Derivadas de orden superior, desarrollos de Taylor y regla de la cadena

Alejandro Zubiri

March 17, 2025

1 Problema 1

Hallar los desarrollos de Taylor de orden 2 en torno a los puntos que se indican.

(a) **[2 puntos]** $f(x, y) = (x - y)^2$ en$(1, 2)$.

Solución

Empezamos evaluando y desarrollando las derivadas:

- $f(1, 2) = (1 - 2)^2 = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 4 = -2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 - 2 = 2$
- $\boldsymbol{\nabla} f = (-2, 2)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

- $\nabla f(1,2) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = -2x + 2y - 2$

También, obtenemos que la correspondiente matriz Hessiana es

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora ya podemos desarrollar el polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned} P_{2,(1,2)}f(\mathbf{x}) &= 1 - 2x + 2y - 2 + \frac{1}{2}(x-1, y-2) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \\ &= -1 - 2x + 2y + x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 2x \\ &= x^2 + y^2 - 2xy - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Que es el polinomio de Taylor buscado

(b) **[2 puntos]** $g(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$ en $(0,0)$.

Solución

- $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$

- $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$

- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} = \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3}$

- $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} = \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$

- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$

- $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$

Si evaluamos cada una de estas derivadas en $(0,0)$, vemos claramente que tanto el gradiente como la correspondiente matrix Hessiana tienen componentes que son 0, y por tanto solo sobrevive el término $g(x, y) = 0$[1].

$$P_{2,(0,0)}(g(\mathbf{x})) = 1$$

(c) [**2 puntos**] $h(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$ en $(0, \pi)$.

Solución

- $h(0, \pi) = 1$
- $\boldsymbol{\nabla} h = e^{xy}(y \cos(x + y) - \sin(x + y), x \cos(x + y) - \sin(x + y))$
- $\boldsymbol{\nabla} h(0, \pi) = (-\pi, 0)$

2 Problema 2

Sean $\boldsymbol{f}(u, v) = (e^{u+2v}, 2u + v)$ y $\boldsymbol{g}(x, y, z) = (2x^2 - y + 3z^3, 2y - x^2)$. Calcular la diferencial de $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ en el punto $\boldsymbol{a} = (2, -1, 1)$, de las siguientes maneras

(a) [**1 punto**] utilizando la regla de la cadena,

Solución

Haciendo esto y lo otro...

(b) [**1 punto**] componiendo y diferenciando.

Solución

Haciendo esto y lo otro...

[1] Si observamos la función, vemos que esta solo se hace más pequeña a medida que x o y crecen, por lo que $g(0, 0)$ es, de hecho, un máximo.

3 Problema 3 [2 puntos]

Las ecuaciones $u = f(x, y, z)$, $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = 2st$ definen u en función de s y t: $u = F(s, t)$. Expresar las derivadas segundas de F respecto a s y t en función de las derivadas de f ($f \in \mathcal{C}^2$).

Solución

Haciendo esto y lo otro...