Variedades Afines

Alejandro Zubiri

March 11, 2025

Índice

1 Variedades Afines

Se define como un subespacio afín de dimensión finita, y estos se pueden definir de diferentes formas.

$$S = \{P_0, \dots, P_n\}$$

Este conjunto de puntos generan el subespacio vectorial asociado:

$$W = \{\mathbf{P_0P_1}, \dots, \mathbf{P_0P_n}\}$$

Y estos generan el subespacio afín

$$L = P + W$$

También, dado un conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_i\}$ que formen un sistema generador, junto con un punto, podríamos generar la variedad.
Todas estas definiciones conforman la misma variedad afín.

Definición 1. *Sea A un espacio afín (A, V, ϕ) asociado a un espacio vectorial V. Sea L un subespacio afín de A, y $P \in L$, y U un subespacio vectorial de V.*
Se llama variedad lineal de A que pasa por P y con dirección U al conjunto de puntos

$$P + U = \{P + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in U\} \tag{1}$$

También se da que en un espacio afín (A, V, ϕ), A es variedad lineal de A.

Dada una variedad afín $P + W$ y un punto $Q \in P + W$, entonces

$$P + W = Q + W$$

lo que quiere decir que podemos definir la misma variedad afín con cualquier punto que pertenezca a esta.
Dado un subconjunto de puntos L de A, podemos comprobar si es una variedad afín si:

- Que el conjunto de vectores generado por los puntos pertenece a V.
- en tal caso, comprobar que $L = P + \{\mathbf{AB}, A, B \in L\}$ para algún punto de L.

Definición 2. *Dado un espacio afín A de dimensión n y $L = P + W$ una variedad lineal de A con dirección W. Dado que L es espacio afín sobre W, entonces*

$$dim(L) = dim(W)$$

El conjunto de soluciones de un sistema lineal

$$PX = C$$

de m ecuaciones con n incógnitas, compatible, es una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Ecuaciones de una variedad lineal

Sea $L = P + W$ una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ de dimensión n, tal que W está generado por una base de vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$. Para cualquier punto $X \in L$, se cumple que

$$\mathbf{PX} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Ahora, siendo O el origen, entonces un punto $X \in L$ se puede expresar como

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OP} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

que llamaremos **ecuación vectorial**.

1.2 Ecuaciones paramétricas de una VA

Si conocemos las coordenadas de un punto P, podemos sustituir en la ecuación vectorial, y tras igualar coordenadas obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = p_1 + \lambda_1 v_{11} + \cdots + \lambda_k v_{k_1} \\
&\ldots \\
&x_n = p_n + \lambda_n v_{1n} + \cdots + \lambda_k v_{kn}
\end{aligned}
$$

1.3 Ecuaciones cartesianas

Si despejamos los valores λ_i, obtenemos las ecuaciones cartesianas.

2 Variedades afines en el plano A_2

Teniendo el sistema de referencia

$$R = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

que define un punto por sus coordenadas

$$P = (p_1, p_2)$$

2.1 Rectas

Una recta es un **hiperplano**, determinada por

- Un punto $P(p_1, p_2)$
- Un vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq \mathbf{0}$

Este vector de dirección determina el subespacio de dirección:

$$S = L(\mathbf{v})$$

Si una recta viene determinada por dos puntos P, Q, podemos expresarla de forma continua como

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}$$

Siendo el vector director de esta el vector **PQ**.