

Topología Elemental

Alejandro Zubiri

March 26, 2025

Índice

1	Nociones Básicas	2
1.1	Conjuntos	2
1.1.1	Operaciones con conjuntos	3
1.2	Tablas de verdad	4
1.2.1	Continuidad por conjuntos abiertos	5
1.3	Relaciones	6
1.3.1	Relaciones de equivalencia	6
1.4	Tipos de funciones	8
1.5	Topología Euclidiana	10
1.5.1	Conjuntos abiertos y cerrados	10
1.6	Conexidad y conjuntos acotados	12
2	Bajas Dimensiones	14

Chapter 1

Nociones Básicas

1.1 Conjuntos

Cuando definimos algo, tiene que estar definido de forma que cualquier persona esté de acuerdo con dicha definición.

Definición 1. *Un conjunto se puede definir por su **extensión**, mencionando todos sus elementos, o por **compresión**, definiendo la regla que todos los elementos del conjunto deben cumplir.*

- *Extensión:*

$$S = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1.1)$$

- *Compresión:*

$$S = \{x \in \mathbb{N}\} \quad (1.2)$$

Denotamos los conjuntos por letras mayúsculas, y sus elementos por letras minúsculas.

*Si x es un elemento del conjunto S , decimos que $a \in S$, y si no pertenece, $a \notin S$. Es importante tener en cuenta que, a menos que se especifique, el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante, solo nos interesan sus elementos. Para especificar orden, podemos utilizar (a, b) , que se define como **par ordenado**, tal que*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Definición 2. *El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos del conjunto, denotado por $\#S$.*

Dados dos conjuntos A y B , decimos que A es un subconjunto de B si y solo si

$$\forall x \in A, x \in B \implies A \subset B \quad (1.3)$$

Sino, decimos que $A \not\subset B$.

Definición 3. *Decimos que A es subconjunto de B si*

$$A \subset B \iff (a \in A \implies a \in B) \quad (1.4)$$

Un ejemplo de conjuntos es el conjunto vacío:

$$\phi/\#\phi = 0 \quad (1.5)$$

Definición 4. Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si

$$A \subset B \wedge B \subset A \quad (1.6)$$

1.1.1 Operaciones con conjuntos

Definición 5. La unión S de dos conjuntos A y B es

$$S = A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\} \quad (1.7)$$

Definición 6. La intersección S de dos conjuntos A y B es

$$S = A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\} \quad (1.8)$$

Definición 7. Definimos la diferencia S de A menos B tal que

$$S = A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} \quad (1.9)$$

Definición 8. La diferencia simétrica entre E y A es

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad (1.10)$$

Definición 9. Definimos el complemento S^c de un conjunto S como

$$\begin{aligned} S \cup S^c &= E \\ S \cap S^c &= \phi \end{aligned} \quad (1.11)$$

Siendo E el conjunto total.

Definición 10. Definimos el producto cartesiano entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplos:

- $\emptyset \times B = \emptyset$
- $A \times B \neq B \times A$ (ya que son pares con órdenes diferentes)

Proposición 1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración. Sea $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \in B \cup C$

$$\begin{aligned}
 &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
 &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

□

Proposición 2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 x \in A^c \cap B^c &\iff x \in A^c \wedge x \in B^c \\
 &\iff x \notin A \wedge x \notin B \\
 &\iff x \notin A \cap B \\
 &\iff x \in (A \cap B)^c
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

□

1.2 Tablas de verdad

Una tabla de verdad nos permite analizar como se comportan dos proposiciones: Se puede deducir que

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	V	V

p	q	$p \implies q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p \implies q \iff \neg p \vee q$. Con esto, también podemos deducir que

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$$

Definición 11. Sea $S \subset \mathbb{R}$, una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \in S$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - f(a)| < \varepsilon \implies |x - a| < \delta \quad (1.14)$$

Definición 12. Sea $S \subset \mathbb{R}$. S es abierto si:

$$\forall x \in S \exists I \subset S / I = (x - \delta, x + \delta) / \delta > 0 \quad (1.15)$$

Proposición 3. La unión de abiertos es un abierto.

Demostración. Sea S_i cada conjunto abierto. Sabemos que

$$\forall x \in S_i \exists \delta > 0 / (x - \delta, x + \delta) \subset S_i \quad (1.16)$$

Sea U la unión de los conjuntos:

$$U = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n = \{x / x \in S_1 \vee \cdots \vee x \in S_n\} \quad (1.17)$$

Sabemos que para cada punto $x \exists \delta > 0 / (x - \delta, x + \delta) \in S_i$. Por tanto, estos subintervalos estarán contenidos en la unión, y por tanto esta es abierta. \square

Proposición 4. La intersección finita de abiertos es abierta

Demostración. Vamos a definir dos casos:

- **Caso 1:** La intersección es \emptyset . Como sabemos que \emptyset es abierto, se cumple.
- **Caso 2:** La intersección no es \emptyset .

La intersección estará formada por una serie de conjuntos no nulos que sabemos que contienen intervalos abiertos $\forall x$. Sea $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Como este δ es el más pequeño, estará contenido en todos los abiertos para todos los puntos, y por tanto lo estará también en la intersección. \square

1.2.1 Continuidad por conjuntos abiertos

Vamos a definir el concepto de preimagen:

Definición 13. Sea $f : D \rightarrow C$ una función y $S \subset C$. La preimagen de S bajo f , escrita como $f^{-1}(S)$ es el subconjunto de D definido como:

$$f^{-1}(S) = \{x \in D / f(x) \in S\} \quad (1.18)$$

Sea $f : S \rightarrow T / U, V \subset T$

1.3 Relaciones

Existen dos tipos de relaciones:

- De orden
- De equivalencia

Una relación R de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$:

$$R \subset A \times B$$

Y denotamos $(a, b) \in R$ por $a R b$, diciendo que a está relacionado con b .

1.3.1 Relaciones de equivalencia

Podemos hablar de relaciones **internas** ($a = b$) o **externas** ($a \neq b$). Sea $A \neq \emptyset$, una relación de equivalencia definida sobre A es una relación que satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in A, x \sim x$ (reflexiva).
2. Dados x e y en A , si $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (simetría).
3. Dados $x \sim y$, e $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitiva).

Todo esto se lee como x equivalente a y . Todas estas propiedades se deben cumplir. Para escribir esto como subconjuntos del producto cartesiano:

$$x \sim x \equiv (x, x) \in \sim$$

Si tenemos un conjunto A , y este está dividido en subconjuntos disjuntos, entonces dados dos elementos en A , estos son equivalentes sí y solo si ambos pertenecen al mismo subconjunto.

$$S_i \subset A, x \sim y \iff x, y \in S_i : A = S_1 \cap \dots \cap S_n$$

Ejemplos: Tomamos en \mathbb{Z} , dado un entero $n > 1$, entonces definimos para $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n|b - a$$

a congruente con b módulo n . Esto define una relación de equivalencia en \mathbb{Z} de módulo n . Debemos demostrar que esa relación cumple las propiedades definidas anteriormente para poder afirmar que es de equivalencia.

4. Es reflexiva: dado un $a \in \mathbb{Z}$, $n|a - a$, ya que $a - a = 0$, entonces a es congruente con $a \pmod{n} \forall a \in \mathbb{Z}$.
5. Es simétrica: dados dos $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b \pmod{n} \iff n|b - a$, entonces $n|a - b \iff b \equiv a \pmod{n}$.
6. Es transitiva: dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $n|b - a$ y $n|c - b$, por tanto $b - a = nx$ y $c - b = ny$, entonces $c - a = n(x + y) = nz \implies n|c - a$.

Como cumple con las propiedades, es una relación de equivalencia. Si $n > 1$, ¿cuáles son las clases de equivalencia de la congruencia módulo n ? Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, y los dividimos entre n :

$$a = q_1n + r_1 : 0 \leq r_1 < n$$

$$b = q_2n + r_2 : 0 \leq r_2 < n$$

¿Qué pasa si a es congruente con b módulo n ? Entonces, $n|b - a$, y $b - a = n(q_2 - q_1) + r_2 - r_1$. Si $n|b - a$, entonces $\exists m \in \mathbb{Z} : b - a = nm \implies nm = (q_2 - q_1)n + r_2 - r_1 \implies n(m - q_2 + q_1) = r_2 - r_1$. Pero como $0 \leq |r_2 - r_1| < n$. Sabiendo que $r_2 - r_1 = kn$, y $r_2 - r_1 < n$, entonces la única posibilidad es que $k = 0$.

Esto implica que $\frac{n}{a}$ y $\frac{n}{b}$ tienen el mismo resto. Vamos a demostrar ahora el recíproco: Supongamos ahora que $a = qn + r$ y $b = q'n + r$. Entonces, $b - a = n(q' - q)$ es decir, $n|b - a$, y por tanto, $a \sim b \pmod{n}$. Con esto podemos afirmar para $a \in \mathbb{Z}$,

$$[a] = \{b \in \mathbb{Z} : n \% a = n \% b\}$$

Es decir, el conjunto de todos los b congruentes con a módulo n . Como los residuos de dividir un entero entre n van desde $[0, n - 1]$, las clases son las clases de $[0], [1], \dots, [n - 1]$. Entonces la clase de un número r es

$$[r] = \{qn + r : q \in \mathbb{Z}\}$$

Por ejemplo, si dividimos un número entre 3, solo podemos obtener resto 0, 1 o 2.

Teorema 1. Sea $A \neq \emptyset$ y \sim una relación de equivalencia sobre A . Entonces

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

$$a \not\sim b \iff [a] \cap [b] = \emptyset$$

Demostración. Supongamos que $a \sim b$. Sea $x \in [a]$, entonces $x \sim a$. Como es una relación de equivalencia, $x \sim b$ y por tanto $x \in [b]$, y por tanto, como se cumple para todo elemento, $[a] = [b]$. Supongamos $[a] = [b]$. Por la reflexividad, $b \in [b]$, entonces $b \in [a]$, y por tanto $a \sim b$. Para la segunda parte, si $x \in [a] \cap [b] \iff x \sim a$ y $x \sim b \iff a \sim b$. Por tanto, dos clases de equivalencia de una misma relación o son iguales o son disjuntas. Sea X un conjunto. Una partición de X es un conjunto P cuyos elementos son subconjuntos de $X = \cup A : A \in P$ y $A \in P \wedge B \in P \implies A \cap B = \emptyset$. \square

Corolario Si \sim es una relación de equivalencia definida sobre A , entonces el conjunto de todas las clases de equivalencia distintas es una partición.

Vamos a tomar en el plano \mathbb{R}^2 , decimos que dos puntos P y Q son equivalentes (o están relacionados) sí y solo sí la distancia de P al origen es la distancia de Q al origen, donde $\vec{O} = (0, 0)$. Vamos a ver si cumple las propiedades:

$$P \sim Q \iff d(P, O) = d(Q, O)$$

7. Es reflexivo: $P \sim P \iff d(P, O) = d(P, O)$. Esto se cumple por sí mismo.
8. Es simétrico: $P \sim Q \iff d(P, O) = d(Q, O)$, y se cumple que como $d(Q, O) = d(P, O) \iff Q \sim P$.
9. Es transitivo: $P \sim Q \iff d(P, O) = d(Q, O)$. Si $Q \sim R \iff d(Q, O) = d(R, O)$, entonces si sustituimos tenemos que $d(P, O) = d(R, O) \iff P \sim R$.

Definición 14. Sea $A \neq \emptyset$ y \sim una relación de equivalencia sobre A . Entonces $\forall a \in A$, el conjunto $[a] = \{x \in A : a \sim x\}$ se llama la clase de equivalencia de a .

Definición 15. El conjunto de todas las clases de equivalencia que define la relación \sim sobre A , se llama el conjunto cociente de la relación y se denota por

$$\boxed{A / \sim} \tag{1.19}$$

Para la congruencia de módulo n en \mathbb{Z} :

$$\frac{\mathbb{Z}}{\sim} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\} \equiv \mathbb{Z}_n$$

Definición 16. $f : X \rightarrow Y$ es una función si y solo si:

1. Para cada elemento $x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in f$
2. $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z$

Si $(x, y) \in f$, escribimos $f(x) = y$. El conjunto X se llama **dominio** de la función, y el conjunto Y se llama **rango** o **codominio** o **conjunto de llegada** de f . Además, la **imagen** de f es el conjunto

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y : (\exists x \in X)(f(x) = y)\} \subset Y$$

$$\text{Dom}(f) = X$$

Por ejemplo, para buscar el dominio de la función f dada por la fórmula

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} : x \in \mathbb{R}$$

Necesitamos saber el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ existe. Es decir, para los cuales $\sqrt{x^2 - 1}$ tiene sentido. En este caso, esto se cumple cuando

$$x^2 - 1 \geq 0 \implies |x| \geq 1$$

Dado un conjunto $A \subset X$, definimos

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

y además, definimos la **preimagen** de un conjunto $B \subset Y$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Es decir, teniendo $y \in Y$:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) \in \{y\}\} \quad (1.20)$$

$$f(x) \in \{y\} \iff f(x) = y$$

1.4 Tipos de funciones

Sea $f : X \rightarrow Y$. f es **injectiva** (o 1:1) si y solo si:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

O, equivalentemente

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Una función es **sobreyectiva** si y solo si:

$$\text{Im}(f) = Y$$

Es decir, $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$. Si ocurren ambas propiedades, la función es **biyectiva**. Con esto podemos deducir que:

- $f : A \rightarrow B. \#A = \#B \iff f$ es biyectiva.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Sea $g : Y \rightarrow X : g(y) = x \iff f(x) = y$. ¿ g define una función de $Y \rightarrow X$? Es decir, ¿ $\forall y \in Y$, existe un único $x \in X : g(y) = x$? Dado $y \in Y$, sabemos que $\exists x \in X : f(x) = y$, ya que f es sobreyectiva. Entonces $g(y) = x$. Demostremos que si $\exists! x \in X : g(y) = x$. Esto se cumple ya que f es inyectiva. Por tanto, tenemos una función $g : Y \rightarrow X : g(y) = x \iff f(x) = y$. Esta función se llama la **inversa** de f y la denotamos por f^{-1} .

$$f^{-1} : Y \rightarrow X : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Definición 17. Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función $g \circ f : X \rightarrow Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Esto se puede entender como un producto de funciones no conmutativo, pero sí es asociativa:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva, entonces

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \iff (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

La función que cumple que $f(x) = x \forall x$ se llama la función **identidad**:

$$id : X \rightarrow X$$

Sea X un conjunto no vacío. $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Definimos la siguiente relación:

dados $x_1, x_2 \in X$, decimos que $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. ¿Es una relación de equivalencia?

- Reflexiva: $f(x) = f(x) \iff x \sim x$
- Simétrica: $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2) \iff f(x_2) = f(x_1) \iff x_2 \sim x_1$
- Transitiva: $x_1 \sim x_2 \wedge x_2 \sim x_3 \implies f(x_1) = f(x_2), f(x_2) = f(x_3) \implies f(x_1) = f(x_3) \implies x_1 \sim x_3$

Consideremos el conjunto cociente $\frac{X}{\sim}$, es decir, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Entonces, ¿existe una biyección entre X/\sim e Y ? Sea $\hat{f} : X/\sim \rightarrow Y : \hat{f}([x]) = f(x)$ \hat{f} está bien definida ya que $[x_1] = [x_2] \implies x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$. Por tanto, $\hat{f}([x_1]) = \hat{f}([x_2])$. Por tanto todos los elementos de $\frac{X}{\sim}$ tienen imagen y esta es única. Dado $y \in Y$, como f es sobreyectiva $\exists x \in X : y = f(x)$, pero como $f(x) = \hat{f}([x])$, entonces dado $y \in Y$ existe $[x] \in \frac{X}{\sim} : \hat{f}([x]) = y$. Además, podemos definir la función $\pi : X \rightarrow \frac{X}{\sim}$ como la **proyección canónica**.

$$\pi(x) = [x] \forall x \in X$$

Definición 18. Sea X un conjunto no vacío. Una colección \mathbf{T} de subconjuntos X se dice que es una topología sobre X si

1. X y el conjunto vacío ϕ pertenecen a \mathbf{T} .
2. La unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos de \mathbf{T} pertenece a \mathbf{T} .
3. La intersección de dos conjuntos cualesquiera de \mathbf{T} pertenece a \mathbf{T}

El par (X, \mathbf{T}) se llama **espacio topológico**. Por la propiedad 3 y mediante inducción, se puede

demostrar que si A_i conjuntos están en \mathbf{T} , entonces

$$\bigcap A_i \in \mathbf{T}$$

La pertenencia no es transitiva

Definición 19. Sea X no vacío, y \mathbf{T} la colección de todos los subconjuntos de X . Entonces \mathbf{T} es una **topología discreta** sobre X , y (X, \mathbf{T}) es un **espacio discreto**. Si para un espacio topológico, se cumple que $\forall x \in X, \{x\} \in \mathbf{T}$, entonces \mathbf{T} es una topología discreta. La topología formada por (X, ϕ) es la topología indiscreta.

El conjunto X de la definición anterior puede ser cualquier conjunto no vacío, por tanto, hay una cantidad infinita de espacios discretos para cada conjunto no vacío X .

Definición 20. Dado un espacio topológico (X, \mathbf{T}) , los elementos de \mathbf{T} se llaman **conjuntos abiertos**.

Definición 21. Sea (X, \mathbf{T}) un espacio topológico. Un subconjunto S de X es cerrado en (X, \mathbf{T}) si su complemento es abierto.

Definición 22. Sea $X \neq \phi$. Una topología \mathbf{T} sobre X es llamada **topología cofinita** si y solo si los conjuntos cerrados de X son, X y todos los subconjuntos finitos de X . Por tanto, los conjuntos abiertos son ϕ y todos los subconjuntos de X con complemento finito.

$$T_{cof} = \{A \subseteq X : X - A \text{ es finito o } A = \phi\}$$

Un subconjunto de X es abierto si su complemento es finito.

1.5 Topología Euclidiana

Definición 23. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ se llamaba abierto en la topología euclidiana de \mathbb{R} si y solo si

$$\forall x \in S \exists a, b \in \mathbb{R} : a < b \wedge x \in (a, b) \subseteq S$$

Otra forma de formular esto es

$$\forall x \in S \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq S$$

1.5.1 Conjuntos abiertos y cerrados

Los intervalos abiertos (r, s) son abiertos, ya que $\forall x \in (r, s) \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subset (r, s)$.

Propiedades

- $\mathbb{R}, \phi, \mathbb{Z}$ son abiertos.
- $(a, b), (-\infty, a), (a, \infty)$ son abiertos.
- \mathbb{Q} no es ni abierto ni cerrado.
- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ es abierto si y solo si es la unión de intervalos abiertos.

Definición 24. Base de una topología Una colección B de subconjuntos abiertos de X es una base de \mathbf{T} si y solo si, cada conjunto abierto es una unión de elementos de B , es decir:

$$\forall D \in \mathbf{T} \exists \{S_i\} \subset B : D = \bigcup S_i$$

Se cumplirá que B es una base de una topología sobre X si:

- $X = \bigcup_{S \in B} S$
- Para todo $S_1, S_2 \in B$, el conjunto $S_1 \cap S_2$ es una unión de elementos de B .

Otra forma de demostrar si algo es una base de una topología es la siguiente:

$$\forall x \in A \subset \mathbf{T} \exists S \in B : x \in S \subseteq A$$

Sean B_1 y B_2 bases de T_1 y T_2 respectivamente. $T_1 = T_2$ si y solo si:

- $\forall S \in B_1, x \in S, \exists S' \in B_2 : x \in S' \subseteq S$
- $\forall S \in B_2, x \in S, \exists S' \in B_1 : x \in S' \subseteq S$

Definición 25. Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, \mathbf{T}) . Un punto $x \in X$ se llama punto límite de A si y solo si, todo conjunto abierto U que contiene a x contiene también otro punto de A diferente de x , es decir, si $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Si $x \notin A$, basta con verificar si para todo conjunto abierto, $U \cap A \neq \emptyset$. Si la topología contiene el singular de un elemento x , entonces x nunca puede ser punto límite de ningún subconjunto.

Con esto podemos llegar a un criterio para demostrar si un conjunto es cerrado:

Definición 26. Un conjunto A es cerrado si y solo si todos los puntos límites de A pertenecen a A .

Definición 27. La clausura de un conjunto A , denominado como \bar{A} , se define como A unido con sus puntos límites, es decir, $\bar{A} = A \cup A'$. Además, será el cerrado más pequeño que contenga a A .

Definición 28. Un subconjunto D de un espacio topológico (X, \mathbf{T}) es denso en X si y solo si $\bar{D} = X$.

Proposición 5. Sea $D \subset (X, \mathbf{T})$. Entonces, D es denso en X , si y solo si, todo subconjunto abierto y no vacío de X interseca (no trivialmente) a D , es decir, $U \neq \emptyset, U \cap D \neq \emptyset$.

Definición 29. Sea $(X, \mathbf{T}), V$ un subconjunto de X y $p \in V$. V es una vecindad de P si y solo si existe un abierto A tal que $p \in A \subseteq V$. Con esta definición se cumple que:

- En \mathbb{R} , los intervalos abiertos (y cerrados) que contengan a p , son vecindades de este.

Proposición 6. *Un punto $x \in X$ es punto límite de S si y solo si toda vecindad de x contiene un punto de S diferente de x .*

Teorema 2. 1. *Sea S un subconjunto de un ET. Entonces S es cerrado si y solo si, para cada $x \in X - S$ existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq X - S$.*

2. *Sea A un subconjunto de un ET. Entonces $A \in \mathbf{T}$ si y solo si, para cada $x \in A$ existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq A$.*

3. *Sea A un subconjunto de un ET. Entonces $A \in \mathbf{T}$ si y solo si, para $x \in A$ existe un $V \in \mathbf{T}$ tal que $x \in V \subseteq A$.*

1.6 Conexidad y conjuntos acotados

Sea S un subconjunto de \mathbb{R} . Si existe $\alpha \in S$ tal que para todo $x \in S, x \leq \alpha$, se dice que α es el máximo de S (y análogo para el mínimo). $S \subset \mathbb{R}$, se dice que S está acotado superiormente si y solo si, existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in S, x \leq c$ (análogo para acotado inferiormente). S es un conjunto acotado si y solo si tiene cota inferior y superior. Si S está acotado superiormente, entonces la menor cota superior se llama **supremo** de S , denotado por $\sup(S)$. El máximo será el supremo de S si este está en S .

- Si S está acotado superiormente y S es cerrado, entonces $\sup(S) \in S$.

Definición 30. *Sea (X, \mathbf{T}) un espacio topológico. Este es conexo si y solo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son X y ϕ .
Por tanto, \mathbb{R} es un espacio topológico conexo.*

Vamos a pasar a una definición que nos permite saber si dos espacios topológicos son equivalentes.

Definición 31. *Dados dos espacios topológicos, estos son homeomorfos si existe una función $f : X \rightarrow Y$ que satisfice:*

- *f es biyectiva.*
- *Para cada $U \in \mathbf{T}_2, f^{-1}(U) \in \mathbf{T}_1$*
- *Para cada $V \in \mathbf{T}_1, f^{-1}(V) \in \mathbf{T}_2$*

La función f es un homeomorfismo entre (X, \mathbf{T}_1) y (Y, \mathbf{T}_2) , y escribimos $(X, \mathbf{T}_1) \equiv (Y, \mathbf{T}_2)$

Con esto podemos llegar a que dos intervalos (a, b) y (c, d) son homeomorfos, y que cualquier intervalo abierto es homeomorfo a \mathbb{R} .

Definición 32. *Una propiedad topológica es una propiedad de un espacio topológico que se conserva mediante un homeomorfismo.
Es decir, si un espacio tiene una propiedad, y ese espacio es homeomorfo a otro espacio, este otro espacio también tiene esa propiedad.*

De aquí sigue que

Teorema 3. *Cualquier espacio topológico homeomorfo a un espacio conexo es conexo.*

Con estas propiedades, y teniendo la definición usual de $\varepsilon - \delta$ de continuidad, podemos definir la condición para una función continua:

Teorema 4. *Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y solo si, para todo $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto de \mathbb{R} .*

Y en genérico para dos espacios topológicos:

Teorema 5. *Sea (X, \mathbf{T}_1) y (Y, \mathbf{T}_2) dos espacios topológicos. $f : X \rightarrow Y$ es una función continua respecto a ambas topologías si y solo si, $U \in \mathbf{T}_2, f^{-1}(U) \in \mathbf{T}_1$*

Teorema 6 (Lema del pegamento). *Sea $X = A \cup B$, donde A, B son subconjuntos cerrados de X . Sean $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces $h : X \rightarrow Y$ definida por $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$, es continua.*

Chapter 2

Bajas Dimensiones

Dados dos subconjuntos A y B , decimos que son separados si y solo si

- $A \cap B = \emptyset$
- Ninguno de los dos contiene un punto de acumulación del otro: $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$

Definición 33. Un subconjunto A de un espacio topológico X es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos G y H de X tal que:

- $G \cap A \neq \emptyset$ y $H \cap A \neq \emptyset$
- $(G \cap A) \cap (H \cap A) = G \cap H = \emptyset$
- $(G \cap A) \cup (H \cap A) = G \cup H = A$

A es *conexo* si y solo si no es *disconexo*.