# E-BOOK METODE STATISTIKA II

**Disusun Oleh :**

Kelas : 2KS1

**Penanggung Jawab Mata Kuliah:**

Hanif Jawahir (222313108)

Muh. Nabil Alif Novanto (222313250)

Dosen Pengampu:

Robert Kurniawan

**PROGRAM STUDI KOMPUTASI STATISTIK**

**POLITEKNIK STATISTIKA STIS**

**TAHUN AJARAN 2025/2026**

# KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulisan E-book Metstat II dapat terselesaikan dengan baik. Modul ini disusun sebagai salah satu bentuk tanggung jawab kami dalam melaksanakan amanah sebagai penanggung jawab (PJ) kelas.

Buku ini merupakan rangkuman dari 14 pertemuan yang telah dilaksanakan, yang bertujuan untuk memberikan wawasan dan pemahaman yang mendalam tentang topik yang dibahas. Buku ini disusun dengan harapan dapat menjadi referensi yang bermanfaat bagi pembaca, khususnya dalam memahami materi yang disampaikan selama pertemuan. Setiap bab dirancang untuk menyajikan informasi secara sistematis, mulai dari konsep dasar hingga aplikasi praktis.

Kami menyadari bahwa penyusunan buku ini tidak akan berhasil tanpa bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, kami ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah berkontribusi, baik secara langsung maupun tidak langsung, dalam proses penyusunan buku ini.

Kami juga menyadari bahwa buku ini masih memiliki kekurangan. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan masukan dan saran yang membangun dari para pembaca demi penyempurnaan di masa yang akan datang.

Akhir kata, semoga buku ini dapat memberikan manfaat dan menjadi tambahan ilmu yang berarti bagi pembaca. Selamat membaca dan semoga sukses!

**Jakarta Timur, 20 Januari 2025**

**Tim Penulis**

# DAFTAR ISI

# Pertemuan 1

## Klasifikasi Statistika dan Distribusi Sampling

**KLASIFIKASI STATISTIKA**

Statistika adalah ilmu yang mempelajari cara pengumpulan, pengolahan, penyajian, analisis, serta pengambilan keputusan secara umum berdasarkan hasil penelitian. Urutan yang tepat hingga mendapatkan informasi dari data adalah dari Data => Statistika => Informasi. Data biasanya adalah fakta yang berupa numerik, dan informasi mempunyai arti sebagai pengetahuan yang dikomunikasikan berkaitan dengan fakta tertentu.

Sedangkan metode statistik menyediakan alat untuk mendapatkan informasi dari data, metode ini terbagi menjadi dua cabang:

1. Statistik Deskriptif => menggambarkan kumpulan data yang sedang dianalisis tetapi tidak memungkinkan untuk ditarik kesimpulan.
2. Statistik Inferensia => seperangkat metode yang dapat digunakan untuk menarik kesimpulan mengenai karakteristik populasi berdasarkan data sampel. Kesimpulan terbagi menjadi dua, yaitu induksi (khusus ke umum) dan deduksi (umum ke khusus). Namun kesimpulan statistika biasanya bersifat induksi.

Berdasar parameter, statistik dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Statistik Parametrik : berhubungan dengan inferensi statistik yang membahas parameter-parameter populasi; jenis data interval atau rasio; distribusi tidak diketahui.
2. Statistik Nonparametrik : inferensi statistik membahas parameter-parameter populasi; jenis data nominal atau ordinal; distribusi tidak diketahui.

Berdasar jumlah variabel, statistik dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Analisis Univariat : hanya ada 1 variabel untuk n sampel atau beberapa variabel, tetapi setiap variabel dianalisis sendiri-sendiri.
2. Analisis Multivariat : terdapat 2 atau lebih variabel untuk n sampel dimana analisis antar variabelnya dilakukan bersamaan.

**KLASIFIKASI POPULASI**

Berdasar sumber datanya:

1. Populasi Terbatas : sumber data jelas, batas jelas dan kuantitatif sehingga dapat dihitung jumlahnya.
2. Populasi Tak Terbatas: sumber data tak dapat ditentukan batasannya sehingga relatif tidak dapat dinyatakan dalam bentuk jumlah.

Berdasar sifatnya:

1. Populasi Homogen : sumber data yang memiliki kesamaan sifat atau keadaan.
2. Populasi Heterogen : sumber data yang memiliki perbedaan sifat atau keadaan.

**KONSEP DISTRIBUSI SAMPLING**

1. Distribusi Sampling Rata-Rata

   Distribusi Sampling adalah distribusi peluang dari statistik sampel. Distribusi Sampling Rata-Rata adalah distribusi peluang dari seluruh kemungkinan nilai dari rata-rata sampel.

   1) Teorema 1

      Bila semua kemungkinan sampel acak berukuran n diambil dengan pengembalian (WR) dari suatu populasi terhingga berukuran N yang mempunyai rata-rata μ dan simpangan baku σ, maka untuk n yang cukup besar, distribusi sampling bagi rata-rata $\underline{x}$ akan menghampiri distribusi normal dengan rata rata $\mu\underline{x}$ = μ dan simpangan baku $\sigma x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Dengan demikian Z = $\sqrt{\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$ adalah peubah acak yang berdistribusi normal baku. INGAT!!! Teorema 1 berlaku untuk sampel yang cukup besar (n ≥ 30). Untuk sampel berukuran kecil (n < 30), teorema ini berlaku apabila populasi asal distribusinya tidak terlalu menyimpang dari dist. Normal.

2) Teorema 2

Bila semua kemungkinan sampel acak berukuran n diambil tanpa pengembalian (WOR) dari suatu populasi terhingga berukuran N yang mempunyai rata-rata μ dan simpangan baku σ, maka distribusi sampling bagi rata-rata sampel $\underline{x}$ akan menghampiri distribusi normal dengan rata rata $\mu\underline{x}$ = μ dan simpangan baku $\sigma x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ dan $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ disebut faktor koreksi populasi terhingga. Jika ukuran populasinya relatif besar terhadap ukuran sampel maka nilai faktor koreksi akan mendekati 1 sehingga bisa diabaikan. Untuk populasi besar atau tak hingga, diskrit dan kontinu berlaku teorema limit pusat (Central Limit Theorem)

3) Teorema 3

Dalam Central Limit Theorem, bila sampel acak berukuran n (cukup besar) ditarik dari suatu populasi besar atau tak hingga dengan rata-rata μ dan varians $\sigma^2$, maka rata-rata sampel $\bar{x}$ akan menyebar menghampiri distribusi normal dengan rata rata $\mu\underline{x}$ = μ dan simpangan baku $\sigma\underline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Dengan demikian Z = $\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ adalah peubah acak yang berdistribusi normal baku.

4) Teorema 4

"Bila $\underline{x}$ dan $s^2$ masing-masing adalah rata-rata dan varians untuk suatu sampel acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi normal dengan rata-rata μ dan varians $\sigma^2$ maka t = $\frac{x-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ merupakan suatu nilai peubah acak yang berdistribusi student-t dengan derajat bebas $v = n - 1$.

2. Distribusi Sampling Beda Rata-Rata

Bila sampel bebas berukuran $n_1$ dan $n_2$ diambil dari dua populasi yang besar dan tak hingga untuk masing-masing dengan rata-rata $\mu_1$ dan $\mu_1$ dan varians $\sigma_1^2$ dan $\sigma_2^2$, maka beda kedua rata-rata sampel $\underline{x}_1 - \underline{x}_2$ akan menyebar menghampiri normal dengan rata-rata dan simpangan baku :

$$\mu_{\underline{x}_1 - \underline{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 \; dan \; \sigma_{\underline{x}_1 - \underline{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^z}{n_2}}$$

Sehingga Z = $\frac{(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ merupakan peubah acak berdistribusi normal baku.

3. Distribusi Sampling Proporsi

Jika X adalah peubah acak binomial dengan rata-rata μ = np dan varians $\sigma^2$ = npq, maka bentuk limit dari distribusi Z = $\frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ untuk n □ □ adalah dist. normal baku. Untuk p :1-q, dimana p adalah peluang keberhasilan. Pendekatan distribusi normal pada binomial akan lebih baik jika memenuhi syarat sbb:

a. Ukuran sampel n besar atau np ≥ 5

b. Peluang sukses tidak dekat dengan nol atau satu (n(1-p)) ≥ 5)

Estimator titik dari proporsi P pada percobaan binomial dinyatakan dalam statistik: $\hat{P} = \frac{x}{n}$ dimana X adalah banyak sukses dari n ulangan. Dengan menggunakan konsep nilai harapan dan varians maka diperoleh:

a. $\mu_{\hat{p}} = E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{np}{q} = \rho$

b. $\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{\sigma^2_x}{n} = \frac{\sigma^2_x}{n^2} = \frac{n\rho q}{n^2} = \frac{\rho q}{n}$

c. $\sigma\hat{\rho} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

Proporsi sampel dapat terstandarisasi menjadi distribusi normal baku dengan menggunakan rumus: $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\rho(1-\rho)/n}}$ . Jika populasi finite atau terhingga dan pengambilan sampel tanpa pengembalian, maka variansnya akan menjadi $\sigma^2_{\hat{p}} = Var(\hat{p}) = \frac{P(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ sehingga standard errornya $\sigma\hat{\rho} = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$ .

4. Distribusi Sampling Beda Proporsi

Dengan mengambil dua sampel acak dari dua populasi yang saling independen, maka peubah $\hat{P}_1$ dan $\hat{P}_2$ akan independen satu sama lain, dan dapat disimpulkan bahwa $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ berdistribusi hampir normal dengan rata-rata $E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = p_1 - p_2$ dan varians $Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-}{n_2}$ . Oleh karena itu: simpangan bakunya

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

**CONTOH SOAL**

1. Bila semua sampel ukuran 16 diambil dari suatu populasi normal dengan rata-rata 50 dan simpangan baku 5, berapakah peluang bahwa rata-rata sampel $\underline{x}$ akan berada pada selang dari $\mu\underline{x}$-1,9$\sigma\underline{x}$ sampai $\mu\underline{x}$+0,4 $\sigma\underline{x}$? Anggap bahwa rata-rata sampel dapat diukur sampai tingkat ketelitian berapapun.
2. Sebuah mesin minuman diatur agar jumlah minuman yang dikeluarkan untuk setiap gelas rata-rata 240 mm dengan simpangan baku 15 mm. Secara periodik mesin itu diperiksa dengan cara mengambil 40 gelas dan kemudian dihitung rata-ratanya. Bila rata-rata 40 gelas berada pada selang $\mu\underline{x}$±2$\sigma\underline{x}$, mesin dianggap masih bekerja dengan baik dan tidak perlu diperbaiki. Pada suatu hari, petugas menemukan bahwa dari 40 gelas yang diambil diperoleh rata-rata 236 mm dan menyimpulkan bahwa mesin tidak perlu diperbaiki. Apakah keputusan ini wajar?

**JAWABAN**

1. Diketahui: n = 16, μ = 50, σ = 5

   Ditanya: P($\mu\underline{x}$ - 1,90$\underline{x}$ < $\underline{x}$ < $\mu\underline{x}$ + 0,40$\underline{x}$)

   Penyelesaian :

   Maka $\mu\underline{x}$ = μ = 50, $\sigma\underline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{4}$

   Batas bawah : 50 - (1,9 * $\frac{5}{4}$) = 47,625

   Batas atas : 50 + (0,4 * $\frac{5}{4}$) = 50,5

   P(47,625 < $\underline{x}$ < 50,5)

   $P\left(\frac{47{,}625 - 50}{\frac{5}{4}} < \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{50{,}5 - 50}{\frac{5}{4}}\right)$

   P(-1,9 < Z < 0,4) => P(Z < 0,4) - P(Z<-1,9)

0,6554 - 0,0287 => 0,6267

Sehingga, peluang bahwa rata-rata sampel $\underline{x}$ akan berada pada selang 47,625 sampai 50,5 adalah 0,6277 atau 62,77%

2. Diketahui:n = 40, μ = 240, σ = 15, $\underline{x}$ = 236

   Ditanya: Mesin tidak perlu diperbaiki…?

   Penyelesaian:

   Maka $\mu\underline{x} = \mu = 240$, $\sigma\underline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{40}}$

Batas bawah: 240 - (2*$\frac{15}{\sqrt{40}}$) => 235,26

Batas atas : 240 + (2*$\frac{15}{\sqrt{40}}$) => 244,74

235,26 < $\underline{x}$ < 244,74

235,26 < **236** < 244,74

Dapat disimpulkan bahwa keputusan tersebut wajar dan mesin tidak perlu diperbaiki, karena $\underline{x}$ (rata-rata sampel) berada pada selang $\mu\underline{x}\pm2\sigma\underline{x}$

# Pertemuan 2

## Estimasi Satu atau Dua Populasi dan Uji Hipotesis

### ESTIMASI TITIK

- **Estimasi rata-rata populasi (μ) : $\bar{x}$** (rata-rata sampel)

  $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$

  Di mana $\bar{x}$ adalah rata-rata sampel dan n adalah ukuran sampel.

- **Estimasi proporsi populasi ($p$) : $\hat{p}$** (proporsi sampel)

  $\hat{p} = \frac{x}{n}$

  Di mana $\hat{p}$ adalah proporsi sampel, x adalah jumlah kejadian yang memenuhi kriteria tertentu, dan n adalah ukuran sampel.

### ESTIMASI INTERVAL

**Confidence Interval untuk Rata-rata Populasi (σ diketahui)**

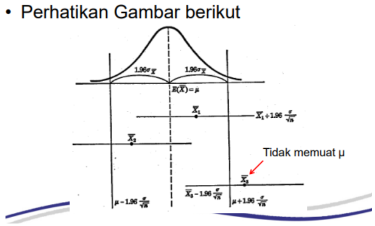
- Pendekatan CI bisa menghubungkan pernyataan peluang dan interval. Berikut adalah contoh ilustrasi CI bagi μ :
- Misal terdapat sampel random x1=1, x2=3, x3=5, x4=7. Dengan rata-rata μ dan standar deviasi σ. Ingin mengestimasi μ dengan menggunakan keempat nilai sampel ini menggunakan rumus :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \sim N(0,1)$$

- Berdasarkan luas tabel normal, nilai z=1,96 akan bersesuaian dengan peluang sebesar 0,975. Sehingga bisa dituliskan

$$P\left(-1,96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < 1,96\right) = 0,95$$

- Perhatikan Gambar berikut




Peluang bahwa $\bar{x}$ akan berada dalam interval μ ± 1,96$\sigma\bar{x}$ adalah 0,95; maksudnya terdapat 95 kesempatan dari 100 bahwa $\bar{x}$ akan berada di antara μ - 1,96$\bar{x}$ dan μ + 1,96$\bar{x}$. μ adalah nilai parameter yang sebenarnya. Dari penjelasan sebelumnya diharapkan bahwa 95 dari 100 interval akan memuat μ. Jadi,

$$P\left(\bar{X}-1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0,95$$

- **INTERVAL KEPERCAYAAN μ ( $\sigma$ *diketahui*)**
  Estimasi Interval Kepercayaan : $\bar{x} \pm Za/2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- **INTERVAL KEPERCAYAAN μ ( $\sigma$ *tidak diketahui*)**
  Estimasi Interval Kepercayaan : $\bar{x} \pm$ t(df;a/2) $\frac{s}{\sqrt{n}}$ dengan df=n-1

- **Student's t Distribution**
  **Derajat Kebebasan (d.f) = n-1** , Banyak nya observasi yang bebas untuk bervariasi setelah rata-rata sampel dihitung. Nilai pada t bergantung kepada derajat bebas

- **Convidence Interval untuk Proporsi Populasi**
  Distribusi sampel proporsinya kira-kira normal jika ukuran sampel besar, dengan standar deviasi

$$\sigma p = \sqrt{\frac{p(1-p}{n}}$$

**Estimasi Varians**

$$\frac{(n-1)S^2}{x^2_{\frac{a}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{x^2_{1-\frac{a}{2}}}$$

Dimana $x^2_{\frac{a}{2}}$ dan $x^2_{1-\frac{a}{2}}$ masing-masing adalah nilai chi-Square dengan df v= n -1

**Estimasi dua Populasi**

A. Perbedaan 2 rata-rata
   1. Sampel Independen
      a. $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ diketahui
         Perhitungan Confidence Interval menggunakan pendekatan distribusi Z

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

      b. $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ tidak diketahui, $n \geq 30$
         Perhitungan Confidence Interval menggunakan pendekatan distribusi Z

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

      c. $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ tidak diketahui, $n < 30$ dengan asumsi varians sama
         Perhitungan Confidence Interval menggunakan pendekatan distribusi T

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)\pm t_{\alpha/2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$s_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

      d. $\sigma_1$ dan $\sigma_2$ tidak diketahui, $n < 30$ dengan asumsi varians berbeda
         Perhitungan Confidence Interval menggunakan pendekatan distribusi T

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)\pm t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

   2. Sampel Berpasangan
      Confidence Interval sampel berpasangan

$$\bar{d}\pm t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

      Dengan standar deviasi

$$s_d=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}$$

B. Perbedaan Proporsi ($p_1 - p_2$)
   Confidence Interval dari perbedaan 2 proporsi populasi adalah

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

C. Rasio 2 Varians ($\sigma_1/\sigma_2$)
Menggunakan distribusi F untuk mengestimasi rasio 2 varians

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(v_1,v_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}(v_2,v_1)$$

Dengan nilai derajat bebas masing-masing
$v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$

**CONTOH SOAL**

1. Dua kelompok siswa mengikuti dua metode pengajaran yang berbeda untuk mempelajari materi matematika, dan kita ingin membandingkan skor rata-rata ujian akhir mereka.
   - Kelompok A terdiri dari 15 siswa, dengan rata-rata skor ujian akhir $\bar{x}_1 = 75$ dan varians sampel $S_1^2 = 20$.
   - Kelompok B terdiri dari 12 siswa, dengan rata-rata skor ujian akhir $\bar{x}_2 = 70$ dan varians sampel $S_2^2 = 25$.

   Hitunglah interval kepercayaan 95% untuk perbedaan rata-rata skor ujian antara kedua kelompok tersebut. Asumsikan kedua sampel berasal dari distribusi normal dan varians populasi tidak diketahui serta tidak sama

2. Sebuah lembaga survei ingin mengetahui apakah terdapat perbedaan proporsi kepuasan antara dua kelompok pelanggan di kota A dan kota B. Dari 200 pelanggan di kota A, 130 orang menyatakan puas. Di kota B, dari 180 pelanggan, 110 orang menyatakan puas. Dengan tingkat signifikansi 5%, tentukan apakah terdapat perbedaan signifikan dalam proporsi kepuasan antara kedua kota tersebut.

**JAWABAN**

- Parameter yang diberikan:
- $n_1 = 15$, $\bar{x}_1 = 75$, $S_1^2 = 20$
- $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 70$, $S_2^2 = 25$
- Tingkat kepercayaan = 95% (sehingga $\alpha$ = 0.05) Kita ingin menghitung interval kepercayaan 95% untuk $\mu_1 - \mu_2$, menggunakan rumus:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, df} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

- Hitung Selisih Rata-rata Sampel
  Selisih rata-rata antara dua sampel adalah:
  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 75 - 70 = 5$
- Hitung Standar Error (SE)

$$SE = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{(20/15 + 25/12)}$$

$$= \sqrt{1.333 + 2.083} \approx 1.848$$

- Hitung Derajat Kebebasan (df) Menggunakan Welch-Satterthwaite Approximation

$$df \approx \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n^1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n^2-1}}$$

$\approx 22$ (dibulatkan)

- Cari Nilai Kritis t($\alpha$/2, df)
  Untuk tingkat kepercayaan 95%, kita mencari nilai kritis t pada df = 22 dari tabel distribusi t:
  t(0.025, 22) ≈ 2.074

- Hitung Interval Kepercayaan

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\left(\frac{\alpha}{2}, df\right)} \cdot SE$$

$$= 5 \pm 2.074 * 1.848 = 5 \pm 3.83 Jadi,\ interval\ keper$$

(1,17 < x̄ < 8,83)
Jadi dengan tingkat kepercayaan 95%, perbedaan rata-rata skor ujian antara kedua metode pengajaran berkisar antara 1.17 hingga 8.83 poin

1. Jawaban :
   a. Tentukan Hipotesis
      - Hipotesis nol (H0): Tidak ada perbedaan proporsi kepuasan antara kedua kota (p_A = p_B).
      - Hipotesis alternatif (H1): Terdapat perbedaan proporsi kepuasan antara kedua kota (p_A ≠ p_B).
   b. Hitung Proporsi
      Proporsi pelanggan puas di kota A
      $$\left(\hat{p}_A\right) = \frac{130}{200} = 0.65$$
      Proporsi pelanggan puas di kota B
      $$\left(\hat{p}_B\right) = \frac{110}{180} \approx 0.611$$
      Proporsi gabungan
      $$\left(\hat{p}\right) = \frac{130+110}{200+180} = \frac{240}{380} \approx 0.632$$
   c. Hitung Nilai Z

Rumus untuk uji Z pada perbedaan proporsi adalah:

$$Z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}}$$

Di mana:
- $\hat{p}_A = 0.65$
- $\hat{p}_B \approx 0.611$
- $\hat{p} \approx 0.632$
- $n_A = 200$ dan $n_B = 180$

Substitusikan nilai-nilai ini:

$$Z \approx \frac{0.65 - 0.611}{\sqrt{\left[0.632\,.(1-0.632).\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{180}\right)\right]}} \approx 0.622$$

   d. Tentukan Nilai Z tabel
      Dengan tingkat signifikansi 5% untuk uji dua sisi, nilai Z kritis adalah ±1.96.
   e. Kesimpulan
      Karena Z ≈ 0.622 lebih kecil dari 1.96, maka kita gagal menolak H0. Tidak terdapat perbedaan signifikan dalam proporsi kepuasan antara pelanggan di kota A dan kota B pada tingkat signifikansi

# Pertemuan 3

## Pengujian Hipotesis

### Konsep Hipotesis Tunggal dan Majemuk

Hipotesis adalah suatu pernyataan yang merupakan dugaan yang mungkin benar atau mungkin salah mengenai sesuatu hal dan perlu
dibuktikan atau dilakukan pengecekan lebih lanjut. Hipotesis statistika adalah suatu pernyataan tentang parameter dari satu atau lebih populasi yang bisa diuji secara empiris (berdasarkan data dari sampel acak). Secara konsep, hipotesis terbagi menjadi:

- Hipotesis nol (*H0)* adalah suatu pernyataan yang sementara berlaku kebenarannya,
- Hipotesis alternatif (*H1*) adalah suatu pernyataan "lain" yang akan berlaku kebenarannya.

*H0* sering disebut hipotesis yang ingin ditolak dan *H1* seering disebut hipotesis yang ingin diterima. Untuk menolak atau gagal tolak *H0,* harus ada uji hipotesis berdasarkan sampel acak. Berdasarkan nilainya, hipotesis terbagi menjadi:

- Hipotesis tunggal merupakan pernyataan suatu parameter dalam satu nilai tunggal pada *H0* dan *H1*. Contohnya *H0* : θ = θ0 dan*H1* : θ = θ1.
- Hipotesis majemuk merupakan pernyataan suatu parameter dalam banyak nilai pada *H0* dan *H1*. Contohnya *H0* : θ = θ0 dan *H1* : θ ≠ θ1.

### Tipe Kesalahan Pengujian Hipotesis

Uji hipotesis menghasilkan keputusan:

- Gagal tolak *H0* dan *H0* benar: ini adalah keputusan yang benar, di mana hipotesis nol benar dan kita tidak menolaknya (probabilitas kejadian ini adalah 1-α.
- Gagal tolah *H0* dan *H1* benar: ini adalah keputusan yang salah, di mana hipotesis alternatif benar tetapi kita gagal menolak hipotesis nol. Ini disebut kesalahan tipe II, dengan probabilitas β.
- Tolak *H0* dan *H0* benar: ini adalah keputusan yang salah, di mana hipotesis nol benar tetapi kita menolaknya. Ini disebut kesalahan tipe I, dengan probabilitas α.
- Tolak *H0* dan *H1* : ini adalah keputusan yang benar, di mana hipotesis alternatif benar dan kita menolak hipotesis nol (probabilitas kejadian ini adalah 1-β).

Terdapat dua tipe kesalahan yang umum dilakukan, yaitu kesalahan tipe I (menolak *H0* yang benar) dan kesalahan tipe II (tidak menolak *H0* yang benar).

- Taraf signifikansi (taraf uji) merupakan besarnya peluang melakukan kesalahan tipe I (α) dan ditentukan oleh peneliti di awal penelitiannya. Biasanya digunakan 10%, 5%, atau 1%.
- Kuasa uji (tingkat kekuatan uji) merupakan peluang untuk melakukan kesalahan tipe II (β).

Terdapat hubungan antara nilai α dan β. Jika nilai α diturunkan, nilai β akan bertambah, dan berlaku sebaliknya. Nilai α dan β akan berkurang jika jumlah sampel ditambah.

### Jenis Pengujian Hipotesis

1. Pengujian hipotesis satu arah (one tail test), yaitu pengujian hipotesis dengan wilayah kritis pada satu bagian kurva saja (ekor kanan/kiri saja).
   Contoh: $H_0: \theta = \theta_0$ dan $H_1: \theta > \theta_0$
2. Pengujian hipotesis dua arah (two tail test), yaitu pengujian hipotesis dengan

wilayah kritis pada dua bagian kurva (ekor kanan dan kiri).

Contoh: $H_0$: $\theta = \theta_0$ dan $H_1$: $\theta \neq \theta_0$

**Prosedur Pengujian Hipotesis**

1. Tambahkan $H_0$ dan $H_1$
2. Tentukan Tingkat signifikansi ($\alpha$)
3. Hitung statistik uji
4. Tentukan daerah kritis atau daerah tolak $H_0$
5. Ambil keputusan (tolak $H_0$ jika p-value < $\alpha$ atau nilai statistik uji termuat di daerah kritis, dan sebaliknya)

**Statistik Uji Untuk Hipotesis**

1. Uji hipotesis untuk rata-rata satu populasi
   - Nilai $\alpha$ diketahuI

     $H_0$: $\mu = \mu_0$

     $H_1$: $\mu < \mu_0$; $\mu > \mu_0$; $\mu \neq \mu_0$

     Nilai statistik uji:

     $$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

     Wilayah kritis:

     $$z <- z_\alpha$$

     $$z > z_\alpha$$

     $$z <- z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ dan } z > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

   - Nilai $\alpha$ tidak diketahui

     $H_0$: $\mu = \mu_0$

     $H_1$: $\mu < \mu_0$; $\mu > \mu_0$; $\mu \neq \mu_0$

     Nilai statistik uji:

     $$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

     $$v = n - 1$$

     Wilayah kritis:

     $$t <- t_\alpha$$

     $$t > t_\alpha$$

     $$t <- t_{\frac{\alpha}{2}} \text{ dan } t > t_{\frac{\alpha}{2}}$$

2. Uji hipotesis untuk proporsi satu populasi

   Proporsi sampel pada kategori sukses dinyatakan dengan

   $$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{jika\ kejadian\ sukses\ dari\ sampel}{ukuran\ sampel}$$

   Statistik uji untuk proporsi harus memenuhi syarat $np \geq 5$ dan $n(1 - p) \geq 5$ agar dapat menggunakan rumus di bawah ini.

   $H_0$: $p = p_0$

   $H_1$: $p < p_0$; $p > p_0$; $p \neq p_0$

   Nilai statistik uji:

   $$z = \frac{\bar{x} - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

   Wilayah kritis:

   $$z <- z_\alpha$$

   $$z > z_\alpha$$

   $$z <- z_{\frac{\alpha}{2}}\ dan\ z > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

3. Uji hipotesis untuk varians satu populasi

   Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji Chi-Square.

   $H_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

   $H_1$: $\sigma^2 < \sigma_0^2$; $\sigma^2 > \sigma_0^2$; $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

   Nilai statistik uji:

   $$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

   $$v = n - 1$$

   Wilayah kritis:

   $$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$$

   $$\chi^2 > \chi^2_\alpha$$

   $$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ dan\ \chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$$

**CONTOH SOAL**

1. Perusahaan kayu mengembangkan jenis barang perabotan yang diklaim

mempunyai rata-rata kekuatan 7 kg dan simpangan baku 0,5 kg. Telah diketahui bahwa dengan sampel 50 alat rata-rata kekuatannya adalah 6,8 kg. Dengan taraf signifikansi atau taraf kepercayaan sebesar 0,01, uji hipotesis bahwa rata-rata populasinya tidak sama dengan 7 kg?

2. Sebuah kebun jeruk menunjukkan bahwa 10 persen pohon jeruk terkena penyakit. Untuk menguji klaim ini, diambil sampel acak 50 pohon jeruk dan didapat 5 diantaranya terkena penyakit. Ujilah klaim tersebut pada taraf signifikansi 5%?
3. Suatu perusahaan baterai mobil menyatakan bahwa umur baterainya berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku 0,9 tahun. Bila sampel acak 10 baterai tersebut menghasilkan simpangan baku 1,2 tahun, apakah anda setuju bahwa σ > 0,9 tahun? (Gunakan taraf signifikansi 5% !)

**JAWABAN**

1. Diketahui:

   *H0* : μ = 7 kg

   *H1* : μ ≠ 7 kg

   α = 1% = 0,01

   n = 50

   Ditanyakan: Uji hipotesis...?

   Penyelesaian:

   Uji dua sisi, maka:

   α/2 = 0,005 sehingga Z(0,005) = 2,58

   Wilayah kritis: $-2,58 < Z < 2,58$

   Statistik uji:

   $$Z_{hitung} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6,8-7}{\frac{0,5}{\sqrt{50}}} = -2,83$$

   Keputusan: karena $Z_{hitung} = -2,83$ berada di daerah tolak *H0*, maka keputusannya adalah *H0* ditolak

   Kesimpulan: Rata-rata populasi yang sebenarnya tidak sama dengan 7.

2. Diketahui:

   *H0* : $p_0 = 0,1$

   *H1* : $p_0 \neq 0,1$

   α = 5% = 0,05

   n = 50

   p = 10% = 0,1

   np = $50 \times 0,1 = 5$

   nq = $n(1-p) = 50 \times 0,9 = 45$

   Ditanyakan: Uji Hipotesis?

   Penyelesaian:

   Uji dua sisi, maka:

   $$\frac{\alpha}{2} = 0,025$$

   $$Z_{0,025} = 1,96$$

   Wilayah kritis: $-1,96 < Z < 1,96$

   Statistik hitung:

   $$Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,12-0,1}{\sqrt{\frac{0,1\times0,9}{50}}} = 0,4714$$

   Keputusan: karena $Z_{hitung} = 0,471$ berada di daerah tidak tolak *H0*, maka keputusannya adalah gagal tolak *H0*.

   Kesimpulan: sampel sebanyak 50 pohon jeruk dan taraf uji 5% cukup untuk menunjukkan bahwa proporsi pohon jeruk yang terserang penyakit adalah 10%.

3. Diketahui:

   Hipotesis: $\sigma > 0,9\ tahun$

   *H0* : $\sigma^2 = 0,81$

   *H1* : $\sigma^2 > 0,81$

   α = 5% = 0,05

   s = 1,2

   n =10

   Ditanyakan: uji hipotesis...?

   Penyelesaian:

   Wilayah kritis:

   $\alpha = 0,05$ dan $v = n - 1 = 9$

   $\chi^2 > \chi^2_{(0,05;9)}$ maka $\chi^2 > 16,92$

   Statistik hitung:

$$\chi^2 = \frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} = \frac{(9).(1,2)^2}{(0,9)^2} = 16$$

Keputusan: karena $\chi^2$hitung pada daerah tidak tolak *H0*, maka gagal tolak *H0.*

Kesimpulan: Simpangan baku terletak <0

# Pertemuan 4

## Uji Pengujian Hipotesis Dua Populasi

**Beda Rata-rata**

- **Prosedur Pengujian Hipotesis**
  1. Tentukan $H_0$ dan $H_1$
  2. Tentukan Tingkat signifikansi ($\alpha$)
  3. Hitung statistik uji
  4. Tentukan daerah kritis atau daerah penolakan $H_0$
  5. Ambil keputusan(Gagal tolak $H_0$ atau tolak $H_0$.

**Statistik Uji Untuk Hipotesis**

- **Varians Diketahui**

  Terdapat dua sampel acak yang saling independen masing-masing berukuran $n_1$ dan $n_2$ diambil dari dua populasi yang saling independen masing-masing dengan rata-rata $\mu_1$ dan $\mu_2$ dan varians $\sigma_1^2$ dan $\sigma_2^2$. Misalkan hipotesis nol untuk selisih dua rata-rata adalah $\mu_1$ -$\mu_2$ =$d_0$, maka statistik ujinya adalah:

$$z = \frac{\left(\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

dengan z berdistribusi normal baku.

| $H_0$ | $H_1$ | Daerah Tolak $H_0$ |
|---|---|---|
| $\mu_1$-$\mu_2$ $= d_0$ | $\mu_1 - \mu_2 < d_0$ | $z < -z_\alpha$ |
| | $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ | $z > z_\alpha$ |
| | $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ | $z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ |

- **Varians Tidak Diketahui dengan Asumsi Varias Sama**

  Statistik uji dengan asumsi varians sama ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) adalah berdistribusi t dengan derajat bebas $= n_1 + n_2 - 2$

$$t = \frac{\left(\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

| $H_0$ | $H_1$ | Daerah Tolak $H_0$ |
|---|---|---|
| $\mu_1$ -$\mu_2$ $= d_0$ | $\mu_1 - \mu_2 < d_0$ | $t < -t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ |
| | $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ | $t > t_{\alpha;n_1+n_2-2}$ |
| | $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ | $t < -t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}$ atau |

| | | |
|---|---|---|
| | | $t > t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}$ |

- **Varians Tidak diketahui dengan Asumsi Varians Tidak Sama**
  Beda rata-rata dengan asumsi varians tidak sama ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) adalah berdistribusi t dengan derajat bebas $v$.

$$t = \frac{\left(\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

| $H_0$ | $H_1$ | Daerah Tolak $H_0$ |
|---|---|---|
| $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ | $\mu_1 - \mu_2 < d_0$ | $t < -\ t_{\alpha;v}$ |
| | $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ | $t > t_{\alpha;v}$ |
| | $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ | $t < -\ t_{\frac{\alpha}{2};v}$ atau $t > t_{\frac{\alpha}{2};v}$ |

**Beda Proporsi**

- **Prosedur Pengujian Hipotesis**
  1. Tentukan $H_0$ dan $H_1$
  2. Tentukan Tingkat signifikansi (α)
  3. Hitung statistik uji
  4. Tentukan daerah kritis atau daerah penolakan $H_0$
  5. Ambil keputusan(Gagal tolak $H_0$ atau tolak $H_0$.

- **Statistik Uji Untuk Hipotesis**

$$Z = \frac{\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) - \left(p_1 - p_2\right)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

Namun, jika diduga proporsi dari dua populasi adalah sama ( p1 = p2 = p ), maka rumus statistik uji akan berubah menjadi

$$Z = \frac{\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right)}{\sqrt{\hat{p}\left(1 - \hat{p}\right)\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$\hat{p} = \frac{\left(X_1 + X_2\right)}{n_1 + n_2}$$

| $H_0$ | $H_1$ | Daerah Tolak $H_0$ |
|---|---|---|
| $P_1 - P_2 = P_0$ | $P_1 - P_2 < P_0$ | $z < -\ z_{\alpha}$ |
| | $P_1 - P_2 > p_0$ | $z > z_{\alpha}$ |
| | $P_1 - P_2 \neq p_0$ | $z < -\ z_{\frac{\alpha}{2}}$ atau $z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ |

**Uji Varian Dua Sampel**

- **Teorema Rasio Dua Varian**
  Jika $S_1^2$ dan $S_2^2$ adalah varian dari 2 sampel acak yang saling independen masing-masing dengan ukuran $n_1$ dan $n_2$ yang diambil dari 2 populasi normal yang saling independen dengan varian masing-masing $\sigma_1^2$ dan $\sigma_2^2$, maka

$$F = \frac{\frac{S^{21}}{\sigma^{21}}}{\frac{S^{22}}{\sigma^{22}}} = \frac{S^{21}}{S^{22}}\frac{\sigma^{22}}{\sigma^{21}}$$

akan mengikuti distribusi F dengan derajat bebas $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$.

- **Hipotesis**

| $H_0$ | $H_1$ |
|---|---|
| $H_0 : \sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$ | $H_1 : \sigma^2{}_1 > \sigma^2{}_2$ ( uji satu arah kanan) |
| | $H_1 : \sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2$ ( uji dua arah ) |

| | |
|---|---|
| | $H_1 : \sigma^2_1 < \sigma^2_2$ ( uji satu arah kiri ) |

- **Nilai Statistik Uji**
  Nilai statistik f untuk menguji $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ adalah rasio:

$$f = \frac{s^{21}}{s^{22}}$$

di mana $S_1^2$ dan $S_2^2$ adalah varians sampel yang dihitung dari masing-masing sampel acak.

- **Wilayah Kritis**
  Jika kedua populasi berdistribusi normal dan H0 benar, maka menurut teorema, rasio f = $S_1^2$ / $S_2^2$ adalah suatu nilai distribusi-F dengan df $v_1$ = n1 - 1dan $v_2$ = n2 - 1. Dengan demikian, wilayah kritis-nya adalah

| Hipotesis Alternatif ($H_1$) | Daerah Tolak $H_0$ |
|---|---|
| $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ ( uji satu arah kanan) | $f > f_{1-\alpha(v1,v2)}$ |
| $H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$ ( uji dua arah ) | $f < f_{\alpha/2(v1,v2)}$ atau $f > f_{1-\alpha/2(v1,v2)}$ |
| $H_1 : \sigma^2_1 < \sigma^2_2$ ( uji satu arah kiri ) | $f < f_{\alpha(v1,v2)}$ |

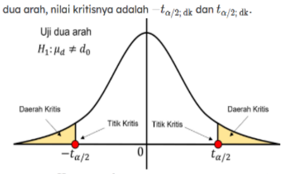
**Note :** $f_{1-\alpha(v1,v2)} = 1 / f_{\alpha(v2,v1)}$

$$f_{1-\alpha/2(v1,v2)} = 1 / f_{\alpha/2(v2,v1)}$$

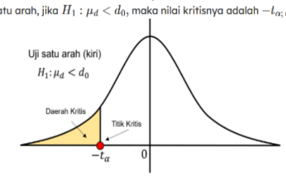
**Uji Data Berpasangan**

- **Teorema**
  Ada situasi di mana sebuah eksperimen hanya melibatkan satu kelompok individu atau objek eksperimental, dan dua pengamatan dilakukan pada setiap individu atau objek tersebut.
  Sebagai contoh, salah satu cara yang mungkin untuk menguji efektivitas program diet adalah dengan menimbang berat badan masing-masing dari sejumlah n individu, baik sebelum maupun sesudah periode diet.
  Uji Rata-rata dari 2 Populasi yang Berhubungan :
  - Sampel berpasangan atau sampel yang dicocokkan
  - Pengukuran berulang (sebelum/sesudah)
  - Menggunakan perbedaan antara nilai-nilai yang berpasangan : **d = x1 - x2**
- **Asumsi-asumsi:**
  - Kedua populasi terdistribusi Normal
  - Data berpasangan adalah pengamatan pada serangkaian pasangan variabel acak independen dari populasi bivariat dan perbedaannya terdistribusi normal
  - Dalam beberapa kasus, seperti eksperimen uji-uji ulang (test-retest), sampel dependen adalah yang sesuai

Untuk memutuskan apakah hipotesis yang diajukan ditolak atau tidak, nilai kritis harus ditentukan terlebih dahulu. Untuk uji dua arah, nilai kritisnya adalah $-t_{\alpha/2;\,dk}$ dan $t_{\alpha/2;\,dk}$.




Lebih lanjut, untuk uji satu arah, jika $H_1 : \mu_d < d_0$, maka nilai kritisnya adalah $-t_{\alpha;\,dk}$.




- **Hipotesis**

| $H_0$ | $H_1$ |
|---|---|
| $H_0 : \mu_D = d_0$ | $H_0 : \mu_D > d_0$ ( uji satu arah kanan) |
| | $H_0 : \mu_D \neq d_0$ ( uji dua arah ) |
| | $H_0 : \mu_D < d_0$ ( uji satu arah kiri ) |

- **Nilai Statistik Uji**

$$T = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

adalah berdistribusi t dengan derajat bebas n - 1. Di mana ( pilih salah satu ) :

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{\{i=1\}}^{n} \left(d_i - \overline{d^2}\right)^2}{n-1}}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{\{i=1\}}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2}{\{n-1\}}}$$

$$s_d = \ = \sqrt{\frac{\sum_{\{i=1\}}^{n} d_i^2 - \frac{(\sum_{\{i=1\}}^{n} d_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{n\sum_{\{i=1\}}^{n} d_i^2 - (\sum_{\{i=1\}}^{n} d_i)^2}{n(n-1)}}$$

- **Wilayah Kritis**

| Hipotesis Alternatif ($H_1$) | Daerah Tolak $H_0$ |
|---|---|
| $H_0: \mu_D > d_0$ ( uji satu arah kanan) | $t > t_{\alpha, n-1}$ |
| $H_0: \mu_D \neq d_0$ ( uji dua arah ) | $t < -t_{\alpha/2, n-1}$ atau $t > t_{\alpha/2, n-1}$ atau $\lvert t \rvert > t_{\alpha/2, n-1}$ |
| $H_0: \mu_D < d_0$ ( uji satu arah kiri ) | $t < -t_{t\alpha, n-1}$ |

**CONTOH SOAL**

1. Suatu penelitian dilakukan untuk membandingkan partisipasi politik di dua provinsi, yaitu Provinsi A dan Provinsi B. Untuk keperluan penelitian tersebut, diambil sampel sebanyak 15 kabupaten/kota dari masing-masing provinsi tersebut. Untuk Provinsi A, diperoleh rata-rata partisipasi politik sebesar 86%. Untuk Provinsi B, diperoleh rata-rata partisipasi politik sebesar 77%. Lebih lanjut, simpangan baku populasi dari persentase partisipasi politik di Provinsi A dan Provinsi B berturut-turut adalah 6% dan 5%. Asumsikan kedua populasi berdistribusi normal. Dengan taraf signifikansi 5%, ujilah hipotesis bahwa rata-rata partisipasi politik Provinsi A lebih tinggi daripada partisipasi politik Provinsi B.

2. Pada masa terjadi wabah COVID-19, penyediaan website online perpustakaan sangat penting karena dapat memenuhi kebutuhan informasi pengguna perpustakaan kapan saja dan di mana saja. Untuk itu Kepala Perpustakaan Politeknik Statistika STIS melakukan jajak pendapat (polling) kepada mahasiswa Polstat STIS untuk menentukan apakah sudah dibutuhkan penyediaan website online perpustakaan sekarang ini dan seklaigus ingin diketahui apakah ada perbedaan yang berarti antara proporsi mahasiswa yang tinggal di Jabodetabek dan dinluar Jabodetabek yang mendukung rencana penyediaan website online perpustakaan tersebut. Bila ada 335 dari 500 mahasiswa luar Jabodetabek yang mendukung rencana tersebut dan ada 80 dari 100 mahasiswa Jabodetabek yang setuju, dapatkah dikatakan bahwa proporsi mahasiswa Jabodetabek yang setuju lebih besar dari proporsi mahasiswa luar Jabodetabek yang setuju? Gunakan taraf nyata 5%!

3. Suatu perusahaan alat berat menyatakan bahwa lamanya waktu hidup komponen A (dalam bulan) lebih pendek dibandingkan lamanya waktu komponen B. Seorang ahli mencatat waktu hidup 10

komponen A dan 9 komponen B sebagai berikut.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Komponen A | 10,6 | 5,3 | 10,7 | 8,5 | 11,8 |
| | 15,5 | 13 | 7 | 5,9 | 7 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Komponen B | 15,5 | 10,4 | 18,4 | 19,6 | 20,9 |
| | 10,3 | 18,2 | 18,1 | 11,2 | |

Asumsikan data berasal dari sebaran normal. Dengan taraf signifikansi 5%, apakah varians dari waktu hidup komponen A dan B berbeda secara signifikan?

4. Seorang mahasiswa semester akhir melakukan penelitian terhadap dampak penggunaan ChatGPT terhadap prestasi belajar siswa pada materi pengantar statistika inferensial. Mahasiswa tersebut melakukan tes awal dan tes akhir kepada sekelompok siswa, kemudian memilih secara acak nilai dari orang siswa untuk dianalisis lebih lanjut.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tes Awal | 68 | 80 | 75 | 60 | 85 | 35 |
| Tes Akhir | 78 | 88 | 80 | 80 | 82 | 55 |

Dengan taraf signifikansi 1%, ujilah dugaan bahwa penggunaan ChatGPT dapat meningkatkan prestasi belajar siswa.

**JAWABAN**

1. Diketahui:

$$H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 = \mu_1 - \mu_2 > 0$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$z_{0,05} \approx 1,64\% \underline{x}_1 = 86 \underline{x}_2 = 77\% \sigma_1^2 = 6^2 = 36 \sigma_2^2 = 5^2 = 2$

Jawab :

$$z_{hitung} = \frac{\left(\underline{x}_1 - \underline{x}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(86-77)-0}{\sqrt{\frac{36}{15} - \frac{25}{15}}} \approx 4,463$$

Perhatikan bahwa uji yang dilakukan merupakan uji satu arah (kanan). Dengan menggunakan tabel z, nilai $z_{0,05} \approx 1,64$.

Karena $z_{hitung} \approx 4,463 > z_{0,05} \approx 1,64$, maka keputusannya adalah Tolak $H_0$.

Karena keputusan uji menunjukkan untuk menolak hipotesis nol ($H_0$).

Interpretasi :

Terdapat cukup bukti pada taraf signifikansi 5% untuk menyimpulkan bahwa rata-rata partisipasi politik di Provinsi A lebih tinggi daripada rata-rata partisipasi politik di Provinsi B.

2. Diketahui:

p : Proporsi banyaknya mahasiswa yang setuju rencana penyediaan website online perpustakaan

$p_1$: Proporsi untuk mahasiswa Jabodetabek

$p_2$ : Proporsi untuk mahasiswa di luar Jabodetabek

$$n_1 = 100 \,;\; n_2 = 500$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{355}{500} = 0,67$$

Hipotesis :

$H_0 : P_1 - P_2 = P_0$

$H_1 : P_1 - P_2 < P_0$ (uji satu arah kiri)

Nilai Statistik Uji :

$$\hat{p} = \frac{(X_1 + X_2)}{n_1 + n_2}$$

$$\hat{p} = \frac{(80 + 355)}{100 + 500}$$

$$\hat{p} = 0,692$$

$$z_{hitung} = \frac{(0,8 - 0,67)}{\sqrt{0,692(1 - 0,692)\frac{1}{100} + \frac{1}{500}}}$$

$$z_{hitung} = 2,61$$

Keputusan :
$z_{hitung} > - z_{0,05}$ sehingga keputusannya Gagal Tolak $H_0$

Interpretasi:
Dengan tingkat kepercayaan 95% tidak cukup membuktikan bahwa mahasiswa yang setuju terhadap rencana penyediaan website online peprustakaan dari luar Jabodetabek lebih besar daripada di Jabodetabek sehingga pernyataan bahwa mahasiswa dari Jabpdetabek yang setuju lebih besar dari proporsi mahasiswa luar Jabodetabek yang setuju dengan signifikansi 5% adalah benar.

3. Misalkan XA dan XB merupakan variabel acak kontinu yang berturut-turut menyatakan waktu hidup komponen A dan B (dalam bulan). Ini merupakan kasus uji kesamaan varians dari dua populasi. Oleh karena itu, akan digunakan uji - F.

**Diketahui :**
( taraf signifikansi )
$\alpha = 5\% = 0,05$
( ukuran sampel ) :
nA = 10
nB = 9.
( simpangan baku sampel )
sA ≈ 3,338
sB ≈ 4,167.

**Rumusan hipotesis:**

Misalkan $\sigma^2 A$ dan $\sigma^2 B$ berturut-turut adalah varians populasi dari waktu hidup komponen A dan B. Parameter populasi yang akan diuji adalah $\sigma^2 A$ dan $\sigma^2 B$.

$H_0 : \sigma^2 A = \sigma^2 B$

$H_1 : \sigma^2 A \neq \sigma^2 B$

**Statistik uji:**

$$f = \frac{s^2_A}{s^2_B} = \frac{(3,338)^2}{(4,167)^2} \approx 0,642$$

**Daerah kritis:**

Perhatikan bahwa uji yang dilakukan merupakan uji dua arah. Diketahui nilai-F dengan $\alpha 1 = \alpha/2 = 0,025$ dan derajat kebebasan dfA = 10 − 1 = 9 dan dfB = 9 − 1 = 8 adalah

$$f_{0,024;9,8} \approx 0,244$$

Lebih lanjut, nilai-F dengan $\alpha 2 = 1 - \alpha / 2 = 0,975$ dan derajat kebebasan dfA = 10 − 1 = 9 dan dfB = 9 − 1 = 8 adalah

$$f_{0,975;9,8} = \frac{1}{f_{(0,025;9,8)}} \approx 4,357$$

Dengan demikian, daerah tolak $H_0$ terletak di $f < 0,244$ atau $f > 4,357$

**Keputusan:**
Karena
$f_{hitung} > f_{0,024;9,8}$ $0,642 > 0,244$

Maka, keputusannya adalah gagal tolak $H_0$

Interpretasi:
Dengan taraf signifikansi 5%, tidak terdapat cukup bukti untuk menyatakan

bahwa varians dari waktu hidup komponen A dan B berbeda secara signifikan.

4. Misalkan *D* merupakan variabel acak kontinu yang menyatakan selisih nilai tes awal dan tes akhir siswa karena penggunaan ChatGPT. Ini merupakan kasus uji selisih rata-rata dua populasi berpasangan. Oleh karena itu, akan digunakan uji-t

   Lengkapi tabel data yang diberikan dengan menambahkan baris/kolom selisih.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tes Awal | 68 | 80 | 75 | 60 | 85 | 35 |
| Tes Akhir | 78 | 88 | 80 | 80 | 82 | 55 |
| Selisih (*di*) | 10 | 8 | 5 | 20 | -3 | 20 |

Diketahui ukuran sampel n = 6 dan α = 1% = 0,01. Rata-rata dan simpangan baku sampel untuk data selisih (*di*) berturut-turut adalah

$$\underline{x}_d = \sum_{i=1}^{n} x.d_i$$

$$= (10 + 8 + 5 + 20 - 3 + 20)6 =$$

dan

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{x}_d\right)^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0 + 4 + 25 + 100 + 169 + 100)}{5}}$$

$\approx 8{,}9219$

**Rumusan hipotesis:**

Misalkan $\mu_1$ dan $\mu_2$ berturut-turut adalah rata-rata populasi dari nilai tes awal dan tes akhir siswa karena penggunaan ChatGPT. Parameter populasi yang akan diuji adalah $\mu_d$ yaitu
nilai dari $\mu_2 - \mu_1$.

$$H0 : \mu_0 = \mu_2 - \mu_1 = 0$$
$$H1 : \mu_0 = \mu_2 - \mu_1 \neq 0$$

**Daerah kritis:**

Perhatikan bahwa uji yang dilakukan merupakan uji dua arah. Dengan menggunakan tabel-t, nilai-t dengan α/2 = 0,005 dan derajat kebebasan

df : n - 1 = 6 - 1 = 5

adalah $t_{tabel} = t_{0,005;5} \approx 4{,}032$ Dengan demikian, daerah kritis terletak di $t < -4{,}032$ atau
$t > 4{,}032$

**Statistik Uji :**

$$t_{hitung} = \frac{\bar{x}_d - d_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

$$= 10 - 0\, 8{,}92196 \approx 2{,}745$$

**Keputusan:**
karena

$$-4{,}032 < t_{hitung} = 2{,}745 < 4{,}032$$

disimpulkan bahwa statistik uji tidak jatuh pada daerah kritis. Dengan demikian, gagal tolak H0.

Interpretasi:
Dengan taraf signifikansi 1%, tidak terdapat cukup bukti untuk menyatakan bahwa penggunaan ChatGPT dapat meningkatkan prestasi belajar siswa.

# Pertemuan 5

## Uji Kesesuaian Untuk Sebaran Normal

Pada materi ini, terdapat beberapa metode uji kesesuaian untuk sebaran normal yang dibahas, yaitu Shapiro-Wilks, Lilliefors, Goodness of Fit, Kolmogorov-Smirnov, dan Jarque-Bera. Uji-uji ini dapat dikelompokkan menjadi dua kategori berdasarkan ukuran sampel, yaitu metode yang cocok untuk ukuran sampel kecil dan metode yang lebih sesuai untuk ukuran sampel besar.

### A. Ukuran Sampel Kecil

1. Uji Lilliefors

   Uji Lilliefors digunakan untuk menentukan apakah sampel kecil mengikuti distribusi normal. Tahapan pengujian Lilliefors mirip dengan Kolmogorov-Smirnov, namun uji ini khusus untuk data dengan parameter (mean dan variansi) yang tidak diketahui.

   Tahapan pengujian Lilliefors:

   1) Tentukan hipotesis:
      - $H_0$: Populasi mengikuti distribusi normal
      - $H_1$: Populasi tidak mengikuti distribusi normal
   2) Hitung rata-rata $(\underline{x})$ dan simpangan baku $(s)$ dari data yang diberikan.
   3) Hitung nilai standar Z untuk setiap data $(Z_i)$ menggunakan rumus $Z_i = \frac{x_i - \underline{x}}{s}$.
   4) Hitung fungsi distribusi kumulatif empiris $(S(x))$ dan teoretis $(F(x))$ berdasarkan nilai Z.
   5) Cari selisih maksimum $|F(x) - S(x)|$ sebagai statistik uji Lilliefors, lalu bandingkan dengan nilai tabel.

      Statistik uji Lilliefors:

      $$L = |F(x) - S(x)|$$

   di mana $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif teoretis dan $S(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari sampel.

   6) Daerah kritis untuk menolak $H_0$ adalah jika $L > L_{\alpha(n)}$, di mana nilai $L_{\alpha(n)}$ dapat dilihat pada tabel Lilliefors. Jika selisih maksimum lebih besar dari nilai tabel, maka data tidak berdistribusi normal.

2. Uji Shapiro-Wilk

   Uji Shapiro-Wilk juga digunakan untuk sampel kecil dan berfungsi untuk memverifikasi apakah data berdistribusi normal. Syarat uji ini adalah data harus berskala interval atau rasio, diambil secara acak, dan belum dikelompokkan.

Tahapan pengujian Shapiro-Wilk:

1) Tentukan hipotesis:

   - $H_0$: Populasi mengikuti distribusi normal

   - $H_1$: Populasi tidak mengikuti distribusi normal

2) Data diurutkan dari yang terkecil hingga terbesar dan dibagi menjadi dua kelompok untuk dikonversi dalam Shapiro-Wilk.

   Menghitung statistik uji:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \underline{x}\right)^2$$

$$T_3 = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{k} a_i \left(x_{n-i+1} - x_1\right)^2$$

   dimana $a_i$ adalah koefisien Shapiro-Wilk, $x_i$ adalah data yang diurutkan, dan $\underline{x}$ adalah rata-rata data.

3) Menghitung signifikansi ujinya.

   Signifikansi uji dibandingkan nilai tabel Shapiro-Wilk untuk dilihat posisi nilai probabilitasnya $p$. Membandingkan nilai $T_3$ dengan tabel Shapiro-Wilk.

   Jika $p \geq \alpha$ atau $T_3 \geq W_{\alpha;n}$, terima $H_0$;

   Jika $p < \alpha$ atau $T_3 < W_{\alpha;n}$, tolak $H_0$.

4) Selain itu juga dapat ditransformasi dalam nilai Z untuk dapat dihitung luasan kurva normal.

   Transformasi untuk menghitung nilai Z:

$$G = b_n + c_n + \ln ln \left(\frac{T_3 - d_n}{1 - T_3}\right)$$

   Dimana G identik dengan nilai Z distribusi normal, sedangkan untuk $b_n$, $c_n$, $d_n$ merupakan konversi statistic Shapiro-Wilk pendekatan distribusi normal.

## B. Ukuran Sampel Besar

1. Goodness of Fit

Goodness of Fit digunakan untuk menentukan apakah distribusi sampel sesuai dengan distribusi normal. Uji ini melibatkan perhitungan frekuensi observasi dan frekuensi harapan.

Tahapan pengujian Goodness of Fit:

1) Tentukan hipotesis:

   -$H_0$: Populasi mengikuti distribusi normal

   -$H_1$: Populasi tidak mengikuti distribusi normal

2) Data dikelompokkan dalam beberapa kelas (k).

3) Hitung frekuensi harapan ($e_i$) untuk setiap kelas berdasarkan distribusi normal.

4) Gunakan rumus chi-square untuk menghitung statistik uji.

Statistik uji Goodness of Fit:

$$\chi^2_{hitung} = \sum_{i+1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

dengan:

- $o_i$: Frekuensi observasi

- $e_i$: Frekuensi harapan

- $e_i = n(F(x_u) - F(x_L))$, di mana $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif normal, $x_u$ adalah tepi atas kelas ke-i, dan $x_L$ adalah tepi bawah kelas ke-i.

5) Bandingkan nilai statistik chi-square dengan nilai kritis dari tabel.

Wilayah kritis :

$\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha;(k-1-p)}$, tolak $H_0$.

Dimana k adalah jumlah kelas atau kelompok, dan p adalah banyaknya parameter.

2. Uji Kolmogorov-Smirnov (KS)

Uji Kolmogorov-Smirnov dapat digunakan untuk ukuran sampel yang lebih kecil (biasanya $n \leq 100$) dan data yang bersifat kontinu. Pada uji ini, kita membandingkan dua fungsi distribusi kumulatif, yaitu fungsi distribusi kumulatif teoretis $F(x)$ dan fungsi distribusi kumulatif dari sampel $S(x)$.

Tahapan pengujian Kolmogorov-Smirnov:

1) Tentukan hipotesis:

-$H_0$: Populasi mengikuti distribusi normal

-$H_1$: Populasi tidak mengikuti distribusi normal

2) Urutkan data dan hitung rata-rata serta simpangan baku.

3) Hitung fungsi distribusi kumulatif empiris ($S(x)$) dan teoretis ($F(x)$).

4) Cari nilai D maksimum dan bandingkan dengan nilai tabel KS. Jika lebih besar, tolak H0. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov:

$$D = max|F(X) - S(X)|$$

5) Hipotesis ditolak jika nilai D lebih besar dari nilai kritis pada tabel Kolmogorov-Smirnov.

3. Uji Jaque-Berra

Uji Jarque-Bera digunakan untuk memeriksa normalitas distribusi berdasarkan nilai skewness (kemiringan) dan kurtosis (keruncingan).

Tahapan pengujian Jarque-Bera:

1) Tentukan hipotesis:

- $H_0$: Populasi mengikuti distribusi normal

- $H_1$: Populasi tidak mengikuti distribusi normal

2) Gunakan rumus statistik uji Jarque-Bera

Statistik uji Jarque-Bera:

$$S = \frac{Skewness_{(spss)} \times (n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$K = \frac{\left(\frac{\left(\left(Kurtosis_{(spss)} \times (n-2) \times (n-3)\right)\right)}{n-1} - 6\right)}{n+1} + 3$$

$$JB = N\left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right)$$

di mana S adalah skewness, K adalah kurtosis, dan n adalah jumlah data.

3) Hitung nilai JB dan bandingkan dengan nilai kritis $\chi^2_{\alpha,2}$ pada taraf signifikansi 5%. Jika $JB > \chi^2_{\alpha,2}$, maka tolak $H_0$ dan menunjukkan data tidak berdistribusi normal.

**Contoh Soal dan Penyelesaian**

**Contoh Soal 1: Uji Liliefors**

Di sebuah laboratorium, seorang peneliti ingin mengetahui apakah waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan eksperimen tertentu

mengikuti distribusi normal. Ia mengumpulka n data dari 8 percobaan acak dan mencatat waktu yang dibutuhkan dalam menit: 5, 7, 10, 6, 8, 11, 9, dan 12. Dengan taraf signifikansi 5%, ujilah apakah waktu tersebut mengikuti distribusi normal.

**Contoh Soal 2: Uji Shapiro-Wilk**

Sebuah perusahaan manufaktur melakukan kontrol kualitas terhadap produk yang dihasilkan. Mereka mengumpulkan data ukuran produk dari 10 sampel acak dan menemukan ukuran dalam satuan cm: 15, 17, 16, 18, 14, 19, 21, 13, 20, dan 12. Ujilah normalitas ukuran produk tersebut menggunakan uji Shapiro-Wilk.

**Contoh Soal 3: Goodness of Fit**

Seorang peneliti sedang melakukan survei untuk mengetahui preferensi konsumen terhadap tiga merek produk. Ia mengumpulkan data frekuensi preferensi sebagai berikut: Merek A: 30, Merek B: 50, Merek C : 20. Ujilah apakah preferensi ini me ngikuti

distribusi normal dengan menggunakan Good ness of Fit.

**Jawaban Soal 1:**

Menghitung rata-rata (mean) dan simpangan baku (standar deviasi) dari data tersebut :

- Hipotesis nol($H_0$): Data ukuran produk mengikuti distribusi normal.
- Hipotesis alternatif($H_1$): Data ukuran produk tidak mengikuti distribusi normal.

$$\underline{x} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} = \frac{5+7+10+6+8+11+9+12}{2} = 8,5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \underline{x}\right)^2}{n-1}} = 2,4495$$

Menghitung z-score untuk tiap data :

$$Z_i = \frac{x_i - \underline{x}}{s}$$

- 5→ −1.429

- 7→ −0.6127
- 10→ 0.6121
- 6→ −1.0216
- 8→ −0.2048
- 11→ 1.0211
- 9→ 0.2049
- 12→ 1.4291

CDF untuk setiap nilai z ($F(x)$ :
- 5→0.0765
- 7→0.27017
- 10→0.729910
- 6→0.15376
- 8→0.41918
- 11→0.846311
- 9→0.58099
- 12→0.923512

$S(x)$ untuk setiap nilai z :
- 5→0.125
- 6→0.256
- 7→0.3757
- 8→0.58
- 9→0.6259
- 10→0.7510
- 11→0.87511
- 12→1.012

$$L = |F(x) - S(x)|$$

5→|0.125−0.0765|=0.0485

6→|0.25−0.1537|=0.0963

**7→|0.375−0.2701|=0.1049 (max)**

8→|0.5−0.4191|=0.0809

9→|0.625−0.5809|=0.0441

10→|0.75−0.7299|=0.0201

11→|0.875−0.8463|=0.0287

12→|1.0−0.9235|=0.0765

Kritis pada taraf signifikansi 5% = 0,285

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa statistik uji Liliefors adalah 0.1049 yang lebih kecil daripada nilai kritis 0.285 pada taraf signifikansi 5% untuk sampel berukuran 8.

Dengan demikian, kita **gagal menolak hipotesis nol ($H_0$)** bahwa data mengikuti distribusi normal. Jadi, waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan eksperimen tersebut dapat dianggap mengikuti distribusi normal pada taraf signifikansi 5%.

**Jawaban Soal 2:**

- Hipotesis nol ($H_0$): Data ukuran produk berdistribusi normal.
- Hipotesis alternatif ($H_1$): Data ukuran produk tidak berdistribusi normal.

Urutkan data :

12,13,14,15,16,17,18,19,20, 21.

Hitung mean :

$$\underline{x} = \frac{12+13+14+15+16+17+18+19+20+21}{10} = 16,5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \underline{x})^2}{n-1}} = 3,02765$$

$$D = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \underline{x})^2$$

$$D = 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 + 6,25 + 6,25 + 20,25 + 12,15 + 12,15 + 20,15$$

| $i$ | $a_i$ | $x_{n-i+1}$ | $a_i(x_{n-i+1} - x_i)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $0.5739$ | 9 | $5.1651$ |
| 2 | $0.3291$ | 7 | $2.3037$ |
| 3 | $0.2141$ | 5 | $1.0705$ |
| 4 | $0.1224$ | 3 | $0.3672$ |
| 5 | $0.0399$ | 1 | $0.0399$ |
| jumlah | $1.2794$ | 25 | $8.9464$ |

$$D = 82,5$$

$$T_3 = \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\left(x_{n-i+1} - x_1\right)\right)^2$$

$$T_3 = \frac{(8,9464)^2}{82,5} = 0,97015846$$

Kesimpulan:

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh di atas, nilai $T_3 = 0,97015846$ berada di antara $\alpha(0,5) = 0,938$ dan $\alpha(0,9) = 0,972$, ini berarti nilai $0,5 < p < 0,9$. Oleh karena nilai $p > \alpha(0,05)$, maka keputusannya adalah **gagal tolak** $H_0$. Dengan demikian, **tidak terdapat bukti yang cukup** untuk menyimpulkan bahwa data ukuran produk tidak berdistribusi normal.

**Jawaban Soal 3:**

- $H_0$: Preferensi konsumen terhadap ketiga merek produk mengikuti distribusi yang diharapkan (distribusi normal).
- $H_1$: Preferensi konsumen terhadap ketiga merek produk tidak mengikuti distribusi yang diharapkan (tidak berdistribusi normal)

Data Observasi :

- Merek A : 30
- Merek B : 50
- Merek C : 20

Nilai ekspektasi untuk ketiga merek jika berasumsi distribusi yang diharapkan adalah sama :

$$e_i = \frac{100}{3} \approx 33,33$$

Menghitung Statistik Uji Chi-Square :

$$\chi^2_{hitung} = \sum_{i+1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

di mana:

- $O_i$ = frekuensi observasi untuk kategori ke-i
- $E_i$ = frekuensi harapan untuk kategori ke-i

Nilai statistik Chi-Square yang diperoleh dari rumus tersebut adalah $\chi 2$ =14.

Kesimpulan :

Dengan derajat kebebasan $df = 2$ dan tingkat signifikansi 5%, nilai kritis dari distribusi Chi-Square adalah **5,99**. Karena $\chi^2 = 14$ > Kritis Chi-Square = 5,99, maka tolak $H_0$. Dengan demikian, terdapat bukti yang cukup untuk menyimpulkan bahwa preferensi konsumen terhadap ketiga merek produk ini **tidak mengikuti distribusi norma**

# Pertemuan 6

## Uji Kesamaan Beberapa Varians

**Uji Kesamaan Beberapa Varians**

Untuk menguji kesamaan varian lebih dari 2 populasi Hipotesisnya:

$$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

$H_a$ = tidak semua varian dari k populasi sama (minimal ada satu varian yang tidak sama)

Metode yang digunakan:

1. UjiBartlett
2. UjiPendekatanChiSquare
3. UjiLevene

**Uji Bartlett**

Jika dari k populasi normal yang saling bebas,masing masing diambil sampel sebanyak n1, n2, … , nk maka pengujian terhadap kesamaan varian dari k populasi tersebut dapat dilakukan dengan menggunakan uji Bartlett.

- Statistik Uji Bartlett

$$b = \frac{\left[\left(s_1^2\right)^{n_1-1}\left(s_2^2\right)^{n_2-1}\ldots\left(s_k^2\right)^{n_k-1}\right]^{\frac{1}{N-k}}}{s_p^2}$$

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(n_i-1\right)s_i^2}{N-k}$$

- Prosedur Pengujian
  1. Tentukan $H_0$ dan $H_a$
  2. Tentukan tingkat signifikansi ($\alpha$) yang akan digunakan
  3. Tentukan wilayah kritis:
     Uji Bartlett memberikan nilai kritis yang pasti jika ukuran sampel dari k populasi sama (n1= n2= ….= nk = n), dan memberikan nilai kritis berupa hampiran untuk ukuran sampel yang tidak sama pada k populasi tersebut. Gunakan tabel Bartlett.
     Tolak $H_0$ jika:
     - Untuk n sama: $b_{hitung} < b_{k\,(\alpha;n)}$
     - Untuk n yang tidak sama: $b_{hitung} < b_k(\alpha; n_1, n_2, \ldots, n_k)$

     Dimana

     $$b_k\left(\alpha; n_1, n_2, \ldots, n_k\right) \equiv \frac{n_1 b_k\left(\alpha;n_1\right)+n_2 b_k\left(\alpha;n_2\right)+\ldots+n_k b_k\left(\alpha;n_k\right)}{N};$$
  4. Hitung nilai statistic uji Bartlett dan bandingkan dengan nilai kritis
  5. Buat Keputusan dan simpulkan

**Uji Bartlett Pendekatan Chi-Square**

- **Penjelasan Umum**
  Uji Bartlett digunakan untuk menguji kesamaan varians dari beberapa populasi. Ini merupakan metode untuk menentukan apakah varians dari bebrapa kelompok identik atau tidak dengan menggunakan statistik Chi-Square
- **Langkah-langkah Uji Chi-Square untuk Varians**
  1. Formulasi Hipotesis
     - $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$
     - $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$
  2. Variabel Dasar
     - Misalkan:

       $v_i = n_i - 1$
     - Varians Gabungan ( $S_p^2$ ):

       $$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i S_i^2}{\sum_{i=1}^{k} v_i - k}$$
  3. Perhitungan Statistik Uji Pendekatan Chi-Square

$$\chi^2_{\text{hitung}} = 2.3026\frac{M}{C}$$

Di mana

$$M = \left(\sum_{i=1}^{k} v_i\right)\log_{10}(S_p^2) - \sum_{i=1}^{k} v_i \log_{10}(S_i^2) = -(N-k)\log(b)$$

Dengan konstanta logaritma:

$\ln(10) = 2.3026$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{v_i} - \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} v_i}\right)\right]$$

4. Wilayah Kritis
   - $H_0$ ditolak jika:

     $\chi^2_{\text{hitung}} > \chi^2_{\alpha,k-1}$
   - Di mana $\chi^2_{\alpha,k-1}$ adalah nilai kritis Chi-Square pada tingkat signifikansi α dengan derajat kebebasan k-1
5. Interpretasi

   Jika $\chi^2_{\text{hitung}}$ lebih besar dari nilai kritis, maka $H_0$ yang menyatakan bahwa varians dari semua populasi adalah sama akan ditolak, yang berarti terdapat perbedaan varians antara kelompok-kelompok tersebut.

**Uji LEVENE**

- Definisi:

  Berbeda dengan uji bartlett, data yang diuji dengan uji Levene tidak harus berdistribusi normal, namun harus kontinyu. Jika dibandingkan dengan uji bartlett, uji Levene kurang sensitif untuk data yang berdistribusi normal atau mendekati normal. Dengan uji Levene, data asli akan dibuat absolut deviasi, yaitu selisih absolut antara data asli dengan rata-rata atau mediannya. Perhitungan uji Levene yang menggunakan rata-rata baik digunakan untuk data yang berdistribusi simetris, sedangkan untuk data yang berdistribusi tidak simetris lebih baik menggunakan perhitungan dengan median.
- Statistik Uji Levene:

$$L = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2}$$

$\bar{Z}_{i.}$ = rata-rata pada kelompok sampel ke-i

$\bar{Z}_{..}$ = rata-rata untuk keseluruhan sampel

$Z_{ij}$ bisa merupakan salah satu definisi berikut:

$Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}|$ Dimana $\bar{Y}_{i.}$ adalah rata-rata dari kelompok ke-i

$Z_{ij} = |Y_{ij} - \tilde{Y}_{i.}|$ Dimana $\tilde{Y}_{i.}$ adalah median dari kelompok ke-i

- Wilayah kritis:

  $H_0$ ditolak jika $L > F_{(\alpha,k-1,N-k)}$

**CONTOH SOAL**

1. Ada yang mengatakan bahwa mobil mahal dirakit lebih berhati hati dibanding mobil murah. Untuk menyelidiki hal tersebut diambil tiga tipe mobil yaitu mobil mewah tipe A, mobil sedang tipe B dan mobil murah tipe C untuk diselidiki berapa banyak bagian yang cacat. Semua mobil diproduksi oleh pabrik yang sama. Data banyaknya cacat dari beberapa mobil bagi ketiga tipe adalah sbb. Ujilah apakah varian banyaknya cacat dari ketiga tipe mobil sama. Gunakan tingkat signifikansi 5%.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tipe A | 4 | 7 | 6 | 6 | | |
| Tipe B | 5 | 1 | 3 | 5 | 3 | 4 |

| Tipe C | 8 | 6 | 8 | 9 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|

2. Lima metode penyiraman diujikan pada 26 pohon apel untuk mendapatkan hasil panen terbaik dari metode tersebut. Data hasil panen (kg) pohon apel setelah disiram dengan masing-masing metode disajikan pada tabel berikut

| Pengamatan | Metode | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E |
| 1 | 130 | 142 | 77 | 109 | 149 |
| 2 | 98 | 133 | 99 | 56 | 129 |
| 3 | 128 | 122 | 84 | 113 | 134 |
| 4 | 106 | 131 | 76 | 101 | 108 |
| 5 | 139 | | 70 | 103 | 119 |
| 6 | | | 75 | | 126 |

Dengan tingkat signifikansi 5%, lakukan pengujian kesamaan varian hasil panen dari kelima metode penyiraman dengan Uji Pendekatan Chi-Square

3. Diketahui 4 kelompok sampel panjang badan ikan (cm). Ingin diuji apakah varian Panjang badan ikan dari keempat populasi jenis ikan adalah sama. Gunakan taraf signifikansi 5%.

**JAWABAN**

1. Berikut Langkah Langkahnya
   - Merumuskan Hipotesis

     $$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

     $H_a$ = tidak semua varian dari k populasi sama (minimal ada satu varian yang tidak sama)
   - Tingkat signifikansi α=0,05
   - Wilayah Kritis

     $n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 5, N = 15, k =$

     Tolak $H_0$ bila

     $$b < b_3(0,05; 4, 6, 5)$$

     $$\approx \frac{[(4)(0.4699)+(6)(0.6483)+(5)(0.5762)]}{15} = ($$
   - Menghitung statistic Uji Bartlett

   $s_1^2 = 1,583; \quad s_2^2 = 2,300; \quad s_3^2 = 2,700$

   $$s_p^2 = \frac{(3)(1,583)+(5)(2,300)+(4)(2,700)}{12} =$$

   $$b = \frac{[(1,583)^3(2,300)^5(2,700)^4]^{1/12}}{2,254} = 0,9804$$

   - Keputusan : gagal tolak $H_0$

     Kesimpulan : Dengan tingkat signifikansi 5% dapat ditunjukkan dari sampel mobil bahwa varian banyaknya cacat untuk ketiga tipe mobil adalah sama

2. Berikut Langkah Langkahnya
   1) Formulasi Hipotesis
      - $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2$
      - $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2 \neq \sigma_4^2 \neq \sigma_5^2$
   2) Variabel Dasar
      - Misalkan:
        v1 = 5 - 1 = 4
        v2 = 4 – 1 = 3
        v3 = 6 – 1 = 5
        v4 = 5 -1 = 4
        v5 = 6 – 1 = 5
      - Taraf nyata α = 5%
      - Varians Gabungan ( $S_p^2$ ):

      $$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i S_i^2}{\sum_{i=1}^{k} v_i - k} = 239,3492$$
   3) Perhitungan Statistik Uji Pendekatan Chi-Square

      $$\chi^2_{\text{hitung}} = 2.3026 \frac{M}{C}$$

      Di mana:

      $$M = \left(\sum_{i=1}^{k} v_i\right) \log_{10}(S_p^2) - \sum_{i=1}^{k} v_i \log_{10}(S_i^2) =$$

      4978, 4935

      $$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{v_i} - \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} v_i}\right)\right]$$

      = 1, 0988

      Dengan konstanta logaritma:

$\ln(10) = 2.3026$

Sehingga didapatkan

$\chi^2_{\text{hitung}} = 2.3026 \dfrac{M}{C} = 2,3026\,(4978,4935) / 1,0988 = 4,441$

4) Wilayah Kritis
   - $H_0$ ditolak jika:

     $\chi^2_{\text{hitung}} > \chi^2_{\alpha,k-1}$
   - Hasil yang didapatkan:

     $\chi^2_{\text{hitung}} \ldots \chi^2_{0,05;4}$

     $4,441 < 9,49$
5) Interpretasi

   Berdasarkan perhitungan, didapatkan bahwa $\chi^2_{\text{hitung}}$ lebih kecil dari nilai kritis, maka $H_0$ yang menyatakan bahwa varians dari semua populasi adalah sam gagal ditolak, yang berarti tidak terdapat perbedaan varians antara kelompok-kelompok yang diteliti.

3. Berikut Langkah Langkahnya
   - Hipotesis:

     $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$

     $H_a$ : Tidak semua varian dari keempat populasi sama (minimal ada satu varian yang berbeda)
   - Taraf Signifikansi (α) = 5% = 0,05
   - Wilayah Kritis: $L > F_{(0,05;\,3,24)}$ atau $L > 3,01$

1) Uji Levene dengan menggunakan rata-rata

| | $Y_{ij}$ | | | | $Z_{ij} = \lvert Y_{ij} - \bar{Y}_i \rvert$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sampel 1 | Sampel 2 | Sampel 3 | Sampel 4 | Sampel 1 | Sampel 2 | Sampel 3 | Sampel 4 |
| | 7.40 | 8.84 | 8.09 | 7.55 | 0.54 | 2.08 | 1.89 | 0.71 |
| | 6.18 | 6.69 | 7.96 | 5.65 | 0.68 | 0.07 | 1.76 | 1.19 |
| | 6.86 | 7.12 | 5.31 | 6.92 | 0.00 | 0.36 | 0.89 | 0.08 |
| | 7.76 | 7.42 | 7.39 | 6.50 | 0.90 | 0.66 | 1.19 | 0.34 |
| | 6.39 | 6.83 | 0.51 | 5.46 | 0.47 | 0.07 | 5.69 | 1.38 |
| | 5.95 | 5.06 | 7.84 | 7.40 | 0.91 | 1.70 | 1.64 | 0.56 |
| | 7.48 | 5.35 | 6.28 | 8.37 | 0.62 | 1.41 | 0.08 | 1.53 |
| | | | | | | | | |
| Rata-Rata | 6.86 | 6.76 | 6.20 | 6.84 | 0.59 | 0.91 | 1.88 | 0.83 |

Diketahui:

$k = 4\,;\, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 7;\, N = 28;\; \bar{Z}_{..} = 1,05$

Statistik Uji Levene:

$$L = \frac{(28-4)\left[(7)(0,59-1,05)^2 + \ldots + (7)(0,83-1,05)^2\right]}{(4-1)\left[(0,54-0,59)^2 + \ldots + (1,53-0,83)^2\right]} = 2,115$$

Keputusan : karena $L < F_{(0,05;\, 3,24)}$ atau $2,115 < 3,01$ maka gagal tolak $H_0$

Kesimpulan : Dengan Tingkat signifikansi 5% dapat ditunjukkan oleh sampel bahwa varian panjang badan ikan dari empat kelompok jenis ikan adalah sama.

2) Uji Levene dengan menggunakan median

| | $Y_{ij}$ | | | | $Z_{ij} = \lvert Y_{ij} - \tilde{Y}_i \rvert$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sampel 1 | Sampel 2 | Sampel 3 | Sampel 4 | Sampel 1 | Sampel 2 | Sampel 3 | Sampel 4 |
| | 5.95 | 5.06 | 0.51 | 5.46 | 0.91 | 1.77 | 6.88 | 1.46 |
| | 6.18 | 5.35 | 5.31 | 5.65 | 0.68 | 1.48 | 2.08 | 1.27 |
| | 6.39 | 6.69 | 6.28 | 6.50 | 0.47 | 0.14 | 1.11 | 0.42 |
| | 6.86 | 6.83 | 7.39 | 6.92 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| | 7.40 | 7.12 | 7.84 | 7.40 | 0.54 | 0.29 | 0.45 | 0.48 |
| | 7.48 | 7.42 | 7.96 | 7.55 | 0.62 | 0.59 | 0.57 | 0.63 |
| | 7.95 | 8.84 | 8.09 | 8.37 | 1.09 | 2.01 | 0.70 | 1.45 |
| | | | | | | | | |
| Median | 6.86 | 6.83 | 7.39 | 6.92 | 0.62 | 0.59 | 0.70 | 0.63 |

Diketahui:

$k = 4\,; n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 7; N = 28;\ \overline{Z}_{..} = 1,00$

Statistik Uji Levene:

$$L = \frac{(28-4)\left[(7)(0,62-1,00)^2 + ... + (7)(0,63-1,00)^2\right]}{(4-1)\left[(0,91-0,62)^2 + ... + (1,45-0,63)^2\right]} = 0,621$$

Keputusan : karena $L < F_{(0,05;\, 3,24)}$ atau $0,621 < 3,01$ maka gagal tolak $H_0$

Kesimpulan : Dengan Tingkat signifikansi 5% dapat ditunjukkan oleh sampel bahwa varian panjang badan ikan dari empat kelompok jenis ikan adalah sama.

**Note** : menggunakan *"median"* menunjukkan hasil uji yang sama dengan *"rata-rata"* karena sebaran data sampel relatif hampir simetris.

# Pertemuan 7

## Analisis of Variance (ANOVA)

**Definisi Anova**

Anova/ Anava merupakan suatu metoda yang digunakan untuk menguji hipotesis kesamaan rata-rata lebih dari dua populasi.

Diasumsikan:

- Sampel diambil secara acak dan antar sampel indepen
- Populasi berdistribusi normal
- Populasi mempunyai kesamaan varians

**Anova Satu Arah**

- Digunakan untuk menguji kesamaan beberapa nilai tengah (mean) dari lebih dari dua populasi
- Misalkan:
  Terdapat $k$ populasi yang saling bebas dan menyebar normal dengan masing-masing mean $\mu_j$ dengan j = 1,2,…,$k$ dan varian sama, $\sigma^2$.
- Dari setiap populasi diambil sampel acak masing-masing sebanyak $n_j\ dengan\ j = 1, 2, ..., k$.

**Klasifikasi satu arah**

| Popu -lasi | Pengamatan (observasi) | | | | Tota l | Rata -rata |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $y_{11}$ | $y_{12}$ | … | $y_{1n_1}$ | $y_1$ | $\overline{y}_1$ |
| 2 | $y_{21}$ | $y_{22}$ | … | $y_{2n_2}$ | $y_2$ | $\overline{y}_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $k$ | $y_{k1}$ | $y_{k2}$ | … | $y_{kn_k}$ | $y_k$ | $\overline{y}_k$ |
| | | | | | $y_{..}$ | $\overline{y}_{..}$ |

$y_{ij}$ adalah pengamatan ke-i dari populasi ke-j.

| | Sampel | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | j | … | k |
| | $y_{11}$ | $y_{12}$ | … | $y_{1j}$ | … | $y_{1k}$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{21}$ | $y_{22}$ | … | $y_{2j}$ | … | $y_{2k}$ | |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| | $y_{n_1 1}$ | $y_{n_2 2}$ | … | $\overline{y}_{n_j j}$ | … | $y_{n_k k}$ | |
| Rata -rata | $\overline{y}_1$ | $\overline{y}_2$ | | $\overline{y}_j$ | | $\overline{y}_k$ | $\overline{y}$ |
| Jumlah | $T_1$ | $T_2$ | | $T_j$ | | $T\_k$ | $T$ |

$$\overline{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{n_j}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{\sum_{j}^{k} n_j}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{j}^{k} n_j \overline{y}_j}{\sum_{j}^{k} n_j}$$

$$T_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$$

$$T = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$$

**Model untuk Data**

Model pada setiap pengamatan yaitu

$$y_{ij} = \mu_j + \epsilon\_ij \{i = 1, 2, \cdots, n_j\ j = 1, 2, \cdots, k \ (1)$$

Persamaan (1) disebut dengan model nilai tengah (means model)

$\mu_j = mean\ populasi\ ke - j$

$\epsilon_{ij} =$ galat acak (random error) pengamatan ke-i pada populasi ke-j

Bentuk lain penulisan model dengan mendefinisikan
$\mu_j = \mu + \tau_j,\ dengan\ j = 1, 2, \cdots, k$

Dari persamaan (1) diperoleh:
$y_{ij} = \mu + \tau_j + \epsilon_{ij} \{i = 1, 2, \cdots, n_j\ j = 1, 2, \cdot$

$\mu$: $overall\ mean\ (nilai\ tengah\ keseluruhan$
$\tau_j:\ pengaruh\ populasi\ ke - j$

Dengan $\mu = \frac{\sum_{j=1}^{k} \mu_j}{k}$ dan $\sum_{j=1}^{k} \tau_j = 0$
Terdapat k populasi yang masing-masing diambil sampel berukuran
$n_j,\ dengan\ j = 1, 2, \ ...k$
K populasi tersebut indepen dan masing-masing berdistribusi normal dengan rata-rata, $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ dan varians $\sigma^2$

Hipotesis:
$H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$
$H_1$: $Minimal\ terdapat\ satu\ rata - rata\ ya$

**Hipotesis**
1. Semua rata-rata bernilai sama maka $H_0$ adalah benar
2. Minimal ada satu rata-rata yang berbeda maka $H_0$ tidak benar

**Partisi Variasi**
Terdapat dua sumber variasi:
1. Perbedaan rata-rata antar populasi (between) dan
2. Variasi di dalam populasi (within) atau error

Oleh karena itu, variasi total dapat dipecah menjadi 2 bagian:
SST = SSB + SSW
SST: Sum of Squares Total (Jumlah Kuadrat Total/ JKT)
SSB: Sum of Squares Between (Jumlah Kuadrat Baris/ JKB)
SSW: Sum of Squares Within (Jumlah Kuadrat Galat/ JKG)

SST = SSB + SSW

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$$

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{N}$$

SST: sum of squares total/ jumlah kuadrat total
$k$: $jumlah\ populasi\ (levels\ or\ treatments)$
$n_j$: $ukuran\ sampel\ dari\ populasi\ ke - j$
$y_{ij}$: pengamatan ke-i dari populasi ke-j
$\bar{y}$: rata-rata keseluruhan (dari seluruh nilai data)

$T = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$

$T_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$

$N = \sum_{j=1}^{k} n_j$

Jumlah Kuadrat Antara /*Sum of Squares Between* (SSB)

$$SSB = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2$$

**Jumlah Kuadrat Antara (*Sum of Squares Between*)**
SST = SSB + SSW

$SSB = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{N}$

Dengan:
SSB = Sum of squares between
k = jumlah populasi
$n_j$ = ukuran sampel dari populasi ke-j

$$T_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij},\ T = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij},\ N = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

**Variasi Diantara Kelompok**

$MSB = \frac{SSB}{k-1}$

$$Mean\ Square\ Between = \frac{SSB}{derajat\ bebas}$$

$$SSB = \sum_{j=1}^{k} \frac{y_j^2}{n_j} - \frac{y^2}{N}$$

$$SSW = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - \bar{y}_j\right)^2$$

Dengan,
SSW = *Sum of squares within*
k = jumlah populasi
nj = ukuran sampel dari populasi ke-j
$\bar{y}_j$ = mean sampel dari populasi ke-j
$y_{ij}$ = pengamatan ke-i dari populasi ke-j
SSW = SST – SSB
dengan
*SSW = Sum of squares within*
*SST = Sum of squares total*
*SSB = Sum of squares between*

**Variasi Dalam Kelompok**

$$MSW = \frac{SSW}{N-k}$$

$$Mean\ Square\ Between = \frac{SSW}{derajat\ bebas}$$

**Tabel ANOVA Satu Arah**

| Sumber Keragaman | Jumlah Kuadrat | Derajat Bebas | Kuadrat Tengah | $F_{hitung}$ |
|---|---|---|---|---|
| Di antara | SSB | K - 1 | $MSB =$ | $F_{hitung}$ |
| Galat (*Within Samples*) | SSW | N - k | $MSW =$ | |
| Total | SST | N - 1 | | |

dengan
k = jumlah populasi
N = jumlah ukuran sampel dari seluruh populasi = $\sum n$

**ANOVA Satu Arah**

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

$H_1$ : *Minimal ada satu rata – rata popula*

Statistik uji :

$$F_{hitung} = \frac{MSB}{MSW}$$

Derajat bebas :

$df_1 = k - 1$

$df_2 = N - k$

Keputusan : H0 ditolak jika $F_{hitung} > F_{\alpha;k-1;N-k}$ atau p-*value* $< \alpha$.

**Confidence Interval**

CI (1- α)100% untuk μi - μj

$$\left(\bar{x}_i - \bar{x}_j\right) \pm t_{\frac{\alpha}{2};v}\sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)MSW}$$

Dengan v = N - k
catatan:

- Jika memuat "0", tidak ada beda signifikan antara rerata populasi ke-i dan ke-j
- Jika negatif, rerata populasi ke-j signifikan lebih besar daripada ke-i

**Uji Tukey**

H0 ditolak, terdapat populasi dengan rerata beda yang diketahui keberadaannya dengan uji tukey (Honestly Significant Difference) yang menguji tiap pasangan populasi.

Hipotesis

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$

$$H_0: \mu_i \neq \mu_j$$

- Nilai kritis jika jumlah pengamatan tiap sampel sama ($n_i = n_j$)

$$T_\alpha = q_\alpha(k, db_w)\sqrt{MSW/n}$$

- Nilai kritis jika jumlah pengamatan tiap sampel berbeda ($n_i \neq n_j$)

$$T_\alpha = \frac{q_\alpha(k, db_w)}{\sqrt{2}}\sqrt{MSW\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

$q_{\alpha}(k, db_{w})$ diperoleh dari tabel Uji Tukey; $db_{w}$ derajat bebas MSW

$H_0$ ditolak jika $\overline{y}_i - \overline{y}_j > T_{\alpha}$

**Uji Duncan**

- Nilai-nilai pembanding meningkat sesuai dengan jarak peringkat dua perlakuan yang dibandingkan.

  Hipotesis

  $H_0: \mu_i = \mu_j$

  $H_0: \mu_i \neq \mu_j$

- Nilai kritis Duncan: $R_k = r_{\alpha,k,db_w}\sqrt{\frac{MSW}{n}}$

  Nilai $r_{\alpha,k,db_w}$ dari tabel Duncan pada taraf nyata α, jarak peringkat 2 perlakuan k, dan derajat bebas galat $db_w$

Langkah-langkah pembandingan uji Duncan:

1. Urutkan rataan perlakuan dari yg terkecil s/d terbesar atau sebaliknya.
2. Nilai awal i = 1 dan j = 1.
3. Hitung beda absolut antara rataan terkecil ke-i dg terbesar ke-j.
4. Bandingkan dg nilai Rk. Jika lebih kecil, lanjut ke langkah 6; jika tidak lanjut ke langkah 5.
5. Berikan j = j + 1, jika j < k kembali ke langkah 3.
6. Buat garis di bawah rataan perlakuan ke-i sampai ke-j.
7. Berikan i = i + 1, jika i < k kembali ke langkah 3.
8. Tarik kesimpulan. Perlakuan-perlakuan pada garis yang sama berarti <u>tidak ada beda nyata</u> pada taraf **α.**

**Uji Duncan (Alternatif)**

Hipotesis

$H_0: \mu_i = \mu_j$, untuk semua $i \neq j$ dan i = j = 1,2,...,k

$H_0: \mu_i \neq \mu_j$

Statistik uji

$R_k = r_{\alpha,k,db_w}\sqrt{\frac{KTG}{n}}$ dimana KTG = MSW

- Rk adalah wilayah nyata terkecil bagi nilai rata-rata dari sebanyak k (k means)
- n adalah banyaknya perulangan (jumlah sampel) dari setiap populasi (kelompok) adalah sama
- rk adalah wilayah-terstudentkan nyata terkecil (nilai dari tabel Duncan)
- Sebelum melakukan pengujian, nilai rata-rata sampel diurutkan dari yang terkecil hingga terbesar Keputusan: tolak H0 jika $\overline{y}_h - \overline{y}_j > R_k$ untuk $\overline{y}_h > \overline{y}_j$

**CONTOH SOAL**

1. Terdapat tiga kelompok siswa yang mengikuti metode pembelajaran berbeda untuk persiapan ujian akhir. Setiap kelompok diukur skor ujiannya setelah menjalan metode pembelajaran. Data skor ujiannya sbb.:

| Skor Ujian | Kelompok | | |
|---|---|---|---|
| | A (met. 1) | B (met. 2) | C (met. 3) |
| 1 | 78 | 75 | 80 |
| 2 | 82 | 79 | 84 |
| 3 | 85 | 81 | 86 |
| 4 | 88 | 83 | 89 |
| 5 | 90 | 85 | 91 |

Ujilah hipotesis berikut menggunakan ANOVA satu arah dengan tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$.

2. Pak Aman menanam 3 jenis kentang yang berbeda di lahannya. Dipilih 5 sampel kentang dari masing-masing jenis kentang untuk diukur beratnya (gram). Dengan tingkat signifikansi 5%, apakah terdapat perbedaan rata-rata(mean) berat ketiga jenis kentang tersebut?

| **Jenis 1** | **Jenis 2** | **Jenis 3** |
|---|---|---|
| 254 | 234 | 200 |
| 263 | 218 | 222 |
| 241 | 235 | 197 |
| 237 | 227 | 206 |
| 251 | 216 | 204 |

3. perusahaan minuman ingin menguji efektivitas tiga jenis minuman energi (A, B, dan C) dalam meningkatkan konsentrasi. Peneliti melakukan eksperimen dengan melibatkan 15 orang, di mana masing-masing orang secara acak diberikan salah satu dari tiga jenis minuman. Setelah satu jam, tingkat konsentrasi mereka diukur menggunakan skala khusus. Berikut ini adalah hasil pengukuran rata-rata tingkat konsentrasi dari masing-masing kelompok:
**Minuman A**: 68, 75, 70, 74, 72
**Minuman B**: 80, 85, 83, 78, 82
**Minuman C**: 90, 88, 91, 86, 87
Peneliti ingin mengetahui apakah ada perbedaan yang signifikan dalam rata-rata tingkat konsentrasi antara tiga jenis minuman ini (Tingkat signifikansi 5%).

**JAWABAN**

1. Menghitung Rata-Rata dan Jumlah Kuadrat Total (SST)

$\bar{y}_A = 84.6$

$\bar{y}_B = 80.6$

$\bar{y}_C = 86$

$\bar{y} = 83.53$

//dihitung SST

$$SST = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$$

| Kelompok | Nilai | Xij-Xbar | (Xij-Xbar)^2 |
|---|---|---|---|
| A | 78 | -5.53 | 30.5809 |
| A | 82 | -1.53 | 2.3409 |
| A | 85 | 1.47 | 2.1609 |
| A | 88 | 4.47 | 19.9809 |
| A | 90 | 6.47 | 41.8609 |
| B | 75 | -8.53 | 72.7609 |
| B | 79 | -4.53 | 20.5209 |
| B | 81 | -2.53 | 6.4009 |
| B | 83 | -0.53 | 0.2809 |
| B | 85 | 1.47 | 2.1609 |
| C | 80 | -3.53 | 12.4609 |
| C | 84 | 0.47 | 0.2209 |
| C | 86 | 2.47 | 6.1009 |
| C | 89 | 5.47 | 29.9209 |
| C | 91 | 7.47 | 55.8009 |

SST = 303.66

//dihitung SSB

$$SSB = \sum_{j=1}^{k} n_j\left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2$$

SSB = 79.1

//dihitung SSW

$$SSW = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$$

Kelompok A = 43.56
Kelompok B = 43.6
Kelompok C = 41.6
SSW = 43.56 + 43.6 + 41.6 = 128.76

//dihitung Mean Squares (MSA dan MSE)

$$MSA = \frac{SSA}{k-1} = \frac{79.1}{2} = 39.55$$

$$MSE = \frac{SSE}{N-k} = \frac{128.76}{12} = 10.73$$

//dihitung F-Ratio

$F = \frac{MSA}{MSE} = \frac{39.55}{10.73} = 3.69$

//dibandingkan dengan nilai kritis

- df antar kelompok = k-1
- df dalam kelompok N-k
- Nilai kritis dari tabel F dengan $\alpha = 0.05$.
- Jika F $F \geq F_{kritis}$, $maka\ tolak\ H_0$

//kesimpulan

Dengan nilai F = 3.69, jika dibandingkan dengan nilai kritis F dari tabel F untuk derajat kebebasan (2,12) pada $\alpha = 0.05$ yang bernilai sekitar 3.89. Karena 3.69<3.89, maka kesimpulanya adalah gagal menolak $H_0$ yang artinya tidak ada perbedaan yang signifikan antara skor rata-rta ketiga kelompok pada tigkat signifikansi 0.05.

2. $H_0$: $\mu_1 = \mu_{2= \dots =}\mu_k$

$H_1: Minimal\ ada\ satu\ rata - rata\ popula$

α = 0,05

$df_1 = 2,\ \ df_2 = 12$

| Sumber Keragaman | Jumlah Kuadrat | Derajat Bebas | Kuadrat Tengah | $F_{hitung}$ |
|---|---|---|---|---|
| Di antara | 4716,4 | 2 | 2358,2 | 25,275 |
| Galat (*Within Samples*) | 119,6 | 12 | 93,3 | |
| Total | 5835 | 14 | | |

Keputusan: karena $F_{hitung}$ = 25,275 > $F_{0,05;1;2}$ = 3,885 maka Tolak $H_0$

Kesimpulan: dengan tingkat signifikansi 5% dapat dinyatakan bahwa terdapat minimal satu jenis kentang yang rata-rata beratnya berbeda dari jenis kentang lainnya

3. **Langkah 1: Hitung Rata-Rata, SST, SSB, SSW**

$\bar{y}_A = 71,8$

$\bar{y}_B = 81.6$

$\bar{y}_C = 88,4$

$\bar{y} = 80,6$

$$SST = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$$

| Kelompok | Nilai | $(y_{ij} - \bar{y})^2$ |
|---|---|---|
| A | 68 | 158,76 |
| A | 75 | 31,36 |
| A | 70 | 112,36 |
| A | 74 | 43,56 |
| A | 72 | 73,96 |
| B | 80 | 0,36 |
| B | 85 | 19,36 |
| B | 83 | 5,76 |
| B | 78 | 6,76 |
| B | 82 | 1,96 |
| C | 90 | 88,36 |
| C | 88 | 54,76 |
| C | 91 | 108,16 |
| C | 86 | 29,16 |
| C | 87 | 40,96 |
| Jumlah (SST) | | 775,6 |

$$SSB = \sum_{j=1}^{k} n_j\left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2$$

| $5(y_A - \bar{y}$ | $5(y_B - \bar{y}$ | $5(y_C - \bar{y}$ | Jumlah (SSB) |
|---|---|---|---|
| 387,2 | 5 | 304,2 | 696,4 |

$$SSW = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - \bar{y}_j\right)^2$$

| Kelompok | Nilai | $(y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ |
|---|---|---|
| A | 68 | 14,44 |
| A | 75 | 10,24 |
| A | 70 | 3,24 |
| A | 74 | 4,84 |

| | | |
|---|---|---|
| A | 72 | 0,04 |
| B | 80 | 2,56 |
| B | 85 | 11,56 |
| B | 83 | 1,96 |
| B | 78 | 12,96 |
| B | 82 | 0,16 |
| C | 90 | 2,56 |
| C | 88 | 0,16 |
| C | 91 | 6,76 |
| C | 86 | 5,76 |
| C | 87 | 1,96 |
| Jumlah (SSW) | | 79,2 |

**Langkah 2: Hitung MSB, MSW, dan F**

$MSB = \frac{SSB}{k-1} = 348{,}2$

$MSW = \frac{SSW}{N-k} = 6{,}6$

$F_{hitung} = \frac{MSB}{MSW} = 52{,}76$

**Langkah 3: Bandingkan F hitung dengan nilai kritis tabel F**

- df antar kelompok = k-1 = 2
- df dalam kelompok N-k = 12
- Nilai kritis dari tabel F dengan $\alpha = 0.05$.
- Jika F $F \geq F_{kritis}$, *maka tolak* $H_0$

Nilai F hitung = 52,76 dibandingkan dengan nilai kritis F dari tabel F untuk derajat kebebasan (2,12) pada $\alpha = 0.05$ yang bernilai sekitar 3.89 menunjukkan 52,76 > 3.89. Kesimpulanya adalah tolak $H_0$ yang berarti terdapat perbedaan signifikan antara skor rata-rata tingkat konsenterasi ketiga kelompok pada tigkat signifikansi 0.05 (Lanjut ke uji tukey karena tolak H0).

**Langkah 4: Uji tukey (Dapatkan nilai kritis tukey Tα)**

$$T_\alpha = \frac{q_\alpha(k,db_w)}{\sqrt{2}}\sqrt{MSW\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

k=3, dbw=N-k=15-3=12

Dari tabel diperoleh nilai $q$0,05(3,12)=3,77

Maka Tα =5

**Langkah 5: Bandingkan Selisih Rata-Rata Tiap Pasangan dengan Tα**

$$|\overline{y}_A - \overline{y}_B| = 9,8 > T\alpha$$

$$|\overline{y}_A - \overline{y}_C| = 16,6 > T\alpha$$

$$|\overline{y}_B - \overline{y}_C| = 6,8 > T\alpha$$

**Langkah 6: Kesimpulan**

Baik kelompok A dan B, A dan C, maupun B dan C memiliki perbedaan yang signifikan dalam meningkatkan konsentrasi. Maka A, B dan C memiliki perbedaan yang signifikan dalam meningkatkan konsentrasi.

# Pertemuan 8

## Two Way Analysis of Variance

### Anova Dua Arah Tanpa Replikasi

Anova dua arah digunakan untuk menguji rata-rata suatu variabel berskala kontinyu berdasarkan dua kriteria/faktor, dengan asumsi independensi, kenormalan, dan homogenan varians.

**Struktur analisis anova dua arah tanpa replikasi**

| Faktor 1 | Faktor 2 | | | | | | Total | Nilai tengah |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | ... | j | ... | c | | |
| 1 | y11 | y12 | ... | y1j | ... | y1c | T1. | ybar 1. |
| 2 | y21 | y22 | ... | y2j | ... | y2c | T2. | ybar 2. |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .. | .. |
| i | yi1 | yi2 | ... | yij | ... | yic | Ti. | ybar i. |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | .. | .. |
| r | yr1 | yr2 | ... | yrj | ... | yrc | Tr. | ybar r. |
| Total | T.1 | T.2 | ... | T.j | .. | T.c | T.. | |
| Nilai tengah | ybar .1 | ybar .2 | .. | ybar .j | .. | ybar .c | | ybar .. |

Keterangan:

- yij : Nilai amatan pada faktor 1 ke-i dan faktor 2 ke-j
- Ti. : Total nilai amatan pada faktor 1 ke-i
- ybar i. : Rata-rata nilai amatan pada faktor 1 ke-i
- T .j : Total nilai amatan pada faktor 2 ke-j
- ybar .j : Rata-rata nilai amatan pada faktor 2 ke-j
- T.. : Total seluruh nilai amatan (grand total)
- ybar .. : Rata-rata seluruh nilai amatan (grand mean)
- r : Banyaknya kategori/subkelompok pada faktor 1
- c : Banyaknya kategori/subkelompok pada faktor 2

### Model Analisis

$$y_{ij} = \mu + F1_i + F2_j + \epsilon_{ij}$$

untuk i = 1, 2, …, r dan j=1, 2, …, c

μ : adalah rata-rata keseluruhan

$F1_i$ : pengaruh kategori ke-i dari faktor 1

$F2_i$ : pengaruh kategori ke-i dari faktor 2

$\epsilon_{ij}$ : pengaruh galat acak dari kategori ke-I dari factor 1 dan kategori ke-j dari factor 2, pada replikasi ke-k

**Hipotesis**

- Untuk menguji perbedaan rata-rata dari faktor pertama
  $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1
  $H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1
- Untuk menguji perbedaan rata-rata dari faktor kedua
  $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 2
  $H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 2

### Rumus hitung jumlah kuadrat

$$\text{JKT} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} y_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{rc}$$

$$\text{JKF1} = \frac{\sum_{i=1}^{r} T_{i.}^2}{c} - \frac{T_{..}^2}{rc}$$

$$\text{JKF2} = \frac{\sum_{j=1}^{c} T_{.j}^2}{r} - \frac{T_{..}^2}{rc}$$

$$\text{JKG} = \text{JKT} - \text{JKF1} - \text{JKF2}$$

### Tabel two-way Anova tanpa replikasi

| Sumber keragaman | Jumlah Kuadrat | Derajat bebas | Kuadrat tengah | F hitung |
|---|---|---|---|---|
| Faktor 1 | JKF1 | r-1 | JKF1/(r-1) | $s_1^2/s_2^2$ |
| Faktor 2 | JKF2 | c-1 | JKF2/(c-1) | $s_2^2/s_3^2$ |
| Galat | JKG | (r-1)(c-1) | JKG/((r-1)(c-1)) | |
| Total | JKT | rc-1 | | |

**Wilayah kritis**

- Tolak $H_0$ jika $f_1 > f_{(\alpha\ ;(r-1),(r-1)(c-1))}$
- Tolak $H_0$ jika $f_2 > f_{(\alpha\ ;(c-1),(r-1)(c-1))}$

**Contoh soal Anova dua arah tanpa replikasi**

Seorang mahasiswa melakukan survey sederhana untuk mengetahui proses belajar mahasiswa selama pandemi COVID-19. Survei tersebut mengumpulkan beberapa informasi, salah satunya rata-rata jumlah jam belajar selama seminggu yang dilaksanakan oleh mahasiswa. Data yang diperoleh disajikan pada tabel berikut:

| Mahasiswa tingkat | Prodi A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 30 | 10 |
| 2 | 10 | 35 | 24 |
| 3 | 35 | 15 | 20 |
| 4 | 20 | 25 | 17,5 |

Berdasarkan data di atas, periksa apakah:

a. rata-rata jumlah jam belajar seminggu mahasiswa diantara keempat Tingkat sama
b. ketiga prodi mahasiswa tersebut memiliki rata-rata jumlah jam belajar yang sama

Jawab:

Misal Tingkat signifikansi = 5%

Hipotesis

a. $H_0$: Tidak terdapat perbedaan rata-rata jumlah jam belajar seminggu mahasiswa diantara keempat tingkat
   $H_1$: minimal ada satu rata-rata jumlah jam belajar seminggu mahasiswa yang berbeda diantara keempat tingkat tersebut
b. $H_0$: Tidak terdapat perbedaan rata-rata jumlah jam belajar diantara ketiga prodi
   $H_1$: minimal ada satu rata-rata jumlah jam belajar yang berbeda diantara ketiga prodi tersebut

Lalu lakukan penghitungan total dan rata-rata

| Mahasiswa tingkat | Prodi A | B | C | Total |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 30 | 10 | 65 |
| 2 | 10 | 35 | 24 | 69 |
| 3 | 35 | 15 | 20 | 70 |
| 4 | 20 | 25 | 17,5 | 62,5 |
| Total | 90 | 105 | 71,5 | 266,5 |

kuadrat

| Mahasiswa tingkat | Prodi A | B | C | Total |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 625 | 900 | 100 | 1625 |
| 2 | 100 | 1225 | 576 | 1901 |
| 3 | 1225 | 225 | 400 | 1850 |
| 4 | 400 | 625 | 306,25 | 1331,25 |
| Total | 2350 | 2975 | 1382,25 | 6707,25 |

Maka didapat nilai:

- JKT = 6707,25 – $\frac{266{,}5\text{^}2}{(3)(4)}$ = 788,7292

| Mahasiswa tingkat | Prodi A | B | C | Total | Total kuadrat |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 30 | 10 | 65 | 4225 |
| 2 | 10 | 35 | 24 | 69 | 4761 |
| 3 | 35 | 15 | 20 | 70 | 4900 |
| 4 | 20 | 25 | 17,5 | 62,5 | 3906,25 |
| Total | 90 | 105 | 71,5 | 266,5 | 17792,25 |
| Total kuadrat | 8100 | 11025 | 5112,25 | 24237,25 | |

- JKF1 = $\frac{17792{,}25}{3}$ - $\frac{266{,}5\text{^}2}{(3)(4)}$ = 12,22917

- JKF1 = $\frac{24237,25}{4}$ - $\frac{266,5\text{^}2}{(3)(4)}$ = 140,7917
- JKG = 788,729 - 12,22917 - 140,7917 = 635,7083

Lalu dimasukkan ke tabel anova dan diperoleh:F tabel

| Sumber keragaman | Jumlah Kuadrat | Derajat bebas | Kuadrat tengah | F hitung |
|---|---|---|---|---|
| Faktor 1 | 12,22917 | 3 | 4,076389 | 0,003353 |
| Faktor 2 | 140,7917 | 2 | 70,39583 | 0,441449 |
| Galat | 635,7083 | 6 | 105,9514 | |
| Total | 788,7292 | 5 | | |

| df untuk penyebut (N2) | df untuk pembilang (N1) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 1 | 161 | 199 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 2 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4 |

- $F_{(0,05;3,6)} = 4,76$
- $F_{(0,05;2,6)} = 5,14$

Hasil dan keputusan

- $F_1 < F_{(0,05;3,6)}$ -> gagal tolak H0
- $F_2 < F_{(0,05;4,6)}$ -> gagal tolak H0

Kesimpulan

- Pada tingkat signifikansi 5% dan jumlah sampel yang digunakan, sampel belum cukup bukti untuk menyatakan bahwa rata-rata jumlah jam belajar mahasiswa keempat tingkat berbeda.
- Pada tingkat signifikansi 5% dan jumlah sampel yang digunakan, sampel belum cukup bukti untuk menyatakan bahwa rata-rata jumlah jam belajar mahasiswa ketiga prodi berbeda.

## Anova Dua Arah Dengan Replikasi

### Definisi Anova Dua Arah dengan Replikasi

Uji statistik yang digunakan untuk menganalisis perbedaan rata-rata antara dua kelompok yang melakukan lebih dari satu hal (terdapat n amatan/observasi pada setiap selnya). Anova Dua Arah dengan replikasi terbagi menjadi dua jenis, yaitu :

1. Anova dua Arah dengan replikasi dan interaksi
2. Anova dua arah dengan replikasi tanpa interaksi

### Struktur Anova Dua Arah dengan Replikasi

| Faktor 1 | Faktor 2 | | | | Total | Nilai Tengah |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | ... | c | | |
| 1 | $y_{111}$ | $y_{122}$ | ... | $y_{112}$ | $T_{1..}$ | $\bar{y}_{1..}$ |
| | $y_{112}$ | $y_{122}$ | ... | $y_{113}$ | | |
| | . | . | ... | . | | |
| | $y_{11n}$ | $y_{12n}$ | ... | $y_{11n}$ | | |
| 2 | $y_{211}$ | $y_{221}$ | ... | $y_{211}$ | $T_{2..}$ | $\bar{y}_{2..}$ |
| | $y_{212}$ | $y_{222}$ | ... | $y_{212}$ | | |
| | . | . | ... | . | | |
| | $y_{21n}$ | $y_{22n}$ | ... | $y_{21n}$ | | |
| . | . | . | ... | . | . | . |
| . | . | . | ... | . | . | . |
| r | $y_{r11}$ | $y_{r21}$ | ... | $y_{r11}$ | $T_{r..}$ | $\bar{y}_{r..}$ |
| | $y_{r12}$ | $y_{r22}$ | ... | $y_{r12}$ | | |
| | . | . | ... | . | | |
| | $y_{r1n}$ | $y_{r2n}$ | ... | $y_{rcn}$ | | |
| Total | $T_{.1.}$ | $T_{.1.}$ | ... | $T_{.1.}$ | $T_{...}$ | |
| Nilai Tengah | $\bar{y}_{.1.}$ | $\bar{y}_{.2.}$ | ... | $\bar{y}_{.c.}$ | | $\bar{y}_{...}$ |

*Tij.* : jumlah pengamatan dalam sel faktor 1 dan 2 ke-ij

*Ti.* : jumlah pengamatan dalam faktor 1 ke-i

*T* : jumlah pengamatan dalam faktor 2 ke-j

*T.* : Total nilai dari seluruh amatan sampel.

$\bar{y}_{ij.}$: rata-rata pengamatan dalam sel faktor 1 dan 2 ke-ij

$\bar{y}_{i..}$ : rata-rata pengamatan dalam faktor 1 ke-i

$\overline{y}_{.j.}$ : rata-rata pengamatan dalam faktor 2 ke-j

$\overline{y}_{...}$ : rata-rata nilai seluruh amatan sampel

**Partisi Variasi/Keberagaman**

JKT = JKF1 + JKF2 +JK(F12) + JKG

Terdapat 4 Partisi Variasi sebagai berikut :

A. JKT : Jumlah Kuadrat Total

$$JKT = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \overline{y}_{...}\right)^2$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^{\ 2} - \frac{T_{...}^2}{rcn}$$

B. JKF1 : Jumlah Kuadrat Bagi Nilai Tengah Baris

$$JKF1 = cn\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}\right)^2$$

$$JKF1 = \frac{\sum_{i=1}^{r} T_{i..}^{\ 2}}{cn} - \frac{T_{...}^2}{rcn}$$

C. JKF2 : Jumlah Kuadrat bagi Nilai Tengah Kolom

$$JKF2 = rn\sum_{j=1}^{c}\left(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}\right)^2$$

$$JKF2 = \frac{\sum_{j=1}^{c} T_{.j.}^{\ 2}}{rn} - \frac{T_{...}^2}{rcn}$$

D. JK(F12) : Jumlah Kuadrat bagi Interaksi Baris dan Kolom

$$JK(F12) = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}\right)^2$$

$$JK(F12) = \frac{\sum_{j=1}^{c} T_{ij.}^{\ 2}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{r} T_{i..}^{\ 2}}{cn} - \frac{\sum_{j=1}^{c} T_{.j.}^{\ 2}}{rn} + \frac{T_{...}^2}{rcn}$$

E. JKG : Jumlah Kuadrat Galat

$$JKG = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{y}_{ijk} - \overline{y}_{ij.}\right)^2 = JKT -$$

$$JKG = JKT - JKF1 - JKF2 - JK(F12)$$

**Anova Dua Arah dengan Replikasi dengan Interaksi**

1. Hipotesis

a. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1 dan faktor 2

$H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1 dan faktor 2

b. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1

$H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1

c. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 2

$H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 2

2. Model Statistik

$y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon\_ijk$

Dimana

$\mu_{ij} = \mu + F1_i + F2_j + (F12)_{ij}$

Untuk i = 1, 2, .., r, ; j = 1, 2, …, c ; dan k = 1, 2, …, n

µ : rata – rata populasi sesungguhnya

$F1_i$ : pengaruh kategori ke-i dari faktor 1

$F2_i$ : pengaruh kategori ke-i dari faktor 2

$(F12)_{ij}$ : pengaruh interakti kategori ke-i dari faktor 1 dan kategori ke-j dari faktor 2

$\epsilon_{ijk}$ : pengaruh galat acak dari kategori ke-I dari factor 1 dan kategori ke-j dari factor 2, pada replikasi ke-k

3. Tabel Anova Dua Arah dengan Replikasi dan Interaksi

| Sumber Keberagaman | Jumlah Kuadrat | Derajat Bebas | Kuadrat Tengah | F hitung |
|---|---|---|---|---|
| Faktor 1 | JKF1 | r-1 | $s_1^2 = \frac{JKF1}{r-1}$ | $f_1 = \frac{s_1^2}{s_4^2}$ |
| Faktor 2 | JKF2 | c-1 | $s_2^2 = \frac{JKF2}{c-1}$ | $f_2 = \frac{s_2^2}{s_4^2}$ |
| Interaksi | JK(F12) | (r-1)(c-1) | $s_3^2 = \frac{JK(F12)}{(r-1)(c-1)}$ | $f_3 = \frac{s_3^2}{s_4^2}$ |
| Galat | JKG | rc(n-1) | $s_4^2 = \frac{JKG}{rc(n-1)}$ | |
| Total | JKT | rcn-1 | | |

Wilayah Kritis / Daerah Tolak

a. Tolak $H_0$, jika $f_1 > f_{\alpha;(r-1);rc(n-1)}$
b. Tolak $H_0$, jika $f_2 > f_{\alpha;(C-1);rc(n-1))}$
c. Tolak $H_0$, jika $f_3 > f_{\alpha;(r-1)(C-1);rc(n-1)}$

**Anova Dua Arah dengan Replikasi Tanpa Interaksi**

1. Hipotesis
   a. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1
      $H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 1
   b. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 2
      $H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan faktor 2

2. Model Statistik
   $y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon\_ijk$

   Dimana $\mu_{ij} = \mu + F1_i + F2_j$
   Untuk i = 1, 2, .., r, ; j = 1, 2, …, c ; dan k = 1, 2, …, n
   μ : rata – rata populasi sesungguhnya
   $F1_i$ : pengaruh kategori ke-i dari faktor 1
   $F2_i$ : pengaruh kategori ke-i dari faktor 2
   $\epsilon\_ijk$ : pengaruh galat acak dari kategori ke-I dari factor 1 dan kategori ke-j dari factor 2, pada replikasi ke-k

3. Tabel Anova Dua Arah dengan replikasi tanpa Interaksi

| Sumber Keberagaman | Jumlah Kuadrat | Derajat Bebas | Kuadrat Tengah | F hitung |
|---|---|---|---|---|
| Faktor 1 | JKF1 | r-1 | $s_1^2 = \frac{JKF1}{r-1}$ | $f_1 = \frac{s_1^2}{s_3^2}$ |
| Faktor 2 | JKF2 | c-1 | $s_2^2 = \frac{JKF2}{c-1}$ | $f_2 = \frac{s_2^2}{s_3^2}$ |
| Galat | JKG | rc(n-1) | $s_3^2 = \frac{JKG}{rc(n-1)}$ | |
| Total | JKT | rcn-1 | | |

Wilayah kritis / Daerah Tolak

a. Tolak $H_0$, jika $f_1 > f_{\alpha;(r-1);rc(n-1)}$
b. Tolak $H_0$, jika $f_2 > f_{\alpha;(C-1);rc(n-1)}$

Soal Anova Dua arah dengan replikasi tanpa interaksi

Seorang peneliti ingin menguji dengan taraf signifikansi = 5%, pengaruh **jenis pupuk** (A1, A2, A3) dan **jenis tanah** (B1, B2) terhadap hasil panen padi (dalam kilogram). Setiap kombinasi dilakukan pengukuran sebanyak 2 kali (replikasi). Data hasil panen (dalam satuan kilogram) sebagai berikut:

| Pupuk | Tanah | | | Total | Rata-rata |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | | |
| I | 30 | 27 | 35 | 279 | 31 |
| | 32 | 28 | 32 | | |
| | 33 | 29 | 33 | | |
| II | 36 | 34 | 36 | 319 | 35,44 |
| | 36 | 33 | 33 | | |
| | 38 | 36 | 37 | | |
| III | 40 | 39 | 41 | 376 | 41,78 |
| | 41 | 40 | 45 | | |
| | 44 | 43 | 43 | | |
| IV | 43 | 44 | 46 | 399 | 44,33 |
| | 44 | 41 | 47 | | |
| | 43 | 45 | 46 | | |
| Total | 460 | 439 | 474 | 1373 | |
| Rata-rata | 38,33333 | 36,58333 | 39,5 | | 38,13889 |

Hipotesis :

a. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan jenis tanah
   $H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan jenis tanah
b. $H_0$ : tidak terdapat perbedaan rata-rata berdasarkan jenis pupuk

$H_1$ : minimal terdapat satu perbedaan rata-rata berdasarkan jenis pupuk

Taraf signifikansi, $\alpha = 5\%$ $r = 4$; $c = 3$; $n = 3$

Wilayah kritis

a. Tolak $H_0$, jika $f_1 > f_{0,05;3;24}$ atau $f_1 > 3,01$
b. Tolak $H_0$, jika $f_2 > f_{0,05;2;24}$ atau $f_2 > 3,4$

Menghitung JKF1

$$JKT = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^{2} - \frac{T_{...}^{2}}{rcn}$$

$$JKT = 30^2 + 32^2 + 33^2 + ... + 46^2 -$$

$$JKT = 1130,3056$$

$$JKF1 = \frac{\sum_{i=1}^{r} T_{i..}^{2}}{cn} - \frac{T_{...}^{2}}{rcn}$$

$$JKF1 = \frac{279^2 + 319^2 + 376^2 + 399^2}{3(3)} - \frac{1373^2}{4(3)(3)}$$

$$JKF1 = 988,5278$$

$$JKF2 = \frac{\sum_{J=1}^{R} T_{.J.}^{2}}{Rn} - \frac{T_{...}^{2}}{rcn}$$

$$JKF2 = \frac{460^2 + 439^2 + 474^2}{3(3)} - \frac{1373^2}{4(3)(3)}$$

$$JKF2 = 51,7222$$

$$JKG = JKT - JKF1 - JKF2$$

$$JKG = 1130,3056 - 988,5278 - 51,722$$

$$JKG = 90,0556$$

| Sumber Keberagaman | Jumlah Kuadrat | Derajat Bebas | Kuadrat Tengah | F hitung |
|---|---|---|---|---|
| Faktor 1 | JKF1 | 4-1 =3 | $s_1^2 = 329,5093$ | $f_1 = 109,7687$ |
| Faktor 2 | JKF2 | 3-1 = 2 | $s_2^2 = 25,8611$ | $f_2 = 8,6151$ |
| Galat | JKG | 30 | $s_3^2 = 3,0019$ | |
| Total | JKT | 4(3)(3)-1 = 35 | | |

Keputusan

a. Tolak $H_0$, karena $f_1 > f_{0,05;3;24}$ atau $f_1 > 3,01$ atau $109,7687 > 3,01$
b. Tolak $H_0$, karena $f_2 > f_{0,05;2;24}$ atau $f_2 > 3,4$ atau $8,6151 > 3,4$

Interpretasi :

a. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan dengan taraf signifikansi 5%, cukup bukti untuk menyatakan bahwa rata-rata hasil panen berbeda berdasarkan jenis pupuk yang digunakan
b. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan dengan taraf signifikansi 5%, cukup bukti untuk menyatakan bahwa rata-rata hasil panen berbeda berdasarkan jenis tanah yang digunakan untuk media tanam

**Uji Duncan**

Ketika $H_0$ ditolak, berarti terdapat rata-rata populasi dari perlakuan yang berbeda. untuk mengetahui populasi yang rata-ratanya berbeda, dapat dilanjutkan dengan uji Perbandingan Berganda (Multiple Comparison) salah satunya adalah Uji Duncan.

**Tahapan Uji Duncan**

1. Menghitung nilai kritis ($R_k$) untuk setiap k, dengan k = 2,3,...,i dengan i adalah jumlah perlakuan atau kelompok.
2. Mengurutkan rata-rata setiap perlakuan ($\mu_i$) dari yang terkecil atau yang terbesar.
3. Menghitung selisih rata-rata antar perlakuan, $\mu_i - \mu_j$ dengan i adalah perlakuan dengan rata-rata terbesar dan j adalah perlakuan dengan rata-rata terbesar setelahnya.
4. Jika hasil selisihnya lebih dari $R_k$, maka i nya bergeser ke perlakuan j dan j bergeser ke perlakuan dengan rata-rata terbesar setelahnya.

5. Jika hasil selisihnya kurang dari $R_k$, maka i tetap dan j bergeser ke perlakuan dengan rata-rata terbesar setelahnya.
6. Tandai pasangan perlakuan yang menghasilkan selisih kurang dari $R_k$ sebagai pasangan perlakuan yang tidak berbeda signifikan. Selain pasangan-pasangan perlakuan tersebut, berbeda signifikan.

Hipotesis yang digunakan untuk setiap pengujian selisih antar pasangan perlakuan adalah

$H_0$: $\mu_i = \mu_j$ (rata-rata perlakuan ke-i dan perlakuan ke-j sama)
$H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ (rata-rata perlakuan ke-i dan perlakuan ke-j berbeda)

$H_0$ ini akan ditolak jika, $| \mu i - \mu j | > Rk$
Dengan,

$$R_k = r(\alpha, k, df_{KTG}) \sqrt{\frac{KTG}{jumlah\ data}}$$

Ket:
$R_k$ = Nilai kritis Duncan
r = nilai dari tabel Duncan
k = jarak antar dua perlakuan
$df_{KTG}$ = derajat bebas pada kuadrat tengah galat
KTG = kuadrat tengah galat
jumlah data = banyaknya data dalam setiap perlakuan

untuk uji duncan di faktor 1 atau baris gunakan jumlah data = n x c dengan c adalah jumlah kolom.
untuk uji duncan di faktor 2 atau kolom gunakan jumlah data = n x r dengan r adalah jumlah baris.
untuk uji duncan di interaksi gunakan jumlah data = n.

**Contoh soal**

| Pupuk | Tanah | | | Total | Rata-rata |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | | |
| I | 30 | 27 | 35 | 279 | 31 |
| | 32 | 28 | 32 | | |
| | 33 | 29 | 33 | | |
| II | 36 | 34 | 36 | 319 | 35,44 |
| | 36 | 33 | 33 | | |
| | 38 | 36 | 37 | | |
| III | 40 | 39 | 41 | 376 | 41,78 |
| | 41 | 40 | 45 | | |
| | 44 | 43 | 43 | | |
| IV | 43 | 44 | 46 | 399 | 44,33 |
| | 44 | 41 | 47 | | |
| | 43 | 45 | 46 | | |
| Total | 460 | 439 | 474 | 1373 | |
| Rata-rata | 38,33 | 36,58 | 39,5 | | 38,14 |

Dari contoh soal pada ANOVA 2 arah dengan replikasi sudah dibuktikan bahwa tidak semua faktor 1 (jenis pupuk) memiliki rata-rata yang sama, minimal satu yang berbeda atau keputusannya adalah tolak $H_0$. Selanjutnya ingin diketahui jenis pupuk mana yang memiliki rata-rata berbeda dengan uji Duncan.

**Langkah:**

1. Tentukan hipotesis untuk perbandingan tiap pasangan kategori dan α nya
   $H_0$: $\mu_i = \mu_j$ (rata-rata perlakuan ke-i dan perlakuan ke-j sama)
   $H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ (rata-rata perlakuan ke-i dan perlakuan ke-j berbeda)

   $\alpha = 5\% = 0{,}05$
   $H_0$ ini akan ditolak jika, $| \mu_i - \mu_j | > R_k$
2. Menentukan nilai kritis untuk tiap jarak antar 2 perlakuan
   Sebelumnya sudah diketahui,
   $df_{KTG} = 30$
   KTG = 3,0019
   Jumlah data = n x c = 3 x 3 = 9

| k | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $r(\alpha, k, df_{KT}$ | 2,888 | 3,035 | 3,131 |
| $R_k$ | 1,668 | 1,753 | 1,808 |

Dengan,

$$R_k = r(\alpha, k, df_{KTG}) \sqrt{\frac{KTG}{jumlah\ data}}$$

3. Mengurutkan rata-rata dari yang terbesar ke terkecil

| Pupuk | IV | III | II | I |
|---|---|---|---|---|
| Rata-rata | 44,33 | 41,78 | 35,44 | 31 |

4. Melakukan perbandingan dari yang terbesar
   - $|\bar{y}_{IV} - \bar{y}_{III}| = |44,33 - 41,78| =$

     Tolak $H_0$ karena > $R_2$ (1,668), maka $\mu_{IV}$ berbeda dengan $\mu_{III}$ dan juga dengan $\mu$ di bawahnya

     $(\mu_{IV} \neq \mu_{III}, \mu_{IV} \neq \mu_{II}, \mu_{IV} \neq \mu_{I})$

   - $|\bar{y}_{III} - \bar{y}_{II}| = |41,78 - 35,44| = 6,34$

     Tolak $H_0$ karena > $R_2$ (1,668), maka $\mu_{III}$ berbeda dengan $\mu_{II}$ dan juga dengan $\mu$ di bawahnya ($\mu_{III} \neq \mu_{II}$, $\mu_{III} \neq \mu_{I}$)

   - $|\bar{y}_{II} - \bar{y}_{I}| = |35,44 - 31| = 4,44$

     Tolak $H_0$ karena > $R_2$ (1,668), maka $\mu_{II}$ berbeda dengan $\mu_{I}$ ($\mu_{II} \neq \mu_{I}$)

Jadi, kesimpulannya adalah semua jenis pupuk memiliki rata-rata yang berbeda.

Untuk uji Duncan pada faktor 2 dan interaksi dapat dilakukan dengan cara yang sama, hanya berbeda pada jumlah data dalam perhitungan $R_k$ ny

# Pertemuan 9

## Uji Proporsi Beberapa Populasi

Uji Proporsi Beberapa Populasi bertujuan untuk menguji kesamaan proporsi suatu karakteristik di semua populasi. Misalnya, proporsi rumah tangga yang mengolah sampah dapur menjadi pupuk adalah sama di semua kabupaten se-Bali.

Asumsi yang digunakan selama pengujian ini, terdiri atas: populasi yang diambil bersifat saling bebas; pemilihan sampel bersifat acak; nilai-nilai karakteristik dapat dikategorikan secara unik atau tidak tumpang tindih (*mutually exclusive*).

Pengujian dilakukan dengan statistik uji Chi-square. Terdapat perbedaan derajat bebas tabel karena kasus k populasi terdiri atas dua jenis pengujian:

1. Uji Proporsi k Populasi Binomial: dilakukan pada kasus yang memiliki dua kemungkinan hasil
2. Uji Proporsi k Populasi Multinomial: dilakukan pada kasus yang memiliki lebih dari dua kemungkinan hasil

**Pengujian k Populasi Binomial**

**A. Parameter Tidak Diketahui**

- Hipotesis

$H_0 : p_1 = p_2 = \ldots = p_k$ (semua populasi memiliki proporsi yang sama)

$H_1$ : Ada $p_j$ yang berbeda; j=1,2, … , k (sedikitnya ada satu proporsi yang tidak sama)

- Statistik Uji

  $$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r} \frac{(o_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

  Dengan:

  $o_{ij}$ = frekuensi teramati/observasi

  $\hat{e}_{ij}$ = estimasi frekuensi harapan

- Keputusan

  Tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha((r-1)(k-1))}$

- Tahapan Pengujian

1. Alokasi masing-masing observasi ke dalam tabel kontingensi berukuran 2 x k.
   Nilai observasi dinotasikan dengan dan $j$ = 1, …, k. $n_{ij}$ pada dasarnya sama dengan frekuensi observasi ($o_{ij}$)
2. Hitung nilai estimasi frekuensi harapan ($\hat{e}_{ij}$) untuk masing-masing sel dengan perhitungan:
   $$\hat{e}_{ij} = \frac{(Total\ Kolom)\ x\ (Total\ Baris)}{Total\ Pengamatan}$$
   $$\hat{e}_{ij} = \frac{(n_{i.})\ x\ (n_{.j})}{n}$$
3. Hitung statistik uji *Chi-Square* dan bandingkan dengan titik kritis pada tabel *Chi-Square*

**CONTOH SOAL**

Tentukan apakah dengan taraf nyata sebesar 5% terdapat perbedaan proporsi mahasiswa STIS di semua tingkat yang setuju terkait rencana pemindahan lokasi STIS ke Bogor berdasarkan 65 sampel berikut.

| | I | II | III | IV | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Setuju | 30 | 40 | 50 | 20 | 140 |
| Tidak Setuju | 35 | 25 | 15 | 45 | 120 |
| Total | 65 | 65 | 65 | 65 | 260 |

**JAWABAN**

- Hipotesis
  $H_0 : p_1 = p_2 = p_3$
  $H_1 : ada\ proporsi\ yang\ berbeda$
- Tingkat Signifikansi: $\propto\ =\ 5\%$
- Statistik Tabel
  Oleh karena r=2 dan k=4, derajat bebas didapat (r-1)(k-1)=3. Berdasarkan tabel chi-square, $\chi^2_{(0.05;3)} = 7.815$
- Statistik Uji

| $e_{ij}$ | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Setuju | 35 | 35 | 35 | 35 |
| Tidak Setuju | 30 | 30 | 30 | 30 |

$$\chi^2_{hitung} = \frac{(30-35)^2}{35} + ... + \frac{(45-30)^2}{30} = 30.95$$

- Keputusan
  $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$, maka terima $H_0$
- Kesimpulan

Dengan tingkat kepercayaan 5%, tidak cukup bukti untuk menyatakan bahwa proporsi mahasiswa STIS yang setuju adalah sama.

**B. Parameter Diketahui**

- Hipotesis
  $H_0 : p_1 = p_2 = ... = p_k = p$ (proporsi semua populasi sama dengan p)
  $H_1$ : ada $p_j$ yang berbeda; j = 1, 2, …, k
  (setidaknya ada satu proporsi yang tidak sama dengan p atau tidak semua proporsi sama dengan p)
- Statistik Uji
  $$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r}\frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$
  Dengan:
  $o_{ij}$ = frekuensi teramati/observasi
  $e_{ij}$ = frekuensi harapan
- Keputusan
  Tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha(k)}$
- Tahap Pengujian
  1. Alokasi masing-masing observasi ke dalam tabel kontingensi berukuran 2 x k.
     Nilai observasi dinotasikan dengan $n_{ij}$, $i$ = 1, ..., $r$ dan $j$ = 1, …, k. $n_{ij}$ pada dasarnya sama dengan frekuensi observasi ($o_{ij}$)
  2. Hitung nilai frekuensi harapan ($e_{ij}$) untuk masing-masing sel dengan perhitungan:
     $e_{ij} = total\ baris\ x\ parameter\ yan$ diketahui
  3. Hitung statistik uji *Chi-Square* dan bandingkan dengan titik kritis pada tabel *Chi-Square*

**CONTOH SOAL**

Sebuah survei dilakukan untuk mengetahui proporsi wisatawan domestik yang mengunjungi tiga destinasi wisata di Bali: Ubud, Kuta, dan Nusa Dua. Berdasarkan survei sebelumnya, proporsi wisatawan yang mengunjungi masing-masing destinasi diasumsikan sebagai berikut:

- Ubud: $p_1 = 0.4$
- Kuta: $p_2 = 0.35$
- Nusa Dua: $p_3 = 0.25$

Pada survei terbaru, dari 500 wisatawan domestik yang diwawancarai, hasil pengamatan menunjukkan:

- 220 orang memilih Ubud.
- 180 orang memilih Kuta.
- 100 orang memilih Nusa Dua.

Lakukan uji hipotesis proporsi dengan tingkat signifikansi 5% untuk menentukan apakah proporsi aktual wisatawan berbeda secara signifikan dari proporsi yang diharapkan.

**JAWABAN**

- Hipotesis
  $H_0: p_1 = 0.4;\ p_2 = 0.35;\ p_3 = 0.25$
  (Proporsi wisatawan untuk masing-masing destinasi tidak berbeda dari proporsi yang diharapkan)
  $H_1$: Proporsi wisatawan setidaknya untuk satu destinasi berbeda dari proporsi yang diharapkan.
- Tingkat Signifikansi: $\propto\ = 5\%$
- Statistik Tabel
  Oleh karena r=2 dan k=3, derajat bebas didapat (r-1)(k-1)=2. Berdasarkan tabel chi-square, $\chi^2_{(0.05;2)} = 5.991$
- Statistik Uji

| $e_{ij}$ | Ubud | Kuta | Nusa Dua |
|---|---|---|---|
| Memilih | 200 | 175 | 125 |

$$\chi^2_{hitung} = \frac{(220-200)^2}{200} + ... + \frac{(100-125)^2}{375} = 7.143$$

- Keputusan

  $\chi^2_{hitung} < \chi^2_{tabel}$, maka tolak $H_0$

- Kesimpulan
  Dengan tingkat kepercayaan 5%, terdapat cukup bukti untuk menyatakan bahwa proporsi wisatawan domestik yang mengunjungi Ubud, Kuta, dan Nusa Dua berbeda secara signifikan dari proporsi yang diharapkan.

**Pengujian k Populasi Multinomial**

**A. Parameter Tidak Diketahui**

- Hipotesis
  $H_0: p_{ij} = p_{im}\ ;\ i = 1, 2, ..., r;$
  $j, m = 1, 2, ..., k;\ j \neq m$
  (proporsi semua populasi di semua kategori amatan adalah sama)
  $H_1: Ada\ p_{ij}\ yang\ berbeda$
  (terdapat proporsi yang berbeda diantara populasi di kategori amatan tertentu)
- Prosedur
  1. Alokasikan masing-masing observasi ke dalam tabel kontingensi berukuran r x k dimana r adalah banyaknya kemungkinan hasil dan k adalah banyaknya populasi.
  2. Hitung nilai estimasi frekuensi harapan atau estimate expected value ($e\ ij$) untuk masing-masing sel, yang diperoleh dari perkalian total nilai baris i dan total nilai kolom ke j (total marginal) dibagi total observasi.
  3. Hitung statistik uji chi square dan bandingkan dengan titik kritis pada tabel chi square
- Statistik Uji

$$\chi^2_{hitung} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r} \frac{(O_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

- Keputusan

  Tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$

**CONTOH SOAL**

Tentukan apakah dengan level kepercayaan sebesar 95% proporsi siswa di tiga level satuan pendidikan adalah sama untuk siswa yang berasal dari Padang, Jawa, dan Sunda menurut tabel banyaknya siswa berikut.

| | Padang | Jawa | Sunda | Total |
|---|---|---|---|---|
| SD | 10 | 5 | 5 | 20 |
| SMP | 5 | 5 | 10 | 20 |
| SMA | 5 | 10 | 5 | 20 |
| Total | 20 | 20 | 20 | 60 |

**JAWABAN**

- Hipotesis
  $H_0: p_{11} = p_{12} = p_{13}; p_{21} = p_{22} = p_{23}$
  $H_1: ada\ proporsi\ yang\ berbeda$
- Tingkat Signifikansi: $\propto\ = 5\%$
- Statistik Tabel

Oleh karena r=k=3, derajat bebas didapat (r-1)(k-1)=4. Berdasarkan tabel chi-square, $\chi^2_{tabel} = 9.488$

- Statistik Uji

| $e_{ij}$ | Padang | Jawa | Sunda |
|---|---|---|---|
| SD | 6.67 | 6.67 | 6.67 |
| SMP | 6.67 | 6.67 | 6.67 |
| SMA | 6.67 | 6.67 | 6.67 |

$$\chi^2_{hitung} = \frac{3(10-6.67)^2}{6.67} + \frac{6(5-6.67)^2}{6.67} = 7.4499$$

- Keputusan

  $\chi^2_{hitung} < \chi^2_{tabel}$, maka terima $H_0$

- Kesimpulan

  Dengan tingkat kepercayaan 95% dapat dibuktikan bahwa proporsi siswa di tiga level satuan pendidikan adalah sama untuk siswa yang berasal dari Padang, Jawa, dan Sunda.

**B. Parameter Diketahui**

- Hipotesis

  $H_0: p_{i1} = p_{i2} = p_{i3} = p_{i.}$ , $i = 1, 2, 3$

  (Proporsi semua populasi di semua kategori pengamatan adalah sama)

  $H_1: Ada\ p_{ij}\ yang\ berbeda$

  (terdapat proporsi yang berbeda diantara populasi di kategori pengamatan tertentu)

- Statistik Uji

  $$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

  dengan $e_{ij}$ adalah :

  $$e_{ij} = (n_{.j})(p_{i.})\ di\ mana\ \sum_{i=1}^{r} p_{ij} = 1$$

- Keputusan

  Tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha(k(r-1))}$

- Tahap Pengujian
  1. Alokasi masing-masing observasi ke dalam tabel kontingensi berukuran rxk di mana r adalah banyaknya kemungkinan hasil/kategori, dan k adalah banyaknya populasi.
  2. Hitung nilai frekuensi harapan untuk masing-masing sel, yang diperoleh dari

     $$e_{ij} = (n_{.j})(p_{i.})\ di\ mana\ \sum_{i=1}^{r} p_{ij} = 1$$

  3. Hitung statistik uji *chi square* dan bandingkan dengan titik kritis pada tabel *chi square.*

**CONTOH SOAL**

1. Sebuah survei dilakukan untuk mengetahui apakah distribusi pengunjung ke tiga taman wisata kota sesuai dengan proporsi yang telah diasumsikan pemerintah. Tiga taman tersebut adalah Taman Edukasi, Taman Rekreasi, dan Taman Seni. Pemerintah mengasumsikan proporsi pengunjung sebagai berikut :
   - ☐ Taman Edukasi: 40% ($p_{ij} = 0,4$ )
   - ☐ Taman Rekreasi : 35% ( $p_{ij}$= 0,35 )
   - ☐ Taman Seni : 25% ( $p_{ij}$= 0,25 )

| Taman | Taman | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Senin | Rabu | Jumat | Minggu | Total |
| Edukasi | 100 | 120 | 150 | 180 | 550 |
| Rekreasi | 70 | 80 | 110 | 140 | 400 |
| Seni | 30 | 50 | 40 | 80 | 200 |
| Total | 200 | 250 | 300 | 400 | 1.150 |

Gunakan tingkat signifikansi 0,05

**JAWABAN**

a) Hipotesis

$H_0$ : Proporsi pengunjung untuk setiap taman sesuai dengan nilai yang diasumsikan.

$p_{ij} = 0,4\ (Edukasi)$

$p_{ij} = 0,35\ (Rekreasi)$

$p_{ij} = 0,25\ (Seni)$

$H_1$: *Setidaknya ada* $p_{ij}$ yang berbeda

b) Tingkat Signifikansi (α) = 5% (0,05)

c) Wilayah kritis

Tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{0,05(4(3-1))}$ atau tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{0,05(8)}$

$\chi^2_{tabel} = 15,507$

d) Menghitung statistik uji

| $e_{ij}$ | Hari | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Senin | Rabu | Jumat | Minggu |
| Edukasi | 80 | 100 | 120 | 160 |
| Rekreasi | 70 | 87,5 | 105 | 140 |
| Seni | 50 | 62,5 | 75 | 100 |

$$\chi^2_{hitung} = \frac{(100-80)^2}{80} + ... + \frac{(80-100)^2}{100} = 65,571$$

e) Keputusan

$\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$, maka tolak $H_0$

f) Kesimpulan

Dengan tingkat kepercayaan 95% dapat dibuktikan bahwa paling tidak terdapat satu proporsi pengunjung di tiga taman yang berbeda. Ada cukup bukti untuk menyimpulkan bahwa distribusi pengunjung ke Taman Edukasi, Taman Rekreasi, dan Taman Seni berbeda dari nilai yang diasumsikan oleh pemerintah

## Pertemuan 10

## Metode Statistika Nonparametrik pada Satu Kelompok Sampel

Uji statistik yang tidak memerlukan adanya asumsi-asumsi mengenai sebaran data populasi, sehingga tidak mensyaratkan bentuk sebaran parameter populasi berdistribusi normal disebut **juga free distribution.**

**1. Uji Tanda (Sign Test)**

Salah satu uji nonparametrik yang merupakan ide dasar yang mendasari mengubah data menjadi **tanda '+' dan '-'** digunakan untuk melakukan pengujian hipotesis:

- Satu kelompok sampel (One sample sign Test)
- Dua sampel berpasangan

a) Dengan asumsi:
- Contoh acak selang bebas dari populasi yang tidak diketahui median (M)
- Variabel yang diamati kontinu dan minimal berskala pengukuran ordinal

b) Hipotesis
- $H_0 : M = M_0$ vs. $H_1 : M \neq M_0$
- $H_0 : M \leq M_0$ vs. $H_1 : M > M_0$
- $H_0 : M \geq M_0$ vs. $H_1 : M < M_0$

c) Menghitung selisih ($x_i$) setiap data terhadap median

d) Menentukan tanda
- $x_i > M_0$ diberi tanda (+)
- $x_i < M_0$ diberi tanda (-)
- $x_i = M_0$ diberi tanda (0)

e) Menghitung jumlah tanda
- Tanda (+) □ m
- Tanda (-) □ n
- Tanda (0) □ dikeluarkan dari pengamatan

**A. Uji Tanda Satu Sampel**

**a. Uji Sampel Kecil ($N \leq 25$, $N = m + n$)**

- $H_0 : M = M_0$ vs. $H_1 : M \neq M_0$
  x = min (m,n)
  **Tolak $H_0$,** apabila **$P(X \leq x \mid b(N; 0,5)) \leq \frac{\alpha}{2}$**
- $H_0 : M \leq M_0$ vs. $H_1 : M > M_0$
  x = n
  **Tolak $H_0$,** apabila **$P(X \leq x \mid b(N; 0,5)) \leq \alpha$**
- $H_0 : M \geq M_0$ vs. $H_1 : M < M_0$
  x = m
  **Tolak $H_0$,** apabila **$P(X \leq x \mid b(N; 0,5)) \leq \alpha$**

**b. Uji Sampel Besar ($N > 25$, $N = m + n$)**

Statistik uji

$Z = \frac{x - \frac{N}{2}}{0,5\sqrt{N}}$ dengan faktor koreksi $Z = \frac{(x \pm 0,5) - \frac{N}{2}}{0,5\sqrt{N}}$

Jika x + 0,5, digunakan ketika x < 0,5N

Jika x – 0,5, digunakan ketika x > 0,5N

**Tolak $H_0$**, apabila $z_{hitung} > z_\alpha$

**B. Uji Tanda Data Berpasangan**

Digunakan untuk melihat **apakah ada perbedaan antara dua kondisi** tanpa melihat besarnya perbedaan yang terjadi, dan menggunakan data dengan skala ordinal.

a. **Uji Sampel Kecil (N ≤ 25, N = m + n)**

- $H_0 : p(X_a > X_b) = 0,5$ vs. $H_a : p(X_a > X_b) \neq 0,5$ atau $p(X_a < X_b) = 0,5$
  x = min (m,n)
  **Tolak $H_0$, apabila $P(X \leq x \mid b(N; 0,5)) \leq \frac{\alpha}{2}$**
- $H_0 : p(X_a > X_b) = 0,5$ vs. $H_1 : p(X_a > X_b) > 0,5$
  x = n
  **Tolak $H_0$**, apabila **$P(X \leq x \mid b(N; 0,5)) \leq \alpha$**
- $H_0 : p(X_a > X_b) = 0,5$ vs. $H_1 : p(X_a > X_b) < 0,5$
  x = m
  **Tolak $H_0$**, apabila **$P(X \leq x \mid b(N; 0,5)) \leq \alpha$**

b. **Uji Sampel Besar (N > 25, N = m + n)**

Menggunakan pendekatan distribusi normal, sehingga statistik ujinya adalah

$Z = \frac{(x \pm 0,5) - \mu}{\sigma}$ dengan

$\mu = 0,5N$ dan $\sigma = 0,5\sqrt{N}$

Catatan: x = banyaknya tanda + atau – (tergantung hipotesis)

**2. Uji Keacakan (Run Test)**

Uji runs adalah uji statistic yang digunakan untuk memeriksa apakah suatu data memiliki pola tertentu (non-random) atau jika data tersebut dihasilkan secara acak (random). Uji ini berfungsi untuk mengetahui keacakan (random) dari suatu data yang berasal dari sampel tunggal dan didasarkan pada urutan (order) observasi yang diperoleh. Sebagai contoh dalam pelemparan uang logam sebanyak 6 kali didapatkan hasil sebagai berikut (M: muka, B: belakang).

Hipotesisnya :

$H_0$: Kejadian yang diamati bersifat random

$H_1$: Kejadian yang diamati tidak random

- **Uji Sampel Kecil (m dan n ≤ 20)**
  Uji sampel kecil menggunakan Table run-G untuk $\alpha = 0,05$.
  N= m+n, dengan permisalan n merupakan satu kejadian dan m merupakan kejadian yang lain. Terdapat r yang merupakan banyaknya run.
  - Jika nilai r jatuh diantara nilai kritis tabel G $(F1 < r < F2)$ maka $H_0$ diterima
  - Jika nilai $r \leq F1$ atau $r \geq F2$, maka $H_0$ ditolak
- **Uji Sampel Besar (m atau n >20)**
  Untuk sampel besar, distribusi sampel R mendekati distribusi normal Z dengan rata-rata $\mu_r$ dan varian $\sigma_r^2$, Jika $H_0$ benar

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r}$$

Dimana $\mu_r = \frac{2mn}{m+n} + 1$ dan

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2mn(2mn-m-n)}{(m+n)^2(m+n-1)}}$$

Dengan menggunakan koreksi sebesar h sebagai berikut:

$$Z = \frac{(r+h) - \mu_r}{\sigma_r}$$

Jika $r < \left(\frac{2mn}{N}\right) + 1$, Maka h = 0.5 yang dimana $r < \mu$

Jika $r > \left(\frac{2mn}{N}\right) + 1$, Maka h = -0.5 yang dimana $r > \mu$

- Tolak $H_0$, jika $Z_{hit} \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ dan $Z_{hit} \geq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$
- Gagal Tolak $H_0$, jika $-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z_{hit} < Z_{\frac{\alpha}{2}}$

**Latihan Soal**

1. (Uji Run) Dari hasil pelemparan mata uang 13 kali, tersusun urutan hasil pelemparan sebagai berikut (M: muka, B: belakang) M M M B M B B M M M M B B Tentukan apakah urutan kemunculan mata uang random!

   $H_0$ : urutan data random

   $H_1$ : urutan data tidak random

   • α = 0,05, (2 arah)

   • r = 6, m = 8, n = 5

   • Pada tabel G (Siegel dan Castellan, 1988),, untuk α = 0,05, H0 akan ditolak jika nilai r ≤ 3, atau r ≥ 11.

   • Keputusan: karena r =6 terletak dalam selang 3 sampai dengan 11 , maka Gagal tolak $H_0$

   • Kesimpulan: Urutan data random.

2. (Uji Sign) Menjelang mulainya tahun ajaran baru, fenomena yang tidak biasa terjadi di ruangan perpustakaan STIS. Mahasiswa jurusan komputasi statistik khususnya tingkat IV banyak berkeliaran di perpustakaan. Entah apa yang dikerjakan, mencari buku statistik, membaca jurnal, atau hal lainnya. Kuat dugaan bahwa mahasiswa komputasi statistik sedang mencari referensi untuk membuat tugas akhir yaitu skripsi. Salah satu petugas perpustakaan mengatakan bahwa terjadi peningkatan jumlah kunjungan perpustakaan khususnya pengunjung dari mahasiswa STIS Angkatan 51 jurusan komputasi statistik. Berikut adalah data jumlah kunjungan mahasiswa jurusan komputasi statistik angkatan 51 pada semester 6 dan semester 7. Ujilah apakah ada Jumlah kunjungan semester 7 lebih banyak semester 6 dengan menggunakan uji sign!

| No. | No. Absen | Kelas | Jumlah Kunjungan SMT 6 | Jumlah Kunjungan SMT 7 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4KS1 | 2 | 24 |
| 2 | 8 | 4KS1 | 5 | 21 |
| 3 | 12 | 4KS1 | 10 | 15 |
| 4 | 13 | 4KS1 | 12 | 20 |
| 5 | 14 | 4KS1 | 14 | 20 |
| 6 | 20 | 4KS1 | 24 | 25 |
| 7 | 27 | 4KS1 | 3 | 40 |
| 8 | 1 | 4KS2 | 11 | 12 |
| 9 | 3 | 4KS2 | 23 | 23 |
| 10 | 4 | 4KS2 | 26 | 25 |
| 11 | 6 | 4KS2 | 21 | 20 |
| 12 | 19 | 4KS2 | 18 | 15 |
| 13 | 27 | 4KS2 | 13 | 23 |
| 14 | 31 | 4KS2 | 19 | 22 |

Hipotesis:

$H_0$ : Jumlah kunjungan ke perpustakaan dari mahasiswa komputasi statistik STIS Angkatan 51 pada semester 6 sama dengan semester 7

$H_1$ : Jumlah kunjungan ke perpustakaan dari mahasiswa komputasi statistik STIS Angkatan 51 pada semester 7 lebih besar dari semester 6

| No. | No. Absen | Kelas | Jumlah Kunjungan SMT 6 | Jumlah Kunjungan SMT 7 | Tanda |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4KS1 | 2 | 24 | + |
| 2 | 8 | 4KS1 | 5 | 21 | + |
| 3 | 12 | 4KS1 | 10 | 15 | + |
| 4 | 13 | 4KS1 | 12 | 20 | + |
| 5 | 14 | 4KS1 | 14 | 20 | + |
| 6 | 20 | 4KS1 | 24 | 25 | + |
| 7 | 27 | 4KS1 | 3 | 40 | + |
| 8 | 1 | 4KS2 | 11 | 12 | + |
| 9 | 3 | 4KS2 | 23 | 23 | 0 |
| 10 | 4 | 4KS2 | 26 | 25 | - |
| 11 | 6 | 4KS2 | 21 | 20 | - |
| 12 | 19 | 4KS2 | 18 | 15 | - |
| 13 | 27 | 4KS2 | 13 | 23 | + |
| 14 | 31 | 4KS2 | 19 | 22 | + |

Dari 14 sampel diperoleh :

Tanda (+) = 10

Tanda (-) = 3

Tanda (0) = 1

Dari informasi di atas maka N=13 (tanda 0 tidak diikutsertakan) dan x=3 (kejadian bersama-sama tanda + atau – yang terkecil)

Karena sampel kurang dari 25 maka digunakan distribusi binomial : Dengan

$N = 13,\ x = 3,\ p = 0,5$ diperoleh
$p - value = 0,046$
Karena p-value > α (0,05) maka keputusan adalah tolak $H_0$

Kesimpulan : Jumlah kunjungan perpustakaan mahasiswa STIS Angkatan 51 jurusan komputasi statistic pada semester 7 lebih besar dari semester

## Pertemuan 11

## Metode Statistik Nonparametrik pada Dua Kelompok Sampel

**Wilcoxon Signed Rank Test**
Wilcoxon Signed Rank Test adalah uji nonparametris untuk mengukur signifikansi perbedaan antara 2 kelompok data berpasangan berskala ordinal atau interval tetapi berdistribusi tidak normal. Uji Wilcoxon Signed Rank Test merupakan uji alternatif dari uji pairing t test atau t –paried test apabila tidak memenuhi asumsi normalitas.

- Hipotesis
  1. Uji Dua Arah
     $H_0 : M_D = 0$
     $H_1 : M_D \neq 0$
  2. Uji Satu Arah (kanan)
     $H_0 : M_D \geq 0$
     $H_1 : M_D < 0$
  3. Uji Satu Arah (kiri)
     $H_0 : M_D \leq 0$
     $H_1 : M_D > 0$
- Prosedur
  1. Hitung selisih dua perlakuan X dan Y ($di = Xi - Yi$)
  2. Urutkan/ranking dari yang terkecil hingga terbesar, rank : $|di| = |Xi - Yi|$
  3. Beri tanda '+' atau '-' pada ranking yang sesuai dengan tanda '+' dan '-' pada $d_i$
  4. Hitung T+ (jumlah dari barisan dengan tanda positif) dan T-(jumlah dari barisan dengan tanda negatif)
  5. Tentukan nilai N yaitu banyaknya nilai $d_i$ yang bukan nol. Apabila N ≤ 25 => sampel kecil, jika N > 25 => sampel besar
- Statistik Uji
  1. Sampel kecil ($N \leq 25$)
     Statistik uji:
     a) "T" adalah total dari nilai absolut peringkat untuk kelompok dengan jumlah yang diharapkan lebih kecil.
        - Gunakan hipotesis alternatif untuk menentukan kelompok dengan jumlah yang diharapkan lebih kecil.
        - Untuk uji dua sisi, cukup pilih jumlah yang paling kecil.
     b) T+ = jumlah dari barisan dengan tanda-tanda positif
     c) T- = T+ = jumlah dari barisan dengan tanda-tanda negatif

     **Wilayah kritis:**
     Tolak $H_0$ ketika : $T \leq Ttabel$ atau
     $Pvalue \leq \frac{\alpha}{2}\ (untuk\ dua\ arah)$ atau
     $Pvalue \leq \alpha\ (untuk\ satu\ arah)$
  2. Sampel besar(N > 25)
     Statistik uji : jika anngka atau nilai berpasangan (N) lebih besar dari 25, maka pendekatan distribusi normal atau uji Z dapat digunakan
     $Mean = \mu_T = \frac{N(N+1)}{4}$

$Standar\ Deviasi\ =\ \sigma_T =$

$$\sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{24}}$$

$$Z\ =\ \frac{T-\mu_T}{\sigma_T}$$

**Wilayah kritis :**

Uji satu sisi (one-tailed):

a) Uji Satu Arah (kanan)
   Tolak $H_0$ jika $Z\ >\ Z_\alpha$

b) Uji Satu Arah (kiri)
   Tolak $H_0$ jika $Z <- Z_\alpha$

c) Uji dua arah
   Tolak $H_0$ jika $Z\ >\ Z_{\alpha/2}$
   Atau $Z <- Z_{\alpha/2}$

**CONTOH SOAL**

1. Seorang Bidan ingin melakukan penelitian ingin melihat pengaruh dari penggunaan KB Implan. 10 orang pasien yang diambil secara acak dan di periksa kondisi tubuh masing-masing sebelum dan sesudah penggunaan KB implant tersebut. ujilah dengan taraf nyata 5% apakah terdapat perbedaan sebelum dan sesudah menggunakan KB Implan

| **Pasien** | **Sebelum** | **Sesudah** |
|---|---|---|
| A | 28 | 27 |
| B | 14 | 24 |
| C | 32 | 29 |
| D | 30 | 28 |
| E | 23 | 15 |
| F | 20 | 26 |
| G | 16 | 27 |
| H | 28 | 25 |

**JAWABAN**

a) Hipotesis
   Ho : Tidak ada perbedaan sebelum dan sesudah menggunakan KB Implan
   H1 : Ada perbedaaan sebelum dan sesudah menggunakan KB Implan

b) Tingkat Signifikansi (α) = 0,05

c) Wilayah kritis
   Titik kritis tabel G dengan N = 8 dan α = 0,05 adalah 4
   Tolak H0 apabila T < 4

d) Menghitung statistik uji W (statistik uji Wilcoxon)

| **Pasien** | **Sebelum** | **Sesudah** | **di** | **Rank** |
|---|---|---|---|---|
| A | 28 | 27 | 1 | 1 |
| B | 14 | 24 | -10 | 7 |
| C | 32 | 29 | 3 | 2.5 |
| D | 30 | 28 | 2 | 2 |
| E | 23 | 15 | -8 | 6 |
| F | 20 | 26 | -6 | 5 |
| G | 16 | 27 | -11 | 8 |
| H | 28 | 25 | 3 | 2.5 |

| **Rank (+)** | **Rank (-)** |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2.5 | 6 |
| 2 | 5 |
| 2.5 | 8 |
| | 7 |
| | |
| | |
| | |
| T1 =8 | T2=30 |

Untuk melihat nilai uji statistiknya yaitu dari nilai terkecil dari nilai tersebut yaitu tanda positif. Sehingga dipilih T = 8

e) Keputusan
   Berdasarkan hasil tersebut diperoleh hasil bahwa nilai uji statistik ≥ dari t tabel. yaitu 8 ≥ 4. sehingga berdasarkan kriteria pengujian diperoleh hasil H0 dterima.

f) Kesimpulan
   Dengan tingkat signifikansi sebesar 5% dapat disimpulkan bahwa tidak ada perbedaan antara sebelum dan sesudah pasien menggunakan KB Implan.

**Mann Whitney U Test**

Uji Mann Whitney U digunakan untuk membandingkan dua sampel yang tidak berhubungan atau independen. Uji U digunakan untuk mengetahui apakah dua kelompok sampel berasal dari populasi yang sama. Skala data minimal **ordinal** untuk dua sampel independent.

- Hipotesis
  1. Uji Dua Arah
     $H_0: M_1 = M_2$
     $H_1: M_1 \neq M_2$
  2. Uji Satu Arah (kanan)
     $H_0: M_1 \geq M_2$
     $H_1: M_1 < M_2$
  3. Uji Satu Arah (kiri)
     $H_0: M_1 \leq M_2$
     $H_1: M_1 > M_2$
- Prosedur
  1. Gabungkan hasil observasi menjadi satu.
  2. Urutkan gabungan data tersebut dari nilai terkecil ke terbesar.
  3. Berikan ranking pada data gabungan tersebut.
  4. Pisahkan kembali menjadi dua sampel dengan cara mencirikan asal data.
  5. Jumlahkan raking untuk setiap sampel.
  6. Hitunglah statistik U (U observasi).
  7. Pilih U terkecil.
  8. Tentukan statistic uji berdasarkan jumlah $n_2$ (jumlah sampel terbesar).
- Statistik Uji
  1. Sampel sangat kecil ($n_2 < 9$)

     Wilayah kritis :
     a) Gunakan table J pada table Mann Whitney untuk memperoleh p-value.
     b) Bandingkan p-value dengan alpha.
     c) **Tolak** $H_0$ jika p-value < alpha (α).
  2. Sampel kecil ($9 \leq n_2 \leq 20$)

     Wilayah kritis :
     a) Gunakan table K pada table Mann Whitney untuk memperoleh titik kritis (U tabel).
     b) Bandingkan U observasi dengan U tabel.
     c) **Tolak** $H_0$ jika U observasi ≤ U tabel.

     $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1$

     $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2$

     dengan, $U_1 + U_2 = n_1 n_2$

     .Keterangan :

     $\sum R_1 =$ jumlah ranking dari sampel 1

     $\sum R_2 =$ jumlah ranking dari sampel 2

     $U$ = nilai terkecil dari $U_1$ dan $U_2$ adalah U observasi
  3. Sampel besar ($n_2 > 20$)

     Wilayah kritis :
     a) Gunakan tabel Z untuk memperoleh p-value.
     b) Bandingkan p-value dengan alpha.
     c) **Tolak** $H_0$ jika p-value < alpha (α).

     Langkah-langkah :
     a) Gunakan rumus pada sampel kecil untuk mendapatkan statistic uji U.
     b) Seiring dengan bertambahnya ukuran $n_1$ dan $n_2$ maka distribusi U semakin mendekati normal, dengan

     $Mean = \mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$

     $Standar\ deviation = \sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$

     $z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$

**CONTOH SOAL**

1. Pengawas dari SD Budi Mulia di Kota Malang ingin melakukan penelitian untuk mengetahui perbedaan kinerja guru tetap dan guru tidak tetap. Sampel acak dipilih sebanyak 20 guru yang masing-masing terdiri dari 10 guru tetap dan 10 guru tidak tetap. Kinerja diukur oleh pengawas dan kepala sekolah SD Budi Mulia melalui total dari aspek penilaian yang telah dibuat dengan skala 0-100. Berikut data hasil penelitian :

| Guru Tidak Tetap (GTT) | Skor Kinerja | Guru Tetap (GT) | Skor Kinerja |
|---|---|---|---|
| A | 70 | K | 50 |
| B | 75 | L | 45 |
| C | 80 | M | 55 |
| D | 65 | N | 65 |
| E | 80 | O | 75 |
| F | 60 | P | 80 |
| G | 95 | Q | 85 |
| H | 90 | R | 80 |
| I | 100 | S | 90 |
| J | 70 | T | 100 |

**JAWABAN**

1. Berikut langkah-langkahnya
   a) Hipotesis

      $H_0$ : Tidak terdapat perbedaan yang signifikan dalam skor kinerja antara guru tidak tetap dan guru tetap di SD Bina Mulia ($M_{GTT} = M_{GT}$).

      $H_1$ : Terdapat perbedaan yang signifikan dalam skor kinerja antara guru tidak tetap dan guru tetap di SD Bina Mulia ($M_{GTT} \neq M_{GT}$).

   b) Tingkat Signifikansi (α) = 0,05

   c) Tabel ranking

| **GTT** | **rank** | **GT** | **rank** |
|---|---|---|---|
| A | 7,5 | K | 2 |
| B | 9,5 | L | 1 |
| C | 12,5 | M | 3 |
| D | 5,5 | N | 5,5 |
| E | 12,5 | O | 9,5 |
| F | 4 | P | 12,5 |
| G | 18 | Q | 15 |
| H | 16,5 | R | 12,5 |
| I | 19,5 | S | 16,5 |
| J | 7,5 | T | 19,5 |
| $\sum R_{GTT}$ | **113** | $\sum R_{GT}$ | **97** |

**Keterangan :**

$R_{GTT} = R_1$ dan $R_{GT} = R_2$

   d) Statistik Uji

   - Guru Tidak Tetap (GTT)

     $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \sum R_1$

     $U_1 = (10 \, x \, 10) + \frac{10(10+1)}{2} - 113$

     $U_1 = 42$

   - Guru Tetap (GT)

     $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \sum R_2$

     $U_2 = (10 \, x \, 10) + \frac{10(10+1)}{2} - 97$

     $U_2 = 58$

   - U observasi merupakan U terkecil antara $U_1$ dan $U_2$ maka

     $U_{obs} = 42$

   e) Wilayah Kritis

      $U_{tabel} = 27$

      $U_{obs} = 42 > U_{tabel} = 27$

   f) Keputusan

      **Gagal Tolak** $H_0$

   g) Kesimpulan

Dengan tingkat signifikansi sebesar 5% dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat perbedaan yang signifikan dalam skor kinerja guru tidak tetap dan guru tetap di SD Bina Mulia.

**Kolmogorov-Smirnov**

Uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk membandingkan distribusi dua sampel yang tidak berhubungan atau independen. Uji ini juga membawa nama Kolmogorov karena kemiripannya dengan uji satu-sampel yang dikembangkan oleh Kolmogorov (1933). Uji ini bertujuan untuk mengetahui apakah kedua kelompok sampel berasal dari distribusi yang sama dan untuk ukuran sampel yang lebih kecil ($n \leq 100$). Skala data minimal ordinal untuk dua sampel independen.

- Hipotesis
  1. Uji Dua Arah
     $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$
     $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$
  2. Uji Satu Arah (kanan)
     $H_0 : F_1(x) \geq F_2(x)$
     $H_1 : F_1(x) < F_2(x)$
  3. Uji Satu Arah (kiri)
     $H_0 : F_1(x) \leq F_2(x)$
     $H_1 : F_1(x) > F_2(x)$
- Prosedur
  1. Tentukan hipotesis nol ($H_0$) bahwa distribusi kedua sampel adalah sama, dan hipotesis alternatif ($H_1$) bahwa distribusi kedua sampel berbeda.
  2. Kumpulkan data dari kedua sampel yang independen dengan skala minimal ordinal.
  3. Gabungkan dan urutkan data dari kedua sampel dari yang terkecil hingga terbesar.
  4. Hitunglah distribusi kumulatif empiris ($F_1(x)\ dan\ F_2(x)$) untuk masing masing sampel.
  5. Hitung statistic uji dengan
     $D = |F_1(x) - F_2(x)|$
  6. Tentukan nilai kritis dari tabel Kolmogorov-Smirnov berdasarkan ukuran sampel.
  7. Bandingkan nilai D dengan nilai kritis
  8. Ambil kesimpulan dan interpretasi apakah distribusi kedua sampel berbeda atau sama
- Statistik Uji
  1. Uji statistik
     $S_1(x)$ dan $S_2(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari sampel
     a) Dua arah
        $D = maks|F_1(x) - F_2(x)|$
     b) Satu arah
        $D = maks\ |F_1(x) - F_2(x)|$
     c) Satu arah
        $D = maks|F_2(x) - F_1(x)|$
  2. Wilayah kritis
     Wilayah kritis :
     a) Gunakan tabel L jika $n_1$ atau $n_2 \leq 40$, $n_1 = n_2$
     b) Gunakan tabel Li dan Lii (siegel & castellan) jika $n_1$ atau $n_2 \leq 25$, $n_1 \neq n_2$
     c) Gunakan Tabel M Jika $n_1$ atau $n_2 > 40$ untuk uji 2 arah.
     d) Pendekatan Chisquare (db=2) > 25 untuk uji 1 arah

**CONTOH SOAL**

1. Suatu inspeksi sanitasi rumah telah dilakukan terhadap rumah tipedan rumah tipe 36 didapatkan data sebagai berikut:

| Skor Sanitasi Rumah T45 | Skor Sanitasi Rumah T45 |
|---|---|
| 23 | 28 |
| 43 | 50 |
| 46 | 36 |
| 34 | 32 |

| | |
|---|---|
| 33 | 44 |
| 28 | 51 |
| 45 | 40 |
| 49 | 37 |
| 52 | 35 |
| 38 | 42 |

Selidikilah dengan α = 5 %, apakah score sanitasi kedua tipe rumah sama?

**JAWABAN**

1. Berikut langkah-langkahnya
   a) Hipotesis

      $H_0$ : Tidak terdapat perbedaan yang signifikan dalam skor sanitasi antara rumah tipe 45 dan tipe 46

      $H_1$ : Terdapat perbedaan yang signifikan dalam skor sanitasi antara rumah tipe 45 dan tipe 46.

   b) Tingkat Signifikansi (α) = 0,05

   c) Tabel Skor Sanitasi

| Skor Sanitasi Rumah | | | |
|---|---|---|---|
| Interval | Tipe 45 | Tipe 46 | \| F1(x) – F2(x)\| |
| 23-27 | 0,1 | 0 | 0,1 |
| 28-32 | 0,2 | 0,2 | 0 |
| 33-37 | 0,4 | 0,5 | 0,1 |
| 38-42 | 0,5 | 0,7 | 0,2 |
| 43-47 | 0,8 | 0,8 | 0 |
| 48-52 | 1 | 1 | 0 |

   d) Statistik Uji

      Nilai maks = 0,2 sehingga KD = 2

   e) Nilai tabel

      tabel D α = 5%, dua sisi, n=10, nilai tabel = 7

   f) Daerah Penolakan

      $|2| < |7|$ Ho; diterima

   g) Keputusan

      **Gagal Tolak** $H_0$

   h) Kesimpulan

      Dengan tingkat signifikansi sebesar 5% dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat perbedaan yang signifikan dalam skor sanitasi antara rumah tipe 45 dan rumah tipe 4

# Pertemuan 12

## Metode Statistika Nonparametrik Lebih dari Dua Kelompok Sampel

### A. Kruskal Wallis One Way Analysis of Variance By Ranks Test

- Kruskal Wallis merupakan alternatif pengujian menggunakan ANOVA One Way apabila asumsi kenormalan tidak terpenuhi.
- Menguji apakah k-sampel independen berasal dari populasi yang identik dengan cara menguji kesamaan beberapa nilai tengah.
- Skala pengukuran data minimal adalah ordinal
- Hipotesis

  $H_0$: $M_1=M_2=M_3=\cdots=M_k$, atau (k kelompok memiliki distribusi populasi yang sama), atau(median peringkat antar kelompok sama)

  Ha: $M_i \neq M_j$, atau (minimal ada satu kelompok tidak memiliki distribusi populasi yang sama), atau(minimal ada satu kelompok yang memiliki median peringkat yang berbeda

1. **Prosedur Pengujian**

Data Awal:

| Kelompok Sampel | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | … | i | … | k |
| $y_{11}$ | $y_{12}$ | … | $y_{1j}$ | … | $y_{1k}$ |
| $y_{21}$ | $y_{22}$ | … | $y_{2j}$ | … | $y_{2k}$ |
| : | : | : | : | : | : |
| $y_{n_1 1}$ | $y_{n_2 2}$ | … | $y_{n_j j}$ | … | $y_{n_k k}$ |

a) Semua observasi dari k sampel independent digabungkan dan susunlah $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ pengamatan itu dari yang terkecil sampai yang terbesar

b) tentukan peringkatnya masing-masing observasi.

c) Untuk nilai observasi yang sama, berikan peringkat rata ratanya.

d) Setelah semua observasi selesai diranking, jumlahkan rangking dalam setiap kelompok sampel. Lambangkan jumlah peringkat ke-i dengan $R_i$

2. **Statistik Uji Kruskal-Wallis (H)**

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

- n = total observasi darisemua kelompok sampel = $\sum_{i=1}^{k} n_i$
- k = banyaknya kelompok sampel
- $R_i$ = jumlah ranking observasi pada setiap kelompok sampel ke-i
- $n_i$ = banyaknya observasi pada kelompok ke-i

Statistik H dapat dihampiri dengan sangat baik oleh sebaran Chi-square dengan k-1 derajat bebas bila $H_0$ benar dan bila setiap kelompok terdiri dari minimal 5 observasi.

3. **Kaidah Pengambilan Keputusan:**

- Untuk setiap ***ni*** **⩽5 dan k=3**

  Tolak $H_0$ jika:

  $H_{hit} > H_{tabel}$ (Tabel Kuskall Wallis), atau Tolak Ho jika p-value ⩽ α

- Jika Tabel Kruskall Wallis tidak dapat digunakan, atau jika minimal pada suatu kelompok $\boldsymbol{n_i > 5}$ **atau k ≠3 maka**

  Tolak $H_0$ jika:

  $H_{hit} > \chi^2_{k-1}(\alpha)$ dengan derajat bebas v = k-1

**Ranking Kembar (Tied Observation)**

Ketika terdapat nilai yang sama, maka nilai yang sama tersebut diberi rangking rata-rata. Untuk mengoreksi pengaruh rangking yang sama, maka penghitungan H menggunakan faktor koreksi menjadi:

$$H^* = \frac{H}{1 - \frac{\sum_{i=1}^{g}(t_i^3 - t_i)}{n^3 - n}}$$

g = banyaknya kelompok ranking yang sama

$t_i$ = banyaknya ranking yang kembar di kelompok ke-i

n = total sampel

**Prosedur Perbandingan berganda untuk Kruskall Wallis**

Ketika hasil yang didapat setelah Uji Kruskall Wallis adalah Tolak $H_0$ perlu dilakukan Uji Dunn yaitu meyelidiki median kelompok mana yang berbeda dengan prosedur perbandingan berganda uji Kruskall-Wallis

Hipotesis

$H_0$: $M_i$=$M_j$

Ha: $M_i \neq M_j$

Tolak $H_0$ jika :

$$\left|\overline{R}_i - \overline{R}_j\right| > Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}} \sqrt{\frac{n(n+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

Jika terdapat ties, Tolak $H_0$ jika :

$$\left|\overline{R}_i - \overline{R}_j\right| > Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}} \sqrt{\frac{n(n+1) - \sum_{i=1}^{g}(t_i^3 - t_i)}{12(n-1)}\left(\frac{1}{n_i} \cdot\right.}$$

$\overline{R}_i\ dan\ \overline{R}_j$ adalah rata-rata peringkat untuk perlakuan ke-i dan ke-j.

## Contoh Soal

1. Tiga mesin yang berbeda sedang dipertimbangkan untuk digunakan dalam pembuatan tutup yang terbuat dari karet. Yang menjadi bahan pertimbangan adalah kekuatan renggangan produk yang dihasilkannya. Suatu contoh acak diambil dari setiap mesin untuk digunakan untuk menentukan apakah kekuatan regangan tutup karet yang dihasilkan itu bervariasi dari mesin ke mesin. (Asumsikan bahwa data tidak memenuhi distribusi normal). Data yang diperoleh adalah sebagai berikut:

| **Mesin 1** | **Mesin 2** | **Mesin 3** |
|---|---|---|
| 36 | 50 | 62 |
| 45 | 50 | 90 |
| 59 | 40 | 45 |
| 61 | 77 | 70 |
| | 60 | 90 |
| | 45 | |

**Jawaban**

1. Berikut langkah-langkahnya

- Merumuskan Hipotesis

  $H_0$: $M_1$=$M_2$=$M_3$(Tidak ada perbedaan kekuatan renggangan penutup karet yang dihasilkan ketiga mesin)

  Ha: $Mi \neq Mj$ (Minimal ada satu mesin yang menghasilkan kekuatan renggangan penutup karet yang berbeda)

- Tingkat signifikansi α=0,05
- Wilayah Kritis

  Dengan a= 5 % dan v= 3-1 = 2, Tolak $H_0$ bila

  $H_{hitung}$ > $\chi^2_{3-1(0,05)} = 5,991$ (lihat tabel Chi Square).

- Menghitung Statistik Hitung Kruskal Wallis:

| Perlakuan | Kelakuan Renggangan | Ranking | |
|---|---|---|---|
| Mesin 1 | 36 | 1 | $n_1$ = 4<br>$r_1$ = 1+4+8+10 = 23 |
| | 45 | 4 | |
| | 59 | 8 | |
| | 61 | 10 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mesin 2 | 50 | 6,5 | $n_2 = 6$ |
| | 50 | 6,5 | $r_2 =$ |
| | 40 | 2 | 6,5+6,5+2+1 |
| | 77 | 13 | 3+9+4 = 41 |
| | 60 | 9 | |
| | 45 | 4 | |
| Mesin 3 | 62 | 11 | $n_3 = 5$ |
| | 90 | 14,5 | $r_3 =$ |
| | 45 | 4 | 11+14,5+4+1 |
| | 70 | 12 | 2+14,5 = 56 |
| | 90 | 14,5 | |
| k = 3 | | | $n = n_1+n_2+n_3 = 15$ |

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n + 1)$$

$$H = \frac{12}{15(15+1)} \left( \frac{23^2}{4} + \frac{41^2}{6} + \frac{56^2}{5} \right) - 48 = 3,$$

Karena ada peringkat yang sama, maka dihitung faktor koreksi:

$$t_1 = 3(4\ ada\ 3)$$

$$t_2 = 2(6,5\ ada\ 2)$$

$$t_2 = 2(14,5\ ada\ 2)$$

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^{g} \left(t_i^3 - t_i\right)}{n^3 - n} = 1 - \frac{24+6+6}{15^3 - 15} = 1 - 0,0167$$

Sehingga:

$$H^* = \frac{3,9808}{0,9833} = 4,048$$

- Keputusan

  Karena $H_{hitung} < 5,991$, maka gagal tolak $H_0$,

- Kesimpulan

  Jadi belum cukup bukti untuk menunjukkan bahwa ada perbedaan kekuatan renggangan penutup karet yang dihasilkan oleh ketiga mesin tersebut.

**Friedman Two Way Analysis of Variance By Ranks**

- Alternatif dari uji ANOVA Two way, ketika asumsi kenormalan Ingin dihindari atau tidak terpenuhi.
- Menguji apakah k kelompok sampel dependen/related memiliki distribusi populasi yang sama
- kala pengukuran data minimal adalah ordinal

**1. Asumsi:**

a) Data terdiri dari n kelompok sampel yang saling bebas dengan k perlakuan

b) Tidak ada interaksi antara kelompok dan perlakuan

**2. Prosedur Pengujian**

- Hipotesis
  - $H_0$ : $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$ ,atau (k perlakuan memiliki distribusi populasi yang identik), median peringkat untuk semua perlakuan adalah sama.
  - Ha : $Mi \neq Mj$ , minimal ada satu median perlakuan yang berbeda

- Data Awal

| Kelompok | Treatment | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | II | II | III | … | k |
| Kelompok 1 | | | | | |
| … | | | | | |
| Kelompok ke-n | | | | | |

| | R1 | R2 | R3 | … | Rj |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

- Bentuk data dalam bentuk tabel dua arah, baris adalah observasi, kolom adalah jenis perlakuan yang menyebabkan terbentuknya kelompok
- Tentukan peringkat masing masing observasi berdasarkan nilai observasi atau pada keseluruhan kategori perlakuannya (i=1, 2,...,k),k adalah total kategori perlakuan atau jumlah kelompok perlakuan
- Untuk nilai observasi yang sama, berikan peringkat rata-ratanya.
- Setelah semua observasi selesai diranking, jumlahkan rangking dalam setiap kategori perlakuan/kelompok. Lambangkan jumlah peringkat perlakuan ke-i dengan Ri.
- Statistik Uji

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i-1}^{k} (R_i)^2 - 3n(k+1)$$

n = total observasi pada setiap kelompok perlakuan
k = banyaknya kelompok/kategori perlakuan
$R_i$ = jumlah ranking seluruh observasi pada setiap kelompok sampel ke-i

$\chi_r^2$ menghampiri distribusi $\chi^2_{\alpha,k-1}$ dengan derajat bebas k-1.

### 3. Kaidah Pengambilan Keputusan

a) Gunakan tabel friedman Two Way ANOVA by Rank di buku Sydney, jika:
   - **2 ≤ *n* ≤ 9 dan k = 3**
   - **2 ≤ *n* ≤ 4 dan k = 4**
   - Tolak $H_0$ jika $\chi_r^2$ > Tabel Friedman two way Anova By Ranks

b) Gunakan Tabel Chi Square, jika n dan k tidak tercakup pada tabel Friedman di buku Sydney
   - Tolak Ho jika: $\chi_r^2 > \chi_v^2(\alpha)$ dengan derajat bebas v = k-1

### 4. Ranking Kembar

Ketika terdapat nilai yang sama, maka nilai yang sama tersebut diberi rangking rata-rata. Untuk mengoreksi pengaruh rangking yang sama, maka penghitungan H menggunakan faktor koreksi menjadi:

$$\chi_r^2(corrected) = \chi_r^2 \frac{nk(k^2-1)}{nk(k^2-1) - \sum_{i=1}^{g}(t_i^3 - t_i)}$$

g = banyaknya kelompok peringkat yang sama
$t_i$ = banyaknya ranking yang kembar di kelompok ke-i
n = total sampel

### 5. Prosedur Perbandingan berganda untuk Friedman Test

Ketika hasil yang didapat setelah Uji Friedman Test adalah **Tolak $H_0$** perlu dilakukan Uji Dunn yaitu meyelidiki median kelompok mana yang berbeda dengan prosedur perbandingan berganda uji Kruskall-Wallis

Hipotesis

$H_0$: $M_i = M_j$

Ha: $M_i \neq M_j$

Tolak $H_0$ jika :

$$\left| R_i - R_j \right| > Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}} \sqrt{\frac{nk(k+1)}{6}}$$

$R_i$ *dan* $R_j$ adalah jumlah peringkat kelompok perlakuan ke-I dan ke-j.

**Contoh Soal**

Ingin diketahui apakah gandum yang diberikan perlakuan pupuk yang berbeda-beda dapat menyebabkan produksi gandum yang berbeda juga. Untuk menguji efek perlakuan pupuk tersebut diambil 4 kelompok varitas gandum yang diberikan ketiga perlakuan pupuk tersebut. Gunakan tingkat signifikansi 5% untuk mengujinya, dan diasumsikan data tidak memenuhi asumsi kenormalan.

| Varitas Gandum | Pupuk 1 | Pupuk 2 | Pupuk 3 |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | 89 | 75 | 81 |
| $f_2$ | 92 | 72 | 73 |
| $f_3$ | 95 | 79 | 88 |
| $f_4$ | 79 | 75 | 85 |

**Jawaban**

Hipotesis

- $H_0$: $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, Perlakuan pemberian pupuk yang berbeda tidak berpengaruh pada hasil produksi gandum
- $H_1$: $M_i \neq M_j$ ,Perlakuan pemberian pupuk yang berbeda memberikan hasil gandum yang berbeda

n  jenis varietas  ada 4,
k  jenis perlakuan pupuk  3,
menggunakan Tabel N pada buku Sidney Siegel,

| Varitas Gandum | Pupuk 1 (rank) | Pupuk 2 (rank) | Pupuk 3 (rank) |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | 3 | 1 | 2 |
| $f_2$ | 3 | 1 | 2 |
| $f_3$ | 3 | 1 | 2 |
| $f_4$ | 2 | 1 | 3 |
| $R_i$ | 11 | 4 | 9 |

$$\chi_r^2 = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i-1}^{k} (R_i)^2 - 3n(k+1)$$

$$\chi_r^2 = \frac{12}{(4)(3)(3+1)}\left(11^2 + 94^2 + 9^2\right) - 3(4)(3+1) = 6,5$$

 Keputusan: karena $\chi_r^2 > \chi^2_{(0,05,2)} = 5,991$ maka **Tolak $H_0$**.

 Kesimpulan: dengan tingkat signifikansi 5% cukup bukti untuk menunjukkan bahwa kondisi pupuk yang berbeda menyebabkan perbedaan hasil produksi jagung.

- Uji Dunn

- Hipotesis

  $H_0$: $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, Perlakuan pemberian pupuk yang berbeda tidak berpengaruh pada hasil produksi gandum

  $H_1$: $M_i \neq M_j$ ,Perlakuan pemberian pupuk yang berbeda memberikan hasil gandum yang berbeda

$$\left|R_i - R_j\right| > Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}} \sqrt{\frac{nk(k+1)}{6}}$$

$$\frac{\alpha}{k(k-1)} = \frac{0,05}{3(2-1)} = 0,0083$$

$$Z_{1-0,0083} = 2,395$$

$$Z_{\frac{\alpha}{k(k-1)}} \sqrt{\frac{nk(k+1)}{6}} = 2,395\sqrt{\frac{4.3(3+1)}{6}}$$

$$= 2,395\sqrt{8}$$

$$= 6,774$$

$$R_1 = 11 \quad R_2 = 4 \quad R_3 = 9$$

$\left|R_1 - R_2\right| = 7 > 6,774$ Tolak $H_0$

$\left|R_1 - R_3\right| = 2 < 6,774$ Gagal tolak $H_0$

$\left|R_2 - R_3\right| = 5 < 6,774$ Gagal tolak $H_0$

Kesimpulan:

Dengan tingkat signifikan 5%, pasangan pupuk 1 dan 2 memberikan efek pertumbuhan hasil gandum yang berbeda, sedangkan pasangan pupuk yang lain tidak.

Tabel Kruskall Wallis

282 APPENDIX

TABLE O. TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS LARGE AS OBSERVED VALUES OF $H$ IN THE KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE BY RANKS*

| Sample sizes $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2.7000 | .500 |
| 2 | 2 | 1 | 3.6000 | .200 |
| 2 | 2 | 2 | 4.5714 | .067 |
| | | | 3.7143 | .200 |
| 3 | 1 | 1 | 3.2000 | .300 |
| 3 | 2 | 1 | 4.2857 | .100 |
| | | | 3.8571 | .133 |
| 3 | 2 | 2 | 5.3572 | .029 |
| | | | 4.7143 | .048 |
| | | | 4.5000 | .067 |
| | | | 4.4643 | .105 |
| 3 | 3 | 1 | 5.1429 | .043 |
| | | | 4.5714 | .100 |
| | | | 4.0000 | .129 |
| 3 | 3 | 2 | 6.2500 | .011 |
| | | | 5.3611 | .032 |
| | | | 5.1389 | .061 |
| | | | 4.5556 | .100 |
| | | | 4.2500 | .121 |
| 3 | 3 | 3 | 7.2000 | .004 |
| | | | 6.4889 | .011 |
| | | | 5.6889 | .029 |
| | | | 5.6000 | .050 |
| | | | 5.0667 | .086 |
| | | | 4.6222 | .100 |
| 4 | 1 | 1 | 3.5714 | .200 |
| 4 | 2 | 1 | 4.8214 | .057 |
| | | | 4.5000 | .076 |
| | | | 4.0179 | .114 |
| 4 | 2 | 2 | 6.0000 | .014 |
| | | | 5.3333 | .033 |
| | | | 5.1250 | .052 |
| | | | 4.4583 | .100 |
| | | | 4.1667 | .105 |
| 4 | 3 | 1 | 5.8333 | .021 |
| | | | 5.2083 | .050 |
| | | | 5.0000 | .057 |
| | | | 4.0556 | .093 |
| | | | 3.8889 | .129 |
| 4 | 3 | 2 | 6.4444 | .008 |
| | | | 6.3000 | .011 |
| | | | 5.4444 | .046 |
| | | | 5.4000 | .051 |
| | | | 4.5111 | .098 |
| | | | 4.4444 | .102 |
| 4 | 3 | 3 | 6.7455 | .010 |
| | | | 6.7091 | .013 |
| | | | 5.7909 | .046 |
| | | | 5.7273 | .050 |
| | | | 4.7091 | .092 |
| | | | 4.7000 | .101 |
| 4 | 4 | 1 | 6.6667 | .010 |
| | | | 6.1667 | .022 |
| | | | 4.9667 | .048 |
| | | | 4.8667 | .054 |
| | | | 4.1667 | .082 |
| | | | 4.0667 | .102 |
| 4 | 4 | 2 | 7.0364 | .006 |
| | | | 6.8727 | .011 |
| | | | 5.4545 | .046 |
| | | | 5.2364 | .052 |
| | | | 4.5545 | .098 |
| | | | 4.4455 | .103 |
| 4 | 4 | 3 | 7.1439 | .010 |
| | | | 7.1364 | .011 |
| | | | 5.5985 | .049 |
| | | | 5.5758 | .051 |
| | | | 4.5455 | .099 |
| | | | 4.4773 | .102 |
| 4 | 4 | 4 | 7.6538 | .008 |
| | | | 7.5385 | .011 |
| | | | 5.6923 | .049 |
| | | | 5.6538 | .054 |
| | | | 4.6539 | .097 |
| | | | 4.5001 | .104 |
| 5 | 1 | 1 | 3.8571 | .143 |
| 5 | 2 | 1 | 5.2500 | .036 |
| | | | 5.0000 | .048 |
| | | | 4.4500 | .071 |
| | | | 4.2000 | .095 |
| | | | 4.0500 | .119 |

APPENDIX 283

TABLE O. TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS LARGE AS OBSERVED VALUES OF $H$ IN THE KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE BY RANKS* (*Continued*)

| Sample sizes $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 | 6.5333 | .008 |
| | | | 6.1333 | .013 |
| | | | 5.1600 | .034 |
| | | | 5.0400 | .056 |
| | | | 4.3733 | .090 |
| | | | 4.2933 | .122 |
| 5 | 3 | 1 | 6.4000 | .012 |
| | | | 4.9600 | .048 |
| | | | 4.8711 | .052 |
| | | | 4.0178 | .095 |
| | | | 3.8400 | .123 |
| 5 | 3 | 2 | 6.9091 | .009 |
| | | | 6.8218 | .010 |
| | | | 5.2509 | .049 |
| | | | 5.1055 | .052 |
| | | | 4.6509 | .091 |
| | | | 4.4945 | .101 |
| 5 | 3 | 3 | 7.0788 | .009 |
| | | | 6.9818 | .011 |
| | | | 5.6485 | .049 |
| | | | 5.5152 | .051 |
| | | | 4.5333 | .097 |
| | | | 4.4121 | .109 |
| 5 | 4 | 1 | 6.9545 | .008 |
| | | | 6.8400 | .011 |
| | | | 4.9855 | .044 |
| | | | 4.8600 | .056 |
| | | | 3.9873 | .098 |
| | | | 3.9600 | .102 |
| 5 | 4 | 2 | 7.2045 | .009 |
| | | | 7.1182 | .010 |
| | | | 5.2727 | .049 |
| | | | 5.2682 | .050 |
| | | | 4.5409 | .098 |
| | | | 4.5182 | .101 |
| 5 | 4 | 3 | 7.4449 | .010 |
| | | | 7.3949 | .011 |
| | | | 5.6564 | .049 |
| | | | 5.6308 | .050 |
| | | | 4.5487 | .099 |
| | | | 4.5231 | .103 |
| 5 | 4 | 4 | 7.7604 | .009 |
| | | | 7.7440 | .011 |
| | | | 5.6571 | .049 |
| | | | 5.6176 | .050 |
| | | | 4.6187 | .100 |
| | | | 4.5527 | .102 |
| 5 | 5 | 1 | 7.3091 | .009 |
| | | | 6.8364 | .011 |
| | | | 5.1273 | .046 |
| | | | 4.9091 | .053 |
| | | | 4.1091 | .086 |
| | | | 4.0364 | .105 |
| 5 | 5 | 2 | 7.3385 | .010 |
| | | | 7.2692 | .010 |
| | | | 5.3385 | .047 |
| | | | 5.2462 | .051 |
| | | | 4.6231 | .097 |
| | | | 4.5077 | .100 |
| 5 | 5 | 3 | 7.5780 | .010 |
| | | | 7.5429 | .010 |
| | | | 5.7055 | .046 |
| | | | 5.6264 | .051 |
| | | | 4.5451 | .100 |
| | | | 4.5363 | .102 |
| 5 | 5 | 4 | 7.8229 | .010 |
| | | | 7.7914 | .010 |
| | | | 5.6657 | .049 |
| | | | 5.6429 | .050 |
| | | | 4.5229 | .099 |
| | | | 4.5200 | .101 |
| 5 | 5 | 5 | 8.0000 | .009 |
| | | | 7.9800 | .010 |
| | | | 5.7800 | .049 |
| | | | 5.6600 | .051 |
| | | | 4.5600 | .100 |
| | | | 4.5000 | .102 |

* Adapted and abridged from Kruskal, W. H., and Wallis, W. A. 1952. Use of ranks in one-criterion variance analysis. *J. Amer. Statist. Ass.*, **47**, 614–617, with the kind permission of the authors and the publisher. (The corrections to this table given by the authors in Errata, *J. Amer. Statist. Ass.*, **48**, 910, have been incorporated.)

Tabel Chi-square

APPENDIX 249

TABLE C. TABLE OF CRITICAL VALUES OF CHI SQUARE*

| $df$ | Probability under $H_0$ that $\chi^2 \geq$ chi square: .99 | .98 | .95 | .90 | .80 | .70 | .50 | .30 | .20 | .10 | .05 | .02 | .01 | .001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .00016 | .00063 | .0039 | .016 | .064 | .15 | .46 | 1.07 | 1.64 | 2.71 | 3.84 | 5.41 | 6.64 | 10.83 |
| 2 | .02 | .04 | .10 | .21 | .45 | .71 | 1.39 | 2.41 | 3.22 | 4.60 | 5.99 | 7.82 | 9.21 | 13.82 |
| 3 | .12 | .18 | .35 | .58 | 1.00 | 1.42 | 2.37 | 3.66 | 4.64 | 6.25 | 7.82 | 9.84 | 11.34 | 16.27 |
| 4 | .30 | .43 | .71 | 1.06 | 1.65 | 2.20 | 3.36 | 4.88 | 5.99 | 7.78 | 9.49 | 11.67 | 13.28 | 18.46 |
| 5 | .55 | .75 | 1.14 | 1.61 | 2.34 | 3.00 | 4.35 | 6.06 | 7.29 | 9.24 | 11.07 | 13.39 | 15.09 | 20.52 |
| 6 | .87 | 1.13 | 1.64 | 2.20 | 3.07 | 3.83 | 5.35 | 7.23 | 8.56 | 10.64 | 12.59 | 15.03 | 16.81 | 22.46 |
| 7 | 1.24 | 1.56 | 2.17 | 2.83 | 3.82 | 4.67 | 6.35 | 8.38 | 9.80 | 12.02 | 14.07 | 16.62 | 18.48 | 24.32 |
| 8 | 1.65 | 2.03 | 2.73 | 3.49 | 4.59 | 5.53 | 7.34 | 9.52 | 11.03 | 13.36 | 15.51 | 18.17 | 20.09 | 26.12 |
| 9 | 2.09 | 2.53 | 3.32 | 4.17 | 5.38 | 6.39 | 8.34 | 10.66 | 12.24 | 14.68 | 16.92 | 19.68 | 21.67 | 27.88 |
| 10 | 2.56 | 3.06 | 3.94 | 4.86 | 6.18 | 7.27 | 9.34 | 11.78 | 13.44 | 15.99 | 18.31 | 21.16 | 23.21 | 29.59 |
| 11 | 3.05 | 3.61 | 4.58 | 5.58 | 6.99 | 8.15 | 10.34 | 12.90 | 14.63 | 17.28 | 19.68 | 22.62 | 24.72 | 31.26 |
| 12 | 3.57 | 4.18 | 5.23 | 6.30 | 7.81 | 9.03 | 11.34 | 14.01 | 15.81 | 18.55 | 21.03 | 24.05 | 26.22 | 32.91 |
| 13 | 4.11 | 4.76 | 5.89 | 7.04 | 8.63 | 9.93 | 12.34 | 15.12 | 16.98 | 19.81 | 22.36 | 25.47 | 27.69 | 34.53 |
| 14 | 4.66 | 5.37 | 6.57 | 7.79 | 9.47 | 10.82 | 13.34 | 16.22 | 18.15 | 21.06 | 23.68 | 26.87 | 29.14 | 36.12 |
| 15 | 5.23 | 5.98 | 7.26 | 8.55 | 10.31 | 11.72 | 14.34 | 17.32 | 19.31 | 22.31 | 25.00 | 28.26 | 30.58 | 37.70 |
| 16 | 5.81 | 6.61 | 7.96 | 9.31 | 11.15 | 12.62 | 15.34 | 18.42 | 20.46 | 23.54 | 26.30 | 29.63 | 32.00 | 39.29 |
| 17 | 6.41 | 7.26 | 8.67 | 10.08 | 12.00 | 13.53 | 16.34 | 19.51 | 21.62 | 24.77 | 27.59 | 31.00 | 33.41 | 40.75 |
| 18 | 7.02 | 7.91 | 9.39 | 10.86 | 12.86 | 14.44 | 17.34 | 20.60 | 22.76 | 25.99 | 28.87 | 32.35 | 34.80 | 42.31 |
| 19 | 7.63 | 8.57 | 10.12 | 11.65 | 13.72 | 15.35 | 18.34 | 21.69 | 23.90 | 27.20 | 30.14 | 33.69 | 36.19 | 43.82 |
| 20 | 8.26 | 9.24 | 10.85 | 12.44 | 14.58 | 16.27 | 19.34 | 22.78 | 25.04 | 28.41 | 31.41 | 35.02 | 37.57 | 45.32 |
| 21 | 8.90 | 9.92 | 11.59 | 13.24 | 15.44 | 17.18 | 20.34 | 23.86 | 26.17 | 29.62 | 32.67 | 36.34 | 38.93 | 46.80 |
| 22 | 9.54 | 10.60 | 12.34 | 14.04 | 16.31 | 18.10 | 21.24 | 24.94 | 27.30 | 30.81 | 33.92 | 37.66 | 40.29 | 48.27 |
| 23 | 10.20 | 11.29 | 13.09 | 14.85 | 17.19 | 19.02 | 22.34 | 26.02 | 28.43 | 32.01 | 35.17 | 38.97 | 41.64 | 49.73 |
| 24 | 10.86 | 11.99 | 13.85 | 15.66 | 18.06 | 19.94 | 23.34 | 27.10 | 29.55 | 33.20 | 36.42 | 40.27 | 42.98 | 51.18 |
| 25 | 11.52 | 12.70 | 14.61 | 16.47 | 18.94 | 20.87 | 24.34 | 28.17 | 30.68 | 34.38 | 37.65 | 41.57 | 44.31 | 52.62 |
| 26 | 12.20 | 13.41 | 15.38 | 17.29 | 19.82 | 21.79 | 25.34 | 29.25 | 31.80 | 35.56 | 38.88 | 42.86 | 45.64 | 54.05 |
| 27 | 12.88 | 14.12 | 16.15 | 18.11 | 20.70 | 22.72 | 26.34 | 30.32 | 32.91 | 36.74 | 40.11 | 44.14 | 46.96 | 55.48 |
| 28 | 13.56 | 14.85 | 16.93 | 18.94 | 21.59 | 23.65 | 27.34 | 31.39 | 34.03 | 37.92 | 41.34 | 45.42 | 48.28 | 56.89 |
| 29 | 14.26 | 15.57 | 17.71 | 19.77 | 22.48 | 24.58 | 28.34 | 32.46 | 35.14 | 39.09 | 42.56 | 46.69 | 49.59 | 58.30 |
| 30 | 14.95 | 16.31 | 18.49 | 20.60 | 23.36 | 25.51 | 29.34 | 33.53 | 36.25 | 40.26 | 43.77 | 47.96 | 50.89 | 59.70 |

* Table C is abridged from Table IV of Fisher and Yates: *Statistical tables for biological, agricultural, and medical research*, published by Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, by permission of the authors and publishers.

# Pertemuan 13

## Uji Korelasi Parametrik dan Nonparametrik

**Uji Korelasi Pearson**

Uji korelasi Pearson digunakan untuk mengukur keeratan dan arah hubungan linier antara dua variabel berskala interval atau rasio. Koefisien korelasi sampel dilambangkan dengan r dengan nilai antara -1 hingga +1:

- r mendekati +1 atau -1: Hubungan linier kuat.
- r mendekati 0: Hubungan linier lemah.
- $r > 0$: Hubungan searah (positif).
- $r < 0$: Hubungan lawan arah (negatif).

**Hipotesis Statistik**

1. Dua Arah:
   - $H_0$: $\rho = 0$(tidak ada hubungan linier antara X dan Y).
   - $H_1$: $\rho \neq 0$(ada hubungan linier).
2. Satu Arah:
   - $H_0$: $\rho = 0$
   - $H_1$: $\rho > 0$ (hubungan linier positif: peningkatan nilai X diikuti dengan peningkatan nilai Y).
   - $H_1$: $\rho < 0$ (hubungan linier negatif: peningkatan nilai X diikuti dengan penurunan nilai Y).

Ket: ρ adalah koefisien korelasi populasi.

**Statistik Uji**

1. Rumus Koefisien Korelasi

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

   n = Jumlah pasangan sampel X dan Y

2. Statistik uji *t* (jika X dan Y berdistribusi Normal Bivariat):

$$t = r\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

   dengan derajat bebas n-2.

**Statistik Tabel:**

1. Titik kritis korelasi Pearson: $r_{\alpha;n-2}$
2. Distribusi t dengan derajat bebas n-2.

**Keputusan**

Tabel Pearson:

- Dua arah: Tolak $H_0$ jika $|r| > r_{\alpha/2;n-2}$ atau $p - value < \alpha$.
- Satu arah: Tolak $H_0$ jika $r > r_{\alpha;n-2}$ atau $p - value < \alpha$.

Tabel *t*:

- Dua arah: Tolak $H_0$ jika $|t| > t_{\alpha/2;n-2}$ atau $p - value < \alpha$.

**Uji Korelasi Spearman**

Uji korelasi Spearman digunakan untuk mengukur keeratan hubungan antara dua variabel dengan skala ordinal, interval, atau rasio (yang diberi peringkat/ranking). Kuat lemahnya hubungan diukur berdasarkan peringkat, bukan nilai asli. Uji ini menjadi alternatif jika pasangan variabel X dan Y tidak terpenuhi asumsi Normal Bivariat.

**Hipotesis Statistik**

1. Dua Arah:
   - $H_0$: $\rho_s = 0$ (tidak ada hubungan antara X dan Y).
     $H_1$: $\rho_s \neq 0$ (ada hubungan antara X dan Y).
2. Satu Arah:
   - $H_0$: $\rho_s = 0$
     $H_1$: $\rho_s > 0$(hubungan positif).
   - $H_0$: $\rho_s = 0$
     $H_1$: $\rho_s < 0$(hubungan negatif).

**Statistik Uji**

1. Untuk $n \leq 30$:

$$r_s = 1 - \frac{6\,\Sigma d_i^2}{n^3 - n}$$

$r_s$: koefisien korelasi Spearman dari sampel

n : jumlah pasangan sampel $X_i$, $Y_i$

$d_i$: selisih rangking X dan Y.

2. Untuk $n > 30$, digunakan pendekatan normal:

$$Z = r_s\sqrt{n - 1}$$

**Jika Terdapat Ties (Data Sama)**

Jika terdapat nilai yang sama, $r_s$ dikoreksi menggunakan:

$$r_s = \frac{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 - \Sigma d_i^2}{2\sqrt{\Sigma X^2 \cdot \Sigma Y^2}}$$

Keterangan:

$$\Sigma x^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \Sigma T_x \;;\; \Sigma y^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \Sigma T_y$$

$$T_x = \frac{t_x^3 - t_x}{12} \;;\; T_y = \frac{t_y^3 - t_y}{12}$$

**Keputusan**

Untuk $n \leq 30$:

- Dua arah: Tolak $H_0$ jika $\left|r_s\right| > 1 - \alpha/2$ (dari tabel Spearman).
- Satu arah:

  Tolak $H_0$ jika $r_s > 1 - \alpha$.

  Tolak $H_0$ jika $r_s < 1 - \alpha$.

Untuk n > 30:

- Dua arah: Tolak $H_0$ jika $|z| > Z_{\alpha/2}$.
- Satu arah:

  Tolak $H_0$ jika $z > Z_\alpha$.

  Tolak $H_0$ jika $z <- Z_\alpha$

**Uji Korelasi Kendall Tau**

Uji korelasi Kendal Tau digunakan untuk mengukur keeratan antara dua variabel berskala ordinal atau data dengan banyak nilai yang sama.

**Hipotesis Statistik**

1. Dua Arah:

- $H_0 : \tau_{xy} = 0$ (Tidak ada hubungan antara kedua variabel)
- $H_1 : \tau_{xy} \neq 0$ (Ada hubungan antara kedua variabel)

2. Satu Arah:

- $H_0 : \tau_{xy} \leq 0$
- $H_1 : \tau_{xy} > 0$
- $H_0 : \tau_{xy} \geq 0$
- $H_1 : \tau_{xy} < 0$

**Statistik Uji**

1. Uji sampel kecil ($n \leq 10$) *tanpa ties*

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)} = \frac{2(C-D)}{n(n-1)}$$

S : statistik untuk jumlah konkordansi dan diskordansi

C : banyaknya pasangan konkordansi (wajar)

D : banyaknya pasangan diskordansi (tidak wajar)

n : jumlah pasangan X dan Y

2. Uji sampel kecil ($n \leq 10$) *dengan ties*

$$\tau = \frac{2(C-D)}{\sqrt{n(n+1)-T_x}\sqrt{n(n+1-T_y}}$$

dengan :

$$T_x = \sum_{i=1}^{S}(t_{i(x)}^2 - t_{i(x)}) \;;$$

$$T_y = \sum_{i=1}^{S}(t_{i(y)}^2 - t_{i(y)})$$

C : banyaknya pasangan konkordansi

D : banyaknya pasangan diskordansi

n : jumlah pasangan X dan Y

$T_x$: faktor koreksi ranking X yang sama

$T_y$: faktor koreksi ranking Y yang sama

3. Uji sampel besar ($n > 10$) (*mendekati distribusi normal*)

$$z = \frac{\mu - \mu_\tau}{\sigma_\tau}$$

dengan :

$$\mu_\tau = 0$$

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}$$

**Keputusan**

jika $n \leq 10$:

- Tolak $H_0$, jika $\tau_{xy,z} > \tau_{1-\frac{\alpha}{2};n}$
- Tolak $H_0$, jika $\tau_{xy,z} > \tau_{1-\alpha;n}$

- Tolak $H_0$, jika $\tau_{xy,z} < -\tau_{1-\alpha;n}$

jika $n > 10$

1. Dua arah
   - Tolak $H_0$ jika $|z| > Z_{\alpha/2}$
2. Satu arah
   - Tolak $H_0$ jika $z > Z_\alpha$
   - Tolak $H_0$ jika $z < -Z_\alpha$

**Uji Korelasi Partial Kendall Tau**

Uji korelasi Partial Kendal Tau digunakan untuk mengukur keeratan antara lebih dari dua variabel berskala ordinal atau data dengan banyak nilai yang sama.

**Hipotesis Statistik**

1. Dua Arah
   - $H_0 : \tau_{xy,z} = 0$(Tidak ada hubungan antara kedua variabel)
   - $H_1 : \tau_{xy,z} \neq 0$(Ada hubungan antara kedua variabel)
2. Satu Arah
   - $H_0 : \tau_{xy,z} \leq 0$
   - $H_1 : \tau_{xy,z} > 0$
   - $H_0 : \tau_{xy,z} \geq 0$
   - $H_1 : \tau_{xy,z} < 0$

**Statistik Uji**

$$\tau_{xy,z} = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xz}\tau_{yz}}{\sqrt{[1-\tau_{xz}^2][1-\tau_{yz}^2]}} \; ; \; \tau_{xy} = \frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$^*\ \tau_{xz}\ ;\ \tau_{yz}\ menggunakan\ rumus\ yang\ sama$

$\tau_{xy,z}$: korelasi parsial kendall antara X dan Y ketika Z konstan

$\tau_{xy}$: korelasi antara X dan Y

$\tau_{xz}$: korelasi antara X dan Z

$\tau_{yz}$ : korelasi antara Y dan Z

n : jumlah sampel

S : C - D

C : jumlah pasangan konkordansi

D : jumlah pasangan diskordansi

**Keputusan**

- Tolak $H_0$, jika $\tau_{xy,z} > \tau_{1-\frac{\alpha}{2};n}$
- Tolak $H_0$, jika $\tau_{xy,z} > \tau_{1-\alpha;n}$
- Tolak $H_0$, jika $\tau_{xy,z} < -\tau_{1-\alpha;n}$

**Uji Kebebasan**

Uji Kebebasan digunakan untuk mengetahui keterkaitan (asosiasi) antara sepasang variabel kategorik/kualitatif.

**Hipotesis Statistik**

- $H_0$: $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ (tidak ada keterkaitan (independen) antara sepasang variabel kategorik/kualitatif).

  $H_1$: $p_{ij} \neq p_i \cdot p_j$, $i = 1, 2, 3, ..., r$ $j = 1, 2, ..., k$ (ada keterkaitan (dependen) antara sepasang variabel kategorik/kualitatif).

**Statistik Uji**

1. Jika $\hat{e}_{ij} \geq 5\ untuk\ semua\ i\ dan\ j.$

$$\chi^2_{hitung} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r}\frac{(o_{ij}-\hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

$o_{ij}$: frekuensi teramati/observasi

$\hat{e}_{ij}$: estimasi frekuensi harapan :

$$\hat{e}_{ij} = \frac{(n_{i.})(n_{.j})}{n}$$

2. Jika $\hat{e}_{ij} < 5$ maka harus dilakukan penggabungan kategori yang berdekatan, sehingga derajat bebas Chi-Squarenya makin berkurang. Dalam tabel kontigensi ukuran $2 \times 2$ yang hanya mempunya df = 1 biasanya diterapkan **koreksi kontinuitas Yate.**

$$\chi^2_{corrected} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{(|o_{ij}-\hat{e}_{ij}-0,5|)^2}{\hat{e}_{ij}}$$

**Statistik Tabel:**

$$\chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)}$$

**Keputusan**

- Tolak $H_0$ jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)}$

**CONTOH SOAL**

1. Penelitian pada sebuah rumah sakit memperlihatkan data pemeriksaan tekanan darah bervariasi. Ditemukan bahwa dokter yang mengukur tekanan darah sistolik yang tinggi cenderung mengukur tekanan darah diastolik tinggi juga. Sehingga akan diukur kekuatan hubungan antara kedua variabel tersebut. Gunakan tingkat signifikansi 5%.

| Dokter | Sistolik | Diastolik |
|---|---|---|
| 1 | 141,8 | 89,7 |
| 2 | 140,2 | 74,4 |
| 3 | 131,8 | 83,5 |
| 4 | 132,5 | 77,8 |
| 5 | 135,7 | 85,8 |
| 6 | 141,2 | 86,5 |
| 7 | 143,9 | 89,4 |
| 8 | 140,2 | 89,3 |
| 9 | 140,8 | 88 |
| 10 | 131,7 | 82,2 |
| 11 | 130,8 | 84,6 |
| 12 | 135,6 | 84,4 |
| 13 | 143,6 | 86,3 |
| 14 | 133,2 | 85,9 |

2. Diketahui sebuah ranking nilai wawancara dari dua orang pewawancara kepada 10 orang peserta dari tes tertulis dan tes praktek. Data nilai ranking sebagai berikut:

| Peserta | Pewawancara 1 | Pewawancara 2 |
|---|---|---|
| A | 7 | 5 |
| B | 1,5 | 2 |
| C | 8 | 6 |
| D | 10 | 8 |
| E | 9 | 7 |
| F | 6 | 9,5 |
| G | 5 | 9,5 |
| H | 3 | 3,5 |
| I | 1,5 | 1 |
| J | 4 | 3,5 |

Apakah ada asosiasi ranking penilaian dari pewawancara 1 dan pewawancara 2? Gunakan dengan tingkat signifikansi 5%

3. Pada tabel berikut ini akan digunakan untuk mengetahui bagaimana keterkaitan dari perilaku memilih tempat belanja dari para wanita berdasarkan kelompok umurnya.

| Kelompok Umur | Minimarket/Supermarket | Belanja Online | Jumlah |
|---|---|---|---|
| Remaja | 100 | 130 | 230 |
| Dewasa Muda | 140 | 100 | 240 |
| Dewasa Tua | 105 | 25 | 130 |
| Jumlah | 345 | 255 | 600 |

Berikanlah ulasan hasil uji berdasarkan data sampel acak 600 wanita yang telah disurvei dengan tingkat signifikansi 10%!

**JAWABAN**

1. $H_0: \rho_s = 0$

   (Pengukuran sistolik dan diastolik yang dilakukan oleh dokter tidak berhubungan)

   $H_1: \rho_s > 0$

   (Terdapat hubungan sejalan antara pengukuran sistolik dan diastolik yang dilakukan oleh dokter)

| Xi | Yi | rank(Xi) | rank(Yi) | di | di^2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 141,8 | 89,7 | 12 | 14 | -2 | 4 |
| 140,2 | 74,4 | 8,5 | 1 | 7,5 | 56,25 |
| 131,8 | 83,5 | 3 | 4 | -1 | 1 |
| 132,5 | 77,8 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| 135,7 | 85,8 | 7 | 7 | 0 | 0 |
| 141,2 | 86,5 | 11 | 10 | 1 | 1 |
| 143,9 | 89,4 | 14 | 13 | 1 | 1 |
| 140,2 | 89,3 | 8,5 | 12 | -3,5 | 12,25 |
| 140,8 | 88 | 10 | 11 | -1 | 1 |
| 131,7 | 82,2 | 2 | 3 | -1 | 1 |
| 130,8 | 84,6 | 1 | 6 | -5 | 25 |
| 135,6 | 84,4 | 6 | 5 | 1 | 1 |
| 143,6 | 86,3 | 13 | 9 | 4 | 16 |
| 133,2 | 85,9 | 5 | 8 | -3 | 9 |
| | | | | | 132,5 |

Karena n = 14, maka n ≤ 30 → digunakan statistik hitung:

$$r_s = 1 - \frac{6\,\Sigma d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6\,(132{,}5)}{14^3 - 14} = 0,7088$$

Ada ranking kembar (ties) pada Xi maka:

$$T_x = \frac{t_x^{\,3} - t_x}{12} = \frac{2^3 - 2}{12} = 0,5$$

$$\Sigma x^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \Sigma T_x = 227$$

$$\Sigma y^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \Sigma T_y = 227{,}5$$

Sehingga nilai statistik hitung dengan ties:

$$r_s = \frac{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 - \Sigma d_i^2}{2\sqrt{\Sigma X^2 \cdot \Sigma Y^2}} = \frac{227 + 227{,}5 - 132{,}5}{2\sqrt{227 \cdot 227{,}5}}$$

$$r_s = 0{,}7085$$

Nilai tabel Spearman untuk n=14;α=5% adalah 0,4593

**Keputusan**:

$r_s = 0,7085 > 0,4593 \rightarrow$ **tolak H0**

**Kesimpulan:**

Dengan tingkat signifikansi 5% dan dari sampel 14 dokter, dapat ditunjukkan bahwa ada hubungan sejalan antara pengukuran sistolik dan diastolik oleh dokter, yaitu mengukur tekanan darah sistolik tinggi cenderung mengukur tekanan darah diastolik juga tinggi.

2. **Hipotesis**

$H_0$: Tidak ada kesesuaian ranking nilai pewawancara 1 dan pewawancara 2

$H_1$: Ada kesesuaian ranking nilai pewawancara 1 dan pewawancara 2

**Tingkat Signifkansi**

α = 0,05

**Statistik Uji**

Karena sampel kecil dengan ties, maka :

$$\tau = \frac{2(C-D)}{\sqrt{n(n+1) - T_x}\sqrt{n(n+1 - T_y}}$$

$$T_x = \sum_{i=1}^{S} (t_{i(x)}^2 - t_{i(x)}) \ ;$$

$$T_y = \sum_{i=1}^{S} (t_{i(y)}^2 - t_{i(y)})$$

Ranking skor/nilai berdasarkan urutan pewawancara 1

| Peserta | Pewawancara 1 | Pewawancara 2 |
|---|---|---|
| B | 1,5 | 2 |
| I | 1,5 | 1 |
| H | 3 | 3,5 |
| J | 4 | 3,5 |
| G | 5 | 9,5 |
| F | 6 | 9,5 |
| A | 7 | 5 |
| C | 8 | 6 |
| E | 9 | 7 |
| D | 10 | 8 |

Penentuan C dan D

| Subjek | B | I | H | J | G | F | A | C | E | D | ΣC | ΣD |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_{xi}$ | 1,5 | 1,5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | |
| $R_{yi}$ | 2 | 1 | 3,5 | 3,5 | 9,5 | 9,5 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| | 2 | D | C | C | C | C | C | C | C | C | 8 | 1 |
| | | 1 | C | C | C | C | C | C | C | C | 8 | 0 |
| | | | 3,5 | 0 | C | C | C | C | C | C | 6 | 0 |
| | | | | 3,5 | C | C | C | C | C | C | 6 | 0 |
| | | | | | 9,5 | 0 | D | D | D | D | 0 | 4 |
| | | | | | | 9,5 | D | D | D | D | 0 | 4 |
| | | | | | | | 5 | C | C | C | 3 | 0 |
| | | | | | | | | 6 | C | C | 2 | 0 |
| | | | | | | | | | 7 | C | 1 | 0 |
| | | | | | | | | | | 8 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | Total | 34 | 9 |

$$\tau = \frac{2(34-9)}{\sqrt{10(10+1) - 2\sqrt{10(10+1-4}}} = 0,575$$

Dari penghitungan di atas, diperoleh nilai :

$S = C - D = 34 - 9 = 25$

$n = 10$

Dari tabel Q, untuk nilai S = 25 dan n = 10, diperoleh nilai *p-value* sebesar 0,014

**Keputusan**

Nilai *p-value* untuk $S = 25$, $n = 10$ berada pada rentang nilai 0,0083 s.d. 0,014. Nilai tersebut masih lebih kecil dari α=0,05. (**Tolak $H_0$**)

**Kesimpulan**

Dengan tingkat signifikansi 5% cukup bukti untuk mengatakan ada kesesuaian ranking nilai pewawancara 1 dan pewawancara 2 di tingkat populasi.

3. $H_0$: $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ (tidak ada keterkaitan (independen) antara perilaku wanita dalam memilih tempat belanja dengan kelompok umurnya).

$H_1$: $p_{ij} \neq p_i \cdot p_j$, $i = 1, 2, 3,..., r$ $j = 1, 2,..., k$ (ada keterkaitan (dependen) antara perilaku wanita dalam memilih tempat belanja dengan kelompok umurnya).

| Kelompok Umur | Minimarket/Supermarket | Belanja Online | Jumlah |
|---|---|---|---|
| Remaja | 100 | 130 | 230 |
| Dewasa Muda | 140 | 100 | 240 |
| Dewasa Tua | 105 | 25 | 130 |
| Jumlah | 345 | 255 | 600 |

$$\hat{e}_{ij} = \frac{(n_{i.})(n_{.j})}{n}$$

$$\hat{e}_{11} = \frac{(230)(345)}{600} = 132,5$$

$$\hat{e}_{21} = \frac{(240)(345)}{600} = 138$$

$$\hat{e}_{31} = \frac{(130)(345)}{600} = 74,75$$

$$\hat{e}_{12} = \frac{(230)(255)}{600} = 97,75$$

$$\hat{e}_{22} = \frac{(240)(255)}{600} = 102$$

$$\hat{e}_{32} = \frac{(130)(255)}{600} = 55,25$$

Sehingga nilai statistik hitung:

$$\chi^2_{hitung} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r} \frac{(o_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

$$\chi^2_{hitung} = 47,376$$

Nilai tabel Chi-Square untuk $\alpha = 1 - \% = 0,1\, dan\, df = (r-1)(k-1) = (3-1)(2-1) = 2$ maka lihat pada tabel Chi-Square:

$$\chi^2_{0,1;2} = 4,605$$

**Keputusan:**

$\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)} \Leftrightarrow 47,376 > 4,605$ → **tolak** $H_0$.

**Kesimpulan:**

Pada taraf uji 10% dan dengan sampel sebanyak 600 wanita dapat ditunjukkan bahwa ada keterkaitan antara perilaku wanita dalam memilih tempat belanja dengan kelompok umurnya

## Pertemuan 14

## Analysis of Covariance (Ancova)

**REVIEW ANOVA**

Anova digunakan untuk menguji kesamaan rata-rata pada lebih dari dua populasi (kelompok), sedangkan Ancova menghilangkan satu atau lebih variabel kontinu sebelum menguji perbedaan kelompok.

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \{ i = 1, 2, ..., k \; j = 1, 2, ..., n_i$$

Keterangan :

$\varepsilon_{ij}$ =dapat dituliskan dengan $\tau_i$ (pengaruh populasi ke-i) yang dapat disebut sebagai model pengaruh (Effects Model)

$y_{ij}$ = variabel dependen pada pengamatan ke-j dari populasi ke-i, diukur dalam skala kuantitatif

$\mu_i$ = mean populasi ke-i

$\varepsilon_{ij}$ = galat acak pada pengamatan ke-j dari populasi ke-i

$k$ = jumlah populasi

$n_i$ = banyak pengamatan pada populasi ke-i

Anova dapat dianggap sebagai jenis tertentu dari analisis regresi yang hanya menggunakan variabel prediktor kategorik.

**ANCOVA**

ANCOVA (Analysis of Covariance) adalah teknik statistik yang menggabungkan ANOVA (Analysis of Variance) dan regresi linier. Metode ini digunakan untuk menganalisis perbedaan rata-rata antar kelompok dengan terlebih dahulu mengontrol pengaruh variabel lain yang disebut kovariat. Kovariat merupakan variabel kuantitatif yang menggambarkan sumber variasi dalam unit atau kondisi percobaan yang dapat memengaruhi variabel dependen tetapi tidak dikontrol oleh prosedur eksperimen.

Tujuan ANCOVA adalah meningkatkan presisi analisis dengan mengurangi variabilitas dalam data akibat pengaruh kovariat. Prosesnya mencakup menentukan hubungan (kovariasi) antara kovariat dan variabel dependen, menghilangkan varian yang terkait dengan kovariat, dan kemudian mengevaluasi apakah perbedaan rata-rata variabel dependen antar kelompok signifikan secara statistik. Hubungan antara kovariat dan variabel dependen ini dihitung secara empiris dari data, sehingga memungkinkan ANCOVA untuk memberikan hasil yang lebih akurat.

ANCOVA juga dapat dipahami sebagai model statistik yang terdiri dari komponen regresi, ANOVA, dan galat.

**MODEL ANCOVA**

Model ANCOVA dengan sekumpulan populasi dan satu kovariat :

$$y_{ij} = \mu_i + \tau_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij}, i = 1, 2, \dots a$$

$$j = 1, 2, \dots ni$$

Keterangan :

$y_{ij}$ = nilai peubah respon pada perlakuan ke-i observasi ke-j

$\mu_i$ = nilai *covariate* pada observasi yang bersesuaian dengan $y_{ij}$

$\tau_i$ = pengaruh perlakuan ke-i

$\beta$ = koefisien regresi linier

$x_{ij}$ = random error

$\varepsilon_{ij}$ = adalah galat acak (random error) pada pengamatan ke-j dari populasi ke-i

$a$ = banyaknya kategori pada perlakuan

$n_i$ = banyaknya observasi pada kategori ke-i

Asumsi dalam ANCOVA

1. X adalah *fixed*, diukur tanpa error dan independen terhadap perlakuan (tidak dipengaruhi oleh perlakuan).
2. $\varepsilon_{ij}$ mengikuti sebaran NID (o,σ 2 ).
3. β ≠ 0 yang mengindikasikan bahwa antara x dan y terdapat hubungan linier.

**TABEL ANCOVA**

| Sumber | Jumlah Kuadrat $y$ | Jumlah Perkalian | Jumlah Kuadrat $x$ |
|---|---|---|---|
| Antara Populasi | $B_{yy}$ | $B_{xy}$ | $B_{xx}$ |
| Dalam Populasi | $E_{yy}$ | $E_{xy}$ | $E_{xx}$ |
| Total | $S_{yy}$ | $S_{xy}$ | $S_{xx}$ |

1. Tabel ANCOVA untuk jumlah amatan sama

| Sumber | Jumlah Kuadrat $y$ | Jumlah Perkalian | Jumlah Kuadrat $x$ |
|---|---|---|---|
| Antara Populasi | $B_{yy} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{nk}$ | $B_{xy} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}y_{i.}}{n} - \frac{x_{..}y_{..}}{nk}$ | $B_{xx} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}^2}{n} - \frac{x_{..}^2}{nk}$ |
| Dalam Populasi | $E_{yy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{y_{i.}^2}{n}$ | $E_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}y_{i.}}{n}$ | $E_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}^2}{n}$ |
| Total | $S_{yy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{nk}$ | $S_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \frac{x_{..}y_{..}}{nk}$ | $S_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{nk}$ |

2. Tabel ANCOVA untuk jumlah amatan tidak sama

| Sumber | Jumlah Kuadrat $y$ | Jumlah Perkalian | Jumlah Kuadrat $x$ |
|---|---|---|---|
| Antara Populasi | $B_{yy} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_{i.}^2}{n_i}$ | $B_{xy} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}y_{i.}}{n_i}$ | $B_{xx} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}^2}{n_i}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-\frac{y_{..}^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ | $-\frac{x_{..}y_{..}}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ | $-\frac{x_{..}^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ |
| Dalam Populasi | $E_{yy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{y_{i.}^2}{n_i}$ | $E_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\frac{x_{i.}y_{i.}}{n_i}$ | $E_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{x_{i.}^2}{n_i}$ |
| Total | $S_{yy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ | $S_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \frac{x_{..}y_{..}}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ | $S_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ |

Catatan : $\sum_{i=1}^{k} n_i = nk$ , jika $n_i = \ldots = n_k$

Penghitungan JKR (Jumlah Kuadrat Regresi) dan JKG (Jumlah Kuadrat Galat) :

Dengan derajat bebas $k - 1$

$$JKR_{\mu_i} = JKR_{full} - JKR_{reduced}$$

$$= B_{yy} + \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$$

Dengan derajat bebas 1

$$JKR_{\beta} = \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$$

Dengan derajat bebas $nk - k - 1$

$$JKG = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}}$$

**PENGUJIAN HIPOTESIS**

Kesamaan Rata-Rata Populasi/Kelompok

1. Hipotesis

   $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

   $H_1: \mu_i \neq \mu_l, \forall i \neq l\ dan\ i = l = 1, 2, \ldots, k$

2. Tentukan tingat signifikansi α
3. Hitung nilai statistik uji dan tabel

   $$F_{hit-1} = \frac{\frac{JKR_{\mu_i}}{(k-1)}}{\frac{JKG}{(nk-k-1)}} \sim F_{k-1,nk-k-1}$$

4. Tentukan daerah kritis

   Tolak $H_0$ jika :

   $$F_{hit-1} > F_{\alpha,k-1,nk-k-1}$$

   $$atau$$

   $$p - value < \alpha$$

5. Buat keputusan dan kesimpulan

Koefisien dari Kovariat

1. Hipotesis

   $H_0: \beta = 0$

   $H_1: \beta \neq 0$

2. Tentukan tingat signifikansi α
3. Hitung nilai statistik uji dan tabel

   $$F_{hit-2} = \frac{JKR_{\beta}}{\frac{JKG}{(nk-k-1)}} \sim F_{1,nk-k-1}$$

4. Tentukan daerah kritis

   Tolak $H_0$ jika :

   $F_{hit-2} > F_{\alpha,1,nk-k-1}$

   $atau$

   $p - value < \alpha$

5. Buat keputusan dan kesimpulan

**CONTOH SOAL**

1. Banyaknya angka kematian dikarenakan kadar hemoglobin yang rendah (Y), mendorong klinik Kendal untuk melakukan penelitian tentang kadar hemoglobin bagi karyawan yang bekerja pada shift pagi, shift malam, dan kondisi normal. Berdasarkan penelitian Kesehatan, diketahui bahwa kadar hemoglobin dipengaruhi oleh konsumsi rata-rata asupan zat besi per hari (X). oleh karena itu, kadar hemoglobin berperan sebagai kontrol. Ujilah, apakah ada perbedaan rata-rata kadar hemoglobin pada karyawan yang bekerja pada shift pagi, shift malam, dan kondisi normal. Asumsikan populasi menyebar normal dan varians antar amatan saling independent. Gunakan taraf signifikansi 5%.

| NO | Shift Pagi | Shift Malam | Normal |
|---|---|---|---|

| | Y | X | Y | X | Y | X |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 19 | 13 | 20 | 18 | 12 | 16 |
| **2** | 19 | 16 | 19 | 6 | 16 | 15 |
| **3** | 22 | 10 | 12 | 8 | 14 | 24 |
| **4** | 15 | 11 | 6 | 15 | 16 | 16 |
| **5** | 12 | 12 | 19 | 9 | 16 | 20 |
| **6** | 19 | 13 | 15 | 13 | 12 | 15 |
| **7** | 15 | 12 | 15 | 16 | 16 | 11 |
| **8** | 17 | 10 | 13 | 8 | 17 | 9 |
| **9** | 24 | 13 | 16 | 16 | 19 | 19 |
| **10** | 13 | 20 | 17 | 11 | 16 | 15 |
| **11** | 24 | 14 | 15 | 8 | 21 | 16 |
| **12** | 19 | 12 | 9 | 14 | 15 | 11 |
| **13** | 13 | 11 | 9 | 16 | 18 | 9 |
| **14** | 12 | 13 | 15 | 11 | 14 | 15 |
| **15** | 17 | 10 | 11 | 17 | 11 | 11 |

2. Seorang peneliti ingin mengetahui apakah ada pengaruh metode mengajar terhadap nilai mata kuliah mahasiswa. Dalam kelas tersebut terdapat 3 macam metode pembelajaran yang diterapkan dalam satu kelas, yaitu metode A, metode B, dan metode C. Akan tetapi, dalam kenyataannya nilai mahasiswa tidak hanya ditentukan oleh metode pembelajaran yang diterapkan, melainkan juga dipengaruhi oleh faktor IQ. Dalam kasus ini, IQ digunakan sebagai kovariat (peubah kontrol) untuk mengurangi tingkat kesalahan. Dengan taraf signifikansi 5%, ujilah apakah terdapat pengaruh metode mengajar terhadap nilai mahasiswa dengan mempertimbangkan faktor IQ sebagai kovariat.

| **NO** | Metode A | | Metode B | | Metode C | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nilai | IQ | Nilai | IQ | Nilai | IQ |
| **1** | 80 | 105 | 77 | 105 | 91 | 122 |
| **2** | 87 | 105 | 76 | 102 | 80 | 110 |
| **3** | 86 | 108 | 85 | 111 | 74 | 110 |
| **4** | 88 | 115 | 87 | 115 | 70 | 105 |
| **5** | 90 | 120 | 88 | 120 | 81 | 112 |
| **6** | 95 | 116 | 90 | 117 | 80 | 112 |
| **7** | 80 | 110 | 67 | 100 | 80 | 105 |
| **8** | 67 | 101 | 66 | 105 | 84 | 115 |
| **9** | 80 | 101 | 64 | 110 | 84 | 116 |
| **10** | 76 | 105 | 66 | 105 | 90 | 121 |
| **11** | 98 | 115 | 90 | 124 | 91 | 117 |
| **12** | 64 | 105 | 86 | 120 | 78 | 110 |

**JAWABAN**

1. Jawab :

**Perumusan Hipotesis**

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (Tidak terdapat perbedaan rata-rata kadar hemoglobin pada karyawan yang bekerja di shift pagi, shift malam, dan normal)

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ (Terdapat perbedaan rata-rata kadar hemoglobin pada karyawan yang bekerja di shift pagi, shift malam, dan normal)

**Taraf Uji**

$\alpha = 5\% = 0,05$

**Wilayah Kritis**

Akan dilakukan uji terhadap kesamaan rata-rata populasi atau kelompok untuk jumlah amatan (observasi) sama.

Tolak $H_0$: $F_{hit-1} > F_{\alpha;k-1;nk-k-1}$

Gagal tolak $H_0$: $F_{hit-1} \leq F_{\alpha;k-1;nk-k-1}$

**Perhitungan Statistik Uji**

- n = 15 ; k = 3
- $F_{hit-1} = \frac{JKR_{\mu_i}/(k-1)}{JKG/(nk-k-1)} \sim F_{k-1;nk-k-1}$
- $F_{hit-1} = \frac{JKR_{\mu_i}/(k-1)}{JKG/(nk-k-1)}$

  $F_{hit-1} = \frac{81,8/2}{550,37/41} = \frac{40,9}{13,42} = 3,05$
- $F_{\alpha;k-1;nk-k-1} = F_{0,05;2;41} = 3,2317$
- $JKR_{\mu_i} = B_{yy} + \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} - \frac{S^2_{xy}}{S_{xx}}$

  $JKR_{\mu_i} = 80,32 + \frac{(-73,13)^2}{555,4} - \frac{(-70,37)^2}{607,25}$

  $JKR_{\mu_i} = 80,32 + 9,63 - 8,15 = 81,8$

- $JKG = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} = 560 - \frac{(-73{,}13)^2}{555{,}4}$

  $JKG = 560 - 9,63 = 550,37$

- $B_{yy} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y^2_{i\cdot}}{n} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{nk}$

  $B_{yy} = \left(\frac{260^2}{15} + \frac{211^2}{15} + \frac{233^2}{15}\right) - \frac{704^2}{45}$

  $B_{yy} = 11094 - 11013,68 = 80,32$

- $S_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \frac{x_{\cdot\cdot}y_{\cdot\cdot}}{nk}$

  $S_{xy} = 9285 - \frac{(598)(704)}{45}$

  $S_{xy} = 9285 - 9355,37$

  $S_{xy} =- 70,37$

- $S_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x^2_{ij} - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{nk} = 8554 - \frac{598^2}{45}$

  $S_{xx} = 8554 - 7946,75 = 607,25$

- $E_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x^2_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \frac{x^2_{i\cdot}}{n}$

  $E_{xx} = 8554 - \left(\frac{190^2}{15} + \frac{186^2}{15} + \frac{222^2}{15}\right)$

  $E_{xx} = 8554 - 7998,6 = 555,4$

- $E_{yy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y^2_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \frac{y^2_{i\cdot}}{n}$

  $E_{yy} = 11654 - \left(\frac{260^2}{15} + \frac{211^2}{15} + \frac{233^2}{15}\right)$

  $E_{yy} = 11654 - 11094 = 560$

- $E_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i\cdot}y_{i\cdot}}{n} = 9285$

  $- \left(\frac{(190)(260)}{15} + \frac{(186)(211)}{15} + \frac{(222)(233)}{15}\right)$

  $E_{xy} = 9285 - 9358,13 =- 73,13$

Tabel untuk membantu perhitungan :

**Shift Pagi**

| No | X | $X^2$ | Y | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 169 | 19 | 361 | 247 |
| 2 | 16 | 256 | 19 | 361 | 304 |
| 3 | 10 | 100 | 22 | 484 | 220 |
| 4 | 11 | 121 | 15 | 225 | 165 |
| 5 | 12 | 144 | 12 | 144 | 144 |
| 6 | 13 | 169 | 19 | 361 | 247 |
| 7 | 12 | 144 | 15 | 225 | 180 |
| 8 | 10 | 100 | 17 | 289 | 170 |
| 9 | 13 | 169 | 24 | 576 | 312 |
| 10 | 20 | 400 | 13 | 169 | 260 |
| 11 | 14 | 196 | 24 | 576 | 336 |
| 12 | 12 | 144 | 19 | 361 | 228 |
| 13 | 11 | 121 | 13 | 169 | 143 |
| 14 | 13 | 169 | 12 | 144 | 156 |
| 15 | 10 | 100 | 17 | 289 | 170 |
| Jumlah | 190 | 2502 | 260 | 4734 | 3282 |
| Rata-Rata | 12.66667 | 166.8 | 17.33333 | 315.6 | |

**Shift Malam**

| No | X | $X^2$ | Y | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 324 | 20 | 400 | 360 |
| 2 | 6 | 36 | 19 | 361 | 114 |
| 3 | 8 | 64 | 12 | 144 | 96 |
| 4 | 15 | 225 | 6 | 36 | 90 |
| 5 | 9 | 81 | 19 | 361 | 171 |
| 6 | 13 | 169 | 15 | 225 | 195 |
| 7 | 16 | 256 | 15 | 225 | 240 |
| 8 | 8 | 64 | 13 | 169 | 104 |
| 9 | 16 | 256 | 16 | 256 | 256 |
| 10 | 11 | 121 | 17 | 289 | 187 |
| 11 | 8 | 64 | 15 | 225 | 120 |
| 12 | 14 | 196 | 9 | 81 | 126 |
| 13 | 16 | 256 | 9 | 81 | 144 |
| 14 | 11 | 121 | 15 | 225 | 165 |
| 15 | 17 | 289 | 11 | 121 | 187 |
| Jumlah | 186 | 2522 | 211 | 3199 | 2555 |
| Rata-Rata | 12.4 | 168.1333 | 14.06667 | 213.2667 | |

**Normal**

| No | X | $X^2$ | Y | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 256 | 12 | 144 | 192 |
| 2 | 15 | 225 | 16 | 256 | 240 |
| 3 | 24 | 576 | 14 | 196 | 336 |
| 4 | 16 | 256 | 16 | 256 | 256 |
| 5 | 20 | 400 | 16 | 256 | 320 |
| 6 | 15 | 225 | 12 | 144 | 180 |
| 7 | 11 | 121 | 16 | 256 | 176 |
| 8 | 9 | 81 | 17 | 289 | 153 |
| 9 | 19 | 361 | 19 | 361 | 361 |
| 10 | 15 | 225 | 16 | 256 | 240 |
| 11 | 16 | 256 | 21 | 441 | 336 |
| 12 | 11 | 121 | 15 | 225 | 165 |
| 13 | 9 | 81 | 18 | 324 | 162 |
| 14 | 15 | 225 | 14 | 196 | 210 |
| 15 | 11 | 121 | 11 | 121 | 121 |
| Jumlah | 222 | 3530 | 233 | 3721 | 3448 |
| Rata-Rata | 14.8 | 235.3333 | 15.53333 | 248.0667 | |

| Statistik | | Shift Pagi | | Shift Malam | | Normal | | Jumlah | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | X | Y | X | Y | X | Y | X | Y |
| n | n | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 45 | 45 |
| $\sum x_i$ | $\sum y_i$ | 190 | 260 | 186 | 211 | 222 | 233 | 598 | 704 |
| $\sum x^2_i$ | $\sum y^2_i$ | 2502 | 4734 | 2522 | 3199 | 3530 | 3721 | 8554 | 11654 |
| $\bar{x}_i$ | $\bar{y}_i$ | 12.66667 | 17.33333 | 12.4 | 14.06667 | 14.8 | 15.5333333 | 39.86667 | 46.93333 |
| $\sum XY$ | | 3282 | | 2555 | | 3448 | | 9285 | |

| Sumber | Jumlah Kuadrat $y$ | Jumlah Perkalian | Jumlah Kuadrat $x$ |
|---|---|---|---|
| Antara Populasi | 80.32 | 2.76 | 51.85 |
| Dalam Populasi | 560 | -73.13 | 555.4 |
| Total | 640.31 | -70.37 | 607.25 |

**Keputusan**

Berdasarkan perhitungan, diperoleh nilai $F_{hit-1} = 3,05$. Nilai ini lebih kecil jika dibandingkan dengan nilai F tabel yaitu $F_{\alpha;k-1;nk-k-1} = F_{0,05;2;41} = 3,22$. Oleh karena $F_{hit-1} < F_{0,05;2;41}$, maka keputusan yang diperoleh adalah **gagal tolak** $H_0$.

**Kesimpulan**

Dengan taraf signifikansi 5%, dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat perbedaan rata-rata kadar hemoglobin pada karyawan yang bekerja di shift pagi, shift malam, dan normal.

2. Jawab :

**Perumusan Hipotesis**

$H_0$: $\beta = 0$ (Tidak ada pengaruh IQ sebagai kovariat terhadap nilai mahasiswa)

$H_1$: $\beta \neq 0$ (Ada pengaruh IQ sebagai kovariat terhadap nilai mahasiswa)

**Taraf Uji**

$\alpha = 5\% = 0,05$

**Wilayah Kritis**

Akan dilakukan uji terhadap koefisien dari kovariat untuk jumlah amatan (observasi) sama.

Tolak $H_0$: $F_{hit-2} > F_{\alpha;1;nk-k-1}$

Gagal tolak $H_0$: $F_{hit-2} \leq F_{\alpha;1;nk-k-1}$

**Perhitungan Statistik Uji**

- n = 12 ; k = 3
- $F_{hit-2} = \frac{JKR_\beta}{JKG/(nk-k-1)} \sim F_{1,nk-k-1}$
- $F_{hit-2} = \frac{JKR_\beta}{JKG/(nk-k-1)} = \frac{1757,70}{1060,7/32}$

  $F_{hit-2} = 53,02$
- $F_{\alpha;1;nk-k-1} = F_{0,05;1;32} = 4,1491$
- $JKR_\beta = \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}} = \frac{1602,09^2}{1460,25} = 1757,70$
- $JKG = E_{yy} - \frac{E^2_{xy}}{E_{xx}}$

  $JKG = 2818,4 - 1757,70 = 1060,7$
- $E_{xx} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x^2_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\frac{x^2_{i\cdot}}{n} =$

  $444895 - \left(\frac{1306^2}{12} + \frac{1334^2}{12} + \frac{1355^2}{12}\right)$

  $E_{xx} = 444895 - 443434,75$

  $E_{xx} = 1460,25$
- $E_{yy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} y^2_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\frac{y^2_{i\cdot}}{n}$

  $E_{yy} = 239130 - \left(\frac{991^2}{12} + \frac{942^2}{12} + \frac{983^2}{12}\right)$

  $E_{yy} = 239130 - 236311,16$

  $E_{yy} = 2818,4$
- $E_{xy} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij} - \sum_{i=1}^{k}\frac{x_{i\cdot}y_{i\cdot}}{n}$

  $E_{xy} = 325172 -$
  $\left(\frac{(1306)(991)}{12} + \frac{(1334)(942)}{12} + \frac{(1355)(983)}{12}\right)$

  $E_{xy} = 325172 - 323569,91$

  $E_{xy} = 1602,09$

Tabel untuk membantu perhitungan :

**Metode A**

| No | X | $X^2$ | Y | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 105 | 11025 | 80 | 6400 | 8400 |
| 2 | 105 | 11025 | 87 | 7569 | 9135 |
| 3 | 108 | 11664 | 86 | 7396 | 9288 |
| 4 | 115 | 13225 | 88 | 7744 | 10120 |
| 5 | 120 | 14400 | 90 | 8100 | 10800 |
| 6 | 116 | 13456 | 95 | 9025 | 11020 |
| 7 | 110 | 12100 | 80 | 6400 | 8800 |
| 8 | 101 | 10201 | 67 | 4489 | 6767 |
| 9 | 101 | 10201 | 80 | 6400 | 8080 |
| 10 | 105 | 11025 | 76 | 5776 | 7980 |
| 11 | 115 | 13225 | 98 | 9604 | 11270 |
| 12 | 105 | 11025 | 64 | 4096 | 6720 |
| Jumlah | 1306 | 142572 | 991 | 82999 | 108380 |
| Rata-Rata | 108.833333 | 11881 | 82.58333 | 6916.5833 | |

**Metode B**

| No | X | $X^2$ | Y | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 105 | 11025 | 77 | 5929 | 8085 |
| 2 | 102 | 10404 | 76 | 5776 | 7752 |
| 3 | 111 | 12321 | 85 | 7225 | 9435 |
| 4 | 115 | 13225 | 87 | 7569 | 10005 |
| 5 | 120 | 14400 | 88 | 7744 | 10560 |
| 6 | 117 | 13689 | 90 | 8100 | 10530 |
| 7 | 100 | 10000 | 67 | 4489 | 6700 |
| 8 | 105 | 11025 | 66 | 4356 | 6930 |
| 9 | 110 | 12100 | 64 | 4096 | 7040 |
| 10 | 105 | 11025 | 66 | 4356 | 6930 |
| 11 | 124 | 15376 | 90 | 8100 | 11160 |
| 12 | 120 | 14400 | 86 | 7396 | 10320 |
| Jumlah | 1334 | 148990 | 942 | 75136 | 105447 |
| Rata-Rata | 111.1666667 | 12415.8333 | 78.5 | 6261.333 | |

**Metode C**

| No | X | $X^2$ | Y | $Y^2$ | XY |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 122 | 14884 | 91 | 8281 | 11102 |
| 2 | 110 | 12100 | 80 | 6400 | 8800 |
| 3 | 110 | 12100 | 74 | 5476 | 8140 |
| 4 | 105 | 11025 | 70 | 4900 | 7350 |
| 5 | 112 | 12544 | 81 | 6561 | 9072 |
| 6 | 112 | 12544 | 80 | 6400 | 8960 |
| 7 | 105 | 11025 | 80 | 6400 | 8400 |
| 8 | 115 | 13225 | 84 | 7056 | 9660 |
| 9 | 116 | 13456 | 84 | 7056 | 9744 |
| 10 | 121 | 14641 | 90 | 8100 | 10890 |
| 11 | 117 | 13689 | 91 | 8281 | 10647 |
| 12 | 110 | 12100 | 78 | 6084 | 8580 |
| Jumlah | 1355 | 153333 | 983 | 80995 | 111345 |
| Rata-Rata | 112.9167 | 12777.75 | 81.91667 | 6749.583 | 9278.75 |

| Statistik | | Metode A | | Metode B | | Metode C | | Jumlah | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | X | Y | X | Y | X | Y | X | Y |
| n | n | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 36 | 36 |
| $\sum x_i$ | $\sum y_i$ | 1306 | 991 | 1334 | 942 | 1355 | 983 | 3995 | 2916 |
| $\sum {x^2}_i$ | $\sum {y^2}_i$ | 142572 | 82999 | 148990 | 75136 | 153333 | 80995 | 444895 | 239130 |
| $\bar{x}_i$ | $\bar{y}_i$ | 109 | 83 | 111.16667 | 78.5 | 112.9166667 | 81.91666667 | 332.9166667 | 243 |
| $\sum XY$ | | 108380 | | 105447 | | 111345 | | 325172 | |

| Sumber | Jumlah Kuadrat $y$ | Jumlah Perkalian | Jumlah Kuadrat $x$ |
|---|---|---|---|
| Antara Populasi | 115.167 | -25.083 | 100.722 |
| Dalam Populasi | 2818.4 | 1602.09 | 1460.25 |
| Total | 2934 | 1577 | 1560.972 |

**Keputusan**

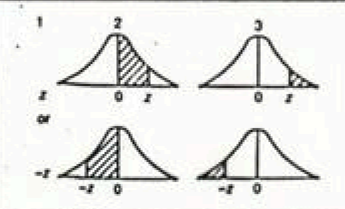
Berdasarkan perhitungan, diperoleh nila $F_{hit-2} = 53,02$. Nilai ini lebih besar jika dibandingkan dengan nilai F tabel yaitu $F_{\alpha;1;nk-k-1} = F_{0,05;1;32} = 4,1491$. Oleh karena $F_{hit-2} > F_{0,05;1;32}$, maka keputusan yang diperoleh adalah **tolak** $H_0$.

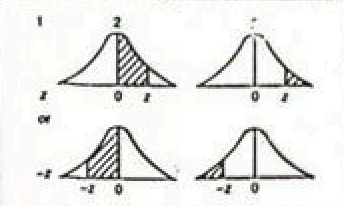
**Kesimpulan**

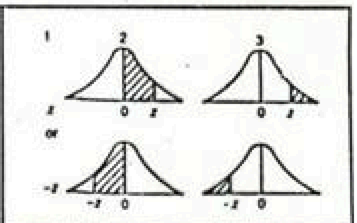
Dengan tingkat signifikansi 5%, dapat disimpulkan bahwa IQ memiliki pengaruh yang signifikan terhadap nilai mahasiswa selain metode belajar yang digunakan.

# Lampiran Tabel

## LUAS DISTRIBUSI NORMAL STANDAR



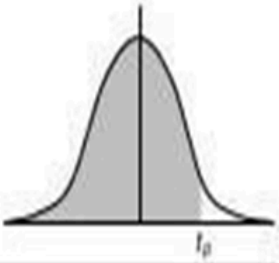




| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | .0000 | .5000 | 0.55 | .2088 | .2912 | 1.10 | .3643 | .1357 |
| 0.01 | .0040 | .4960 | 0.56 | .2123 | .2877 | 1.11 | .3665 | .1335 |
| 0.02 | .0080 | .4920 | 0.57 | .2157 | .2843 | 1.12 | .3686 | .1314 |
| 0.03 | .0120 | .4880 | 0.58 | .2190 | .2810 | 1.13 | .3708 | .1292 |
| 0.04 | .0160 | .4840 | 0.59 | .2224 | .2776 | 1.14 | .3729 | .1271 |
| 0.05 | .0199 | .4801 | 0.60 | .2257 | .2743 | 1.15 | .3749 | .1251 |
| 0.06 | .0239 | .4761 | 0.61 | .2291 | .2709 | 1.16 | .3770 | .1230 |
| 0.07 | .0279 | .4721 | 0.62 | .2324 | .2676 | 1.17 | .3790 | .1210 |
| 0.08 | .0319 | .4681 | 0.63 | .2357 | .2643 | 1.18 | .3810 | .1190 |
| 0.09 | .0359 | .4641 | 0.64 | .2389 | .2611 | 1.19 | .3830 | .1170 |
| 0.10 | .0398 | .4602 | 0.65 | .2422 | .2578 | 1.20 | .3849 | .1151 |
| 0.11 | .0438 | .4562 | 0.66 | .2454 | .2546 | 1.21 | .3869 | .1131 |
| 0.12 | .0478 | .4522 | 0.67 | .2486 | .2514 | 1.22 | .3888 | .1112 |
| 0.13 | .0517 | .4483 | 0.68 | .2517 | .2483 | 1.23 | .3907 | .1093 |
| 0.14 | .0557 | .4443 | 0.69 | .2549 | .2451 | 1.24 | .3925 | .1075 |
| 0.15 | .0596 | .4404 | 0.70 | .2580 | .2420 | 1.25 | .3944 | .1056 |
| 0.16 | .0636 | .4364 | 0.71 | .2611 | .2389 | 1.26 | .3962 | .1038 |
| 0.17 | .0675 | .4325 | 0.72 | .2642 | .2358 | 1.27 | .3980 | .1020 |
| 0.18 | .0714 | .4286 | 0.73 | .2673 | .2327 | 1.28 | .3997 | .1003 |
| 0.19 | .0753 | .4247 | 0.74 | .2704 | .2296 | 1.29 | .4015 | .0985 |
| 0.20 | .0793 | .4207 | 0.75 | .2734 | .2266 | 1.30 | .4032 | .0968 |
| 0.21 | .0832 | .4168 | 0.76 | .2764 | .2236 | 1.31 | .4049 | .0951 |
| 0.22 | .0871 | .4129 | 0.77 | .2794 | .2206 | 1.32 | .4066 | .0934 |
| 0.23 | .0910 | .4090 | 0.78 | .2823 | .2177 | 1.33 | .4082 | .0918 |
| 0.24 | .0948 | .4052 | 0.79 | .2852 | .2148 | 1.34 | .4099 | .0901 |
| 0.25 | .0987 | .4013 | 0.80 | .2881 | .2119 | 1.35 | .4115 | .0885 |
| 0.26 | .1026 | .3974 | 0.81 | .2910 | .2090 | 1.36 | .4131 | .0869 |
| 0.27 | .1064 | .3936 | 0.82 | .2939 | .2061 | 1.37 | .4147 | .0853 |
| 0.28 | .1103 | .3897 | 0.83 | .2967 | .2033 | 1.38 | .4162 | .0838 |
| 0.29 | .1141 | .3859 | 0.84 | .2995 | .2005 | 1.39 | .4177 | .0823 |
| 0.30 | .1179 | .3821 | 0.85 | .3023 | .1977 | 1.40 | .4192 | .0808 |
| 0.31 | .1217 | .3783 | 0.86 | .3051 | .1949 | 1.41 | .4207 | .0793 |
| 0.32 | .1255 | .3745 | 0.87 | .3078 | .1922 | 1.42 | .4222 | .0778 |
| 0.33 | .1293 | .3707 | 0.88 | .3106 | .1894 | 1.43 | .4236 | .0764 |
| 0.34 | .1331 | .3669 | 0.89 | .3133 | .1867 | 1.44 | .4251 | .0749 |
| 0.35 | .1368 | .3632 | 0.90 | .3159 | .1841 | 1.45 | .4265 | .0735 |
| 0.36 | .1406 | .3594 | 0.91 | .3186 | .1814 | 1.46 | .4279 | .0721 |
| 0.37 | .1443 | .3557 | 0.92 | .3212 | .1788 | 1.47 | .4292 | .0708 |
| 0.38 | .1480 | .3520 | 0.93 | .3238 | .1762 | 1.48 | .4306 | .0694 |
| 0.39 | .1517 | .3483 | 0.94 | .3264 | .1736 | 1.49 | .4319 | .0681 |
| 0.40 | .1554 | .3446 | 0.95 | .3289 | .1711 | 1.50 | .4332 | .0668 |
| 0.41 | .1591 | .3409 | 0.96 | .3315 | .1685 | 1.51 | .4345 | .0655 |
| 0.42 | .1628 | .3372 | 0.97 | .3340 | .1660 | 1.52 | .4357 | .0643 |
| 0.43 | .1664 | .3336 | 0.98 | .3365 | .1635 | 1.53 | .4370 | .0630 |
| 0.44 | .1700 | .3300 | 0.99 | .3389 | .1611 | 1.54 | .4382 | .0618 |
| 0.45 | .1736 | .3264 | 1.00 | .3413 | .1587 | 1.55 | .4394 | .0606 |
| 0.46 | .1772 | .3228 | 1.01 | .3438 | .1562 | 1.56 | .4406 | .0594 |
| 0.47 | .1808 | .3192 | 1.02 | .3461 | .1539 | 1.57 | .4418 | .0582 |
| 0.48 | .1844 | .3156 | 1.03 | .3485 | .1515 | 1.58 | .4429 | .0571 |
| 0.49 | .1879 | .3121 | 1.04 | .3508 | .1492 | 1.59 | .4441 | .0559 |
| 0.50 | .1915 | .3085 | 1.05 | .3531 | .1469 | 1.60 | .4452 | .0548 |
| 0.51 | .1950 | .3050 | 1.06 | .3554 | .1446 | 1.61 | .4463 | .0537 |
| 0.52 | .1985 | .3015 | 1.07 | .3577 | .1423 | 1.62 | .4474 | .0526 |
| 0.53 | .2019 | .2981 | 1.08 | .3599 | .1401 | 1.63 | .4484 | .0516 |
| 0.54 | .2054 | .2946 | 1.09 | .3621 | .1379 | 1.64 | .4495 | .0505 |

Lampiran I diambil dari Fisher dan Yates: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* diterbitkan oleh Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver and Boyd Ltd, Edinburgh) dan seizin penulis dan penerbit serta di adaptasi dari buku R. S. Witte: *Statistics*, Edisi ke 2, Holt, Rinehart and Winston, 1985 (sebelumnya

**Sebaran t-Student**




Nilai persentil untuk distribusi t
v = dk
(Bilangan dalam badan tabel menyatakan tp)

| v | t | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.9995 | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.8 | 0.75 | 0.7 | 0.75 | 0.6 | 0.55 | 0.5 |
| 1 | 636.619 | 63.657 | 31.821 | 12.706 | 6.314 | 3.078 | 1.376 | 1.000 | 0.727 | 1.000 | 0.325 | 0.158 | 0.000 |
| 2 | 31.599 | 9.925 | 6.965 | 4.303 | 2.920 | 1.886 | 1.061 | 0.816 | 0.617 | 0.816 | 0.289 | 0.142 | 0.000 |
| 3 | 12.924 | 5.841 | 4.541 | 3.182 | 2.353 | 1.638 | 0.978 | 0.765 | 0.584 | 0.765 | 0.277 | 0.137 | 0.000 |
| 4 | 8.610 | 4.604 | 3.747 | 2.776 | 2.132 | 1.533 | 0.941 | 0.741 | 0.569 | 0.741 | 0.271 | 0.134 | 0.000 |
| 5 | 6.869 | 4.032 | 3.365 | 2.571 | 2.015 | 1.476 | 0.920 | 0.727 | 0.559 | 0.727 | 0.267 | 0.132 | 0.000 |
| 6 | 5.959 | 3.707 | 3.143 | 2.447 | 1.943 | 1.440 | 0.906 | 0.718 | 0.553 | 0.718 | 0.265 | 0.131 | 0.000 |
| 7 | 5.408 | 3.499 | 2.998 | 2.365 | 1.895 | 1.415 | 0.896 | 0.711 | 0.549 | 0.711 | 0.263 | 0.130 | 0.000 |
| 8 | 5.041 | 3.355 | 2.896 | 2.306 | 1.860 | 1.397 | 0.889 | 0.706 | 0.546 | 0.706 | 0.262 | 0.130 | 0.000 |
| 9 | 4.781 | 3.250 | 2.821 | 2.262 | 1.833 | 1.383 | 0.883 | 0.703 | 0.543 | 0.703 | 0.261 | 0.129 | 0.000 |
| 10 | 4.587 | 3.169 | 2.764 | 2.228 | 1.812 | 1.372 | 0.879 | 0.700 | 0.542 | 0.700 | 0.260 | 0.129 | 0.000 |
| 11 | 4.437 | 3.106 | 2.718 | 2.201 | 1.796 | 1.363 | 0.876 | 0.697 | 0.540 | 0.697 | 0.260 | 0.129 | 0.000 |
| 12 | 4.318 | 3.055 | 2.681 | 2.179 | 1.782 | 1.356 | 0.873 | 0.695 | 0.539 | 0.695 | 0.259 | 0.128 | 0.000 |
| 13 | 4.221 | 3.012 | 2.650 | 2.160 | 1.771 | 1.350 | 0.870 | 0.694 | 0.538 | 0.694 | 0.259 | 0.128 | 0.000 |
| 14 | 4.140 | 2.977 | 2.624 | 2.145 | 1.761 | 1.345 | 0.868 | 0.692 | 0.537 | 0.692 | 0.258 | 0.128 | 0.000 |
| 15 | 4.073 | 2.947 | 2.602 | 2.131 | 1.753 | 1.341 | 0.866 | 0.691 | 0.536 | 0.691 | 0.258 | 0.128 | 0.000 |
| 16 | 4.015 | 2.921 | 2.583 | 2.120 | 1.746 | 1.337 | 0.865 | 0.690 | 0.535 | 0.690 | 0.258 | 0.128 | 0.000 |
| 17 | 3.965 | 2.898 | 2.567 | 2.110 | 1.740 | 1.333 | 0.863 | 0.689 | 0.534 | 0.689 | 0.257 | 0.128 | 0.000 |
| 18 | 3.922 | 2.878 | 2.552 | 2.101 | 1.734 | 1.330 | 0.862 | 0.688 | 0.534 | 0.688 | 0.257 | 0.127 | 0.000 |
| 19 | 3.883 | 2.861 | 2.539 | 2.093 | 1.729 | 1.328 | 0.861 | 0.688 | 0.533 | 0.688 | 0.257 | 0.127 | 0.000 |
| 20 | 3.850 | 2.845 | 2.528 | 2.086 | 1.725 | 1.325 | 0.860 | 0.687 | 0.533 | 0.687 | 0.257 | 0.127 | 0.000 |
| 21 | 3.819 | 2.831 | 2.518 | 2.080 | 1.721 | 1.323 | 0.859 | 0.686 | 0.532 | 0.686 | 0.257 | 0.127 | 0.000 |
| 22 | 3.792 | 2.819 | 2.508 | 2.074 | 1.717 | 1.321 | 0.858 | 0.686 | 0.532 | 0.686 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 23 | 3.768 | 2.807 | 2.500 | 2.069 | 1.714 | 1.319 | 0.858 | 0.685 | 0.532 | 0.685 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 24 | 3.745 | 2.797 | 2.492 | 2.064 | 1.711 | 1.318 | 0.857 | 0.685 | 0.531 | 0.685 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 25 | 3.725 | 2.787 | 2.485 | 2.060 | 1.708 | 1.316 | 0.856 | 0.684 | 0.531 | 0.684 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 26 | 3.707 | 2.779 | 2.479 | 2.056 | 1.706 | 1.315 | 0.856 | 0.684 | 0.531 | 0.684 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 27 | 3.690 | 2.771 | 2.473 | 2.052 | 1.703 | 1.314 | 0.855 | 0.684 | 0.531 | 0.684 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 28 | 3.674 | 2.763 | 2.467 | 2.048 | 1.701 | 1.313 | 0.855 | 0.683 | 0.530 | 0.683 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 29 | 3.659 | 2.756 | 2.462 | 2.045 | 1.699 | 1.311 | 0.854 | 0.683 | 0.530 | 0.683 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 30 | 3.646 | 2.750 | 2.457 | 2.042 | 1.697 | 1.310 | 0.854 | 0.683 | 0.530 | 0.683 | 0.256 | 0.127 | 0.000 |
| 40 | 3.551 | 2.704 | 2.423 | 2.021 | 1.684 | 1.303 | 0.851 | 0.681 | 0.529 | 0.681 | 0.255 | 0.126 | 0.000 |
| 60 | 3.460 | 2.660 | 2.390 | 2.000 | 1.671 | 1.296 | 0.848 | 0.679 | 0.527 | 0.679 | 0.254 | 0.126 | 0.000 |
| 120 | 3.373 | 2.617 | 2.358 | 1.980 | 1.658 | 1.289 | 0.845 | 0.677 | 0.526 | 0.677 | 0.254 | 0.126 | 0.000 |
| ∞ | 2.581 | 2.330 | 1.962 | 1.646 | 1.282 | 1.282 | 1.282 | 1.282 | 0.842 | 0.675 | 0.525 | 0.253 | 0.126 |

**Table A.10** (continued) Critical Values for Bartlett's Test

| | $b_k(0.05; n)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Number of Populations, $k$ | | | | | | | | |
| $n$ | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **3** | 0.3123 | 0.3058 | 0.3173 | 0.3299 | | | | | |
| **4** | 0.4780 | 0.4699 | 0.4803 | 0.4921 | 0.5028 | 0.5122 | 0.5204 | 0.5277 | 0.5341 |
| **5** | 0.5845 | 0.5762 | 0.5850 | 0.5952 | 0.6045 | 0.6126 | 0.6197 | 0.6260 | 0.6315 |
| **6** | 0.6563 | 0.6483 | 0.6559 | 0.6646 | 0.6727 | 0.6798 | 0.6860 | 0.6914 | 0.6961 |
| **7** | 0.7075 | 0.7000 | 0.7065 | 0.7142 | 0.7213 | 0.7275 | 0.7329 | 0.7376 | 0.7418 |
| **8** | 0.7456 | 0.7387 | 0.7444 | 0.7512 | 0.7574 | 0.7629 | 0.7677 | 0.7719 | 0.7757 |
| **9** | 0.7751 | 0.7686 | 0.7737 | 0.7798 | 0.7854 | 0.7903 | 0.7946 | 0.7984 | 0.8017 |
| **10** | 0.7984 | 0.7924 | 0.7970 | 0.8025 | 0.8076 | 0.8121 | 0.8160 | 0.8194 | 0.8224 |
| **11** | 0.8175 | 0.8118 | 0.8160 | 0.8210 | 0.8257 | 0.8298 | 0.8333 | 0.8365 | 0.8392 |
| **12** | 0.8332 | 0.8280 | 0.8317 | 0.8364 | 0.8407 | 0.8444 | 0.8477 | 0.8506 | 0.8531 |
| **13** | 0.8465 | 0.8415 | 0.8450 | 0.8493 | 0.8533 | 0.8568 | 0.8598 | 0.8625 | 0.8648 |
| **14** | 0.8578 | 0.8532 | 0.8564 | 0.8604 | 0.8641 | 0.8673 | 0.8701 | 0.8726 | 0.8748 |
| **15** | 0.8676 | 0.8632 | 0.8662 | 0.8699 | 0.8734 | 0.8764 | 0.8790 | 0.8814 | 0.8834 |
| **16** | 0.8761 | 0.8719 | 0.8747 | 0.8782 | 0.8815 | 0.8843 | 0.8868 | 0.8890 | 0.8909 |
| **17** | 0.8836 | 0.8796 | 0.8823 | 0.8856 | 0.8886 | 0.8913 | 0.8936 | 0.8957 | 0.8975 |
| **18** | 0.8902 | 0.8865 | 0.8890 | 0.8921 | 0.8949 | 0.8975 | 0.8997 | 0.9016 | 0.9033 |
| **19** | 0.8961 | 0.8926 | 0.8949 | 0.8979 | 0.9006 | 0.9030 | 0.9051 | 0.9069 | 0.9086 |
| **20** | 0.9015 | 0.8980 | 0.9003 | 0.9031 | 0.9057 | 0.9080 | 0.9100 | 0.9117 | 0.9132 |
| **21** | 0.9063 | 0.9030 | 0.9051 | 0.9078 | 0.9103 | 0.9124 | 0.9143 | 0.9160 | 0.9175 |
| **22** | 0.9106 | 0.9075 | 0.9095 | 0.9120 | 0.9144 | 0.9165 | 0.9183 | 0.9199 | 0.9213 |
| **23** | 0.9146 | 0.9116 | 0.9135 | 0.9159 | 0.9182 | 0.9202 | 0.9219 | 0.9235 | 0.9248 |
| **24** | 0.9182 | 0.9153 | 0.9172 | 0.9195 | 0.9217 | 0.9236 | 0.9253 | 0.9267 | 0.9280 |
| **25** | 0.9216 | 0.9187 | 0.9205 | 0.9228 | 0.9249 | 0.9267 | 0.9283 | 0.9297 | 0.9309 |
| **26** | 0.9246 | 0.9219 | 0.9236 | 0.9258 | 0.9278 | 0.9296 | 0.9311 | 0.9325 | 0.9336 |
| **27** | 0.9275 | 0.9249 | 0.9265 | 0.9286 | 0.9305 | 0.9322 | 0.9337 | 0.9350 | 0.9361 |
| **28** | 0.9301 | 0.9276 | 0.9292 | 0.9312 | 0.9330 | 0.9347 | 0.9361 | 0.9374 | 0.9385 |
| **29** | 0.9326 | 0.9301 | 0.9316 | 0.9336 | 0.9354 | 0.9370 | 0.9383 | 0.9396 | 0.9406 |
| **30** | 0.9348 | 0.9325 | 0.9340 | 0.9358 | 0.9376 | 0.9391 | 0.9404 | 0.9416 | 0.9426 |
| **40** | 0.9513 | 0.9495 | 0.9506 | 0.9520 | 0.9533 | 0.9545 | 0.9555 | 0.9564 | 0.9572 |
| **50** | 0.9612 | 0.9597 | 0.9606 | 0.9617 | 0.9628 | 0.9637 | 0.9645 | 0.9652 | 0.9658 |
| **60** | 0.9677 | 0.9665 | 0.9672 | 0.9681 | 0.9690 | 0.9698 | 0.9705 | 0.9710 | 0.9716 |
| **80** | 0.9758 | 0.9749 | 0.9754 | 0.9761 | 0.9768 | 0.9774 | 0.9779 | 0.9783 | 0.9787 |
| **100** | 0.9807 | 0.9799 | 0.9804 | 0.9809 | 0.9815 | 0.9819 | 0.9823 | 0.9827 | 0.9830 |

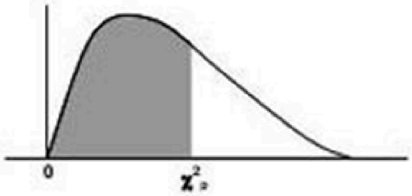
**Table A.10** Critical Values for Bartlett's Test

| | $b_k(0.01; n)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Number of Populations, $k$ | | | | | | | | |
| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | 0.1411 | 0.1672 | | | | | | | |
| 4 | 0.2843 | 0.3165 | 0.3475 | 0.3729 | 0.3937 | 0.4110 | | | |
| 5 | 0.3984 | 0.4304 | 0.4607 | 0.4850 | 0.5046 | 0.5207 | 0.5343 | 0.5458 | 0.5558 |
| 6 | 0.4850 | 0.5149 | 0.5430 | 0.5653 | 0.5832 | 0.5978 | 0.6100 | 0.6204 | 0.6293 |
| 7 | 0.5512 | 0.5787 | 0.6045 | 0.6248 | 0.6410 | 0.6542 | 0.6652 | 0.6744 | 0.6824 |
| 8 | 0.6031 | 0.6282 | 0.6518 | 0.6704 | 0.6851 | 0.6970 | 0.7069 | 0.7153 | 0.7225 |
| 9 | 0.6445 | 0.6676 | 0.6892 | 0.7062 | 0.7197 | 0.7305 | 0.7395 | 0.7471 | 0.7536 |
| 10 | 0.6783 | 0.6996 | 0.7195 | 0.7352 | 0.7475 | 0.7575 | 0.7657 | 0.7726 | 0.7786 |
| 11 | 0.7063 | 0.7260 | 0.7445 | 0.7590 | 0.7703 | 0.7795 | 0.7871 | 0.7935 | 0.7990 |
| 12 | 0.7299 | 0.7483 | 0.7654 | 0.7789 | 0.7894 | 0.7980 | 0.8050 | 0.8109 | 0.8160 |
| 13 | 0.7501 | 0.7672 | 0.7832 | 0.7958 | 0.8056 | 0.8135 | 0.8201 | 0.8256 | 0.8303 |
| 14 | 0.7674 | 0.7835 | 0.7985 | 0.8103 | 0.8195 | 0.8269 | 0.8330 | 0.8382 | 0.8426 |
| 15 | 0.7825 | 0.7977 | 0.8118 | 0.8229 | 0.8315 | 0.8385 | 0.8443 | 0.8491 | 0.8532 |
| 16 | 0.7958 | 0.8101 | 0.8235 | 0.8339 | 0.8421 | 0.8486 | 0.8541 | 0.8586 | 0.8625 |
| 17 | 0.8076 | 0.8211 | 0.8338 | 0.8436 | 0.8514 | 0.8576 | 0.8627 | 0.8670 | 0.8707 |
| 18 | 0.8181 | 0.8309 | 0.8429 | 0.8523 | 0.8596 | 0.8655 | 0.8704 | 0.8745 | 0.8780 |
| 19 | 0.8275 | 0.8397 | 0.8512 | 0.8601 | 0.8670 | 0.8727 | 0.8773 | 0.8811 | 0.8845 |
| 20 | 0.8360 | 0.8476 | 0.8586 | 0.8671 | 0.8737 | 0.8791 | 0.8835 | 0.8871 | 0.8903 |
| 21 | 0.8437 | 0.8548 | 0.8653 | 0.8734 | 0.8797 | 0.8848 | 0.8890 | 0.8926 | 0.8956 |
| 22 | 0.8507 | 0.8614 | 0.8714 | 0.8791 | 0.8852 | 0.8901 | 0.8941 | 0.8975 | 0.9004 |
| 23 | 0.8571 | 0.8673 | 0.8769 | 0.8844 | 0.8902 | 0.8949 | 0.8988 | 0.9020 | 0.9047 |
| 24 | 0.8630 | 0.8728 | 0.8820 | 0.8892 | 0.8948 | 0.8993 | 0.9030 | 0.9061 | 0.9087 |
| 25 | 0.8684 | 0.8779 | 0.8867 | 0.8936 | 0.8990 | 0.9034 | 0.9069 | 0.9099 | 0.9124 |
| 26 | 0.8734 | 0.8825 | 0.8911 | 0.8977 | 0.9029 | 0.9071 | 0.9105 | 0.9134 | 0.9158 |
| 27 | 0.8781 | 0.8869 | 0.8951 | 0.9015 | 0.9065 | 0.9105 | 0.9138 | 0.9166 | 0.9190 |
| 28 | 0.8824 | 0.8909 | 0.8988 | 0.9050 | 0.9099 | 0.9138 | 0.9169 | 0.9196 | 0.9219 |
| 29 | 0.8864 | 0.8946 | 0.9023 | 0.9083 | 0.9130 | 0.9167 | 0.9198 | 0.9224 | 0.9246 |
| 30 | 0.8902 | 0.8981 | 0.9056 | 0.9114 | 0.9159 | 0.9195 | 0.9225 | 0.9250 | 0.9271 |
| 40 | 0.9175 | 0.9235 | 0.9291 | 0.9335 | 0.9370 | 0.9397 | 0.9420 | 0.9439 | 0.9455 |
| 50 | 0.9339 | 0.9387 | 0.9433 | 0.9468 | 0.9496 | 0.9518 | 0.9536 | 0.9551 | 0.9564 |
| 60 | 0.9449 | 0.9489 | 0.9527 | 0.9557 | 0.9580 | 0.9599 | 0.9614 | 0.9626 | 0.9637 |
| 80 | 0.9586 | 0.9617 | 0.9646 | 0.9668 | 0.9685 | 0.9699 | 0.9711 | 0.9720 | 0.9728 |
| 100 | 0.9669 | 0.9693 | 0.9716 | 0.9734 | 0.9748 | 0.9759 | 0.9769 | 0.9776 | 0.9783 |

Reproduced from D. D. Dyer and J. P. Keating, "On the Determination of Critical Values for Bartlett's Test," *J. Am. Stat. Assoc.*, **75**, 1980, by permission of the Board of Directors.

**Sebaran Chi-square**

Nilai persentil untuk distribusi $\chi^2$
v = dk
(Bilangan dalam badan tabel menyatakan $\chi^2_p$)




| v | $\chi^2$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.75 | 0.5 | 0.25 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| 1 | 7.88 | 6.63 | 5.02 | 3.84 | 2.71 | 1.32 | 0.455 | 0.102 | 0.016 | 0.004 | 0.001 | 0.0002 | 0.0000 |
| 2 | 10.6 | 9.21 | 7.38 | 5.99 | 4.61 | 2.77 | 1.39 | 0.575 | 0.211 | 0.103 | 0.051 | 0.020 | 0.010 |
| 3 | 12.8 | 11.3 | 9.35 | 7.81 | 6.25 | 4.11 | 2.37 | 1.21 | 0.58 | 0.35 | 0.22 | 0.11 | 0.07 |
| 4 | 14.9 | 13.3 | 11.1 | 9.49 | 7.78 | 5.39 | 3.36 | 1.92 | 1.06 | 0.711 | 0.484 | 0.297 | 0.207 |
| 5 | 16.7 | 15.1 | 12.8 | 11.1 | 9.2 | 6.6 | 4.4 | 2.7 | 1.6 | 1.1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 |
| 6 | 18.5 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 10.6 | 7.8 | 5.3 | 3.5 | 2.2 | 1.6 | 1.2 | 0.9 | 0.7 |
| 7 | 20.3 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 12.0 | 9.0 | 6.3 | 4.3 | 2.8 | 2.2 | 1.7 | 1.2 | 1.0 |
| 8 | 22.0 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 13.4 | 10.2 | 7.3 | 5.1 | 3.5 | 2.7 | 2.2 | 1.6 | 1.3 |
| 9 | 23.6 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 14.7 | 11.4 | 8.3 | 5.9 | 4.2 | 3.3 | 2.7 | 2.1 | 1.7 |
| 10 | 25.2 | 23.2 | 20.5 | 18.3 | 16.0 | 12.5 | 9.3 | 6.7 | 4.9 | 3.9 | 3.2 | 2.6 | 2.2 |
| 11 | 26.8 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 17.3 | 13.7 | 10.3 | 7.6 | 5.6 | 4.6 | 3.8 | 3.1 | 2.6 |
| 12 | 28.3 | 26.2 | 23.3 | 21.0 | 18.5 | 14.8 | 11.3 | 8.4 | 6.3 | 5.2 | 4.4 | 3.6 | 3.1 |
| 13 | 29.8 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 19.8 | 16.0 | 12.3 | 9.3 | 7.0 | 5.9 | 5.0 | 4.1 | 3.6 |
| 14 | 31.3 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 21.1 | 17.1 | 13.3 | 10.2 | 7.8 | 6.6 | 5.6 | 4.7 | 4.1 |
| 15 | 32.8 | 30.6 | 27.5 | 25.0 | 22.3 | 18.2 | 14.3 | 11.0 | 8.5 | 7.3 | 6.3 | 5.2 | 4.6 |
| 16 | 34.3 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 23.5 | 19.4 | 15.3 | 11.9 | 9.3 | 8.0 | 6.9 | 5.8 | 5.1 |
| 17 | 35.7 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 24.8 | 20.5 | 16.3 | 12.8 | 10.1 | 8.7 | 7.6 | 6.4 | 5.7 |
| 18 | 37.2 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 26.0 | 21.6 | 17.3 | 13.7 | 10.9 | 9.4 | 8.2 | 7.0 | 6.3 |
| 19 | 38.6 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 27.2 | 22.7 | 18.3 | 14.6 | 11.7 | 10.1 | 8.9 | 7.6 | 6.8 |
| 20 | 40.0 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 28.4 | 23.8 | 19.3 | 15.5 | 12.4 | 10.9 | 9.6 | 8.3 | 7.4 |
| 21 | 41.4 | 38.9 | 35.5 | 32.7 | 29.6 | 24.9 | 20.3 | 16.3 | 13.2 | 11.6 | 10.3 | 8.9 | 8.0 |
| 22 | 42.8 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 30.8 | 26.0 | 21.3 | 17.2 | 14.0 | 12.3 | 11.0 | 9.5 | 8.6 |
| 23 | 44.2 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 32.0 | 27.1 | 22.3 | 18.1 | 14.8 | 13.1 | 11.7 | 10.2 | 9.3 |
| 24 | 45.6 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 33.2 | 28.2 | 23.3 | 19.0 | 15.7 | 13.8 | 12.4 | 10.9 | 9.9 |
| 25 | 46.9 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 34.4 | 29.3 | 24.3 | 19.9 | 16.5 | 14.6 | 13.1 | 11.5 | 10.5 |
| 26 | 48.3 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 35.6 | 30.4 | 25.3 | 20.8 | 17.3 | 15.4 | 13.8 | 12.2 | 11.2 |
| 27 | 49.6 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 36.7 | 31.5 | 26.3 | 21.7 | 18.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 | 11.8 |
| 28 | 51.0 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 37.9 | 32.6 | 27.3 | 22.7 | 18.9 | 16.9 | 15.3 | 13.6 | 12.5 |
| 29 | 52.3 | 49.6 | 45.7 | 42.6 | 39.1 | 33.7 | 28.3 | 23.6 | 19.8 | 17.7 | 16.0 | 14.3 | 13.1 |
| 30 | 53.7 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 40.3 | 34.8 | 29.3 | 24.5 | 20.6 | 18.5 | 16.8 | 15.0 | 13.8 |
| 40 | 66.8 | 63.7 | 59.3 | 55.8 | 51.8 | 45.6 | 39.3 | 33.7 | 29.1 | 26.5 | 24.4 | 22.2 | 20.7 |
| 50 | 79.5 | 76.2 | 71.4 | 67.5 | 63.2 | 56.3 | 49.3 | 42.9 | 37.7 | 34.8 | 32.4 | 29.7 | 28.0 |
| 60 | 92.0 | 88.4 | 83.3 | 79.1 | 74.4 | 67.0 | 59.3 | 52.3 | 46.5 | 43.2 | 40.5 | 37.5 | 35.5 |
| 70 | 104.2 | 100.4 | 95.0 | 90.5 | 85.5 | 77.6 | 69.3 | 61.7 | 55.3 | 51.7 | 48.8 | 45.4 | 43.3 |
| 80 | 116.3 | 112.3 | 106.6 | 101.9 | 96.6 | 88.1 | 79.3 | 71.1 | 64.3 | 60.4 | 57.2 | 53.5 | 51.2 |
| 90 | 128.3 | 124.1 | 118.1 | 113.1 | 107.6 | 98.6 | 89.3 | 80.6 | 73.3 | 69.1 | 65.6 | 61.8 | 59.2 |
| 100 | 140.2 | 135.8 | 129.6 | 124.3 | 118.5 | 109.1 | 99.3 | 90.1 | 82.4 | 77.9 | 74.2 | 70.1 | 67.3 |

## Titik Persentase Distribusi F untuk Probabilita = 0,05

| df untuk penyebut (N2) | df untuk pembilang (N1) | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 161 | 199 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 245 | 246 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.40 | 19.41 | 19.42 | 19.42 | 19.43 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.76 | 8.74 | 8.73 | 8.71 | 8.70 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.94 | 5.91 | 5.89 | 5.87 | 5.86 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.70 | 4.68 | 4.66 | 4.64 | 4.62 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.03 | 4.00 | 3.98 | 3.96 | 3.94 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.60 | 3.57 | 3.55 | 3.53 | 3.51 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.31 | 3.28 | 3.26 | 3.24 | 3.22 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.10 | 3.07 | 3.05 | 3.03 | 3.01 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.94 | 2.91 | 2.89 | 2.86 | 2.85 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.82 | 2.79 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.72 | 2.69 | 2.66 | 2.64 | 2.62 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.63 | 2.60 | 2.58 | 2.55 | 2.53 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.57 | 2.53 | 2.51 | 2.48 | 2.46 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.51 | 2.48 | 2.45 | 2.42 | 2.40 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.37 | 2.35 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.33 | 2.31 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.37 | 2.34 | 2.31 | 2.29 | 2.27 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.28 | 2.26 | 2.23 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.28 | 2.25 | 2.22 | 2.20 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.25 | 2.22 | 2.20 | 2.18 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.26 | 2.23 | 2.20 | 2.17 | 2.15 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.24 | 2.20 | 2.18 | 2.15 | 2.13 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.22 | 2.18 | 2.15 | 2.13 | 2.11 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.14 | 2.11 | 2.09 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.09 | 2.07 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.17 | 2.13 | 2.10 | 2.08 | 2.06 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.09 | 2.06 | 2.04 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.14 | 2.10 | 2.08 | 2.05 | 2.03 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.04 | 2.01 |
| 31 | 4.16 | 3.30 | 2.91 | 2.68 | 2.52 | 2.41 | 2.32 | 2.25 | 2.20 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 2.00 |
| 32 | 4.15 | 3.29 | 2.90 | 2.67 | 2.51 | 2.40 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 | 2.04 | 2.01 | 1.99 |
| 33 | 4.14 | 3.28 | 2.89 | 2.66 | 2.50 | 2.39 | 2.30 | 2.23 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.03 | 2.00 | 1.98 |
| 34 | 4.13 | 3.28 | 2.88 | 2.65 | 2.49 | 2.38 | 2.29 | 2.23 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.02 | 1.99 | 1.97 |
| 35 | 4.12 | 3.27 | 2.87 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.04 | 2.01 | 1.99 | 1.96 |
| 36 | 4.11 | 3.26 | 2.87 | 2.63 | 2.48 | 2.36 | 2.28 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.98 | 1.95 |
| 37 | 4.11 | 3.25 | 2.86 | 2.63 | 2.47 | 2.36 | 2.27 | 2.20 | 2.14 | 2.10 | 2.06 | 2.02 | 2.00 | 1.97 | 1.95 |
| 38 | 4.10 | 3.24 | 2.85 | 2.62 | 2.46 | 2.35 | 2.26 | 2.19 | 2.14 | 2.09 | 2.05 | 2.02 | 1.99 | 1.96 | 1.94 |
| 39 | 4.09 | 3.24 | 2.85 | 2.61 | 2.46 | 2.34 | 2.26 | 2.19 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.01 | 1.98 | 1.95 | 1.93 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.97 | 1.95 | 1.92 |
| 41 | 4.08 | 3.23 | 2.83 | 2.60 | 2.44 | 2.33 | 2.24 | 2.17 | 2.12 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.97 | 1.94 | 1.92 |
| 42 | 4.07 | 3.22 | 2.83 | 2.59 | 2.44 | 2.32 | 2.24 | 2.17 | 2.11 | 2.06 | 2.03 | 1.99 | 1.96 | 1.94 | 1.91 |
| 43 | 4.07 | 3.21 | 2.82 | 2.59 | 2.43 | 2.32 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.91 |
| 44 | 4.06 | 3.21 | 2.82 | 2.58 | 2.43 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.95 | 1.92 | 1.90 |
| 45 | 4.06 | 3.20 | 2.81 | 2.58 | 2.42 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.89 |

## Tabel Z

| Z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3,8 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| -3,7 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| -3,6 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| -3,5 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| -3,4 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 |
| -3,3 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| -3,2 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,1 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |

| Z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |

Tabel Kolmogorov Smirnov

| N | Probabilitas | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1 | 0,2 |
| 51 | 0,22825 | 0,21284 | 0,19044 | 0,17083 | 0,14983 |
| 52 | 0,22604 | 0,21079 | 0,18860 | 0,16918 | 0,14838 |
| 53 | 0,22390 | 0,20879 | 0,18681 | 0,16758 | 0,14698 |
| 54 | 0,22181 | 0,20685 | 0,18507 | 0,16602 | 0,14561 |
| 55 | 0,21979 | 0,20496 | 0,18338 | 0,16450 | 0,14428 |
| 56 | 0,21782 | 0,20312 | 0,18174 | 0,16303 | 0,14298 |
| 57 | 0,21590 | 0,20133 | 0,18014 | 0,16159 | 0,14172 |
| 58 | 0,21403 | 0,19959 | 0,17858 | 0,16019 | 0,14050 |
| 59 | 0,21221 | 0,19789 | 0,17706 | 0,15883 | 0,13930 |
| 60 | 0,21043 | 0,19623 | 0,17558 | 0,15750 | 0,13814 |
| 61 | 0,20870 | 0,19462 | 0,17413 | 0,15620 | 0,13700 |
| 62 | 0,20701 | 0,19304 | 0,17272 | 0,15494 | 0,13589 |
| 63 | 0,20536 | 0,19150 | 0,17134 | 0,15371 | 0,13481 |
| 64 | 0,20375 | 0,19000 | 0,17000 | 0,15250 | 0,13375 |
| 65 | 0,20218 | 0,18853 | 0,16869 | 0,15132 | 0,13272 |
| 66 | 0,20064 | 0,18710 | 0,16740 | 0,15017 | 0,13171 |
| 67 | 0,19914 | 0,18570 | 0,16615 | 0,14905 | 0,13072 |
| 68 | 0,19767 | 0,18433 | 0,16492 | 0,14795 | 0,12976 |
| 69 | 0,19623 | 0,18299 | 0,16372 | 0,14687 | 0,12881 |
| 70 | 0,19482 | 0,18167 | 0,16255 | 0,14582 | 0,12789 |
| 71 | 0,19345 | 0,18039 | 0,16140 | 0,14479 | 0,12699 |
| 72 | 0,19210 | 0,17913 | 0,16028 | 0,14378 | 0,12610 |
| 73 | 0,19078 | 0,17790 | 0,15918 | 0,14279 | 0,12523 |
| 74 | 0,18948 | 0,17670 | 0,15810 | 0,14182 | 0,12438 |
| 75 | 0,18822 | 0,17551 | 0,15704 | 0,14087 | 0,12355 |
| 76 | 0,18697 | 0,17436 | 0,15600 | 0,13994 | 0,12274 |
| 77 | 0,18576 | 0,17322 | 0,15499 | 0,13903 | 0,12194 |
| 78 | 0,18456 | 0,17211 | 0,15399 | 0,13814 | 0,12115 |
| 79 | 0,18339 | 0,17101 | 0,15301 | 0,13726 | 0,12038 |
| 80 | 0,18224 | 0,16994 | 0,15205 | 0,13640 | 0,11963 |
| 81 | 0,18111 | 0,16889 | 0,15111 | 0,13556 | 0,11889 |
| 82 | 0,18000 | 0,16786 | 0,15019 | 0,13473 | 0,11816 |
| 83 | 0,17892 | 0,16684 | 0,14928 | 0,13391 | 0,11745 |
| 84 | 0,17785 | 0,16585 | 0,14839 | 0,13311 | 0,11675 |
| 85 | 0,17680 | 0,16487 | 0,14751 | 0,13233 | 0,11606 |
| 86 | 0,17577 | 0,16391 | 0,14665 | 0,13156 | 0,11538 |
| 87 | 0,17475 | 0,16296 | 0,14581 | 0,13080 | 0,11472 |
| 88 | 0,17376 | 0,16203 | 0,14498 | 0,13005 | 0,11406 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 89 | 0,17278 | 0,16112 | 0,14416 | 0,12932 | 0,11342 |
| 90 | 0,17182 | 0,16022 | 0,14336 | 0,12860 | 0,11279 |
| 91 | 0,17087 | 0,15934 | 0,14257 | 0,12789 | 0,11217 |
| 92 | 0,16994 | 0,15847 | 0,14179 | 0,12719 | 0,11156 |
| 93 | 0,16902 | 0,15762 | 0,14103 | 0,12651 | 0,11095 |
| 94 | 0,16812 | 0,15678 | 0,14027 | 0,12583 | 0,11036 |
| 95 | 0,16723 | 0,15595 | 0,13953 | 0,12517 | 0,10978 |
| 96 | 0,16636 | 0,15513 | 0,13880 | 0,12452 | 0,10921 |
| 97 | 0,16550 | 0,15433 | 0,13809 | 0,12387 | 0,10864 |
| 98 | 0,16465 | 0,15354 | 0,13738 | 0,12324 | 0,10809 |
| 99 | 0,16382 | 0,15277 | 0,13669 | 0,12261 | 0,10754 |
| 100 | 0,16300 | 0,15200 | 0,13600 | 0,12200 | 0,10700 |
| 101 | 0,16219 | 0,15125 | 0,13533 | 0,12139 | 0,10647 |
| 102 | 0,16139 | 0,15050 | 0,13466 | 0,12080 | 0,10595 |
| 103 | 0,16061 | 0,14977 | 0,13400 | 0,12021 | 0,10543 |
| 104 | 0,15983 | 0,14905 | 0,13336 | 0,11963 | 0,10492 |
| 105 | 0,15907 | 0,14834 | 0,13272 | 0,11906 | 0,10442 |
| 106 | 0,15832 | 0,14764 | 0,13209 | 0,11850 | 0,10393 |
| 107 | 0,15758 | 0,14694 | 0,13148 | 0,11794 | 0,10344 |
| 108 | 0,15685 | 0,14626 | 0,13087 | 0,11739 | 0,10296 |
| 109 | 0,15613 | 0,14559 | 0,13026 | 0,11685 | 0,10249 |
| 110 | 0,15541 | 0,14493 | 0,12967 | 0,11632 | 0,10202 |
| 111 | 0,15471 | 0,14427 | 0,12909 | 0,11580 | 0,10156 |
| 112 | 0,15402 | 0,14363 | 0,12851 | 0,11528 | 0,10111 |
| 113 | 0,15334 | 0,14299 | 0,12794 | 0,11477 | 0,10066 |
| 114 | 0,15266 | 0,14236 | 0,12738 | 0,11426 | 0,10021 |
| 115 | 0,15200 | 0,14174 | 0,12682 | 0,11377 | 0,09978 |
| 116 | 0,15134 | 0,14113 | 0,12627 | 0,11327 | 0,09935 |
| 117 | 0,15069 | 0,14052 | 0,12573 | 0,11279 | 0,09892 |
| 118 | 0,15005 | 0,13993 | 0,12520 | 0,11231 | 0,09850 |
| 119 | 0,14942 | 0,13934 | 0,12467 | 0,11184 | 0,09809 |
| 120 | 0,14880 | 0,13876 | 0,12415 | 0,11137 | 0,09768 |
| 121 | 0,14818 | 0,13818 | 0,12364 | 0,11091 | 0,09727 |
| 122 | 0,14757 | 0,13761 | 0,12313 | 0,11045 | 0,09687 |
| 123 | 0,14697 | 0,13705 | 0,12263 | 0,11000 | 0,09648 |
| 124 | 0,14638 | 0,13650 | 0,12213 | 0,10956 | 0,09609 |
| 125 | 0,14579 | 0,13595 | 0,12164 | 0,10912 | 0,09570 |
| 126 | 0,14521 | 0,13541 | 0,12116 | 0,10869 | 0,09532 |
| 127 | 0,14464 | 0,13488 | 0,12068 | 0,10826 | 0,09495 |
| 128 | 0,14407 | 0,13435 | 0,12021 | 0,10783 | 0,09458 |
| 129 | 0,14351 | 0,13383 | 0,11974 | 0,10742 | 0,09421 |
| 130 | 0,14296 | 0,13331 | 0,11928 | 0,10700 | 0,09385 |
| 131 | 0,14241 | 0,13280 | 0,11882 | 0,10659 | 0,09349 |
| 132 | 0,14187 | 0,13230 | 0,11837 | 0,10619 | 0,09313 |
| 133 | 0,14134 | 0,13180 | 0,11793 | 0,10579 | 0,09278 |
| 134 | 0,14081 | 0,13131 | 0,11749 | 0,10539 | 0,09243 |
| 135 | 0,14029 | 0,13082 | 0,11705 | 0,10500 | 0,09209 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 136 | 0,13977 | 0,13034 | 0,11662 | 0,10461 | 0,09175 |
| 137 | 0,13926 | 0,12986 | 0,11619 | 0,10423 | 0,09142 |
| 138 | 0,13875 | 0,12939 | 0,11577 | 0,10385 | 0,09108 |
| 139 | 0,13825 | 0,12892 | 0,11535 | 0,10348 | 0,09076 |
| 140 | 0,13776 | 0,12846 | 0,11494 | 0,10311 | 0,09043 |
| 141 | 0,13727 | 0,12801 | 0,11453 | 0,10274 | 0,09011 |
| 142 | 0,13679 | 0,12756 | 0,11413 | 0,10238 | 0,08979 |
| 143 | 0,13631 | 0,12711 | 0,11373 | 0,10202 | 0,08948 |
| 144 | 0,13583 | 0,12667 | 0,11333 | 0,10167 | 0,08917 |
| 145 | 0,13536 | 0,12623 | 0,11294 | 0,10132 | 0,08886 |
| 146 | 0,13490 | 0,12580 | 0,11255 | 0,10097 | 0,08855 |
| 147 | 0,13444 | 0,12537 | 0,11217 | 0,10062 | 0,08825 |
| 148 | 0,13399 | 0,12494 | 0,11179 | 0,10028 | 0,08795 |
| 149 | 0,13353 | 0,12452 | 0,11142 | 0,09995 | 0,08766 |
| 150 | 0,13309 | 0,12411 | 0,11104 | 0,09961 | 0,08737 |
| 151 | 0,13265 | 0,12370 | 0,11068 | 0,09928 | 0,08708 |
| 152 | 0,13221 | 0,12329 | 0,11031 | 0,09896 | 0,08679 |
| 153 | 0,13178 | 0,12288 | 0,10995 | 0,09863 | 0,08650 |
| 154 | 0,13135 | 0,12249 | 0,10959 | 0,09831 | 0,08622 |
| 155 | 0,13092 | 0,12209 | 0,10924 | 0,09799 | 0,08594 |
| 156 | 0,13050 | 0,12170 | 0,10889 | 0,09768 | 0,08567 |
| 157 | 0,13009 | 0,12131 | 0,10854 | 0,09737 | 0,08540 |
| 158 | 0,12968 | 0,12092 | 0,10820 | 0,09706 | 0,08512 |
| 159 | 0,12927 | 0,12054 | 0,10786 | 0,09675 | 0,08486 |
| 160 | 0,12886 | 0,12017 | 0,10752 | 0,09645 | 0,08459 |
| 161 | 0,12846 | 0,11979 | 0,10718 | 0,09615 | 0,08433 |
| 162 | 0,12806 | 0,11942 | 0,10685 | 0,09585 | 0,08407 |
| 163 | 0,12767 | 0,11906 | 0,10652 | 0,09556 | 0,08381 |
| 164 | 0,12728 | 0,11869 | 0,10620 | 0,09527 | 0,08355 |
| 165 | 0,12690 | 0,11833 | 0,10588 | 0,09498 | 0,08330 |
| 166 | 0,12651 | 0,11797 | 0,10556 | 0,09469 | 0,08305 |
| 167 | 0,12613 | 0,11762 | 0,10524 | 0,09441 | 0,08280 |
| 168 | 0,12576 | 0,11727 | 0,10493 | 0,09413 | 0,08255 |
| 169 | 0,12538 | 0,11692 | 0,10462 | 0,09385 | 0,08231 |
| 170 | 0,12502 | 0,11658 | 0,10431 | 0,09357 | 0,08207 |
| 171 | 0,12465 | 0,11624 | 0,10400 | 0,09330 | 0,08182 |
| 172 | 0,12429 | 0,11590 | 0,10370 | 0,09302 | 0,08159 |
| 173 | 0,12393 | 0,11556 | 0,10340 | 0,09275 | 0,08135 |
| 174 | 0,12357 | 0,11523 | 0,10310 | 0,09249 | 0,08112 |
| 175 | 0,12322 | 0,11490 | 0,10281 | 0,09222 | 0,08088 |
| 176 | 0,12287 | 0,11457 | 0,10251 | 0,09196 | 0,08065 |
| 177 | 0,12252 | 0,11425 | 0,10222 | 0,09170 | 0,08043 |
| 178 | 0,12217 | 0,11393 | 0,10194 | 0,09144 | 0,08020 |
| 179 | 0,12183 | 0,11361 | 0,10165 | 0,09119 | 0,07998 |
| 180 | 0,12149 | 0,11329 | 0,10137 | 0,09093 | 0,07975 |
| 181 | 0,12116 | 0,11298 | 0,10109 | 0,09068 | 0,07953 |
| 182 | 0,12082 | 0,11267 | 0,10081 | 0,09043 | 0,07931 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 183 | 0,12049 | 0,11236 | 0,10053 | 0,09018 | 0,07910 |
| 184 | 0,12017 | 0,11206 | 0,10026 | 0,08994 | 0,07888 |
| 185 | 0,11984 | 0,11175 | 0,09999 | 0,08970 | 0,07867 |
| 186 | 0,11952 | 0,11145 | 0,09972 | 0,08945 | 0,07846 |
| 187 | 0,11920 | 0,11115 | 0,09945 | 0,08922 | 0,07825 |
| 188 | 0,11888 | 0,11086 | 0,09919 | 0,08898 | 0,07804 |
| 189 | 0,11857 | 0,11056 | 0,09893 | 0,08874 | 0,07783 |
| 190 | 0,11825 | 0,11027 | 0,09866 | 0,08851 | 0,07763 |
| 191 | 0,11794 | 0,10998 | 0,09841 | 0,08828 | 0,07742 |
| 192 | 0,11764 | 0,10970 | 0,09815 | 0,08805 | 0,07722 |
| 193 | 0,11733 | 0,10941 | 0,09789 | 0,08782 | 0,07702 |
| 194 | 0,11703 | 0,10913 | 0,09764 | 0,08759 | 0,07682 |
| 195 | 0,11673 | 0,10885 | 0,09739 | 0,08737 | 0,07662 |
| 196 | 0,11643 | 0,10857 | 0,09714 | 0,08714 | 0,07643 |
| 197 | 0,11613 | 0,10830 | 0,09690 | 0,08692 | 0,07623 |
| 198 | 0,11584 | 0,10802 | 0,09665 | 0,08670 | 0,07604 |
| 199 | 0,11555 | 0,10775 | 0,09641 | 0,08648 | 0,07585 |
| 200 | 0,11526 | 0,10748 | 0,09617 | 0,08627 | 0,07566 |
| 201 | 0,11497 | 0,10721 | 0,09593 | 0,08605 | 0,07547 |
| 202 | 0,11469 | 0,10695 | 0,09569 | 0,08584 | 0,07528 |
| 203 | 0,11440 | 0,10668 | 0,09545 | 0,08563 | 0,07510 |
| 204 | 0,11412 | 0,10642 | 0,09522 | 0,08542 | 0,07491 |
| 205 | 0,11384 | 0,10616 | 0,09499 | 0,08521 | 0,07473 |
| 206 | 0,11357 | 0,10590 | 0,09476 | 0,08500 | 0,07455 |
| 207 | 0,11329 | 0,10565 | 0,09453 | 0,08480 | 0,07437 |
| 208 | 0,11302 | 0,10539 | 0,09430 | 0,08459 | 0,07419 |
| 209 | 0,11275 | 0,10514 | 0,09407 | 0,08439 | 0,07401 |
| 210 | 0,11248 | 0,10489 | 0,09385 | 0,08419 | 0,07384 |
| 211 | 0,11221 | 0,10464 | 0,09363 | 0,08399 | 0,07366 |
| 212 | 0,11195 | 0,10439 | 0,09341 | 0,08379 | 0,07349 |
| 213 | 0,11169 | 0,10415 | 0,09319 | 0,08359 | 0,07332 |
| 214 | 0,11142 | 0,10391 | 0,09297 | 0,08340 | 0,07314 |
| 215 | 0,11117 | 0,10366 | 0,09275 | 0,08320 | 0,07297 |
| 216 | 0,11091 | 0,10342 | 0,09254 | 0,08301 | 0,07280 |
| 217 | 0,11065 | 0,10318 | 0,09232 | 0,08282 | 0,07264 |
| 218 | 0,11040 | 0,10295 | 0,09211 | 0,08263 | 0,07247 |
| 219 | 0,11015 | 0,10271 | 0,09190 | 0,08244 | 0,07230 |
| 220 | 0,10989 | 0,10248 | 0,09169 | 0,08225 | 0,07214 |
| 221 | 0,10965 | 0,10225 | 0,09148 | 0,08207 | 0,07198 |
| 222 | 0,10940 | 0,10202 | 0,09128 | 0,08188 | 0,07181 |
| 223 | 0,10915 | 0,10179 | 0,09107 | 0,08170 | 0,07165 |
| 224 | 0,10891 | 0,10156 | 0,09087 | 0,08151 | 0,07149 |
| 225 | 0,10867 | 0,10133 | 0,09067 | 0,08133 | 0,07133 |
| 226 | 0,10843 | 0,10111 | 0,09047 | 0,08115 | 0,07118 |
| 227 | 0,10819 | 0,10089 | 0,09027 | 0,08097 | 0,07102 |
| 228 | 0,10795 | 0,10066 | 0,09007 | 0,08080 | 0,07086 |
| 229 | 0,10771 | 0,10044 | 0,08987 | 0,08062 | 0,07071 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 230 | 0,10748 | 0,10023 | 0,08968 | 0,08044 | 0,07055 |
| 231 | 0,10725 | 0,10001 | 0,08948 | 0,08027 | 0,07040 |
| 232 | 0,10701 | 0,09979 | 0,08929 | 0,08010 | 0,07025 |
| 233 | 0,10678 | 0,09958 | 0,08910 | 0,07992 | 0,07010 |
| 234 | 0,10656 | 0,09937 | 0,08891 | 0,07975 | 0,06995 |
| 235 | 0,10633 | 0,09915 | 0,08872 | 0,07958 | 0,06980 |
| 236 | 0,10610 | 0,09894 | 0,08853 | 0,07942 | 0,06965 |
| 237 | 0,10588 | 0,09873 | 0,08834 | 0,07925 | 0,06950 |
| 238 | 0,10566 | 0,09853 | 0,08816 | 0,07908 | 0,06936 |
| 239 | 0,10544 | 0,09832 | 0,08797 | 0,07892 | 0,06921 |
| 240 | 0,10522 | 0,09812 | 0,08779 | 0,07875 | 0,06907 |
| 241 | 0,10500 | 0,09791 | 0,08761 | 0,07859 | 0,06892 |
| 242 | 0,10478 | 0,09771 | 0,08742 | 0,07842 | 0,06878 |
| 243 | 0,10456 | 0,09751 | 0,08724 | 0,07826 | 0,06864 |
| 244 | 0,10435 | 0,09731 | 0,08707 | 0,07810 | 0,06850 |
| 245 | 0,10414 | 0,09711 | 0,08689 | 0,07794 | 0,06836 |
| 246 | 0,10393 | 0,09691 | 0,08671 | 0,07778 | 0,06822 |
| 247 | 0,10371 | 0,09672 | 0,08653 | 0,07763 | 0,06808 |
| 248 | 0,10351 | 0,09652 | 0,08636 | 0,07747 | 0,06795 |
| 249 | 0,10330 | 0,09633 | 0,08619 | 0,07731 | 0,06781 |
| 250 | 0,10309 | 0,09613 | 0,08601 | 0,07716 | 0,06767 |
| 251 | 0,10288 | 0,09594 | 0,08584 | 0,07701 | 0,06754 |
| 252 | 0,10268 | 0,09575 | 0,08567 | 0,07685 | 0,06740 |
| 253 | 0,10248 | 0,09556 | 0,08550 | 0,07670 | 0,06727 |
| 254 | 0,10228 | 0,09537 | 0,08533 | 0,07655 | 0,06714 |
| 255 | 0,10207 | 0,09519 | 0,08517 | 0,07640 | 0,06701 |
| 256 | 0,10188 | 0,09500 | 0,08500 | 0,07625 | 0,06688 |
| 257 | 0,10168 | 0,09481 | 0,08483 | 0,07610 | 0,06674 |
| 258 | 0,10148 | 0,09463 | 0,08467 | 0,07595 | 0,06662 |
| 259 | 0,10128 | 0,09445 | 0,08451 | 0,07581 | 0,06649 |
| 260 | 0,10109 | 0,09427 | 0,08434 | 0,07566 | 0,06636 |
| 261 | 0,10089 | 0,09409 | 0,08418 | 0,07552 | 0,06623 |
| 262 | 0,10070 | 0,09391 | 0,08402 | 0,07537 | 0,06610 |
| 263 | 0,10051 | 0,09373 | 0,08386 | 0,07523 | 0,06598 |
| 264 | 0,10032 | 0,09355 | 0,08370 | 0,07509 | 0,06585 |
| 265 | 0,10013 | 0,09337 | 0,08354 | 0,07494 | 0,06573 |
| 266 | 0,09994 | 0,09320 | 0,08339 | 0,07480 | 0,06561 |
| 267 | 0,09975 | 0,09302 | 0,08323 | 0,07466 | 0,06548 |
| 268 | 0,09957 | 0,09285 | 0,08308 | 0,07452 | 0,06536 |
| 269 | 0,09938 | 0,09268 | 0,08292 | 0,07438 | 0,06524 |
| 270 | 0,09920 | 0,09250 | 0,08277 | 0,07425 | 0,06512 |
| 271 | 0,09902 | 0,09233 | 0,08261 | 0,07411 | 0,06500 |
| 272 | 0,09883 | 0,09216 | 0,08246 | 0,07397 | 0,06488 |
| 273 | 0,09865 | 0,09199 | 0,08231 | 0,07384 | 0,06476 |
| 274 | 0,09847 | 0,09183 | 0,08216 | 0,07370 | 0,06464 |
| 275 | 0,09829 | 0,09166 | 0,08201 | 0,07357 | 0,06452 |
| 276 | 0,09811 | 0,09149 | 0,08186 | 0,07344 | 0,06441 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 277 | 0,09794 | 0,09133 | 0,08171 | 0,07330 | 0,06429 |
| 278 | 0,09776 | 0,09116 | 0,08157 | 0,07317 | 0,06417 |
| 279 | 0,09759 | 0,09100 | 0,08142 | 0,07304 | 0,06406 |
| 280 | 0,09741 | 0,09084 | 0,08128 | 0,07291 | 0,06394 |
| 281 | 0,09724 | 0,09068 | 0,08113 | 0,07278 | 0,06383 |
| 282 | 0,09707 | 0,09051 | 0,08099 | 0,07265 | 0,06372 |
| 283 | 0,09689 | 0,09035 | 0,08084 | 0,07252 | 0,06360 |
| 284 | 0,09672 | 0,09020 | 0,08070 | 0,07239 | 0,06349 |
| 285 | 0,09655 | 0,09004 | 0,08056 | 0,07227 | 0,06338 |
| 286 | 0,09638 | 0,08988 | 0,08042 | 0,07214 | 0,06327 |
| 287 | 0,09622 | 0,08972 | 0,08028 | 0,07201 | 0,06316 |
| 288 | 0,09605 | 0,08957 | 0,08014 | 0,07189 | 0,06305 |
| 289 | 0,09588 | 0,08941 | 0,08000 | 0,07176 | 0,06294 |
| 290 | 0,09572 | 0,08926 | 0,07986 | 0,07164 | 0,06283 |
| 291 | 0,09555 | 0,08910 | 0,07972 | 0,07152 | 0,06272 |
| 292 | 0,09539 | 0,08895 | 0,07959 | 0,07140 | 0,06262 |
| 293 | 0,09523 | 0,08880 | 0,07945 | 0,07127 | 0,06251 |
| 294 | 0,09506 | 0,08865 | 0,07932 | 0,07115 | 0,06240 |
| 295 | 0,09490 | 0,08850 | 0,07918 | 0,07103 | 0,06230 |
| 296 | 0,09474 | 0,08835 | 0,07905 | 0,07091 | 0,06219 |
| 297 | 0,09458 | 0,08820 | 0,07892 | 0,07079 | 0,06209 |
| 298 | 0,09442 | 0,08805 | 0,07878 | 0,07067 | 0,06198 |
| 299 | 0,09427 | 0,08790 | 0,07865 | 0,07055 | 0,06188 |
| 300 | 0,09411 | 0,08776 | 0,07852 | 0,07044 | 0,06178 |
| 400 | 0,08150 | 0,07600 | 0,06800 | 0,06100 | 0,05350 |
| 500 | 0,07290 | 0,06798 | 0,06082 | 0,05456 | 0,04785 |
| 600 | 0,06654 | 0,06205 | 0,05552 | 0,04981 | 0,04368 |
| 700 | 0,06161 | 0,05745 | 0,05140 | 0,04611 | 0,04044 |
| 800 | 0,05763 | 0,05374 | 0,04808 | 0,04313 | 0,03783 |
| 900 | 0,05433 | 0,05067 | 0,04533 | 0,04067 | 0,03567 |
| 1000 | 0,05155 | 0,04807 | 0,04301 | 0,03858 | 0,03384 |
| 2000 | 0,03645 | 0,03399 | 0,03041 | 0,02728 | 0,02393 |
| 3000 | 0,02976 | 0,02775 | 0,02483 | 0,02227 | 0,01954 |
| 4000 | 0,02577 | 0,02403 | 0,02150 | 0,01929 | 0,01692 |
| 5000 | 0,02305 | 0,02150 | 0,01923 | 0,01725 | 0,01513 |
| 6000 | 0,02104 | 0,01962 | 0,01756 | 0,01575 | 0,01381 |
| 7000 | 0,01948 | 0,01817 | 0,01626 | 0,01458 | 0,01279 |
| 8000 | 0,01822 | 0,01699 | 0,01521 | 0,01364 | 0,01196 |
| 9000 | 0,01718 | 0,01602 | 0,01434 | 0,01286 | 0,01128 |
| 10000 | 0,01630 | 0,01520 | 0,01360 | 0,01220 | 0,01070 |

**TABEL**
**NILAI KRITIS UJI LILIEFORS UNTUK NORMALITAS**

| One-tailed<br>Two-tailed | .20<br>.40 | .15<br>.30 | .10<br>.20 | .05<br>.10 | .01<br>.02 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n = 4$ | .300 | .319 | .352 | .381 | .417 |
| 5 | .285 | .299 | .315 | .337 | .405 |
| 6 | .265 | .277 | .294 | .319 | .364 |
| 7 | .247 | .258 | .276 | .300 | .348 |
| 8 | .233 | .244 | .261 | .285 | .331 |
| 9 | .223 | .233 | .249 | .271 | .311 |
| 10 | .215 | .224 | .239 | .258 | .294 |
| 11 | .206 | .217 | .230 | .249 | .284 |
| 12 | .199 | .212 | .223 | .242 | .275 |
| 13 | .190 | .202 | .214 | .234 | .268 |
| 14 | .183 | .194 | .207 | .227 | .261 |
| 15 | .177 | .187 | .201 | .220 | .257 |
| 16 | .173 | .182 | .195 | .213 | .250 |
| 17 | .169 | .177 | .189 | .206 | .245 |
| 18 | .166 | .173 | .184 | .200 | .239 |
| 19 | .163 | .169 | .179 | .195 | .235 |
| 20 | .160 | .166 | .174 | .190 | .231 |
| 25 | .142 | .147 | .158 | .173 | .200 |
| 30 | .131 | .136 | .144 | .161 | .187 |
| $n > 30$ | $.736/\sqrt{n}$ | $.768/\sqrt{n}$ | $.805/\sqrt{n}$ | $.886/\sqrt{n}$ | $1.031/\sqrt{n}$ |

# Shapiro-Wilk Tables

http://www.statistikian.com

By: Anwar Hidayat

**Table 1 - coefficients**

| n = | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 0,7071 | 0,7071 | 0,6872 | 0,6646 | 0,6431 | 0,6233 | 0,6052 | 0,5888 | 0,5739 | 0,5601 | 0,5475 | 0,5359 | 0,5251 |
| a2 | | | 0,1677 | 0,2413 | 0,2806 | 0,3031 | 0,3164 | 0,3244 | 0,3291 | 0,3315 | 0,3325 | 0,3325 | 0,3318 |
| a3 | | | | | 0,0875 | 0,1401 | 0,1743 | 0,1976 | 0,2141 | 0,2260 | 0,2347 | 0,2412 | 0,2460 |
| a4 | | | | | | | 0,0561 | 0,0947 | 0,1224 | 0,1429 | 0,1586 | 0,1707 | 0,1802 |
| a5 | | | | | | | | | 0,0399 | 0,0695 | 0,0922 | 0,1099 | 0,1240 |
| a6 | | | | | | | | | | | 0,0303 | 0,0539 | 0,0727 |
| a7 | | | | | | | | | | | | | 0,0240 |

| n = | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 0,5150 | 0,5056 | 0,4968 | 0,4886 | 0,4808 | 0,4734 | 0,4643 | 0,4590 | 0,4542 | 0,4493 | 0,4450 | 0,4407 |
| a2 | 0,3306 | 0,3290 | 0,3273 | 0,3253 | 0,3232 | 0,3211 | 0,3185 | 0,3156 | 0,3126 | 0,3098 | 0,3069 | 0,3043 |
| a3 | 0,2495 | 0,2521 | 0,2540 | 0,2553 | 0,2561 | 0,2565 | 0,2578 | 0,2571 | 0,2563 | 0,2554 | 0,2543 | 0,2533 |
| a4 | 0,1878 | 0,1939 | 0,1988 | 0,2027 | 0,2059 | 0,2085 | 0,2119 | 0,2131 | 0,2139 | 0,2145 | 0,2148 | 0,2151 |
| a5 | 0,1353 | 0,1447 | 0,1524 | 0,1587 | 0,1641 | 0,1686 | 0,1736 | 0,1764 | 0,1787 | 0,1807 | 0,1822 | 0,1836 |
| a6 | 0,0880 | 0,1005 | 0,1109 | 0,1197 | 0,1271 | 0,1334 | 0,1399 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1512 | 0,1539 | 0,1563 |
| a7 | 0,0433 | 0,0593 | 0,0725 | 0,0837 | 0,0932 | 0,1013 | 0,1092 | 0,1150 | 0,1201 | 0,1245 | 0,1283 | 0,1316 |
| a8 | | 0,0196 | 0,0359 | 0,0496 | 0,0612 | 0,0711 | 0,0804 | 0,0878 | 0,0941 | 0,0997 | 0,1046 | 0,1089 |
| a9 | | | | 0,0163 | 0,0303 | 0,0422 | 0,0530 | 0,0618 | 0,0696 | 0,0764 | 0,0823 | 0,0876 |
| a10 | | | | | | 0,0140 | 0,0263 | 0,0368 | 0,0459 | 0,0539 | 0,0610 | 0,0672 |
| a11 | | | | | | | | 0,0122 | 0,0228 | 0,0321 | 0,0403 | 0,0476 |
| a12 | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0107 | 0,0200 | 0,0284 |
| a13 | | | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0094 |

| n = | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 0,4366 | 0,4328 | 0,4291 | 0,4254 | 0,4220 | 0,4188 | 0,4156 | 0,4127 | 0,4096 | 0,4068 | 0,4040 | 0,4015 |
| a2 | 0,3018 | 0,2992 | 0,2968 | 0,2944 | 0,2921 | 0,2898 | 0,2876 | 0,2854 | 0,2834 | 0,2813 | 0,2794 | 0,2774 |
| a3 | 0,2522 | 0,2510 | 0,2499 | 0,2487 | 0,2475 | 0,2463 | 0,2451 | 0,2439 | 0,2427 | 0,2415 | 0,2403 | 0,2391 |
| a4 | 0,2152 | 0,2151 | 0,2150 | 0,2148 | 0,2145 | 0,2141 | 0,2137 | 0,2132 | 0,2127 | 0,2121 | 0,2116 | 0,2110 |
| a5 | 0,1848 | 0,1857 | 0,1864 | 0,1870 | 0,1874 | 0,1878 | 0,1880 | 0,1882 | 0,1883 | 0,1883 | 0,1883 | 0,1881 |
| a6 | 0,1584 | 0,1601 | 0,1616 | 0,1630 | 0,1641 | 0,1651 | 0,1660 | 0,1667 | 0,1673 | 0,1678 | 0,1683 | 0,1686 |
| a7 | 0,1346 | 0,1372 | 0,1395 | 0,1415 | 0,1433 | 0,1449 | 0,1463 | 0,1475 | 0,1487 | 0,1496 | 0,1505 | 0,1513 |
| a8 | 0,1128 | 0,1162 | 0,1192 | 0,1219 | 0,1243 | 0,1265 | 0,1284 | 0,1301 | 0,1317 | 0,1331 | 0,1344 | 0,1356 |
| a9 | 0,0923 | 0,0965 | 0,1002 | 0,1036 | 0,1066 | 0,1093 | 0,1118 | 0,1140 | 0,1160 | 0,1179 | 0,1196 | 0,1211 |
| a10 | 0,0728 | 0,0778 | 0,0822 | 0,0862 | 0,0899 | 0,0931 | 0,0961 | 0,0988 | 0,1013 | 0,1036 | 0,1056 | 0,1075 |
| a11 | 0,0540 | 0,0598 | 0,0650 | 0,0697 | 0,0739 | 0,0777 | 0,0812 | 0,0844 | 0,0873 | 0,0900 | 0,0924 | 0,0947 |
| a12 | 0,0358 | 0,0424 | 0,0483 | 0,0537 | 0,0585 | 0,0629 | 0,0669 | 0,0706 | 0,0739 | 0,0770 | 0,0798 | 0,0824 |
| a13 | 0,0178 | 0,0253 | 0,0320 | 0,0381 | 0,0435 | 0,0485 | 0,0530 | 0,0572 | 0,0610 | 0,0645 | 0,0677 | 0,0706 |
| a14 | 0,0000 | 0,0084 | 0,0159 | 0,0227 | 0,0289 | 0,0344 | 0,0395 | 0,0441 | 0,0484 | 0,0523 | 0,0559 | 0,0592 |
| a15 | | | 0,0000 | 0,0076 | 0,0144 | 0,0206 | 0,0262 | 0,0314 | 0,0361 | 0,0404 | 0,0444 | 0,0481 |
| a16 | | | | | 0,0000 | 0,0068 | 0,0131 | 0,0187 | 0,0239 | 0,0287 | 0,0331 | 0,0372 |
| a17 | | | | | | | 0,0000 | 0,0062 | 0,0119 | 0,0172 | 0,0220 | 0,0264 |
| a18 | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0057 | 0,0110 | 0,0158 |
| a19 | | | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0053 |

| n = | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 0,3989 | 0,3964 | 0,3940 | 0,3917 | 0,3894 | 0,3872 | 0,3850 | 0,3830 | 0,3808 | 0,3789 | 0,3770 | 0,3751 |
| a2 | 0,2755 | 0,2737 | 0,2719 | 0,2701 | 0,2684 | 0,2667 | 0,2651 | 0,2635 | 0,2620 | 0,2604 | 0,2589 | 0,2574 |
| a3 | 0,2380 | 0,2368 | 0,2357 | 0,2345 | 0,2334 | 0,2323 | 0,2313 | 0,2302 | 0,2291 | 0,2281 | 0,2271 | 0,2260 |
| a4 | 0,2104 | 0,2098 | 0,2091 | 0,2085 | 0,2078 | 0,2072 | 0,2065 | 0,2058 | 0,2052 | 0,2045 | 0,2038 | 0,2032 |
| a5 | 0,1880 | 0,1878 | 0,1876 | 0,1874 | 0,1871 | 0,1868 | 0,1865 | 0,1862 | 0,1859 | 0,1855 | 0,1851 | 0,1847 |
| a6 | 0,1689 | 0,1691 | 0,1693 | 0,1694 | 0,1695 | 0,1695 | 0,1695 | 0,1695 | 0,1695 | 0,1693 | 0,1692 | 0,1691 |
| a7 | 0,1520 | 0,1526 | 0,1531 | 0,1535 | 0,1539 | 0,1542 | 0,1545 | 0,1548 | 0,1550 | 0,1551 | 0,1553 | 0,1554 |
| a8 | 0,1366 | 0,1376 | 0,1384 | 0,1392 | 0,1398 | 0,1405 | 0,1410 | 0,1415 | 0,1420 | 0,1423 | 0,1427 | 0,1430 |
| a9 | 0,1225 | 0,1237 | 0,1249 | 0,1259 | 0,1269 | 0,1278 | 0,1286 | 0,1293 | 0,1300 | 0,1306 | 0,1312 | 0,1317 |
| a10 | 0,1092 | 0,1108 | 0,1123 | 0,1136 | 0,1149 | 0,1160 | 0,1170 | 0,1180 | 0,1189 | 0,1197 | 0,1205 | 0,1212 |
| a11 | 0,0967 | 0,0986 | 0,1004 | 0,1020 | 0,1035 | 0,1049 | 0,1062 | 0,1073 | 0,1085 | 0,1095 | 0,1105 | 0,1113 |
| a12 | 0,0848 | 0,0870 | 0,0891 | 0,0909 | 0,0927 | 0,0943 | 0,0959 | 0,0972 | 0,0986 | 0,0998 | 0,1010 | 0,1020 |
| a13 | 0,0733 | 0,0759 | 0,0782 | 0,0804 | 0,0824 | 0,0842 | 0,0860 | 0,0876 | 0,0892 | 0,0906 | 0,9190 | 0,0932 |
| a14 | 0,0622 | 0,0651 | 0,0677 | 0,0701 | 0,0724 | 0,0745 | 0,0765 | 0,0783 | 0,0801 | 0,0817 | 0,0832 | 0,0846 |
| a15 | 0,0515 | 0,0546 | 0,0575 | 0,0602 | 0,0628 | 0,0651 | 0,0673 | 0,0694 | 0,0713 | 0,0731 | 0,0748 | 0,0764 |
| a16 | 0,0409 | 0,0444 | 0,0476 | 0,0506 | 0,0534 | 0,0560 | 0,0584 | 0,0607 | 0,0628 | 0,0648 | 0,0667 | 0,0685 |
| a17 | 0,0305 | 0,0343 | 0,0379 | 0,0411 | 0,0442 | 0,0471 | 0,0497 | 0,0522 | 0,0546 | 0,0568 | 0,0588 | 0,0608 |
| a18 | 0,0203 | 0,0244 | 0,0283 | 0,0318 | 0,0352 | 0,0383 | 0,0412 | 0,0439 | 0,0465 | 0,0489 | 0,0511 | 0,0532 |
| a19 | 0,0101 | 0,0146 | 0,0188 | 0,0227 | 0,0263 | 0,0296 | 0,0328 | 0,0357 | 0,0385 | 0,0411 | 0,0436 | 0,0459 |
| a20 | 0,0000 | 0,0049 | 0,0094 | 0,0136 | 0,0175 | 0,0211 | 0,0245 | 0,0277 | 0,0307 | 0,0335 | 0,0361 | 0,0386 |
| a21 | | | 0,0000 | 0,0045 | 0,0087 | 0,0126 | 0,0163 | 0,0197 | 0,0229 | 0,0259 | 0,0288 | 0,0314 |
| a22 | | | | | 0,0000 | 0,0042 | 0,0081 | 0,0118 | 0,0153 | 0,0185 | 0,0215 | 0,0244 |
| a23 | | | | | | | 0,0000 | 0,0039 | 0,0076 | 0,0111 | 0,0143 | 0,0174 |
| a24 | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0037 | 0,0071 | 0,0104 |
| a25 | | | | | | | | | | | 0,0000 | 0,0350 |

**Upper percentage points of the studentized range (5%)**

| | p = number of treatment | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| df | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 17.970 | 26.980 | 32.820 | 37.080 | 40.410 | 43.120 | 45.400 | 47.360 | 49.070 | 50.590 | 51.960 |
| 2 | 6.085 | 8.331 | 9.799 | 10.880 | 11.730 | 12.430 | 13.030 | 13.540 | 13.990 | 14.400 | 14.760 |
| 3 | 4.501 | 5.910 | 6.825 | 7.502 | 8.037 | 8.478 | 8.852 | 9.177 | 9.462 | 9.717 | 9.946 |
| 4 | 3.926 | 5.040 | 5.757 | 6.287 | 6.706 | 7.053 | 7.347 | 7.602 | 7.826 | 8.027 | 8.208 |
| 5 | 3.635 | 4.602 | 5.218 | 5.673 | 6.033 | 6.330 | 6.582 | 6.801 | 6.995 | 7.167 | 7.323 |
| 6 | 3.460 | 4.339 | 4.896 | 5.305 | 5.628 | 5.895 | 6.122 | 6.319 | 6.493 | 6.649 | 6.789 |
| 7 | 3.344 | 4.165 | 4.681 | 5.060 | 5.359 | 5.606 | 5.815 | 5.997 | 6.158 | 6.302 | 6.431 |
| 8 | 3.261 | 4.041 | 4.529 | 4.886 | 5.167 | 5.399 | 5.596 | 5.767 | 5.918 | 6.053 | 6.175 |
| 9 | 3.199 | 3.948 | 4.415 | 4.755 | 5.024 | 5.244 | 5.432 | 5.595 | 5.738 | 5.867 | 5.983 |
| 10 | 3.151 | 3.877 | 4.327 | 4.654 | 4.912 | 5.124 | 5.304 | 5.460 | 5.598 | 5.722 | 5.833 |
| 11 | 3.113 | 3.820 | 4.256 | 4.574 | 4.823 | 5.028 | 5.202 | 5.353 | 5.486 | 5.605 | 5.713 |
| 12 | 3.081 | 3.773 | 4.199 | 4.508 | 4.750 | 4.950 | 5.119 | 5.265 | 5.395 | 5.510 | 5.615 |
| 13 | 3.055 | 3.734 | 4.151 | 4.453 | 4.690 | 4.884 | 5.049 | 5.192 | 5.318 | 5.431 | 5.533 |
| 14 | 3.033 | 3.701 | 4.111 | 4.407 | 4.639 | 4.829 | 4.990 | 5.130 | 5.253 | 5.364 | 5.463 |
| 15 | 3.014 | 3.673 | 4.076 | 4.367 | 4.595 | 4.782 | 4.940 | 5.077 | 5.198 | 5.306 | 5.403 |
| 16 | 2.998 | 3.649 | 4.046 | 4.333 | 4.557 | 4.741 | 4.896 | 5.031 | 5.150 | 5.256 | 5.352 |
| 17 | 2.984 | 3.628 | 4.020 | 4.303 | 4.524 | 4.705 | 4.858 | 4.991 | 5.108 | 5.212 | 5.306 |
| 18 | 2.971 | 3.609 | 3.997 | 4.276 | 4.494 | 4.673 | 4.824 | 4.955 | 5.071 | 5.173 | 5.266 |
| 19 | 2.960 | 3.593 | 3.977 | 4.253 | 4.468 | 4.645 | 4.794 | 4.924 | 5.037 | 5.139 | 5.231 |
| 20 | 2.950 | 3.578 | 3.958 | 4.232 | 4.445 | 4.620 | 4.768 | 4.895 | 5.008 | 5.108 | 5.199 |
| 24 | 2.919 | 3.532 | 3.901 | 4.166 | 4.373 | 4.541 | 4.684 | 4.807 | 4.915 | 5.012 | 5.099 |
| 30 | 2.888 | 3.486 | 3.845 | 4.102 | 4.301 | 4.464 | 4.601 | 4.720 | 4.824 | 4.917 | 5.001 |
| 40 | 2.858 | 3.442 | 3.791 | 4.039 | 4.232 | 4.388 | 4.521 | 4.634 | 4.735 | 4.824 | 4.904 |
| 60 | 2.829 | 3.399 | 3.737 | 3.977 | 4.163 | 4.314 | 4.441 | 4.550 | 4.646 | 4.732 | 4.808 |
| 120 | 2.800 | 3.356 | 3.685 | 3.917 | 4.096 | 4.241 | 4.363 | 4.468 | 4.560 | 4.641 | 4.714 |
| 1000 | 2.772 | 3.314 | 3.633 | 3.858 | 4.030 | 4.170 | 4.286 | 4.387 | 4.474 | 4.552 | 4.622 |

www.smartstat.info Tabel Tukey/BNJ

**Upper percentage points of the studentized range (5%)**

| | p = number of treatment | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| df | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 30 | 40 | 60 | 80 | 100 |
| 1 | 53.200 | 54.330 | 55.360 | 56.320 | 57.220 | 58.040 | 58.830 | 59.560 | 65.150 | 68.920 | 73.970 | 77.400 | 79.980 |
| 2 | 15.090 | 15.390 | 15.650 | 15.920 | 16.140 | 16.380 | 16.570 | 16.780 | 18.270 | 19.280 | 20.660 | 21.590 | 22.290 |
| 3 | 10.150 | 10.350 | 10.520 | 10.690 | 10.840 | 10.980 | 11.110 | 11.240 | 12.210 | 12.860 | 13.760 | 14.360 | 14.820 |
| 4 | 8.373 | 8.524 | 8.664 | 8.793 | 8.914 | 9.027 | 9.133 | 9.233 | 10.000 | 10.530 | 11.240 | 11.730 | 12.100 |
| 5 | 7.466 | 7.596 | 7.716 | 7.828 | 7.932 | 8.030 | 8.122 | 8.208 | 8.875 | 9.330 | 9.949 | 10.370 | 10.690 |
| 6 | 6.917 | 7.034 | 7.143 | 7.244 | 7.338 | 7.426 | 7.508 | 7.586 | 8.189 | 8.601 | 9.162 | 9.547 | 9.839 |
| 7 | 6.550 | 6.658 | 6.759 | 6.852 | 6.939 | 7.020 | 7.097 | 7.169 | 7.727 | 8.110 | 8.631 | 8.989 | 9.260 |
| 8 | 6.287 | 6.389 | 6.483 | 6.571 | 6.653 | 6.729 | 6.801 | 6.869 | 7.395 | 7.756 | 8.248 | 8.586 | 8.843 |
| 9 | 6.089 | 6.186 | 6.276 | 6.359 | 6.437 | 6.510 | 6.579 | 6.643 | 7.144 | 7.488 | 7.958 | 8.281 | 8.526 |
| 10 | 5.935 | 6.028 | 6.114 | 6.194 | 6.269 | 6.339 | 6.405 | 6.467 | 6.948 | 7.278 | 7.730 | 8.041 | 8.276 |
| 11 | 5.811 | 5.901 | 5.984 | 6.062 | 6.134 | 6.202 | 6.265 | 6.325 | 6.790 | 7.109 | 7.546 | 7.847 | 8.075 |
| 12 | 5.710 | 5.797 | 5.878 | 5.953 | 6.023 | 6.089 | 6.151 | 6.209 | 6.660 | 6.970 | 7.394 | 7.687 | 7.908 |
| 13 | 5.625 | 5.711 | 5.789 | 5.862 | 5.931 | 5.995 | 6.055 | 6.112 | 6.551 | 6.853 | 7.267 | 7.552 | 7.769 |
| 14 | 5.554 | 5.637 | 5.714 | 5.785 | 5.852 | 5.915 | 5.973 | 6.029 | 6.459 | 6.754 | 7.159 | 7.437 | 7.649 |
| 15 | 5.492 | 5.574 | 5.649 | 5.719 | 5.785 | 5.846 | 5.904 | 5.958 | 6.379 | 6.669 | 7.065 | 7.338 | 7.546 |
| 16 | 5.439 | 5.519 | 5.593 | 5.662 | 5.726 | 5.786 | 5.843 | 5.896 | 6.310 | 6.594 | 6.983 | 7.252 | 7.456 |
| 17 | 5.392 | 5.471 | 5.544 | 5.612 | 5.675 | 5.734 | 5.790 | 5.842 | 6.249 | 6.529 | 6.912 | 7.176 | 7.377 |
| 18 | 5.351 | 5.429 | 5.501 | 5.567 | 5.629 | 5.688 | 5.743 | 5.794 | 6.195 | 6.471 | 6.848 | 7.108 | 7.307 |
| 19 | 5.314 | 5.391 | 5.462 | 5.528 | 5.589 | 5.647 | 5.701 | 5.752 | 6.147 | 6.419 | 6.791 | 7.048 | 7.244 |
| 20 | 5.282 | 5.357 | 5.427 | 5.492 | 5.553 | 5.610 | 5.663 | 5.714 | 6.104 | 6.372 | 6.740 | 6.994 | 7.187 |
| 24 | 5.179 | 5.251 | 5.319 | 5.381 | 5.439 | 5.494 | 5.545 | 5.594 | 5.968 | 6.226 | 6.578 | 6.822 | 7.007 |
| 30 | 5.077 | 5.147 | 5.211 | 5.271 | 5.327 | 5.379 | 5.429 | 5.475 | 5.833 | 6.080 | 6.417 | 6.650 | 6.827 |
| 40 | 4.977 | 5.044 | 5.106 | 5.163 | 5.216 | 5.266 | 5.313 | 5.358 | 5.700 | 5.934 | 6.255 | 6.477 | 6.645 |
| 60 | 4.878 | 4.942 | 5.001 | 5.056 | 5.107 | 5.154 | 5.199 | 5.241 | 5.566 | 5.789 | 6.093 | 6.302 | 6.462 |
| 120 | 4.781 | 4.842 | 4.898 | 4.950 | 4.998 | 5.043 | 5.086 | 5.126 | 5.434 | 5.644 | 5.929 | 6.126 | 6.275 |
| 1000 | 4.685 | 4.743 | 4.796 | 4.845 | 4.891 | 4.934 | 4.974 | 5.012 | 5.301 | 5.498 | 5.764 | 5.947 | 6.085 |

**Upper percentage points of the studenized range (1%)**

| df | p = number of treatment | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 90.020 | 135.000 | 164.300 | 185.600 | 202.200 | 215.800 | 227.200 | 237.000 | 245.600 | 253.200 | 260.000 |
| 2 | 14.040 | 19.020 | 22.290 | 24.720 | 26.630 | 28.200 | 29.530 | 30.680 | 31.690 | 32.590 | 33.400 |
| 3 | 8.260 | 10.620 | 12.170 | 13.320 | 14.240 | 15.000 | 15.650 | 16.210 | 16.690 | 17.130 | 17.530 |
| 4 | 6.511 | 8.120 | 9.173 | 9.958 | 10.580 | 11.100 | 11.540 | 11.920 | 12.260 | 12.570 | 12.840 |
| 5 | 5.702 | 6.976 | 7.804 | 8.421 | 8.913 | 9.321 | 9.669 | 9.971 | 10.240 | 10.480 | 10.700 |
| 6 | 5.243 | 6.331 | 7.033 | 7.556 | 7.972 | 8.318 | 8.612 | 8.869 | 9.097 | 9.300 | 9.485 |
| 7 | 4.949 | 5.919 | 6.542 | 7.005 | 7.373 | 7.678 | 7.939 | 8.166 | 8.367 | 8.548 | 8.711 |
| 8 | 4.745 | 5.635 | 6.204 | 6.625 | 6.959 | 7.237 | 7.474 | 7.680 | 7.863 | 8.027 | 8.176 |
| 9 | 4.596 | 5.428 | 5.957 | 6.347 | 6.657 | 6.915 | 7.134 | 7.325 | 7.494 | 7.646 | 7.784 |
| 10 | 4.482 | 5.270 | 5.769 | 6.136 | 6.428 | 6.669 | 6.875 | 7.054 | 7.213 | 7.356 | 7.485 |
| 11 | 4.392 | 5.146 | 5.621 | 5.970 | 6.247 | 6.476 | 6.671 | 6.841 | 6.992 | 7.127 | 7.250 |
| 12 | 4.320 | 5.046 | 5.502 | 5.836 | 6.101 | 6.320 | 6.507 | 6.670 | 6.814 | 6.943 | 7.060 |
| 13 | 4.260 | 4.964 | 5.404 | 5.726 | 5.981 | 6.192 | 6.372 | 6.528 | 6.666 | 6.791 | 6.903 |
| 14 | 4.210 | 4.895 | 5.322 | 5.634 | 5.881 | 6.085 | 6.258 | 6.409 | 6.543 | 6.663 | 6.772 |
| 15 | 4.167 | 4.836 | 5.252 | 5.556 | 5.796 | 5.994 | 6.162 | 6.309 | 6.438 | 6.555 | 6.660 |
| 16 | 4.131 | 4.786 | 5.192 | 5.489 | 5.722 | 5.915 | 6.079 | 6.222 | 6.348 | 6.461 | 6.564 |
| 17 | 4.099 | 4.742 | 5.140 | 5.430 | 5.659 | 5.847 | 6.007 | 6.147 | 6.270 | 6.380 | 6.480 |
| 18 | 4.071 | 4.703 | 5.094 | 5.379 | 5.603 | 5.787 | 5.944 | 6.081 | 6.201 | 6.309 | 6.407 |
| 19 | 4.046 | 4.669 | 5.054 | 5.334 | 5.553 | 5.735 | 5.889 | 6.022 | 6.141 | 6.246 | 6.342 |
| 20 | 4.024 | 4.639 | 5.018 | 5.293 | 5.510 | 5.688 | 5.839 | 5.970 | 6.086 | 6.190 | 6.285 |
| 24 | 3.955 | 4.546 | 4.907 | 5.168 | 5.373 | 5.542 | 5.685 | 5.809 | 5.919 | 6.017 | 6.105 |
| 30 | 3.889 | 4.455 | 4.799 | 5.048 | 5.242 | 5.401 | 5.536 | 5.653 | 5.756 | 5.848 | 5.932 |
| 40 | 3.825 | 4.367 | 4.695 | 4.931 | 5.114 | 5.265 | 5.392 | 5.502 | 5.599 | 5.685 | 5.764 |
| 60 | 3.762 | 4.282 | 4.594 | 4.818 | 4.991 | 5.133 | 5.253 | 5.356 | 5.447 | 5.528 | 5.601 |
| 120 | 3.702 | 4.200 | 4.497 | 4.708 | 4.872 | 5.005 | 5.118 | 5.214 | 5.299 | 5.375 | 5.443 |
| 1000 | 3.643 | 4.120 | 4.403 | 4.603 | 4.757 | 4.882 | 4.987 | 5.078 | 5.157 | 5.227 | 5.290 |

www.smartstat.info Tabel Tukey/BNJ

**Upper percentage points of the studenized range (1%)**

| df | p = number of treatment | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 30 | 40 | 60 | 80 | 100 |
| 1 | 266.200 | 271.800 | 277.000 | 281.800 | 286.300 | 290.400 | 294.300 | 298.000 | 326.000 | 344.800 | 370.100 | 387.300 | 400.100 |
| 2 | 34.130 | 34.810 | 35.430 | 36.000 | 36.530 | 37.030 | 37.500 | 37.950 | 41.320 | 43.610 | 46.700 | 48.800 | 50.380 |
| 3 | 17.890 | 18.220 | 18.520 | 18.810 | 19.070 | 19.320 | 19.550 | 19.770 | 21.440 | 22.590 | 24.130 | 25.190 | 25.990 |
| 4 | 13.090 | 13.320 | 13.530 | 13.720 | 13.910 | 14.080 | 14.240 | 14.390 | 15.570 | 16.380 | 17.460 | 18.200 | 18.770 |
| 5 | 10.890 | 11.080 | 11.240 | 11.400 | 11.550 | 11.680 | 11.810 | 11.930 | 12.870 | 13.510 | 14.390 | 14.990 | 15.450 |
| 6 | 9.653 | 9.808 | 9.951 | 10.080 | 10.210 | 10.320 | 10.430 | 10.540 | 11.340 | 11.890 | 12.650 | 13.170 | 13.550 |
| 7 | 8.860 | 8.997 | 9.124 | 9.242 | 9.353 | 9.456 | 9.553 | 9.645 | 10.360 | 10.850 | 11.520 | 11.980 | 12.340 |
| 8 | 8.311 | 8.436 | 8.552 | 8.659 | 8.760 | 8.854 | 8.943 | 9.027 | 9.677 | 10.130 | 10.740 | 11.170 | 11.490 |
| 9 | 7.910 | 8.025 | 8.132 | 8.232 | 8.325 | 8.412 | 8.495 | 8.573 | 9.177 | 9.594 | 10.170 | 10.560 | 10.860 |
| 10 | 7.603 | 7.712 | 7.812 | 7.906 | 7.993 | 8.075 | 8.153 | 8.226 | 8.794 | 9.186 | 9.726 | 10.100 | 10.380 |
| 11 | 7.362 | 7.464 | 7.560 | 7.648 | 7.731 | 7.809 | 7.883 | 7.952 | 8.491 | 8.864 | 9.377 | 9.732 | 10.000 |
| 12 | 7.166 | 7.265 | 7.356 | 7.441 | 7.520 | 7.594 | 7.664 | 7.730 | 8.246 | 8.602 | 9.093 | 9.433 | 9.693 |
| 13 | 7.006 | 7.100 | 7.188 | 7.269 | 7.345 | 7.417 | 7.484 | 7.548 | 8.043 | 8.386 | 8.859 | 9.186 | 9.436 |
| 14 | 6.871 | 6.962 | 7.047 | 7.125 | 7.199 | 7.268 | 7.333 | 7.394 | 7.873 | 8.204 | 8.661 | 8.978 | 9.219 |
| 15 | 6.756 | 6.845 | 6.927 | 7.003 | 7.074 | 7.141 | 7.204 | 7.264 | 7.727 | 8.049 | 8.492 | 8.800 | 9.034 |
| 16 | 6.658 | 6.744 | 6.823 | 6.897 | 6.967 | 7.032 | 7.093 | 7.151 | 7.602 | 7.915 | 8.346 | 8.646 | 8.874 |
| 17 | 6.572 | 6.656 | 6.733 | 6.806 | 6.873 | 6.937 | 6.997 | 7.053 | 7.493 | 7.798 | 8.219 | 8.511 | 8.734 |
| 18 | 6.496 | 6.579 | 6.655 | 6.725 | 6.791 | 6.854 | 6.912 | 6.967 | 7.397 | 7.696 | 8.107 | 8.393 | 8.611 |
| 19 | 6.430 | 6.510 | 6.585 | 6.654 | 6.719 | 6.780 | 6.837 | 6.891 | 7.312 | 7.605 | 8.008 | 8.288 | 8.501 |
| 20 | 6.370 | 6.449 | 6.523 | 6.591 | 6.654 | 6.714 | 6.770 | 6.823 | 7.237 | 7.523 | 7.919 | 8.194 | 8.404 |
| 24 | 6.186 | 6.261 | 6.330 | 6.394 | 6.453 | 6.510 | 6.562 | 6.612 | 7.001 | 7.270 | 7.641 | 7.900 | 8.097 |
| 30 | 6.008 | 6.078 | 6.142 | 6.202 | 6.258 | 6.311 | 6.361 | 6.407 | 6.771 | 7.023 | 7.370 | 7.611 | 7.796 |
| 40 | 5.835 | 5.900 | 5.961 | 6.017 | 6.069 | 6.118 | 6.165 | 6.208 | 6.547 | 6.781 | 7.104 | 7.328 | 7.499 |
| 60 | 5.667 | 5.728 | 5.784 | 5.837 | 5.886 | 5.931 | 5.974 | 6.015 | 6.329 | 6.546 | 6.843 | 7.049 | 7.207 |
| 120 | 5.505 | 5.561 | 5.614 | 5.662 | 5.708 | 5.750 | 5.790 | 5.827 | 6.117 | 6.316 | 6.588 | 6.776 | 6.919 |
| 1000 | 5.348 | 5.400 | 5.448 | 5.493 | 5.535 | 5.574 | 5.611 | 5.645 | 5.911 | 6.092 | 6.338 | 6.507 | 6.636 |

Table G. Table of Critical Values of $T$ in the Wilcoxon Matched-pairs Signed-ranks Test*

| $N$ | Level of significance for one-tailed test | | |
|---|---|---|---|
| | .025 | .01 | .005 |
| | Level of significance for two-tailed test | | |
| | .05 | .02 | .01 |
| 6 | 0 | — | — |
| 7 | 2 | 0 | — |
| 8 | 4 | 2 | 0 |
| 9 | 6 | 3 | 2 |
| 10 | 8 | 5 | 3 |
| 11 | 11 | 7 | 5 |
| 12 | 14 | 10 | 7 |
| 13 | 17 | 13 | 10 |
| 14 | 21 | 16 | 13 |
| 15 | 25 | 20 | 16 |
| 16 | 30 | 24 | 20 |
| 17 | 35 | 28 | 23 |
| 18 | 40 | 33 | 28 |
| 19 | 46 | 38 | 32 |
| 20 | 52 | 43 | 38 |
| 21 | 59 | 49 | 43 |
| 22 | 66 | 56 | 49 |
| 23 | 73 | 62 | 55 |
| 24 | 81 | 69 | 61 |
| 25 | 89 | 77 | 68 |

TABLE K. TABLE OF CRITICAL VALUES OF $U$ IN THE MANN-WHITNEY TEST* (*Continued*)

Table $K_{II}$. Critical Values of $U$ for a One-tailed Test at $\alpha = .01$ or for a Two-tailed Test at $\alpha = .02$

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 |
| 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 |
| 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 9 | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 38 | 40 |
| 10 | 16 | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 38 | 41 | 44 | 47 |
| 11 | 18 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 |
| 12 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 56 | 60 |
| 13 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 | 67 |
| 14 | 26 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | 51 | 56 | 60 | 65 | 69 | 73 |
| 15 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 66 | 70 | 75 | 80 |
| 16 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 | 82 | 87 |
| 17 | 33 | 38 | 44 | 49 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | 82 | 88 | 93 |
| 18 | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 | 100 |
| 19 | 38 | 44 | 50 | 56 | 63 | 69 | 75 | 82 | 88 | 94 | 101 | 107 |
| 20 | 40 | 47 | 53 | 60 | 67 | 73 | 80 | 87 | 93 | 100 | 107 | 114 |

* Adapted and abridged from Tables 1, 3, 5, and 7 of Auble, D. 1953. Extended tables for the Mann-Whitney statistic. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, No. 2, with the kind permission of the author and the publisher.

TABLE K. TABLE OF CRITICAL VALUES OF $U$ IN THE MANN-WHITNEY TEST* (*Continued*)

Table $K_{III}$. Critical Values of $U$ for a One-tailed Test at $\alpha = .025$ or for a Two-tailed Test at $\alpha = .05$

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 |
| 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| 7 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 8 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 38 | 41 |
| 9 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| 10 | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 52 | 55 |
| 11 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 12 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 13 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 59 | 63 | 67 | 72 | 76 |
| 14 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 | 64 | 67 | 74 | 78 | 83 |
| 15 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| 16 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 92 | 98 |
| 17 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 | 81 | 87 | 93 | 99 | 105 |
| 18 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 |
| 19 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 | 92 | 99 | 106 | 113 | 119 |
| 20 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 119 | 127 |

* Adapted and abridged from Tables 1, 3, 5, and 7 of Auble, D. 1953. Extended tables for the Mann-Whitney statistic. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, No. 2, with the kind permission of the author and the publisher.

**Table K. Table of Critical Values of $U$ in the Mann-Whitney Test* (*Continued*)**

**Table $K_{IV}$.** Critical Values of $U$ for a One-tailed Test at $\alpha = .05$ or for a Two-tailed Test at $\alpha = .10$

| $n_2$ \ $n_1$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 5 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| 6 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 8 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 |
| 9 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| 10 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 11 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 12 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| 13 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| 14 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| 15 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| 16 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 17 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| 18 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |

* Adapted and abridged from Tables 1, 3, 5, and 7 of Auble, D. 1953. Extended tables for the Mann-Whitney statistic. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, No. 2, with the kind permission of the author and the publisher.

Table L. Table of Critical Values of $K_D$ in the Kolmogorov-Smirnov Two-sample Test
(Small samples)

| $N$ | One-tailed test* | | Two-tailed test† | |
|---|---|---|---|---|
| | $\alpha = .05$ | $\alpha = .01$ | $\alpha = .05$ | $\alpha = .01$ |
| 3 | 3 | — | — | — |
| 4 | 4 | — | 4 | — |
| 5 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 5 | 6 | 5 | 6 |
| 7 | 5 | 6 | 6 | 6 |
| 8 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 9 | 6 | 7 | 6 | 7 |
| 10 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 11 | 6 | 8 | 7 | 8 |
| 12 | 6 | 8 | 7 | 8 |
| 13 | 7 | 8 | 7 | 9 |
| 14 | 7 | 8 | 8 | 9 |
| 15 | 7 | 9 | 8 | 9 |
| 16 | 7 | 9 | 8 | 10 |
| 17 | 8 | 9 | 8 | 10 |
| 18 | 8 | 10 | 9 | 10 |
| 19 | 8 | 10 | 9 | 10 |
| 20 | 8 | 10 | 9 | 11 |
| 21 | 8 | 10 | 9 | 11 |
| 22 | 9 | 11 | 9 | 11 |
| 23 | 9 | 11 | 10 | 11 |
| 24 | 9 | 11 | 10 | 12 |
| 25 | 9 | 11 | 10 | 12 |
| 26 | 9 | 11 | 10 | 12 |
| 27 | 9 | 12 | 10 | 12 |
| 28 | 10 | 12 | 11 | 13 |
| 29 | 10 | 12 | 11 | 13 |
| 30 | 10 | 12 | 11 | 13 |
| 35 | 11 | 13 | 12 | |
| 40 | 11 | 14 | 13 | |

* Abridged from Goodman, L. A. 1954. Kolmogorov-Smirnov tests for psychological research. *Psychol. Bull.*, **51**, 167, with the kind permission of the author and the American Psychological Association.

† Derived from Table 1 of Massey, F. J., Jr. 1951. The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 126–127, with the kind permission of the author and the publisher.

Table M. Table of Critical Values of $D$ in the Kolmogorov-Smirnov Two-sample Test
(Large samples: two-tailed test)*

| Level of significance | Value of $D$ so large as to call for rejection of $H_0$ at the indicated level of significance, where $D = \text{maximum } \lvert S_{n_1}(X) - S_{n_2}(X) \rvert$ |
|---|---|
| .10 | $1.22\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ |
| .05 | $1.36\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ |
| .025 | $1.48\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ |
| .01 | $1.63\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ |
| .005 | $1.73\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ |
| .001 | $1.95\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$ |

* Adapted from Smirnov, N. 1948. Tables for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *Ann. Math. Statist.*, **19**, 280–281, with the kind permission of the publisher.

**Table O. Table of Probabilities Associated with Values as Large as Observed Values of $H$ in the Kruskal-Wallis One-way Analysis of Variance by Ranks***

| Sample sizes | | | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | | |
| 2 | 1 | 1 | 2.7000 | .500 |
| 2 | 2 | 1 | 3.6000 | .200 |
| 2 | 2 | 2 | 4.5714 | .067 |
| | | | 3.7143 | .200 |
| 3 | 1 | 1 | 3.2000 | .300 |
| 3 | 2 | 1 | 4.2857 | .100 |
| | | | 3.8571 | .133 |
| 3 | 2 | 2 | 5.3572 | .029 |
| | | | 4.7143 | .048 |
| | | | 4.5000 | .067 |
| | | | 4.4643 | .105 |
| 3 | 3 | 1 | 5.1429 | .043 |
| | | | 4.5714 | .100 |
| | | | 4.0000 | .129 |
| 3 | 3 | 2 | 6.2500 | .011 |
| | | | 5.3611 | .032 |
| | | | 5.1389 | .061 |
| | | | 4.5556 | .100 |
| | | | 4.2500 | .121 |
| 3 | 3 | 3 | 7.2000 | .004 |
| | | | 6.4889 | .011 |
| | | | 5.6889 | .029 |
| | | | 5.6000 | .050 |
| | | | 5.0667 | .086 |
| | | | 4.6222 | .100 |
| 4 | 1 | 1 | 3.5714 | .200 |
| 4 | 2 | 1 | 4.8214 | .057 |
| | | | 4.5000 | .076 |
| | | | 4.0179 | .114 |
| 4 | 2 | 2 | 6.0000 | .014 |
| | | | 5.3333 | .033 |
| | | | 5.1250 | .052 |
| | | | 4.4583 | .100 |
| | | | 4.1667 | .105 |
| 4 | 3 | 1 | 5.8333 | .021 |
| | | | 5.2083 | .050 |
| | | | 5.0000 | .057 |
| | | | 4.0556 | .093 |
| | | | 3.8889 | .129 |
| 4 | 3 | 2 | 6.4444 | .008 |
| | | | 6.3000 | .011 |
| | | | 5.4444 | .046 |
| | | | 5.4000 | .051 |
| | | | 4.5111 | .098 |
| | | | 4.4444 | .102 |
| 4 | 3 | 3 | 6.7455 | .010 |
| | | | 6.7091 | .013 |
| | | | 5.7909 | .046 |
| | | | 5.7273 | .050 |
| | | | 4.7091 | .092 |
| | | | 4.7000 | .101 |
| 4 | 4 | 1 | 6.6667 | .010 |
| | | | 6.1667 | .022 |
| | | | 4.9667 | .048 |
| | | | 4.8667 | .054 |
| | | | 4.1667 | .082 |
| | | | 4.0667 | .102 |
| 4 | 4 | 2 | 7.0364 | .006 |
| | | | 6.8727 | .011 |
| | | | 5.4545 | .046 |
| | | | 5.2364 | .052 |
| | | | 4.5545 | .098 |
| | | | 4.4455 | .103 |
| 4 | 4 | 3 | 7.1439 | .010 |
| | | | 7.1364 | .011 |
| | | | 5.5985 | .049 |
| | | | 5.5758 | .051 |
| | | | 4.5455 | .099 |
| | | | 4.4773 | .102 |
| 4 | 4 | 4 | 7.6538 | .008 |
| | | | 7.5385 | .011 |
| | | | 5.6923 | .049 |
| | | | 5.6538 | .054 |
| | | | 4.6539 | .097 |
| | | | 4.5001 | .104 |
| 5 | 1 | 1 | 3.8571 | .143 |
| 5 | 2 | 1 | 5.2500 | .036 |
| | | | 5.0000 | .048 |
| | | | 4.4500 | .071 |
| | | | 4.2000 | .095 |
| | | | 4.0500 | .119 |

Table O. Table of Probabilities Associated with Values as Large as Observed Values of $H$ in the Kruskal-Wallis One-way Analysis of Variance by Ranks* (*Continued*)

| Sample sizes | | | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | | |
| 5 | 2 | 2 | 6.5333 | .008 |
| | | | 6.1333 | .013 |
| | | | 5.1600 | .034 |
| | | | 5.0400 | .056 |
| | | | 4.3733 | .090 |
| | | | 4.2933 | .122 |
| 5 | 3 | 1 | 6.4000 | .012 |
| | | | 4.9600 | .048 |
| | | | 4.8711 | .052 |
| | | | 4.0178 | .095 |
| | | | 3.8400 | .123 |
| 5 | 3 | 2 | 6.9091 | .009 |
| | | | 6.8218 | .010 |
| | | | 5.2509 | .049 |
| | | | 5.1055 | .052 |
| | | | 4.6509 | .091 |
| | | | 4.4945 | .101 |
| 5 | 3 | 3 | 7.0788 | .009 |
| | | | 6.9818 | .011 |
| | | | 5.6485 | .049 |
| | | | 5.5152 | .051 |
| | | | 4.5333 | .097 |
| | | | 4.4121 | .109 |
| 5 | 4 | 1 | 6.9545 | .008 |
| | | | 6.8400 | .011 |
| | | | 4.9855 | .044 |
| | | | 4.8600 | .056 |
| | | | 3.9873 | .098 |
| | | | 3.9600 | .102 |
| 5 | 4 | 2 | 7.2045 | .009 |
| | | | 7.1182 | .010 |
| | | | 5.2727 | .049 |
| | | | 5.2682 | .050 |
| | | | 4.5409 | .098 |
| | | | 4.5182 | .101 |
| 5 | 4 | 3 | 7.4449 | .010 |
| | | | 7.3949 | .011 |
| | | | 5.6564 | .049 |
| | | | 5.6308 | .050 |
| | | | 4.5487 | .099 |
| | | | 4.5231 | .103 |
| 5 | 4 | 4 | 7.7604 | .009 |
| | | | 7.7440 | .011 |
| | | | 5.6571 | .049 |
| | | | 5.6176 | .050 |
| | | | 4.6187 | .100 |
| | | | 4.5527 | .102 |
| 5 | 5 | 1 | 7.3091 | .009 |
| | | | 6.8364 | .011 |
| | | | 5.1273 | .046 |
| | | | 4.9091 | .053 |
| | | | 4.1091 | .086 |
| | | | 4.0364 | .105 |
| 5 | 5 | 2 | 7.3385 | .010 |
| | | | 7.2692 | .010 |
| | | | 5.3385 | .047 |
| | | | 5.2462 | .051 |
| | | | 4.6231 | .097 |
| | | | 4.5077 | .100 |
| 5 | 5 | 3 | 7.5780 | .010 |
| | | | 7.5429 | .010 |
| | | | 5.7055 | .046 |
| | | | 5.6264 | .051 |
| | | | 4.5451 | .100 |
| | | | 4.5363 | .102 |
| 5 | 5 | 4 | 7.8229 | .010 |
| | | | 7.7914 | .010 |
| | | | 5.6657 | .049 |
| | | | 5.6429 | .050 |
| | | | 4.5229 | .099 |
| | | | 4.5200 | .101 |
| 5 | 5 | 5 | 8.0000 | .009 |
| | | | 7.9800 | .010 |
| | | | 5.7800 | .049 |
| | | | 5.6600 | .051 |
| | | | 4.5600 | .100 |
| | | | 4.5000 | .102 |

* Adapted and abridged from Kruskal, W. H., and Wallis, W. A. 1952. Use of ranks in one-criterion variance analysis. *J. Amer. Statist. Ass.*, **47**, 614–617, with the kind permission of the authors and the publisher. (The corrections to this table given by the authors in Errata, *J. Amer. Statist. Ass.*, **48**, 910, have been incorporated.)

**Table N. Table of Probabilities Associated with Values as Large as Observed Values of $\chi_r^2$ in the Friedman Two-way Analysis of Variance by Ranks***

Table $N_1$. $k = 3$

| $N = 2$ | | $N = 3$ | | $N = 4$ | | $N = 5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| 0 | 1.000 | .000 | 1.000 | .0 | 1.000 | .0 | 1.000 |
| 1 | .833 | .667 | .944 | .5 | .931 | .4 | .954 |
| 3 | .500 | 2.000 | .528 | 1.5 | .653 | 1.2 | .691 |
| 4 | .167 | 2.667 | .361 | 2.0 | .431 | 1.6 | .522 |
| | | 4.667 | .194 | 3.5 | .273 | 2.8 | .367 |
| | | 6.000 | .028 | 4.5 | .125 | 3.6 | .182 |
| | | | | 6.0 | .069 | 4.8 | .124 |
| | | | | 6.5 | .042 | 5.2 | .093 |
| | | | | 8.0 | .0046 | 6.4 | .039 |
| | | | | | | 7.6 | .024 |
| | | | | | | 8.4 | .0085 |
| | | | | | | 10.0 | .00077 |

| $N = 6$ | | $N = 7$ | | $N = 8$ | | $N = 9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| .00 | 1.000 | .000 | 1.000 | .00 | 1.000 | .000 | 1.000 |
| .33 | .956 | .286 | .964 | .25 | .967 | .222 | .971 |
| 1.00 | .740 | .857 | .768 | .75 | .794 | .667 | .814 |
| 1.33 | .570 | 1.143 | .620 | 1.00 | .654 | .889 | .865 |
| 2.33 | .430 | 2.000 | .486 | 1.75 | .531 | 1.556 | .569 |
| 3.00 | .252 | 2.571 | .305 | 2.25 | .355 | 2.000 | .398 |
| 4.00 | .184 | 3.429 | .237 | 3.00 | .285 | 2.667 | .328 |
| 4.33 | .142 | 3.714 | .192 | 3.25 | .236 | 2.889 | .278 |
| 5.33 | .072 | 4.571 | .112 | 4.00 | .149 | 3.556 | .187 |
| 6.33 | .052 | 5.429 | .085 | 4.75 | .120 | 4.222 | .154 |
| 7.00 | .029 | 6.000 | .052 | 5.25 | .079 | 4.667 | .107 |
| 8.33 | .012 | 7.143 | .027 | 6.25 | .047 | 5.556 | .069 |
| 9.00 | .0081 | 7.714 | .021 | 6.75 | .038 | 6.000 | .057 |
| 9.33 | .0055 | 8.000 | .016 | 7.00 | .030 | 6.222 | .048 |
| 10.33 | .0017 | 8.857 | .0084 | 7.75 | .018 | 6.889 | .031 |
| 12.00 | .00013 | 10.286 | .0036 | 9.00 | .0099 | 8.000 | .019 |
| | | 10.571 | .0027 | 9.25 | .0080 | 8.222 | .016 |
| | | 11.143 | .0012 | 9.75 | .0048 | 8.667 | .010 |
| | | 12.286 | .00032 | 10.75 | .0024 | 9.556 | .0060 |
| | | 14.000 | .000021 | 12.00 | .0011 | 10.667 | .0035 |
| | | | | 12.25 | .00086 | 10.889 | .0029 |
| | | | | 13.00 | .00026 | 11.556 | .0013 |
| | | | | 14.25 | .000061 | 12.667 | .00066 |
| | | | | 16.00 | .0000036 | 13.556 | .00035 |
| | | | | | | 14.000 | .00020 |
| | | | | | | 14.222 | .000097 |
| | | | | | | 14.889 | .000054 |
| | | | | | | 16.222 | .000011 |
| | | | | | | 18.000 | .0000006 |

* Adapted from Friedman, M. 1937. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *J. Amer. Statist. Ass.*, **32**, 688–689, with the kind permission of the author and the publisher.

Table N. Table of Probabilities Associated with Values as Large as Observed Values of $\chi_r^2$ in the Friedman Two-way Analysis of Variance by Ranks* (*Continued*)

Table $N_{II}$. $k = 4$

| $N = 2$ | | $N = 3$ | | $N = 4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ | $\chi_r^2$ | $p$ |
| .0 | 1.000 | .2 | 1.000 | .0 | 1.000 | 5.7 | .141 |
| .6 | .958 | .6 | .958 | .3 | .992 | 6.0 | .105 |
| 1.2 | .834 | 1.0 | .910 | .6 | .928 | 6.3 | .094 |
| 1.8 | .792 | 1.8 | .727 | .9 | .900 | 6.6 | .077 |
| 2.4 | .625 | 2.2 | .608 | 1.2 | .800 | 6.9 | .068 |
| 3.0 | .542 | 2.6 | .524 | 1.5 | .754 | 7.2 | .054 |
| 3.6 | .458 | 3.4 | .446 | 1.8 | .677 | 7.5 | .052 |
| 4.2 | .375 | 3.8 | .342 | 2.1 | .649 | 7.8 | .036 |
| 4.8 | .208 | 4.2 | .300 | 2.4 | .524 | 8.1 | .033 |
| 5.4 | .167 | 5.0 | .207 | 2.7 | .508 | 8.4 | .019 |
| 6.0 | .042 | 5.4 | .175 | 3.0 | .432 | 8.7 | .014 |
| | | 5.8 | .148 | 3.3 | .389 | 9.3 | .012 |
| | | 6.6 | .075 | 3.6 | .355 | 9.6 | .0069 |
| | | 7.0 | .054 | 3.9 | .324 | 9.9 | .0062 |
| | | 7.4 | .033 | 4.5 | .242 | 10.2 | .0027 |
| | | 8.2 | .017 | 4.8 | .200 | 10.8 | .0016 |
| | | 9.0 | .0017 | 5.1 | .190 | 11.1 | .00094 |
| | | | | 5.4 | .158 | 12.0 | .000072 |

* Adapted from Friedman, M. 1937. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *J. Amer. Statist. Ass.*, **32**, 688–689, with the kind permission of the author and the publisher.

Table Q. Table of Probabilities Associated with Values as Large as Observed Values of $S$ in the Kendall Rank Correlation Coefficient

| $S$ | Values of $N$ | | | | $S$ | Values of $N$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 8 | 9 | | 6 | 7 | 10 |
| 0 | .625 | .592 | .548 | .540 | 1 | .500 | .500 | .500 |
| 2 | .375 | .408 | .452 | .460 | 3 | .360 | .386 | .431 |
| 4 | .167 | .242 | .360 | .381 | 5 | .235 | .281 | .364 |
| 6 | .042 | .117 | .274 | .306 | 7 | .136 | 191 | .300 |
| 8 | | .042 | .199 | .238 | 9 | .068 | .119 | .242 |
| 10 | | .0083 | .138 | .179 | 11 | .028 | .068 | .190 |
| 12 | | | .089 | .130 | 13 | .0083 | .035 | .146 |
| 14 | | | .054 | .090 | 15 | .0014 | .015 | .108 |
| 16 | | | .031 | .060 | 17 | | .0054 | .078 |
| 18 | | | .016 | .038 | 19 | | .0014 | .054 |
| 20 | | | .0071 | .022 | 21 | | .00020 | .036 |
| 22 | | | .0028 | .012 | 23 | | | .023 |
| 24 | | | .00087 | .0063 | 25 | | | .014 |
| 26 | | | .00019 | .0029 | 27 | | | .0083 |
| 28 | | | .000025 | .0012 | 29 | | | .0046 |
| 30 | | | | .00043 | 31 | | | .0023 |
| 32 | | | | .00012 | 33 | | | .0011 |
| 34 | | | | .000025 | 35 | | | .00047 |
| 36 | | | | .0000028 | 37 | | | .00018 |
| | | | | | 39 | | | .000058 |
| | | | | | 41 | | | .000015 |
| | | | | | 43 | | | .0000028 |
| | | | | | 45 | | | .00000028 |

* Adapted by permission from Kendall, M. G., *Rank correlation methods*, Charles Griffin & Company, Ltd., London, 1948, Appendix Table 1 p. 141.

## Tabel Duncan

**TABEL A.11***

Wilayah-Terstudentkan Nyata Terkecil

$\alpha = 0.05$

| $\nu$ | $p$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 |
| 2 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 |
| 3 | 4.501 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 |
| 4 | 3.927 | 4.013 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 |
| 5 | 3.635 | 3.749 | 3.797 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 |
| 6 | 3.461 | 3.587 | 3.649 | 3.680 | 3.694 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 |
| 7 | 3.344 | 3.477 | 3.548 | 3.588 | 3.611 | 3.622 | 3.626 | 3.626 | 3.626 |
| 8 | 3.261 | 3.399 | 3.475 | 3.521 | 3.549 | 3.566 | 3.575 | 3.579 | 3.579 |
| 9 | 3.199 | 3.339 | 3.420 | 3.470 | 3.502 | 3.523 | 3.536 | 3.544 | 3.547 |
| 10 | 3.151 | 3.293 | 3.376 | 3.430 | 3.465 | 3.489 | 3.505 | 3.516 | 3.522 |
| 11 | 3.113 | 3.256 | 3.342 | 3.397 | 3.435 | 3.462 | 3.480 | 3.493 | 3.501 |
| 12 | 3.082 | 3.225 | 3.313 | 3.370 | 3.410 | 3.439 | 3.459 | 3.474 | 3.484 |
| 13 | 3.055 | 3.200 | 3.289 | 3.348 | 3.389 | 3.419 | 3.442 | 3.458 | 3.470 |
| 14 | 3.033 | 3.178 | 3.268 | 3.329 | 3.372 | 3.403 | 3.426 | 3.444 | 3.457 |
| 15 | 3.014 | 3.160 | 3.250 | 3.312 | 3.356 | 3.389 | 3.413 | 3.432 | 3.446 |
| 16 | 2.998 | 3.144 | 3.235 | 3.298 | 3.343 | 3.376 | 3.402 | 3.422 | 3.437 |
| 17 | 2.984 | 3.130 | 3.222 | 3.285 | 3.331 | 3.366 | 3.392 | 3.412 | 3.429 |
| 18 | 2.971 | 3.118 | 3.210 | 3.274 | 3.321 | 3.356 | 3.383 | 3.405 | 3.421 |
| 19 | 2.960 | 3.107 | 3.199 | 3.264 | 3.311 | 3.347 | 3.375 | 3.397 | 3.415 |
| 20 | 2.950 | 3.097 | 3.190 | 3.255 | 3.303 | 3.339 | 3.368 | 3.391 | 3.409 |
| 24 | 2.919 | 3.066 | 3.160 | 3.226 | 3.276 | 3.315 | 3.345 | 3.370 | 3.390 |
| 30 | 2.888 | 3.035 | 3.131 | 3.199 | 3.250 | 3.290 | 3.322 | 3.349 | 3.371 |
| 40 | 2.858 | 3.006 | 3.102 | 3.171 | 3.224 | 3.266 | 3.300 | 3.328 | 3.352 |
| 60 | 2.829 | 2.976 | 3.073 | 3.143 | 3.198 | 3.241 | 3.277 | 3.307 | 3.333 |
| 120 | 2.800 | 2.947 | 3.045 | 3.116 | 3.172 | 3.217 | 3.254 | 3.287 | 3.314 |
| $\infty$ | 2.772 | 2.918 | 3.017 | 3.089 | 3.146 | 3.193 | 3.232 | 3.265 | 3.294 |

*Diringkas dari H. L. Harter, "Critical values for Duncan's new multiple test," *Biometrics*, vol. 16, no. 4 (1960) dengan izin dari pengarang dan editor.

# Daftar Pustaka


1. Anwar, dkk. (2024). Buku Ajar Statistik Inferensial: Program Studi Agribisnis FP Unram.
2. Huitema, B. E. (2011). The analysis of covariance and alternatives: Statistical methods for experiments, quasi-experiments, and single-case studies (2nd ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
3. Montgomery, D. C. (2013). Design and analysis of experiments (8th ed.). John Wiley & Sons. ISBN: 978-1-118-14692-7.
4. Razali, N. M., & Wah, Y. B. (2011). Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Liliefors and Anderson-Darling Test. Faculty of Computer and Mathematical Science, University Teknologi MARA, 40450 Shah Alam, Selangor, Malaysia.
5. Supranto, J. (2016). Statistik Teori & Aplikasi (Edisi ke-8, Jilid 2). Jakarta: Erlangga.
6. Tim Dosen Politeknik Statistika STIS (2023). AnalysisVariance (ANOVA). Politeknik Statistika STIS.
7. Walpole, Ronald E., Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, dan Keying Ye. (2012). Probability & Statistics for Engineers & Scientist: Boston Pearson Education. 8. Wildt, A. R., & Ahtola, O. T. (1978). Analysis of covariance. Sage University Papers Series. Quantitative Applications in the Social Sciences; No. 07-012. Sage Publications.

# Daftar Penulis

PERTEMUAN 1
1. Nabhan Athallah
2. Nia Aulia

PERTEMUAN 2
1. Hafizh Shah Firdaus
2. Danang Ivan Pangestu

PERTEMUAN 3
1. Ahmad Aikun
2. Cahya Rama Vinanza
3. Moses Noel Estomihi Simanullang

PERTEMUAN 4
1. Auliya Ahmada Ghinannafsa
2. Rizal Fakhruddin Nasution
3. Sean Gusti Setyawan

PERTEMUAN 5
1. Rezki Nur Amalia Haris
2. Xavier Yubin Raditio

PERTEMUAN 6
1. Hana Sabrina Fitria Abrora
2. Hanif Jawahir
3. Nadia Nur Nisrina

PERTEMUAN 7
1. Alif Zakiansyah As Syauqi
2. Narangga Khoirul Utama
3. Yudistira Aldiwijaya

PERTEMUAN 8
1. Arif Hidayat Ramadhan
2. Muhammad Nabil Alif Novanto
3. Muhammad Ridho Purwanto

PERTEMUAN 9
1. Irish Shanty Kinsella Puteri
2. Luh Nyoman Ratih Swandewi Putri
3. Rani Kusumawati

PERTEMUAN 10
1. Anisa Giri Ramadhani
2. Muhammad Arkan Anzuye
3. Ni Putu Karistya Paicha Maesi

PERTEMUAN 11
1. Miftahul Husna
2. Abdul Hanif Al Fatah
3. Immanita Denawinta Ginting

PERTEMUAN 12
1. Agustina Beladewiana Madu
2. Farhiya Salsa Billa
3. Ica Bali Tri Susmita

PERTEMUAN 13

1. Andrian Fajar Fahmi
2. Cahyani Vevy Wandara
3. Zaid Rizky Ziadi

PERTEMUAN 14

1. Arianto Barus
2. Immanuella Risna Sahalana Tumanggor
3. Muhammad Habibi