

Probabilidad

Alejandro Zubiri

March 24, 2025

Índice

1	Nociones Básicas	2
1.1	Experimentos Aleatorios	2
1.1.1	Espacio muestral	2
1.1.2	Conjunto de partes	2
1.2	Probabilidad	2
1.3	Axiomas de Kolmogorov	2
1.3.1	Propiedades	3
2	Combinatoria	4
2.1	Variaciones	4
2.1.1	Variaciones con repetición	4
2.1.2	Variaciones sin repetición	4
2.2	Permutaciones	4
2.2.1	Permutaciones ordinarias	4
2.2.2	Permutaciones con repetición	5
2.3	Combinaciones	5
2.3.1	Combinaciones sin repetición	5
2.3.2	Combinaciones con repetición	5
2.4	Diferencias entre ellas	5
3	Probabilidad condicionada	6
3.1	Regla del producto	6
3.2	Independencia condicional	7
4	Tema Cuatro	8
4.1	Variable aleatoria	8
4.2	Estadística descriptiva	8
4.2.1	Distribución de una variable condicionada por un suceso A	9
4.3	Momentos respecto al origen	9
4.4	Momentos respecto a la media	9
4.5	Medidas de forma de la distribución	9
4.5.1	Coefficiente de asimetría Fisher	9
4.5.2	Curtosis	9
4.6	Entropía	10
4.7	Distribuciones de probabilidad más comunes	10
4.7.1	Distribución binomial	10
4.7.2	Distribución de Poisson	10
4.7.3	Distribución geométrica	11
4.8	Distribución binomial negativa	11
4.9	Distribución hipergeométrica	11
4.9.1	Diferencias entre las distribuciones	12

Chapter 1

Nociones Básicas

1.1 Experimentos Aleatorios

1.1.1 Espacio muestral

Son sucesos aleatorios repetidos cuyos resultados no se pueden determinar de antemano. El objetivo es describir el fenómeno desde un punto de vista aleatorio que describa el proceso.

El espacio muestral es el conjunto formado por todos los posibles resultados:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

Y tenemos diferentes tipos:

- Discreto: finito o numerable.
- Continuo.

Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral. El proceso de codificación es el que consiste en pasar de una variable cualitativa a una cuantitativa.

1.1.2 Conjunto de partes

El conjunto de partes del espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

1.2 Probabilidad

Cualesquiera que sean A , se tiene que $0 \leq n(A) \leq n$, y que por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A)$$

Si A ocurre siempre, $n(A) = n \implies P(A) = 1$. Además, si A y B son excluyentes, se tiene que $P(A \cap B) = 0$, y que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

1.3 Axiomas de Kolmogorov

Las propiedades anteriores dotan a \mathbb{A}, \cap, \cup de una estructura de álgebra de Boole (σ -álgebra). Una probabilidad P definida sobre un álgebra de sucesos \mathbb{A} , de un espacio muestral finito Ω , es una función $P : \mathbb{A} \rightarrow [0, 1]$.

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \in [0, 1] \forall A$
- Si A y B son excluyentes, se tiene que $P(A \cap B) = 0$, y que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

También destacamos las leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B}\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.3.1 Propiedades

- $P(\phi) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, y además si $B \subset A$, $P(A - B) = P(A) - P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Chapter 2

Combinatoria

Supongamos que tenemos m elementos, y vamos a generar grupos. Cada grupo contiene n elementos.

2.1 Variaciones

2.1.1 Variaciones con repetición

Se llaman variaciones de repetición de m elementos, tomados de n en n , a los distintos grupos que se pueden formar de tal manera que cada grupo contiene n elementos distintos o iguales, y que un grupo se diferencia de los demás o bien en algún elemento o su posición. El número total es

$$VR(m, n) = m^n$$

Ejemplo: una subrutina genera 1 byte de forma aleatoria en cada ejecución. La cantidad del espacio muestral es:

- Como tenemos $m = 2$ elementos (0, 1), y los tomamos de 8 en 8, la cantidad de elementos en el espacio muestral es $V_8^2 = 8^2 = 64$.

2.1.2 Variaciones sin repetición

Se les llama, de m elementos, tomados de n en n , a los diferentes grupos que se pueden formar tal que

- Cada grupo contiene n elementos **distintos**.
- Cada grupo se diferencia de los demás en algún elemento o en su orden.

$$V(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

2.2 Permutaciones

2.2.1 Permutaciones ordinarias

Si se tienen permutaciones de n elementos, buscamos los distintos grupos que se pueden formar ordenando de diferentes formas n elementos:

$$P(n) = n!$$

2.2.2 Permutaciones con repetición

Donde el primer elemento se repite α veces, el segundo β veces, y así hasta el último que se repite γ veces. La suma $\alpha + \beta + \dots + \gamma = n$. A los distintos grupos de n elementos que se pueden formar con los m elementos, donde cada grupo se compone de α veces el primer elemento, β veces el segundo, etc, el número total es

$$PR(n) = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!}$$

2.3 Combinaciones

2.3.1 Combinaciones sin repetición

De m elementos, tomados de n a n , a los diferentes grupos que se pueden formar de tal manera que cada grupo contenga n elementos distintos (el orden no importa). La cantidad total es

$$C(m, n) = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

2.3.2 Combinaciones con repetición

De m elementos, los diferentes grupos que se pueden formar tal que cada grupo contiene n elementos distintos, en cada grupo se pueden repetir elementos, y cada grupo se diferencia al menos en un elemento. El número total es:

$$CR(m, n) = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

2.4 Diferencias entre ellas

Las diferencias entre estas operaciones son las siguientes:

- **Variaciones:** el orden SÍ importa.
- **Combinaciones:** el orden NO importa.
- **Permutaciones:** caso especial de variaciones donde ordenamos todos los elementos del conjunto ($n = m$).

Chapter 3

Probabilidad condicionada

- Modelos dinámicos: experimentos que se realizan a lo largo del tiempo. Los experimentos son dependientes entre sí.

- Modelos estáticos: mismo período de tiempo.

La probabilidad de que ocurra B si ocurre A es

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3.1 Regla del producto

Supongamos un modelo dinámico donde ocurren sucesos de forma consecutiva $\{A_1, \dots, A_n\}$, se cumple que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \\ P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Definición 1. A y B son sucesos independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definición 2. Sea H una familia de sucesos que no incluyen al espacio vacío. Se dice que H está formada por sucesos completamente independientes, si para todo subconjunto de H se verifica que $H = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$

$$P(\Delta_1 \cap \dots \cap \Delta_n) = \prod_{i=1}^n P(\Delta_i)$$

Teorema 1. Dado un modelo matemático probabilístico representado por (Ω, \mathcal{A}, P) , un sistema completo formado por $\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{A}$ (con todos ellos excluyentes), y sabiéndose $\exists B \in \mathcal{A} P(B|A_i) \forall i$, se verifica que

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$$

Entonces se verifica que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

3.2 Independencia condicional

Si se verifica que

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Entonces A y B son condicionalmente independientes dado C .

Chapter 4

Tema Cuatro

4.1 Variable aleatoria

Existen varias formas de clasificar variables:

- Cualitativa: en función de una cualidad
- Cuantitativa: se puede medir y evaluar con un número.
- Cuasi-cuantitativa: se ordenan en función de una magnitud que puede pertenecer a diferentes intervalos.

Dado un modelo matemático (Ω, \mathcal{A}, P) formada por un espacio muestral Ω , un álgebra de sucesos \mathcal{A} , y una probabilidad P . Una variable discreta X definida sobre el modelo es una función definida como

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Que se denomina como función de masa X_i .

Se llama función de distribución de X a la función $F(X)$ que

$$F(X = x_j) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x_j\}) = P(-\infty, x_j]$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(X) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(X) = 1$
- F es monótona decreciente.
- F es continua por la derecha.
- $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

4.2 Estadística descriptiva

Dada una variable aleatoria discreta X , se define esperanza de X como

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

también la moda, que se define como el valor con mayor probabilidad.

La mediana se define como el valor que se encuentra en la mitad del resto de los valores:

$$P(-\infty, med] = F(X = med) \geq \frac{1}{2}$$

4.2.1 Distribución de una variable condicionada por un suceso A

Dada una función de masa $P(X)$, la probabilidad de que X tome x_i si ha ocurrido A viene dada por

$$P(X = x_i|A) = \frac{P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} \cap A)}{P(A)}$$

y entonces

$$E(X|A) = \sum x_i P(x_i|A)$$

4.3 Momentos respecto al origen

Se denomina momento respecto al origen de orden $r \forall r \in \mathbb{N}$ y se denota como α_r :

$$\alpha_r = E[X^r] = \sum_{i=0}^n x_i^r P(X = x_i)$$

El momento de orden 1 es el valor medio. Con esto podemos definir la varianza como

$$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

4.4 Momentos respecto a la media

Dada la variable aleatoria X discreta con función de masa $P(X = x_i)$, se llama momento respecto a la media de orden r , denota por μ_r como

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = \sum (x_i - \mu)^r P(X = x_i)$$

4.5 Medidas de forma de la distribución

4.5.1 Coeficiente de asimetría Fisher

El coeficiente de asimetría Fisher, denotado por γ_1 , se define como

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (4.1)$$

En función de los valores de γ_1 , tenemos:

- $\gamma_1 = 0$: distribución simétrica.
- $\gamma_1 > 0$: distribución asimétrica positiva.
- $\gamma_1 < 0$: distribución asimétrica negativa.

4.5.2 Curtosis

Se define como

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (4.2)$$

Este coeficiente mide el apuntamiento, es decir, como de "plana" es la distribución.

- $\gamma_2 = 0$: mesocúrtica.
- $\gamma_2 > 0$: menos aplastada.
- $\gamma_2 < 0$: más aplastada.

4.6 Entropía

Definimos la entropía asociada a una variable aleatoria X como

$$H(X) = -\sum p(x_i) \log[p(x_i)]$$

4.7 Distribuciones de probabilidad más comunes

4.7.1 Distribución binomial

Se deben dar las siguientes condiciones:

- El experimento consiste en una secuencia de n ensayos, donde n se conoce con antelación.
- Cada ensayo tiene dos posibles resultados, que definimos como éxito (S), o fracaso (F).
- Cada ensayo es independiente del anterior.
- La probabilidad de éxito es constante y se define como p .

Si queremos, dada una probabilidad p de que ocurra A , que de n elementos, ocurra A x veces, la probabilidad es:

$$P(x) = b(x, n, p) = C_{x,n} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Y el valor medio es

$$E[X] = n \cdot p$$

la varianza

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

4.7.2 Distribución de Poisson

Si $n \rightarrow \infty$ y $x \in [0, \infty)$, entonces la función masa binomial se aproxima a una función llamada **masa de Poisson**:

$$\lim_{(n,p) \rightarrow (\infty, 0)} b(x, n, p) = p(x, \lambda)$$

donde $\lambda = n \cdot p$, y la función masa es

$$p(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{si } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Para $X \sim P(X, \lambda)$, la función distribución de X se denota por

$$P(X; \lambda) = P\{\omega \in \Omega : X \leq x\} = \sum_{y=0}^x p(y, \lambda)$$

Donde se cumple que $\mu = E(X) = \lambda$, y que $V(X) = \sigma^2 = \lambda$

4.7.3 Distribución geométrica

Si tenemos dos posibles resultados, éxito (S) y fracaso (F), y queremos saber la probabilidad de obtener éxito en el ensayo k (es decir, obteniendo fracaso $k - 1$ veces), la probabilidad de obtener éxito en el ensayo k es:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \text{ si } k = 1, 2, 3 \dots$$

y la función distribución como

$$F(X = k) = P(-\infty, X] = \sum_{j=1}^k (1 - p)^{j-1}p \text{ si } x = 0, 1, \dots, n$$

teniendo que $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$, y que $V(X) = \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$

4.8 Distribución binomial negativa

Condiciones:

- Cada ensayo tiene un fracaso o un éxito.
- Los ensayos son independientes.
- La probabilidad de éxito es constante.
- El experimento continua hasta obtener r éxitos observados.

Con esto, obtenemos la probabilidad de que se produzcan F fracasos antes de obtener E éxitos, dada una probabilidad p :

$$nb(F, E, p) = \binom{F + E - 1}{F} p^E (1 - p)^F \quad (4.3)$$

Además, se tiene que

- $\mu = r \frac{1-p}{p}$
- $\sigma^2 = \frac{\mu}{p}$

4.9 Distribución hipergeométrica

Esta distribución nos dice la probabilidad de obtener un número determinado de éxitos al extraer una muestra de una población finita formada por éxitos y fracasos.

Tenemos las siguientes suposiciones:

- La población es finita y consiste de N elementos.
- Cada individuo se caracteriza como un éxito S o fracaso F , y hay M éxitos.
- Se elige una muestra de n individuos tal que cada subconjunto tenga las mismas probabilidades de ser elegido.

Si X es el número de éxitos, entedremos M éxitos y $(N - M)$ fracasos:

$$P(X = x) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Además, se da que

- $E(X) = n \frac{M}{N}$
- $V(X) = n \frac{N-n}{N-1} \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N})$

Ejemplo:

De 5 animales de una especie en extinción, se toman 25 animales y se liberan con otros individuos. Después de mezclarse, se tomaron 10 de esos 25 animales. Se define X como el número de animales marcados en la segunda muestra que contiene 10 animales. Indica la función masa de X y ciertas probabilidades.

Datos:

- $M = 5$
- $N = 25$
- $n = 10$
- x será el número de ejemplares marcados.

Ahora nos interesa que $x = 2$, por lo que aplicamos la ley de Laplace:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{20}{8}}{\binom{25}{10}} \approx 0.38$$

Para $x \leq 2$, tenemos que

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.056 + 0.2569 + 0.385 = 0.6988$$

Y la esperanza es $E(X) = 2$.

4.9.1 Diferencias entre las distribuciones

- **Binomial:** Cuando tienes un número fijo de ensayos independientes con probabilidad constante de éxito.
- **Poisson:** cuando n tiende a infinito y p tiende a 0.
- **Geométrica:** Cuando te interesa el número de ensayos hasta el primer éxito.
- **Binomial negativa:** Cuando te interesa el número de ensayos hasta el r -ésimo éxito.
- **Hipergeométrica:** Cuando extraes una muestra sin reemplazo de una población finita.