Calculo

Alejandro Zubiri

March 10, 2025

Índice

0.1 Bibliografía 2

1 El espacio $\mathbb{R}^n$ **3**

1.1 El conjunto $\mathbb{R}^n$ 3

1.1.1 $\mathbb{R}^n$ como espacio afín 3

1.1.2 $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico 4

1.1.3 Rectas e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ 6

2 Funciones Implícitas **7**

2.1 Funciones Inversas 7

0.1 Bibliografía

- Stewart, J. Cálculo en varias variables.
- Apuntes de Pepe Aranda.
- Tom M. Apostol, "Calculus".
- Tom M. Apostol, Análisis Matemático.

Chapter 1

El espacio $\mathbb{R}^n$

1.1 El conjunto $\mathbb{R}^n$

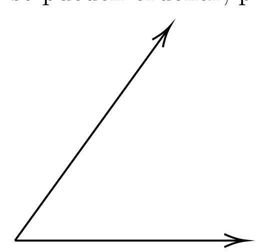
$\mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

De momento, este conjunto no tiene ninguna estructura. Para ello, se introduce la noción de espacio vectorial (EV a partir de ahora).

- La suma vectorial:
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i, \ldots a_n + b_n)$$
- Producto por escalar:
$$k\vec{a} = (ka_1, \ldots, ka_n)$$

Con estas dos operaciones, $\mathbb{R}^n$ es EV, y a sus elementos, los vamos a llamar vectores, y los denotaremos por $\vec{x} = (x_1, \ldots x_n)$.
Con esta estructura, los elementos de $\mathbb{R}^n$ se pueden ordenar, por ejemplo, en una cuadrícula.



1.1.1 $\mathbb{R}^n$ como espacio afín

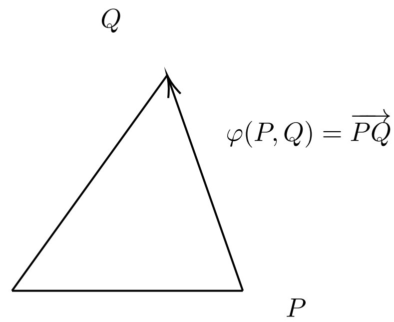
Nos será útil para definir direcciones desde cualquier punto de $\mathbb{R}^n$. La estructura afín en $\mathbb{R}^n$ se define por la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \varphi(\vec{u}, \vec{v})$$

donde $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ se representará como un vector cuyo punto de aplicación está en el extremo de $\vec{u}$ y el extremo, el de $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ en el extremo de $\vec{v}$. Es fácil comprobar que

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$$

En este contexto es conveniente llamar puntos a los vectores con punto de aplicación en el $\vec{0}$ y vectores a los vectores cuyo punto de aplicación es arbitratio. Los puntos también los denotaremos mediante letras mayúsculas, y los vectores con letras minúsculas.



A recordar que punto - punto define un vector, y que punto + vector = punto. Con esto ya podemos definir direcciones.

1.1.2 $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

Para medir longitudes, ángulos y distancias introduciremos en $\mathbb{R}^n$ el **producto escalar**.

Definición 1. *El producto escalar entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como*

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{1.1}$$

El producto escalar tiene las propiedades siguientes:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \lambda\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Debido a la propiedad 3, podemos definir la longitud (o norma) de un vector como

Definición 2. *La longitud o norma de un vector se define como:*

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \tag{1.2}$$

Las propiedades son que:

- $|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = 0$
- $|\lambda\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}|$
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

Demostración. Observemos que si uno de los vectores es el vector nulo, entonces la desigualdad se satisface por igualdad, o también si ambos vectores son proporcionales entre sí. Supongamos entonces que u y v son LI. Eso significa que la ecuación $u = \lambda v$ no tiene solución.

$$u - \lambda v = \vec{0}$$

$$(u - \lambda v)(u - \lambda v) = 0$$

$$u \cdot u - 2xu \cdot v + x^2 v \cdot v = 0$$

Recordando la definición de norma queda

$$x^2|v|^2 - 2xu \cdot v + |u|^2 = 0$$

Ahora tenemos una ecuación de segundo grado en x. Como no puede tener solución, $b^2 - 4ac < 0$.

$$(2u \cdot v)^2 - 4|v|^2|u|^2 < 0$$

$$2|u \cdot v| < 2|v||u|$$

$$|u \cdot v| < |v||u|$$

Como deben cumplirse ambas

$$|u \cdot v| \leq |v||u| \tag{1.3}$$

□

- *Desigualdad triangular*

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Demostración. Partimos de $u + v$

$$(u + v) \cdot (u + v) = |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2 = |u + v|^2 \geq 0$$

Por Cauchy-Schwarz, $u \cdot v \leq |u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

$$|u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

□

De especial importancia son los vectores con norma 1, denominados como **vectores unitarios**.

Definición 3. *Definimos como vectores unitarios a esos vectores $\vec{v}$ que cumplen que*

$$|\vec{v}| = 1 \tag{1.4}$$

Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos obtener un método para medir ángulos. Observemos que de C-S se deduce

$$||u||v|| \leq u \cdot v \leq |u||v| \tag{1.5}$$

Si ninguno de los vectores es el nulo, podemos dividir entre las normas

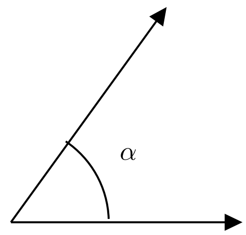
$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq 1 \tag{1.6}$$

Entonces, como está acotada en $[-1, 1]$, podemos definir el ángulo α entre u y v como

Definición 4. *El ángulo α entre u y v como el ángulo que satisface*

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \tag{1.7}$$

donde $\alpha \in [0, \pi]$. Es de relevancia que α siempre se mide como el ángulo "interior" o el más pequeño.



Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \implies u \cdot v = 0 \implies u$ y v son ***ortogonales****.*
Aunque el ángulo entre $\vec{0}$ y otro vector cualquiera no está definido, sin embargo, se suele decir que $\vec{0}$ es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^n$

Ahora en $\mathbb{R}^2$ ya podemos dibujarlos "correctamente". Ahora falta definir distancias entre puntos de $\mathbb{R}^n$.

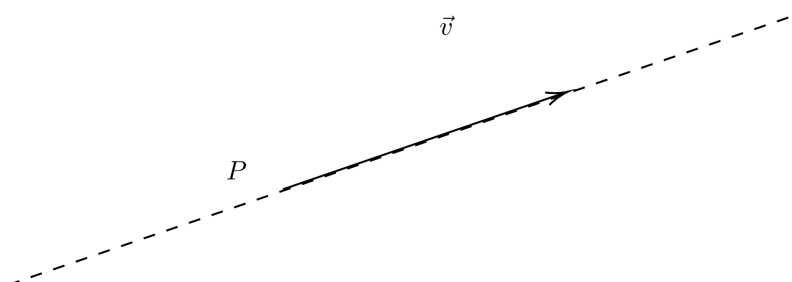
Definición 5. *Definimos la distancia entre dos puntos P y Q como*

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |Q - P| \tag{1.8}$$

1.1.3 Rectas e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$

Una recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por un punto P y tiene la dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se define como los puntos X que satisfacen

$$X = P + t\vec{v} \tag{1.9}$$



La recta está descrita por un solo parámetro libre, por lo que es un objeto de dimensión 1. Si $v_j \neq 0$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$ podemos eliminar t

$$t = \frac{x_j - p_j}{v_j} \tag{1.10}$$

Y entonces

$$x_i = p_i + \frac{x_j - p_j}{v_j} v_i \ / \ i \neq j \tag{1.11}$$

Por tanto, la recta está definida por $n - 1$ ecuaciones. Por tanto, la recta es un objeto de codimensión $n - 1$.

Chapter 2

Funciones Implícitas

2.1 Funciones Inversas

Dada $f : A \to B$, se dice que f tiene inversa si existe una función $g : B \to A$ tal que

$$f \circ g = Id_b$$

y similarmente

$$g \circ f = Id_a$$

Si esta función existe, se denota por

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Se puede demostrar que f^{-1} existe si y solo si f es inyectiva y sobreyectiva (biyectiva). Sin embargo, dadas ciertas funciones que no sean ni inyectivas ni sobreyectivas, se pueden restringir de forma que sean biyectivas.
Ejemplos:

- $f(x) = x^2$. Esta función es sobreyectiva, pero no es inyectiva, y por tanto no tiene inversa. Sin embargo, podemos restringir el dominio tal que $x \geq 0$, y entonces sí que es inyectiva, por tanto biyectiva, y por tanto tiene inversa.

- $g(x) = \cos x$. Esta función es periódica, pero si restringimos la función a un período $[0, \pi]$, entonces es biyectiva.

Sea $\bar{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Queremos ver si podemos invertir esta relación ($\bar{f}^{-1}$), y obtener

$$\mathbf{x} = \bar{f}^{-1}(\mathbf{y})$$