# Física II

Alejandro Zubiri

March 26, 2025

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

# Índice

## 0.1 Bibliografía


- Física para la ciencia y la tecnología - Tipler y Mosca
- Física, Volumen II - Campos y Ondas - M. Alonso. E. J. Finn

# Chapter 1

# Campo eléctrico

**Definición 1.** *Definimos la* ***fuerza de Coulomb*** *entre dos cargas, siendo una fija (foco) y otra la que se mueve (receptora).*

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r = k_0\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r \ (N) \tag{1.1}$$

*Siendo* $k_0 = 9 \cdot 10^9 \ (\frac{Nm^2}{r^2})$, $\varepsilon_0$ *la permitividad eléctrica del vacío, y* $\vec{u}_r$ *el vector que va desde el foco al receptor.*

**Definición 2.** *El campo eléctrco es una region en el espacio alrededor de una carga en la que se pueda situar otra carga receptora para que esta sufra una fuerza repulsora o atractora.*

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \ \left(\frac{N}{C}\right) \tag{1.2}$$

*Podemos representar un campo eléctrico mediante punto-vector o líneas de fuerza.*

**Definición 3.** *Las líneas de fuerza es aquella que tienen como origen el foco, y su vector tangente es el campo eléctrico en cada uno de sus puntos.*

### 1.0.1 Sistema de cargas puntuales

Supongamos un conjunto de $N$ cargas $q_1, \ldots, q_n$ y están situadas en sus vectores $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$. La fuerza que actúa sobre una carga receptora $Q$ cuyo vector posición es $\vec{r}_p$ es la suma vectorial de las fuerzas creadas por el resto de las cargas:

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i Q}{|r_p - r_i|^3}(r_p - r_i) \ (N)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|r_p - r_i|^3}(r_p - r_i) \ (N)\\ &= Q\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i \ (N)\end{aligned} \tag{1.3}$$

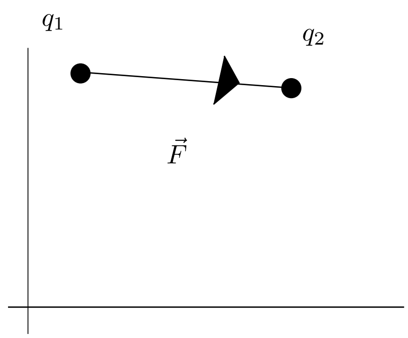



Figure 1.1: fuerza-coulumb

## 1.1 Sistemas de coordenadas

Para unas coordenadas necesitamos un origen $\vec{0}$, y una base. Para unas coordenadas cartesianas, tenemos los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Sin embargo, también podemos utilizar las coordenadas polares, que consisten en una distancia al origen $r$, y un ángulo respecto al eje horizontal $\phi$.
Para definir el ángulo, hay que tener en cuenta que, al desplazar el vector un ángulo, proyectamos el vector sobre el eje $x$ positivo, y giramos el vector en sentido anti horario hasta alcanzar la posición del vector original. Ese ángulo es nuestra coordenada $\phi$. Si trazamos el vector unitario de $r$, su vector perpendicular $\vec{u}_\phi$ es tangencial al ángulo $\phi$. Para poder cambiar entre coordenadas cartesianas y polares, utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= |r|\cos\phi \\ y &= |r|\sin\phi \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x} \\ \vec{u}_r &= (\cos\phi, \sin\phi) \\ \vec{u}_\phi &= (-\sin\phi, \cos\phi) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Respecto a la velocidad en coordenadas polares, tenemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= \dot{r}^2\cos^2\phi - 2\dot{r}r\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\sin^2\phi\dot{\phi}^2 \\ &+ \dot{r}^2\sin^2\phi + 2\dot{r}r\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\cos^2\phi\dot{\phi}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

## 1.2 Distribuciones de cargas continuas

En estas distribuciones se considera que no se pueden distinguir dos cargas vecinas. Por tanto, consideramos que la carga total $Q$ se distribuye de forma continua a lo largo de un determinado volumen, superfície, etc. Esta aproximación es válida cuando se estudia el campo eléctrico a grandes distancias del objeto cargado.
Vamos a estudiar las diferentes distribuciones:

- Lineal: carga distribuida a lo largo de un camino:

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

  Cuando este valor es constante, la densidad es **homogénea**. Si tomamos un incremento de longitud $dl$, encontramos un diferencial de carga $dq$, obteniendo que

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

- Superficial: carga distribuida a lo largo de una superfície:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

- Volumétrica: carga en un volumen:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

## 1.3 Flujo eléctrico

El flujo eléctrico es una medida del flujo del campo eléctrico que atraviesa una superfície:

$$\phi = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dA \, \left( \frac{N \cdot m^2}{C} \right)$$

Donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superfície en cada punto. Si dividimos la superficie total en áreas infinitesimalmente pequeñas $dA$. El flujo infinitesimal $d\phi$ que atraviesa esa superficie es

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

El flujo que atraviesa una superficie cerrada se expresa de la siguiente forma:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

**Teorema 1.** *El teorema establece que el flujo neto que atraviesa una superficie cerrada $A$ es igual a la carga total $Q$ entre la permitividad del espacio encerrada por la superficie:*

$$\phi_{neto} = \oint_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dA = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}$$

## 1.4 Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se definen como

$$\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$$

Donde $\rho$ es el radio en el plano $XY$, $\phi$ es el ángulo (en sentido antihorario) con respecto al eje $X$, y $z$ es la "altura" o desplazamiento respecto al eje $XY$. En coordenadas cartesianas, esto sería

$$\mathbf{r} = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$$

La base definida por este sistema de coordenadas es:

$$\{(\cos\phi, \sin\phi, 0), (-\sin\phi, \cos\phi), (0, 0, 1)\}$$

## 1.5 Coordenadas esféricas

El punto $P$ se define mediante unas coordenadas esféricas.

$$P = (r, \phi, \theta) : \; \theta \in [0, \pi], \; \phi \in [0, 2\pi]$$

En coordenadas cartesianas, esto pasa a ser:

$$P = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

## 1.6 Electrización de un cuerpo

**Definición 4** (Dipolo eléctrico)**.** *Un sistema formado por un centro de carga (positivo y negativo). La carga positiva es igual y opuesta a la negativa. La distancia entre ambos centros son constantes.*

**Definición 5** (Momento dipolar)**.** *A todo dipolo se le asocia un momento dipolar* $\mathbf{p}$*. El origen de este vector está en el centro de carga negativo. La dirección de este es la recta que une el centro de carga negativo con el positivo.*
*El módulo de este viene dado por*

$$|\mathbf{p}| = q \cdot d \; (C \cdot m) = (e \cdot pm)$$

*Cada enlace tendrá asociado un momento dipolar, y el total será la suma de todos ellos. Una molécula es apolar si su momento dipolar total es* $0$*.*

### 1.6.1 Campo eléctrico por un dipolo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{u}_r \\ \mathbf{E}_\theta &= \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{u}_\theta \end{aligned} \tag{1.6}$$

### 1.6.2 Par de fuerza sobre un dipolo en un campo exterior

Situamos un dipolo en el interior de un campo eléctrico dado por $\mathbf{E} = E_0\mathbf{u}_r$. El dipolo gira, y se genera un momento de fuerza dado por

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

# Chapter 2

# Potencial Eléctrico

## 2.1 Trabajo y energía potencial

Supongamos una carga $q_2$, sometida a un determinado campo eléctrico $\mathbf{E}$, generado por una carga $q_1$ (en reposo). La carga $q_2$ se sitúa inicialmente en $\mathbf{r}_i$, y se desplaza, bajo el efecto del campo eléctrico, hasta $\mathbf{r}_f$.
Este trabajo, aplicando la ley de Coulomb, termina siendo

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -\left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_f} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \right) = U_i - U_f = -\Delta U$$

de aquí se deduce que el trabajo depende de la función **energía potencial** $U$. Esta depende únicamente de la posición de la partícula $q_2$ en cada momento $t$, y viene dada por

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r|}}$$

El trabajo realizado al desplazar la carga de $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_f$ se puede expresar como la diferencia de la energía potencial:

$$W = -\Delta U$$

De aquí se puede deducir que el trabajo realizado para desplazar no depende de la trayectoria, sino únicamente de lo punto inicial y final.

## 2.2 Potencial eléctrico

Si la carga receptora $q_2$ está sometida a un campo eléctrico $\mathbf{E}$, se cumple que la fuerza generada es $\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}$. Por tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar $q_2$ se puede definir como

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_i}^{r_f} q_2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \\ \frac{W}{q_2} &= \int_{r_i}^{r_f} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \\ \frac{W}{q_2} &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_i} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_f} = -\Delta V \end{aligned} \tag{2.1}$$

por tanto, definimos el potencial eléctrico como

$$\boxed{V(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \ \left(\frac{J}{C}\right) = \frac{U}{q_2} \ (V)}$$

que es la energía potencial por unidad de carga. También podemos deducir que

$$[E] = \left[\frac{V}{m}\right]$$

Si sabemos la expresión de un campo elécitro, se da que

$$V(\mathbf{r}) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2.2}$$

## 2.3 Campo vectorial

Supongamos una carga $q_1$ que genera un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre una carga de 1 $(C)$ a una distancia $r$ del foco. Se dice que $\mathbf{E}$ es conservativo si cumple que:
- $\mathbf{E}$ solo depende de la posición, y no depende explícitamente del tiempo.
- Si se cumple 1, existe una función $V(\mathbf{r})$ tal que $V(\mathbf{r}_i)$
$-V(\mathbf{r}_f) = \frac{W}{q_2}$. La diferencia de potencial solo depende de la posición inicial y final de la carga desplazada.
- La integral del trabajo a lo largo de un camino cerrado es 0. Consecuentemente, la circulación de un vector siempre es nula.
- $dV = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}$

## 2.4 Potencial por una distribución de carga

Supongamos un conjunto de cargas que se denotan $\{q_i\}^n$, la posición relativa de cada carga al punto $P$ se denota $\mathbf{r}_i$.
El potencial en $P$ es la suma de potenciales inviduales:

$$V(\mathbf{r}_P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i|} \tag{2.3}$$

## 2.5 Potencial por distribución de carga continua

### 2.5.1 Lineal

El potencial debido a una distribución de carga lineal con densidad de carga

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

Al tener una carga infinitesimal d$q$, le corresponde un potencial infinitesimal d$V$, por lo que, integrando, tenemos

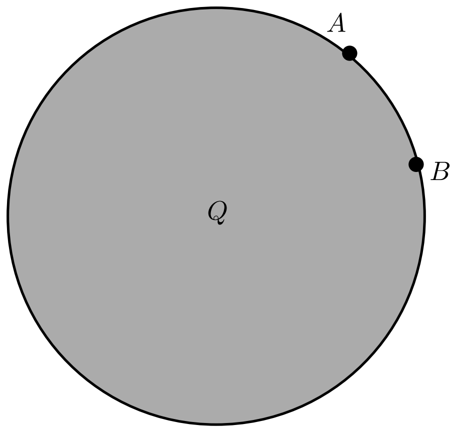
$$V(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \, \mathrm{d}l}{|r|} \tag{2.4}$$

### 2.5.2 Superficie equipotencial

Una superfície equipotencial (Figura 2.1) es el conjunto de puntos donde el potencial en cada uno de ellos es el mismo. En una superfície equipotencial, se cumple que $V(\mathbf{r}) = C$, por lo que

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Las líneas de campo siempre son perpendiculares a la superfície equipotencial.




$$V(A) = V(B)$$

Figure 2.1: Superfície Equipotencial

## 2.6 Principios de la transferencia de la carga en un conductor

- Si el potencial asociado a una superfície equipotencial es distinto de 0, entonces la carga neta del cuerpo es no nula.
- Las superfícies equipotenciales no se cortan entre sí.
- El campo eléctrico en una esfera conductora asociada a una superfície equipotencial (con potencial no nulo) siempre es perpendicular a la superfície.

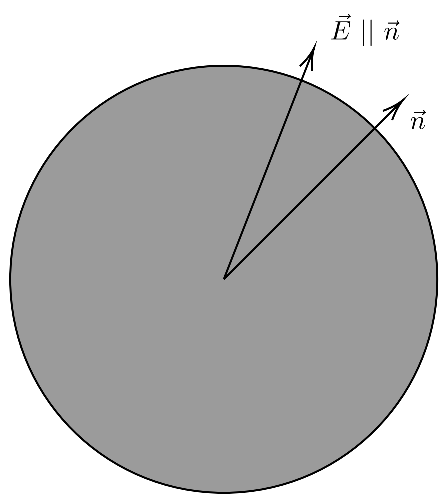



Figure 2.2: Campo perpendicular a la superfície

Se da siempre que

$$W = \int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

Esto es debido a que el potencial es constante, además de que el campo **E** es perpendicular a la dirección de desplazamiento. Si la carga es distinta de 0 , el campo no puede ser nulo. Por tanto, tenemos dos opciones:

- El campo es perpendicular: $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$
- En el interior del conductor, el campo eléctrico **E** es nulo, por tanto, también se cumple que $\int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$, debido a que la carga en el interior es 0.

Esto se cumple tanto en las superfícies equipotenciales de exterior como las superficies equipotenciales del interior del conductor que este está en equilibrio eléctrico: las cargas están en reposo.

$$\Delta V = 0 \implies \Delta T = 0$$

## 2.7 Transferencia de carga

Si el campo eléctrico es conservativo, el sistema se va a comportar de forma que llegue a su estado de menor energía potencial. Si se traslada una unidad carga positiva, se pasa de un potencial mayor a uno menor, y el sistema llega al equilibrio cuando el potencial se mantiene constante.

## 2.8 Movimiento de cargas entre conductores

Supongamos dos conductores esféricos en equilibrio electroestático (cargas inmóviles). Los conductores tenderán a su estado de menor energía potencial.
La primera esfera tiene un radio $r_1$ y una carga en la superfície $q_1$.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$

La segunda esfera tiene un radio y carga $r_2$ y $q_2$, respectivamente, con un potencial

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

Definamos un nuevo parámetro llamado 'capacidad del conductor'. Esta es la relación entre la carga y su potencial:

$$C = \frac{q}{V} \implies [C] = 1 faradio = \frac{C}{V}$$

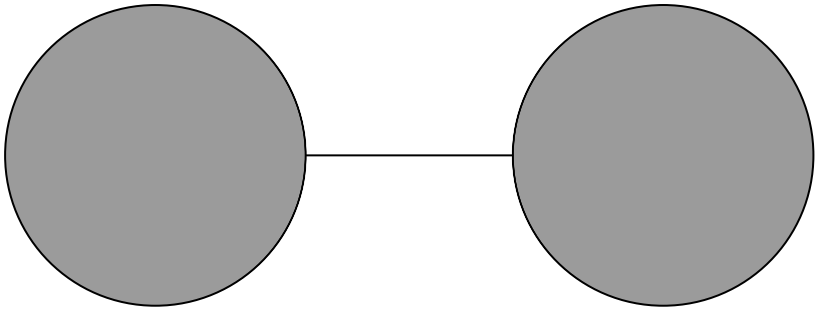
Por tanto, la capacidad del primer conductor es

$$C_1 = \frac{q_1}{V_1} = 4\pi\varepsilon_0 r_1 = \frac{r}{k}$$

Si unimos ambas esferas por un hilo metálico o conductor, tiene lugar la transferencia de carga de una esfera con mayor potencial a otra con menor potencial. Cuando se llega al equilibrio electroestático, el potencial de ambas esferas coincide.
**Ejemplo**: sean 2 esferas conductoras aisladas, dadas las siguientes condiciones:

- Esfera 1: $r_1 = 2\ cm, q_1 = 1\ nC$
- Esfera 2: $r_2 = 4\ cm, q_2 = 3\ nC$

$$V_1 = V_2$$



Determina el potencial de cada esfera y las capacidades de ambas esferas.

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1} = 450 \ (V)$$

$$V_2 = k\frac{q_2}{r_2} = 675 \ (V)$$

Si se unen ambas esferas por un hilo conductor, ¿cuál seria la carga transferida de una esfera a otra?
La carga irá de la segunda esfera a la primera, por lo que planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} V_1 = V_2 \\ q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \end{gathered} \tag{2.5}$$

Con esto obtenemos que

$$\begin{gathered} q_1' = 1.34 \ (nC) \\ q_2' = 2.66 \ (nC) \end{gathered} \tag{2.6}$$

## 2.9 Energía electroestática asociada a cargas puntuales

Supongamos dos cargas puntuales, con la distancia relativa entre ellas siendo $r_{1,2}$. Se puede expresar el trabajo realizado para transportar la carga $q_1$ desde el infinito hasta $r_{1,2}$ debido al campo eléctrico generado por $q_2$. La energía electroestática es:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} \ (J) \tag{2.7}$$

Sin embargo, esto genera problemas cuando la cantidad de cargas aumenta. Podemos expresar el potencial anterior como

$$U = \frac{1}{2}q_1 k\frac{q_2}{r} + \frac{1}{2}q_2 k\frac{q_2}{r} \tag{2.8}$$

Podemos generalizar esto a un número $n$ de cargas:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k\frac{q_j}{r_{i,j}} \ (J) \tag{2.9}$$

Que sería el equivalente al potencial de todo el sistema.