then } P \text{ else } Q &\equiv N' \end{aligned}$$

従って、 $N \equiv N'$

(vi) Case $M \equiv x$ について.

rule が存在しないため，示すものなし．

(vii) Case $M \equiv \lambda x:\tau.M$ について. (vi) と同様．

(viii) Case $M \equiv M'L'$ のとき.

(a) $M' \equiv \lambda x:\tau.O'$ のとき 仮定より.

$(\lambda x:\tau.O')(L') \to N \cap (\lambda x:\tau.O')(L') \to N'$ が成立する.

rule より. $(\lambda x:\tau.O')(L')$ は $[L'/x]O'$ のみに評価されるため

$N \equiv [L'/x]O' \equiv N'$

(b) $M' \equiv P'$ のとき. 仮定より

$P'(L') \to N \cap P'(L') \to N''$

rule より. ある項 Q, R に対して.

$\begin{cases} P'(L') \to N \equiv Q(L') \\ P'(L') \to N' \equiv R(L') \end{cases}$

リダクションの導出より

$P' \to Q \cap P' \to R$

i.h より $Q \equiv R$

rule より

$P'(L') \to Q(L') \equiv N$
$\equiv R(L') \equiv N'$

従って $N \equiv N'$

(ix) Case $M \equiv \mu x:\tau.M$ のとき.

仮定より $\mu x:\tau.M \to N \cap \mu x:\tau.M \to N'$ が成り立つ

rule より $\mu x:\tau.M$ は $[\mu x:\tau.M/x]M$ にのみ評価されるため

$N \equiv [\mu x:\tau.M/x]M \equiv N'$

□

Lemma 4.3

(1) if $M \to^* N$ then $\mathrm{pred}(M) \to^* \mathrm{pred}(N)$

評価の長さに関する帰納法による.

{ $n=0$ } 長さが 0 の場合, 示すべきものなし.

{ $n=1$ } 仮定より $M \to N$ が成り立つ.

rule より $\mathrm{pred}(M) \to \mathrm{pred}(N)$ なので成立.

$n-1$ のときに命題が成立している, と仮定し, n の場合を示す.

{ n } 仮定より $M \to^n N$ が成り立つ. ここである項 M' について

$$M \to^{n-1} M' \to N$$ である

i.h より $M \to^{n-1} M'$ ならば $\mathrm{pred}(M) \to^{n-1} \mathrm{pred}(M')$

また. $M' \to N$ ならば $\mathrm{pred}(M') \to \mathrm{pred}(N)$

以上より

$$\mathrm{pred}(M) \to^{n-1} \mathrm{pred}(M') \to \mathrm{pred}(N)$$

従って

$\mathrm{pred}(M) \to^n \mathrm{pred}(N)$ より n の場合も成立.

同様に (2), (3), (4) を示せるので省略. □

Theorem 4.4

if $H \vdash M : \tau \cap M \to N$

then $H \vdash N : \tau \cap \vdash (H \triangleright M = N : \tau)$

項の構造に関する帰納法による

(i) Case $M \equiv 0$, true, false, x, $\lambda x : s. M$ の場合

transition rule の定義がないため、示すべきものがない

(ii) Case $M \equiv Succ(M')$ のとき. 仮定と Lemma 4.2 より

$$H \vdash Succ(M') : t \cap Succ(M') \to Succ(N') \ (\equiv N)$$

このとき 型 t は typing rule より $t \equiv num$.

型判断と translation rule より.

$$H \vdash M' : t \cap M' \to N'$$

i.h より.

$$H \vdash N' : t \cap \vdash (H \triangleright M' = N' : t)$$

[Succ] {Cong} より.

$$H \vdash Succ(N') : t \cap \vdash (H \triangleright Succ(M') = Succ(N') : t)$$

(iii) Case $M \equiv pred(M)$ のとき.

(a) $M \equiv 0$ のとき. 仮定と Lemma 4.2 より.

$$H \vdash pred(0) : t \cap pred(0) \to 0$$

このとき 型 t は typing rule より $t \equiv num$.

従って. $H \vdash 0 : num$ が成立する.

また, {PredZero} より $\vdash (H \triangleright pred(0) = 0 : num)$ は成り立つ.

(b) $M \equiv \mathrm{Succ}(\overline{V})$ のとき、仮定と Lemma 4.2 より、

$H \vdash \mathrm{pred}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) : t \quad \cap \quad \mathrm{pred}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) \to \overline{V} \quad (\equiv N)$

このとき 型 t は typing rule より $t \equiv num$.

typing judgement より、 $H \vdash \mathrm{Succ}(\overline{V}) : num$ であり、 $H \vdash \overline{V} : num$ である。

また $\{\mathrm{PredSucc}\}$ より、 $\vdash (H \rhd \mathrm{pred}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) = \overline{V} : num)$ は成り立つ。

(c) $M \equiv M'$ のとき、仮定と Lemma 4.2 より、ある項 N' について、

$H \vdash \mathrm{pred}(M') : t \quad \cap \quad \mathrm{pred}(M') \to \mathrm{pred}(N') \quad (\equiv N)$

型判断と rule より $H \vdash M' : t \quad \cap \quad M' \to N' \quad \cap \quad t \equiv num$

i.h より $H \vdash N' : t \quad \cap \quad \vdash (H \rhd M' = N' : t)$

[Pred] と {Cong} より $H \vdash \mathrm{pred}(N') : t \quad \cap \quad \vdash (H \rhd \mathrm{pred}(M') = \mathrm{pred}(N') : t)$

(iv) $M \equiv \mathrm{zero?}(M)$ のとき、

(a) $M \equiv 0$ のとき、仮定と Lemma 4.2 より

$H \vdash \mathrm{zero?}(0) : t \quad \cap \quad \mathrm{zero?}(0) \to \mathrm{true}$ が成り立つ。

typing judgement より、 $H \vdash \mathrm{zero?}(0) : bool$ であり、 $H \vdash \mathrm{true} : bool$ が成り立つ

また $\{\mathrm{ZeroIsZero}\}$ より、 $\vdash (H \rhd \mathrm{zero?}(0) = \mathrm{true} : bool)$ が成り立つ。

p.104 の定義は型が間違ってる。

(b) $M \equiv \mathrm{Succ}(\overline{V})$ のとき、仮定と Lemma 4.2 より、

$H \vdash \mathrm{zero?}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) : t \quad \cap \quad \mathrm{zero?}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) \to \mathrm{false}$ が成立

typing judgement より、$H \vdash \mathrm{zero?}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) : bool$ であり $H \vdash \mathrm{false} : bool$ が成り立つ

また、$\{\mathrm{SuccIsNotZero}\}$ より $\vdash (H \rhd \mathrm{zero?}(\mathrm{Succ}(\overline{V})) = \mathrm{false} : bool)$ が成り立つ。

(c) $M \equiv M'$ のとき. 仮定と Lemma 4.2 より. ある項 N' について.

$H \vdash zero?(M') : t \cap zero?(M') \to zero?(N') \quad (\equiv N)$ が成立

このとき, $t \equiv bool$.

導出木とリダクションの導出より $H \vdash M' : num \cap M' \to N'$

i.h より. $H \vdash N' : num \cap \vdash (H \rhd M' = N' : num)$ が成り立つ.

[IsZero] と {Cong} より.

$H \vdash zero?(N') : bool \cap \vdash (H \rhd zero?(M') = zero?(N') : bool)$

(v) $M \equiv$ if L then M else N のとき.

(a) $L \equiv true$ のとき. 仮定と Lemma 4.2 より

$H \vdash$ if true then M else $N : t \cap$ if true then M else $N \to M$ が成立

導出木より $H \vdash M : t \cap H \vdash N : t$ であり. 前者が示すものの1つ.

また, 上記と {IfTrue} より. $\vdash (H \rhd$ if true then M else $N = M : t)$ が成り立つ

(b) $L \equiv false$ のとき. (a)と同様.

(c) $L \equiv L'$ のとき. 仮定と Lemma 4.2 より. ある項 L'' について.

$$\begin{cases} H \vdash \text{if } L' \text{ then } M \text{ else } N : t \\ \text{if } L' \text{ then } M \text{ else } N \longrightarrow \text{if } L'' \text{ then } M \text{ else } N \end{cases}$$ が成り立つ.

導出木とリダクションの導出より,

$$\begin{cases} H \vdash L' : bool \cap H \vdash M : t \cap H \vdash N : t \\ L' \to L'' \end{cases}$$

i.h より.

$$H \vdash \mathcal{L}'' : bool \quad \cap \quad \vdash (H \rhd \mathcal{L}' = \mathcal{L}'' : bool)$$ が成り立つ.

ここで $H \vdash \mathcal{L}'' : bool$, $H \vdash M : t$, $H \vdash N : t$ より.

$$H \vdash \text{if } \mathcal{L}'' \text{ then } M \text{ else } N : t$$ が成り立つ.

また, {Refl} より $\vdash (H \rhd M = M : t)$, $\vdash (H \rhd N = N : t)$ であり, これらと,
上記の $\vdash (H \rhd \mathcal{L}' = \mathcal{L}'' : bool)$ より, {Cong} から

$$\vdash (H \rhd \text{if } \mathcal{L}' \text{ then } M \text{ else } N = \text{if } \mathcal{L}'' \text{ then } M \text{ else } N : t)$$

が成り立つ.

(vi) $M \equiv OP$ の場合.

(a) $O \equiv \lambda x{:}s.\, Q$ のとき, 仮定と Lemma 4.2 より.

$$H \vdash (\lambda x{:}s.\, Q)(P) : t \quad \cap \quad \underbrace{(\lambda x{:}s.\, Q)(P)}_{M} \rightarrow \underbrace{[P/x]Q}_{N}$$ が成り立つ.

型判断より

$$\left|\begin{array}{l} H \vdash \lambda x{:}s.\, Q : s \rightarrow t \quad \text{更に} \quad H, x{:}s \vdash Q : t. \\ H \vdash P : s \end{array}\right.$$

ここで Lemma 4.1 より $H \vdash [P/x]Q : t$ は成立する.

また $H, x{:}s \vdash Q : t \ \cap \ H \vdash P : s$ より $\{\beta\}$ から

$$\vdash (H \rhd (\lambda x{:}s.\, Q)(P) = [P/x]Q : t)$$

が成り立つ

(b) $O \equiv Q$ のとき，仮定と Lemma 4.2 より，項 R に対して，

$$H \vdash QP : t \quad \cap \quad QP \to RP$$ が成り立つ．

型判断とリダクションの導出より，

$$\begin{cases} H \vdash \underset{M}{\underline{Q}} : s \to t \quad \cap \quad H \vdash P : s \\ \underset{M}{\underline{Q}} \to \underset{N}{\underline{R}} \end{cases}$$ が成り立つ．

i.h より，$H \vdash R : s \to t. \quad \cap \quad \vdash (H \triangleright Q = R : s \to t)$ が成立．

ここで，$H \vdash R : s \to t$ と $H \vdash P : s$ より $H \vdash RP : t$ が成り立つ

{Refl} より，$\vdash (H \triangleright P = P : s)$ と $\vdash (H \triangleright Q = R : s \to t)$ より，

{Cong} から $\vdash (H \triangleright QP = RP : t)$ が成立．

(vii) $M \equiv \mu x : t. M$ のとき，仮定と Lemma 4.2 より，

$$H \vdash \mu x : t. M : t \quad \cap \quad \mu x : t. M \to [\mu x : t. M / x] M$$ が成立

また型判断より，$H, x : t \vdash M : t$．

Lemma 4.1 より $H \vdash [\mu x : t. M / x] M : t$ が成立する．

また，型判断と {μ} より

$$\vdash (H \triangleright \mu x : t. M = [\mu x : t. M / x] M : t)$$ が成り立つ

□

Lemma 4.5

relation $\Downarrow$ は部分関数である。つまり、

if $M \Downarrow U \cap M \Downarrow V$ then $U \equiv V$.

(relation $\Downarrow$ は一意に定まる)

証明の高さに関する帰納法による。

最小ケース. $0 \Downarrow 0$, $\mathrm{true} \Downarrow \mathrm{true}$, $\mathrm{false} \Downarrow \mathrm{false}$.

帰納ステップ $\mathrm{pred}(M) \Downarrow 0$, ..., $\mu x:\tau.\, M \Downarrow V$.

(i) basecase : $0 \Downarrow 0$, $\mathrm{true} \Downarrow \mathrm{true}$. $\mathrm{false} \Downarrow \mathrm{false}$. $\lambda x:s.\, M \Downarrow \lambda x:s.\, M$

これらは. 自明.

(ii) Case $M \equiv \mathrm{pred}(M)$ のとき.

仮定より $\mathrm{pred}(M) \Downarrow U \cap \mathrm{pred}(M) \Downarrow V$ が成り立つ.

(a) Rule. $\dfrac{M \Downarrow 0}{\mathrm{pred}(M) \Downarrow 0}$ について. 導出から. $U \equiv 0 \equiv V$.

(b) Rule. $\dfrac{M \Downarrow \mathrm{Succ}(V)}{\mathrm{pred}(M) \Downarrow V}$ について. 導出から.

$M \Downarrow \mathrm{Succ}(U) \cap M \Downarrow \mathrm{Succ}(V)$ が成り立つ.

i.h より $\mathrm{Succ}(U) \equiv \mathrm{Succ}(V)$ 従って $U \equiv V$.

(iii) Case $M \equiv \mathrm{Succ}(M)$ のとき.

仮定より. $\mathrm{Succ}(M) \Downarrow U \cap \mathrm{Succ}(M) \Downarrow V$ が成り立つ

導出より $M \Downarrow U \cap M \Downarrow V$ が成り立つ.

i.h より. $U \equiv V$.

(iv) Case $M \equiv \mathrm{zero?}(M)$ のとき.

仮定より、$\mathrm{zero?}(M) \Downarrow U \cap \mathrm{zero?}(M) \Downarrow V$ が成り立つ.

(a) Rule. $\dfrac{M \Downarrow 0}{\mathrm{zero?}(M) \Downarrow \mathrm{true}}$ のとき.

導出より. $U \equiv 0 \equiv V$ が成り立つ.

(b) Rule. $\dfrac{M \Downarrow \mathrm{succ}(V)}{\mathrm{zero?}(M) \Downarrow \mathrm{false}}$ のとき.

導出より. $M \Downarrow \mathrm{succ}(U) \cap M \Downarrow \mathrm{succ}(V)$

i.h より $\mathrm{succ}(U) \equiv \mathrm{succ}(V)$ より. $U \equiv V$.

(v) Case $M \equiv \mathrm{if}\ L\ \mathrm{then}\ M\ \mathrm{else}\ N$ のとき.

仮定より $\mathrm{if}\ L\ \mathrm{then}\ M\ \mathrm{else}\ N \Downarrow U \cap \mathrm{if}\ L\ \mathrm{then}\ M\ \mathrm{else}\ N \Downarrow V$ が成立

(a) Rule. $\dfrac{M_1 \Downarrow \mathrm{true} \qquad M_2 \Downarrow V}{\mathrm{if}\ M_1\ \mathrm{then}\ M_2\ \mathrm{else}\ M_3 \Downarrow V}$ のとき.

導出より. $L \Downarrow \mathrm{true} \cap M \Downarrow U \cap M \Downarrow V$

i.h より. $U \equiv V$

(b) Rule. $\dfrac{M_1 \Downarrow \mathrm{false} \qquad M_3 \Downarrow V}{\mathrm{if}\ M_1\ \mathrm{then}\ M_2\ \mathrm{else}\ M_3 \Downarrow V}$

導出より. $L \Downarrow \mathrm{false} \land N \Downarrow U \land N \Downarrow V$.

i.h より $U \equiv V$

(vi) Case $M \equiv ML$ のとき.

仮定より. $M(L) \Downarrow U \land M(L) \Downarrow V$ が成立する. ある項 M', V' について.

導出と
$$\begin{cases} M \Downarrow \lambda x:s.M' \land [L/x]M' \Downarrow U \\ M \Downarrow \lambda x:s.V' \land [L/x]V' \Downarrow V \end{cases}$$

i.h より $\lambda x:s.M' \equiv \lambda x:s.V'$ ‥①

①より. $[L/x]M' \equiv [L/x]V'$

i.h より. $U \equiv V$.

(vii) Case $M \equiv \mu x:\tau.M$ のとき.

仮定より. $\mu x:\tau.M \Downarrow U \land \mu x:\tau.M \Downarrow V$ が成立する.

導出より. $[\mu x:\tau.M/x]M \Downarrow U \land [\mu x:\tau.M/x]M \Downarrow V$

i.h より $U \equiv V$.

$\square$

Theorem 4.6

$$M \Downarrow V \iff M \to^* V.$$

$M \Downarrow V \Rightarrow M \to^* V$ を示す.

$M \Downarrow V$ の導出の高さに関する帰納法による

(i) {base case}

・ if $0 \Downarrow 0$ then $0 \to^* 0$ を示す.

仮定より $0 \Downarrow 0$ は成立する. また $n=0$ のとき $0 \to^* 0$ は成立する.

同様に $\mathrm{true} \Downarrow \mathrm{true}$, $\mathrm{false} \Downarrow \mathrm{false}$, $\lambda x:s.M \Downarrow \lambda x:s.M$ について成立する.

(ii) if $\mathrm{pred}(M) \Downarrow 0$ then $\mathrm{pred}(M) \to^* 0$ を示す

仮定と導出より. $M \Downarrow 0$ が成り立つ.

i.h より. $M \Downarrow 0$ が成り立つとき, $M \to^* 0$ が成り立つ.

Lemma 4.3 より. $\mathrm{pred}(M) \to^* \mathrm{pred}(0)$

Transition rule. より $\mathrm{pred}(M) \to^* 0$

(iii) if $\mathrm{pred}(M) \Downarrow V$ then $\mathrm{pred}(M) \to^* V$ を示す.

仮定と導出より. $M \Downarrow \mathrm{Succ}(V)$ が成り立つ.

i.h より. $M \to^* \mathrm{Succ}(V)$ が成り立つ.

Lemma 4.3 より $\mathrm{pred}(M) \to^* \mathrm{pred}(\mathrm{Succ}(V))$

Trans rule より $\mathrm{pred}(M) \to^* V$

(iv) if $\mathrm{Succ}(M) \Downarrow \mathrm{Succ}(V)$ then $\mathrm{Succ}(M) \to^* \mathrm{Succ}(V)$ を示す.

仮定と導出より, $M \Downarrow V$ が成り立つ.

i.h より $M \to^* V$

Lemma 4.3 より $\mathrm{Succ}(M) \to^* \mathrm{Succ}(V)$.

(v) if $\mathrm{zero?}(M) \Downarrow \mathrm{true}$ then $\mathrm{zero?}(M) \to^* \mathrm{true}$. を示す

仮定と導出より. $M \Downarrow 0$ が成り立つ.

i.h より $M \to^* 0$

Lemma 4.3 より $\mathrm{zero?}(M) \to^* \mathrm{zero?}(0)$

Trans rule より $\mathrm{zero?}(M) \to^* \mathrm{true}$.

(vi) if $\mathrm{zero?}(M) \Downarrow \mathrm{false}$ then $\mathrm{zero?}(M) \to^* \mathrm{false}$. を示す

仮定と導出より $M \Downarrow \mathrm{succ}(M)$

i.h より $M \to^* \mathrm{succ}(M)$

Lemma 4.3 より $\mathrm{zero?}(M) \to^* \mathrm{zero?}(\mathrm{succ}(M))$

Trans rule より $\mathrm{zero?}(M) \to^* \mathrm{false}$.

(vii) if $M(N) \Downarrow V$ then $M(N) \to^* V$ を示す.

仮定と導出より $M \Downarrow \lambda x{:}S.\,M' \cap [N/x]M' \Downarrow V$

i.h より $M \to^* \lambda x{:}S.\,M' \cap [N/x]M' \to^* V$.

ここで Lemma 4.3 より

$M(N) \to^* (\lambda x{:}S.\,M')(N)$

Trans rule より $M(N) \to^* (\lambda x{:}S.\,M')(N) \to [N/x]M' \to^* V$

(viii) if $\text{if } L \text{ then } M \text{ else } N \Downarrow V$ then $\text{if } L \text{ then } M \text{ else } N \longrightarrow^* V$.

(a) 仮定と導出により $L \Downarrow \text{true} \cap M \Downarrow V$ が成り立つ時,

i.h より, $L \longrightarrow^* \text{true} \cap M \longrightarrow^* V$

Lemma4.3 $\text{if } L \text{ then } M \text{ else } N \longrightarrow^* \text{if true then } M \text{ else } N$

Trans rule より $\longrightarrow M$

$M \longrightarrow^* V$ より $\longrightarrow^* V$.

(b) 仮定と導出により. $L \Downarrow \text{false} \cap N \Downarrow V$ が成り立つ時.

(a) と同様に成立する

(ix) if $\mu x{:}\tau.\, M \Downarrow V$ then $\mu x{:}\tau.\, M \longrightarrow^* V$

仮定と導出より. $[\mu x{:}\tau.\, M / x]M \Downarrow V$ が成り立つ.

i.h より $[\mu x{:}\tau.\, M / x]M \longrightarrow^* V$.

Trans rule より

$$\mu x{:}\tau.\, M \longrightarrow [\mu x{:}\tau.\, M / x]M \longrightarrow^* V$$

以上より ($\Rightarrow$) が成立.

◎ $M \to^* V \Rightarrow M \Downarrow V$ を示す.

n step で $M \to V$ に評価できるとき $M \Downarrow V$ が成り立つ.

M の構造に関する帰納法による

これはある項 N に対して. $M \to N$ を考えた時に.

$M \to N \Downarrow V$ を示すことができれば十分なので、それを示す.

つまり,
if $M \to N \wedge N \Downarrow V$
then $M \Downarrow V$
を命題とみて induction を回していく.

1 Step で $M \to N$ に評価でき、
かつ、それが V に評価できれば
$M \Downarrow V$ が成り立つ

(i) $M = 0$, true, false, $\lambda x : T . M'$ については

Transition Ruleは無く(評価済み).

Natural Ruleは全てそれ自身に評価するため. 自明.

帰納法のギロンが甘い、もうすこし明確に!

ここらへん仮定とかガバイ

(ii) Case $M \equiv \text{pred}(M')$ のとき.

項 M' について場合分けを行う.

(a) $M' \equiv 0$ のとき.

仮定と Trans Rule より. $\text{pred}(0) \to 0 \; (\equiv N)$ … ①

仮定と ① と Natural Rule より $N \equiv 0 \Downarrow 0 \equiv V$ … ②

Natural Rule と ② より $\dfrac{M' \Downarrow 0}{\text{pred}(M') \Downarrow 0 \equiv V}$ が成り立つ.

(b) $M' \equiv \mathrm{Succ}(V')$ のとき.

仮定と Trans Rule より $\mathrm{pred}(\mathrm{Succ}(V')) \rightarrow V' \ (\equiv N)$ … ①

仮定と ① と Natural Rule より $N \equiv V' \Downarrow V$ … ②

Natural Rule と ② から

$$\{\mathrm{succ}\}\ \frac{\{\mathrm{Pred}\}\ \dfrac{V' \Downarrow V}{\mathrm{Succ}(V') \Downarrow \mathrm{Succ}(V)}}{M \equiv \mathrm{pred}(\mathrm{succ}(V')) \Downarrow \mathrm{pred}(\mathrm{succ}(V)) \equiv V}$$

従って $M \Downarrow V$ が成り立つ.

(c) $M' \equiv L$ のとき

ある項 N' に対して. 仮定と Trans Rule より $\mathrm{pred}(L) \rightarrow \mathrm{pred}(N') \ (\equiv N)$ … ①

仮定と ① と Natural Rule から $N \equiv \mathrm{pred}(N') \Downarrow V$ … ②

①についての導出
$$\frac{L \rightarrow N' \quad \cdots ③}{\mathrm{pred}(L) \rightarrow \mathrm{pred}(N')}$$

②についての導出で更に場合分けする.

(α) $V \equiv 0$ のとき. 導出より
$$\frac{N' \Downarrow 0 \quad \cdots ④}{\mathrm{pred}(N') \Downarrow 0}$$

③. ④ より. i.h から $L \Downarrow 0$

Natural Rule より
$$\frac{L \Downarrow 0}{M \equiv \mathrm{pred}(L) \Downarrow 0 \equiv V}$$

よって成立.

(イ) $V \neq 0$ のとき. 導出より

$$\frac{N' \Downarrow succ(V)}{pred(N') \Downarrow V} \quad \cdots ⑤$$

③と⑤より. i.h から $L \Downarrow succ(V)$

Natural Rule より

$$\frac{L \Downarrow succ(V)}{M \equiv pred(L) \Downarrow pred(succ(V)) \to V}$$

従って成立

(iii) M が succ, zero?, if の時は (ii) と同じ感じになりそうだし疲れたので省略

(iv) Case $M \equiv M(L)$ の場合. 項 M により場合分けする.

(a) $M \equiv \lambda x:\tau.M'$ のとき

仮定と Trans Rule より $(\lambda x:\tau.M')(L) \to [L/x]M' \ (\equiv N) \quad \cdots ①$

①と仮定より $[L/x]M' \Downarrow V \quad \cdots ②$

ここで, Natural Rule より $M \equiv \lambda x:\tau.M' \Downarrow \lambda x:\tau.M' \quad \cdots ③$

③, ②, Natural Rule より

$$\frac{M \Downarrow \lambda x:\tau.M' \qquad [L/x]M' \Downarrow V}{M(L) \Downarrow V}$$

よって成り立つ.

(b) $M \equiv M'$ のとき.

ある項 N' に対し, 仮定と Trans Rule より. $M'(L') \to N'(L')$ …①

仮定と ① より. $N'(L') \Downarrow V$ …②

① の導出より

$$\frac{M' \to N' \quad \cdots ③}{M'(L') \to N'(L')}$$

② の導出より. ある項 N'' に対して.

$$\frac{N' \Downarrow \lambda x{:}s.\,N'' \quad \cdots ④ \qquad [L'/x]N'' \Downarrow V \quad \cdots ⑤}{N'(L') \Downarrow V}$$

③, ④ より, i.h から $M' \Downarrow \lambda x{:}s.\,N''$ が成り立つ

Natural Rule と ⑤ より

$$\frac{M' \Downarrow \lambda x{:}s.\,N'' \qquad [L'/x]N'' \Downarrow V}{M'(L') \Downarrow V}$$

よって成り立つ

(v) Case $M \equiv \mu x{:}\tau.\,L$ のとき.

仮定と Trans Rule より

$$M \equiv \mu x{:}\tau.\,L \to [\mu x{:}\tau.\,L/x]L \quad (\equiv N) \quad \cdots ①$$

仮定と ① より

$$[\mu x{:}\tau.\,L/x]L \Downarrow V \quad \cdots ②$$

② と Natural Rule より
$$\frac{[\mu x{:}\tau.\,L/x]M \Downarrow V}{\mu x{:}\tau.\,L \Downarrow V}$$

従って成立 □

4.7 Corollary.

if $H \vdash M : \tau \ \cap \ M \Downarrow N$

then $H \vdash N : \tau \ \cap \ \vdash (H \rhd M = N : \tau)$

構造に関する帰納法による.

(i) $M \equiv 0$, true, false, $\lambda x : s . M$ に関して.

Natural Rule により M はそれ自身に評価される. つまり, 仮定より,

$M \Downarrow M \equiv N$ が成り立つ

$H \vdash N : \tau$ は $H \vdash M : \tau$ であり, 仮定より成立.

また同様に仮定から $H \vdash M : \tau$ なので $\vdash (H \rhd M = M : \tau)$

が成り立つ. $M \equiv N$ より $\vdash (H \rhd M = N : \tau)$ である.

(ii) $M \equiv \mathrm{pred}(M)$ のとき.

仮定より $H \vdash \mathrm{pred}(M) : \tau \ \cap \ \mathrm{pred}(M) \Downarrow N$

Lemma 4.5 より N は一意に評価される. 以降 Natural Rule により場合分け.

(a) $N \equiv 0$ のとき. (示したいのは, $H \vdash 0 : \tau \ \cap \ \vdash (H \rhd \mathrm{pred}(M) = 0 : \tau)$)

Natural Rule の導出より. $M \Downarrow 0$ が成り立つ.

i.h より, $H \vdash 0 : \tau \ \cap \ \vdash (H \rhd M = 0 : \tau)$

また, {Cong} より. $\vdash (H \rhd \mathrm{pred}(M) = \mathrm{pred}(0) : \tau)$

{PredZero} より $\vdash (H \rhd \mathrm{pred}(M) = 0 : \tau)$

以上より成立.

(b) $N \equiv L$ のとき。 (示したいのは、 $H \vdash L : t \cap \vdash (H \triangleright pred(M) = L : t)$)

Natural Rule の導出より、 $M \Downarrow succ(L)$ が成り立つ。

i.h より、 $H \vdash succ(L) : t \cap \vdash (H \triangleright M = succ(L) : t)$

型割当について、上記と [Succ] の導出より $H \vdash L : t$ が成り立つ。

Equation について、 {Cong} {PredSucc} より $\vdash (H \triangleright pred(M) = L : t)$ より成立。

(iii) $M \equiv succ(M)$, $iszero(M)$ について、

(ii) と同様に示せるので省略。

(iv) $M \equiv M'(L')$ のとき。 示したいのは、 $H \vdash N : t \cap \vdash (H \triangleright M'(L') = N : t)$

仮定より、 $H \vdash M'(L') : t \cap M'(L') \Downarrow N$ が成立

$$\frac{H \vdash M' : s \to t \qquad H \vdash L' : s}{H \vdash M'(L') : t} \qquad \frac{M' \Downarrow \lambda x : s.\, M'' \qquad [L'/x]M'' \Downarrow N}{M'(L') \Downarrow N}$$

$H \vdash M' : s \to t \cap M' \Downarrow \lambda x : s.\, M''$ より、i.h から、

$H \vdash \lambda x : s.\, M'' : s \to t$ … ① $\cap \vdash (H \triangleright M' = \lambda x : s.\, M'' : s \to t)$ … ②

①より

$$\frac{H, x : s \vdash M'' : t}{H \vdash \lambda x : s.\, M'' : s \to t} \cdots ③$$

これと、 $H \vdash L' : s$ より、Lemma 4.1 から

$H \vdash [L/x]M'' : t$ が成立し、更にこれと、 $[L/x]M'' \Downarrow N$ より、i.h から

$H \vdash N : t \cap \vdash (H \triangleright [L/x]M'' = N : t)$ … ④

また、 $H \vdash L' : s$ より {Refl} から $\vdash (H \triangleright L' = L' : s)$

これと、②と {Cong} より

$\vdash (H \rhd M'(\mathcal{L}') = (\lambda x{:}s.\, M'')(\mathcal{L}) : t)$

③と $H \vdash \mathcal{L}' : s$ より $\vdash (H \rhd (\lambda x{:}s.\, M'')(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}/x]M'' : t)$

上記と④より $\vdash (H \rhd M'(\mathcal{L}') = N : t)$ が成り立つ

(V) $M \equiv$ if O then P else Q のとき.

仮定より $H \vdash$ if O then P else Q $: t$ $\cap$ if O then P else Q $\Downarrow N$

(a) $N \equiv P$ のとき. 導出よりそれぞれ. (示したいのは. $H \vdash N : t$, $\vdash (H \rhd$ if O then P else Q $\Downarrow N : t)$)

$$\left\{\begin{array}{ll} H \vdash O : bool & \cdots ① \\ H \vdash P : t & \cdots ② \\ H \vdash Q : t & \cdots ③ \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} O \Downarrow true & \cdots ④ \\ P \Downarrow N & \cdots ⑤ \end{array}\right.$$

②と⑤より i.h から

$H \vdash N : t$ $\cap$ $\vdash (H \rhd P = N : t)$

①と④より. i.h から

$H \vdash O : bool$ $\cap$ $\vdash (H \rhd O = true : bool)$

③は {Refl} から $\vdash (H \rhd Q = Q : t)$

上記から {Cong} より

$\vdash (H \rhd$ if O then P else Q $=$ if true then N else Q $: t)$

{IfTrue} より $\vdash (H \rhd$ if O then P else Q $= N : t)$ よって成立

(b) $N \equiv Q$ のとき, (a)と同様に成立.

(vi) $M \equiv \mu x:\tau.\ M$ の証.

仮定と導出より

$$\frac{H,\ x:\tau \vdash M:\tau \quad \cdots ②}{H \vdash \mu x:\tau.\ M : \tau \quad \cdots ①} \qquad \frac{[\mu x:\tau.\ M/x]M \Downarrow N \quad \cdots ③}{\mu x:\tau.\ M \Downarrow N}$$

①, ② と Lemma 4.1 より

$$\frac{H,\ x:\tau \vdash M:\tau \qquad H \vdash \mu x:\tau.\ M:\tau}{H \vdash [\mu x:\tau.\ M/x]M : \tau} \quad \cdots ④$$

③, ④ と i.h より.

$$H \vdash N:\tau \quad \cap \quad \vdash (H \rhd [\mu x:\tau.\ M/x]M = N:\tau) \quad \cdots ⑤$$

②, ⑤ と Equational Rule $\{\mu\}$ より

$$\vdash (H \rhd \mu x:\tau.\ M = [\mu x:\tau.\ M/x]M = N:\tau)$$

よって成立 $\square$

Exercise

4.1 Factorial Programing in PCF.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n * f(n-1) & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

$$\Big(\Big(\lambda minus.\ num \to num \to num$$
$$\lambda times.\ num \to num \to num,$$
$$\mu fact.\ num \to num.\ \lambda n : num.$$
$$\text{if } zero?(n) \text{ then } 1 \text{ else } times(n)\big(fact(minus(n)(succ(0)))\big)\Big)$$

$$\Big(\mu minus : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.$$
$$\text{if } zero?(y) \text{ then } x \text{ else } minus\big(pred(x)\big)\big(pred(y)\big)\Big)$$

$$\Big(\Big(\lambda plus : num \to num \to num.$$
$$\mu times : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.$$
$$\text{if } zero?(y) \text{ then } 0 \text{ else } plus(x)\big(times(x)(pred(y))\big)$$
$$\Big)\Big(\mu plus : num \to num \to num,\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.$$
$$\text{if } zero?(y) \text{ then } 0 \text{ else } plus\big(succ(x)\big)\big(pred(y)\big)\Big)\Big)\Big)$$

(確認)

$$fact\ (\underline{3})$$

$$= \mu fact . num \to num \to num .\ \lambda n : num .$$

$$\quad \text{if } zero?(\underline{3}) \text{ then } \underline{1} \text{ else } times(\underline{3})(fact(minus(\underline{3})(\underline{1})))$$

$$= times(\underline{3})(fact(minus(\underline{3})(\underline{1})))$$

$$= times(\underline{3})(fact(\underline{2}))$$

$$= times(\underline{3})(\text{if } zero?(\underline{2}) \text{ then } \underline{1} \text{ else } times(\underline{2})(fact(minus(\underline{2})(\underline{1}))))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(fact(minus(\underline{2})(\underline{1}))))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(fact(\underline{1})))$$

$$\vdots$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(times(\underline{1})(\text{if } zero?(0) \text{ then } \underline{1} \ \ldots\ldots)))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(times(\underline{1})(\underline{1})))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(\text{if } zero?(\underline{1}) \text{ then } 0 \text{ else } plus(\underline{1})(times(\underline{1})(pred(\underline{1})))))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(plus(\underline{1})(times(\underline{1})(pred(\underline{1})))))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(plus(\underline{1})(times(\underline{1})(\underline{0}))))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(plus(\underline{1})(\underline{0})))$$

$$= times(\underline{3})(times(\underline{2})(\underline{1}))$$

$$= times(\underline{3})(\underline{2})$$

$$= \underline{6}$$

途中飛ばしたけどまあいけるやろ

4.2 まずは定義

$$
\begin{aligned}
&(\lambda minus : num \to num \to num. \\
&\quad \mu equal : num \to num \to bool.\ \lambda x{:}num.\ \lambda y{:}num. \\
&\qquad \text{if } zero?(minus(x)(y)) \text{ then } true \text{ else } false. \\
&)(\ \mu minus : num \to num \to num.\ \lambda x{:}num.\ \lambda y{:}num. \\
&\qquad \text{if } zero?(x) \text{ then } y \\
&\qquad\qquad \text{else if } zero?(y) \text{ then } x \\
&\qquad\qquad\qquad \text{else } minus(pred(x))(pred(y)) \\
&)
\end{aligned}
$$

(example.)

$$
\begin{aligned}
equal(\underline{2})(\underline{1}) &= \text{if } zero?(minus(\underline{2})(\underline{1})) \text{ then } true \text{ else } false \\
&= \text{if } zero?(minus(\underline{1})(\underline{0})) \text{ then } true \text{ else } false \\
&= \text{if } zero?(\underline{1}) \text{ then } true \text{ else } false \\
&= false
\end{aligned}
$$

$$equal(\underline{1})(\underline{2}) = \cdots = \text{if } zero?(minus(\underline{0})(\underline{1})) \text{ then } \cdots = false.$$

$$equal(\underline{1})(\underline{1}) = \cdots = \text{if } zero?(\underline{0})(\underline{0}) \text{ then } \cdots = true.$$

よこそう

4.3 は済

4.4

$$fibonacci(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ f(x-1) + f(x-2) \end{cases}$$

PCFの定義は以下.

$((\lambda plus : num \to num \to num.$

$\lambda minus : num \to num \to num.$

$\mu fib : num \to num. \ \lambda n : num.$

$\text{if } zero?(n) \text{ then } \underline{0} \text{ else}$

$\text{if } zero?(pred(n)) \text{ then } \underline{1} \text{ else}$

$plus(fib(minus(n)(\underline{1})))(fib(minus(n)(\underline{2})))$

$)(\mu minus : num \to num \to num. \ \lambda x : num. \ \lambda y : num.$

$\text{if } zero?(y) \text{ then } x \text{ else } minus(pred(x))(pred(y))$

$))(\lambda plus : num \to num \to num. \ \lambda x : num. \ \lambda y : num.$

$\text{if } zero?(y) \text{ then } x \text{ else } plus(succ(x))(pred(y))$

$)$

パフォーマンスが悪いのは、$f(n-2)$ を2回計算するためである。

従って、ループしながら結果をメモしておけばよい。

(疑似 @ Haskell)

```
fib n = loop n 0 1
  where
    loop 0 a b = a
    loop n a b = loop (n-1) b (a+b)
```

$\Downarrow$ これを PCF にする。

$$
\begin{aligned}
&((\lambda\, loop : num \to num \to num \to num.\\
&\quad \mu fib : num \to num \to num.\ \lambda n : num.\\
&\qquad loop\,(\underline{n})\,(\underline{0})\,(\underline{1})\\
&)(\mu loop : num \to num \to num \to num.\ \lambda n : num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.\\
&\quad \text{if}\ zero?(n)\ \text{then}\ x\ \text{else}\\
&\qquad loop\,(pred(n))\ y\ plus(x)(y)\\
&))(\\
&\quad \mu plus : num \to num \to num.\ \lambda x : num.\ \lambda y : num.\\
&\qquad \text{if}\ zero?(y)\ \text{then}\ x\ \text{else}\ plus(succ(x))(pred(y))\\
&)
\end{aligned}
$$

4.5 済

4.6 Universal Computing Power? :thinking_face:

ちょっと分からんし、やる気出ないので飛ばします

4.7 済.

4.8. $K : bool$

$L : s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_n \to \tau$

$M : s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_n \to \tau$.

$N_1 : s_1$, $N_2 : s_2$, $\cdots$, $N_n : s_n$

($\Rightarrow$) if $K \Downarrow true$ ∩ $(\text{if } K \text{ then } L \text{ else } M) N_1 \cdots N_n \Downarrow V$

then $L N_1 \cdots\cdots N_n \Downarrow V$.

項 N_n の長さ(個数?)に関する帰納法による

(i) $n = 1$ のとき. 仮定と導出より

$$\cfrac{\cfrac{K \Downarrow true \qquad L \Downarrow \lambda x{:}s_1.\,M' \quad \cdots ①}{(\text{if } K \text{ then } L \text{ else } M) \Downarrow \lambda x{:}s_1.\,M'} \qquad [N_1/x]M' \Downarrow V \quad \cdots ②}{(\text{if } K \text{ then } L \text{ else } M)\, N_1 \Downarrow V}$$

①, ②, Natural Rule より,

$$\frac{L \Downarrow \lambda x{:}s, M' \qquad [N_1/x]M' \Downarrow V}{L(N_1) \Downarrow V.}$$

(ii) $n-1$ のときを仮定し, n の場合を示す.

仮定と導出より $K \Downarrow true$ かつ

$$\frac{(\text{if } K \text{ then } L \text{ else } M)N_1 \dots N_{n-1} \Downarrow \lambda x{:}s_n, M' \qquad [N_n/x]M' \Downarrow V \quad \cdots ①}{(\text{if } K \text{ then } L \text{ else } M)\,N_1 \dots N_n \Downarrow V}$$

i.h と ① と Natural Rule より

$$\frac{L N_1 \dots N_{n-1} \Downarrow \lambda x{:}s' \; M' \qquad [N_n/x]M' \Downarrow V}{(L N_1 \dots N_{n-1})\,N_n \Downarrow V}$$

(⇐) if $K \Downarrow true$ の $L N_1 \dots L N_n \Downarrow V$.

then $(\text{if } K \text{ then } L \text{ else } M)N_1 \dots N_n \Downarrow V$

項 N_n の長さ (個数?) に関する帰納法による.

恐らく真逆のことをやるだけなので省略したいけど エライ子なのでやる

(i) $n=0$ のとき. 仮定と導出より

$$\frac{L \Downarrow \lambda x{:}s_1. M' \; \cdots ① \qquad [N_1/x]M' \Downarrow V \; \cdots ②}{L N_1 \Downarrow V}$$

仮定と①, ②より.

$$\frac{\frac{K \Downarrow \mathrm{true} \quad L \Downarrow \lambda x{:}S_1.\,M'}{\mathrm{if}\ K\ \mathrm{then}\ L\ \mathrm{else}\ M \Downarrow \lambda x{:}S_1.\,M'} \qquad [N_1/x]M' \Downarrow V}{(\mathrm{if}\ K\ \mathrm{then}\ L\ \mathrm{else}\ M)\ N_1 \Downarrow V}$$

(ii) $n-1$ を仮定し, n を示す.

$$\frac{L\ N_1\ \ldots\ N_{n-1} \Downarrow \lambda x{:}S_n.\,M' \qquad [N_n/x]M' \Downarrow V}{(L\ N_1\ \ldots\ N_{n-1})\ N_n \Downarrow V} \quad \ldots ①$$

仮定と i.h と①から

$$\frac{(\mathrm{if}\ K\ \mathrm{then}\ L\ \mathrm{else}\ M)\ N_1\ \ldots\ N_{n-1} \Downarrow \lambda x{:}S_n.\,M' \qquad [N_n/x]M' \Downarrow V}{(\mathrm{if}\ K\ \mathrm{then}\ L\ \mathrm{else}\ M)\ N_1\ \ldots\ N_{n-1}\ N_n \Downarrow V}$$

$K = \mathrm{false}$ の場合は上記と同じ方法で示せるため省略.

4.9. $\mu x:\tau$ じゃなくて Y コンビネータ で PCF

$$M ::= 0 \mid succ(M) \mid pred(M) \mid true \mid false \mid zero?(M)$$
$$\mid x \mid \lambda x{:}s.\, M \mid M\,M \mid Y(M) \mid if\ M\ then\ M\ else\ M.$$

typing rule.

$$\frac{H \vdash M : t \to t}{H \vdash Y(M) : t}$$

Operational rule.

$$\frac{M(Y(M)) \Downarrow V}{Y(M) \Downarrow V}$$

Equational Rule は？こんな感じ？

{Y}

$$\frac{H \vdash M : t \to t}{\vdash (H \triangleright Y(M) = M(Y(M)) : t)}$$

{Cong}

$$\frac{\vdash (H \triangleright M = N : t \to t)}{\vdash (H \triangleright Y(M) = Y(N) : t)}$$

Transition Rule はこんな感じ？

{Y} $\quad Y(M) \to M(Y(M))$

Substitution は？こうかな？

$\{N/x\}Y(M)$ is $Y(\{N/x\}M)$ $\quad \{M \equiv \lambda y{:}\tau.\, M' \cap y \neq x\}$

$\{N/x\}Y(M)$ is N $\quad \{M = \lambda y{:}\tau.\, M' \cap y = x\}$

各 Lemma. Theorem を 項 $Y(M)$ について再考するに留める（他と一緒でいいでしょ）

同じ示し方（帰納法）をするので、暗黙に basecase の成立を仮定し

i.h など使う （上でやったから許して）

Lemma 4.1

(1) if $H \vdash M : s \cap H \vdash M : t$

then $s \equiv t$.

導出より

$$\frac{H \vdash M : s \to s}{H \vdash Y(M) : s} \qquad \frac{H \vdash M : t \to t}{H \vdash Y(M) : t}$$

i.h より $s \to s \equiv t \to t$.

従って $s \equiv t$. □

(2) if $H, x{:}s \vdash M : t \cap H \vdash N : s$

then $H \vdash [N/x]M : t$.

導出より

$$\frac{H, x{:}s \vdash M : u \to u}{H, x{:}s \vdash Y(M) : u}$$

i.h より

$H \vdash [N/x]M : u \to u$

{Y} より

$H \vdash Y([N/x]M) : u$

Substitution より

$H \vdash [N/x]Y(M) : u$ □

Lemma 4.2 if $M \to N \cap M \to N'$ then $N \equiv N'$

仮定と Transition Rule より

$Y(M) \longrightarrow M(Y(M))$ にのみ評価される.

従って $N \equiv M(Y(M)) \equiv N'$ □

Lemma 4.3. 示すことなし.

Lemma 4.4 if $H \vdash M : t$ ∩ $M \to N$

then $H \vdash N : t$ ∩ $\vdash (H \rhd M = N : t)$

仮定と導出とLemma 4.2, Transition Ruleより.

$$\frac{H \vdash M : t \to t}{H \vdash Y(M) : t} \quad \cap \quad Y(M) \to M(Y(M))$$

従って $N \equiv M(Y(M))$ … ①

導出の上下段と {appl} より

$$\frac{H \vdash M : t \to t \qquad H : Y(M) : t}{H \vdash M(Y(M)) : t} \quad \cdots ②$$

① と ② より $H \vdash M(Y(M)) \equiv N : t$

また, 導出上段と Equational Rule より

$$\frac{H \vdash M : t \to t}{\vdash (H \rhd Y(M) = M(Y(M)) : t} \quad \cdots ③$$

① と ③ より. $\vdash (H \rhd Y(M) = M(Y(M)) \equiv N : t)$ □

Lemma 4.5 if $M \Downarrow U$ ∩ $M \Downarrow V$ then $U \equiv V$

仮定と導出より

$$\frac{M(Y(M)) \Downarrow U}{Y(M) \Downarrow U} \qquad \frac{M(Y(M)) \Downarrow V}{Y(M) \Downarrow V}$$

i.h より $U \equiv V$. □

Theorem 4.6. $M \Downarrow V$ iff $M \to^* V$

($\Rightarrow$) について.

仮定と導出より

$$\frac{M(Y(M)) \Downarrow V}{Y(M) \Downarrow V}$$

i.h より.　$M(Y(M)) \longrightarrow^* V$

Trans Rule より　$Y(M) \to M(Y(M)) \longrightarrow^* V$

($\Leftarrow$) について.

仮定を $M \to N \wedge N \Downarrow V$ then $M \Downarrow V$ とみる.

仮定と Lema 4.2 より.

$$\begin{cases} Y(M) \to M(Y(M)) \\ M(Y(M)) \Downarrow V \end{cases} \quad \cdots ①$$

① と Operational Rule より.

$$\frac{M(Y(M)) \Downarrow V}{Y(M) \Downarrow V.}$$

$\square$

Lemma 4.7

if $H \vdash M : t \cap M \Downarrow N$

then $H \vdash N : t \cap \vdash (H \rhd M = N : t)$

仮定と導出より

$$\frac{H \vdash M : t \to t \quad \cdots ①}{H \vdash Y(M) : t \quad \cdots ②} \qquad \frac{M(Y(M)) \Downarrow N \quad \cdots ③}{Y(M) \Downarrow N}$$

ここで ①, ②, Appl より

$$\frac{H \vdash M : t \to t \qquad H \vdash Y(M) : t}{H \vdash M(Y(M)) : t} \quad \cdots ④$$

また ③, ④, これより.

$$H \vdash N : t \cap \vdash (H \rhd M(Y(M)) = N : t) \quad \cdots ⑤$$

①, ⑤ と Equational Rule より

$$\vdash (H \rhd Y(M) = M(Y(M)) = N : t) \qquad \square$$

以上!

お疲れ!