

Derivadas de orden superior, desarrollos de Taylor y regla de la cadena

Alejandro Zubiri

March 19, 2025

1 Problema 1

Hallar los desarrollos de Taylor de orden 2 en torno a los puntos que se indican.

(a) [2 puntos] $f(x, y) = (x - y)^2$ en $(1, 2)$.

Solución

Empezamos evaluando y desarrollando las derivadas:

- $f(1, 2) = (1 - 2)^2 = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 4 = -2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 - 2 = 2$
- $\nabla f = (-2, 2)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$
- $\nabla f(1, 2) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = -2x + 2y - 2$

También, obtenemos que la correspondiente matriz Hessiana es

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora ya podemos desarrollar el polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned} P_{2,(1,2)}f(\mathbf{x}) &= 1 - 2x + 2y - 2 + \frac{1}{2}(x - 1, y - 2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 - 2x + 2y - 2 + x^2 + 2x - 2xy + y^2 + 1 - 2y \\ &= x^2 + y^2 - 2xy \end{aligned} \quad (1)$$

Que es el polinomio de Taylor buscado

(b) [2 puntos] $g(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$ en $(0, 0)$.

Solución

- $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} = \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3}$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} = \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$

Si evaluamos cada una de estas derivadas en $(0, 0)$, vemos claramente que tanto el gradiente como la correspondiente matrix Hessiana tienen

componentes que son 0, y por tanto solo sobrevive el término $g(x, y) = 1$ ¹.

$$P_{2,(0,0)}(g(\mathbf{x})) = 1$$

(c) [2 puntos] $h(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$ en $(0, \pi)$.

Solución

- $h(0, \pi) = 1$
- $\nabla h = e^{xy}(y \cos(x + y) - \sin(x + y), x \cos(x + y) - \sin(x + y))$
- $\nabla h(0, \pi) = (-\pi, 0)$
- $\nabla h \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = -\pi x$
- $H_h(0, \pi) = \begin{pmatrix} -\pi^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $H_h(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} x - x\pi^2 \\ y - \pi \end{pmatrix}$
- $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \cdot H_h(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = x^2 - x^2\pi^2 + y^2 + \pi^2 - 2y\pi$

Y ahora, el polinomio es:

$$P_{2,(0,\pi)} = -1 - \pi x + \frac{x^2}{2}(1 - \pi^2) + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\pi^2 - y\pi \quad (2)$$

2 Problema 2

Sean $\mathbf{f}(u, v) = (e^{u+2v}, 2u + v)$ y $\mathbf{g}(x, y, z) = (2x^2 - y + 3z^3, 2y - x^2)$. Calcular la diferencial de $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ en el punto $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, de las siguientes maneras

¹Si observamos la función, vemos que esta solo se hace más pequeña a medida que x o y crecen, por lo que $g(0, 0)$ es, de hecho, un máximo.

(a) [1 punto] utilizando la regla de la cadena,

Solución

Tenemos que

$$D(f \circ g) = Df(g)Dg$$

Y ahora

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^{u+2v} & 2e^{u+2v} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo $\mathbf{x} = \mathbf{g}(x, y, z)$, tenemos que

$$Df(g) = \begin{pmatrix} e^{3y+3z^3} & 2e^{3y+3z^3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora pasamos a calcular Dg :

$$Dg = \begin{pmatrix} 4x & -1 & 9z^3 \\ -2x & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos ambas para obtener el diferencial deseado:

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = D(f(g))Dg = \begin{pmatrix} 0 & 3e^{3(y+z^3)} & 9z^2e^{3(y+z^3)} \\ 6x & 0 & 18z^2 \end{pmatrix}$$

(b) [1 punto] componiendo y diferenciando.

Solución

Componemos ambas funciones para obtener

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = (e^{3y+3z^3}, 3x^2 + 6z^3)$$

y ahora tomamos el diferencial de esta función:

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 3e^{3(y+z^3)} & 9z^2e^{3(y+z^3)} \\ 6x & 0 & 18z^2 \end{pmatrix}$$

Que como podemos observar, coinciden.

3 Problema 3 [2 puntos]

Las ecuaciones $u = f(x, y, z)$, $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = 2st$ definen u en función de s y t : $u = F(s, t)$. Expresar las derivadas segundas de F respecto a s y t en función de las derivadas de f ($f \in \mathcal{C}^2$).

Solución

Tenemos que

$$u = f(x, y, z) = f(s^2 + t^2, s^2 - t^2, 2st) = F(s, t)$$

Empezamos con las derivadas primeras:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 2s \frac{\partial f}{\partial x} + 2s \frac{\partial f}{\partial y} + 2t \frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned}\tag{3}$$

A partir de ahora se reducirán algunos cálculos para hacer el resultado más ameno. Los cálculos completos se pueden encontrar en el otro documento (donde están las soluciones hechas a mano).

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2t \frac{\partial f}{\partial x} - 2t \frac{\partial f}{\partial y} + 2s \frac{\partial f}{\partial z}\tag{4}$$

Y ahora pasamos a las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ &\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial y} - 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ &\quad + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= 2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ &\quad - 2 \frac{\partial f}{\partial y} - 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ &\quad + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} &= 4st \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\
&\quad + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial z} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} &= 4st \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\
&\quad - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 4st \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial z} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + 4s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + 4st \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{8}$$