

# Calculo

Alejandro Zubiri

March 13, 2025

# Índice

0.1	Bibliografía . . . . .	2
<b>1</b>	<b>El espacio <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>3</b>
1.1	El conjunto $\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
1.1.1	$\mathbb{R}^n$ como espacio afín . . . . .	3
1.1.2	$\mathbb{R}^n$ como espacio métrico . . . . .	4
1.1.3	Rectas e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Funciones Implícitas</b>	<b>7</b>
2.1	Funciones Inversas . . . . .	7

## 0.1 Bibliografía

- Stewart, J. Cálculo en varias variables.
- Apuntes de Pepe Aranda.
- Tom M. Apostol, "Calculus".
- Tom M. Apostol, Análisis Matemático.

# Chapter 1

## El espacio $\mathbb{R}^n$

### 1.1 El conjunto $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  es el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

De momento, este conjunto no tiene ninguna estructura. Para ello, se introduce la noción de espacio vectorial (EV a partir de ahora).

- La suma vectorial:

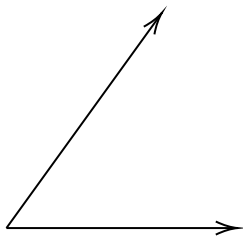
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

- Producto por escalar:

$$k\vec{a} = (ka_1, \dots, ka_n)$$

Con estas dos operaciones,  $\mathbb{R}^n$  es EV, y a sus elementos, los vamos a llamar vectores, y los denotaremos por  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Con esta estructura, los elementos de  $\mathbb{R}^n$  se pueden ordenar, por ejemplo, en una cuadrícula.



#### 1.1.1 $\mathbb{R}^n$ como espacio afín

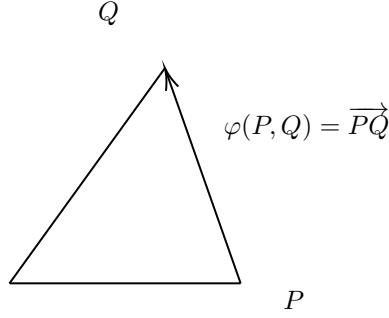
Nos será útil para definir direcciones desde cualquier punto de  $\mathbb{R}^n$ . La estructura afín en  $\mathbb{R}^n$  se define por la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^n \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \varphi(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

donde  $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$  se representará como un vector cuyo punto de aplicación está en el extremo de  $\vec{u}$  y el extremo, el de  $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$  en el extremo de  $\vec{v}$ . Es fácil comprobar que

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$$

En este contexto es conveniente llamar puntos a los vectores con punto de aplicación en el  $\vec{0}$  y vectores a los vectores cuyo punto de aplicación es arbitrario. Los puntos también los denotaremos mediante letras mayúsculas, y los vectores con letras minúsculas.



A recordar que punto - punto define un vector, y que punto + vector = punto. Con esto ya podemos definir direcciones.

### 1.1.2 $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

Para medir longitudes, ángulos y distancias introduciremos en  $\mathbb{R}^n$  el **producto escalar**.

**Definición 1.** El producto escalar entre dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se define como

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{aligned} \quad (1.1)$$

El producto escalar tiene las propiedades siguientes:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \lambda \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Debido a la propiedad 3, podemos definir la longitud (o norma) de un vector como

**Definición 2.** La longitud o norma de un vector se define como:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (1.2)$$

Las propiedades son que:

- $|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
- $|\lambda \vec{u}| = |\lambda| |\vec{u}|$
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$

*Demostración.* Observemos que si uno de los vectores es el vector nulo, entonces la desigualdad se satisface por igualdad, o también si ambos vectores son proporcionales entre sí. Supongamos entonces que  $u$  y  $v$  son LI. Eso significa que la ecuación  $u = \lambda v$  no tiene solución.

$$u - \lambda v = \vec{0}$$

$$(u - \lambda v)(u - \lambda v) = 0$$

$$u \cdot u - 2xu \cdot v + x^2v \cdot v = 0$$

Recordando la definición de norma queda

$$x^2|v|^2 - 2xu \cdot v + |u|^2 = 0$$

Ahora tenemos una ecuación de segundo grado en  $x$ . Como no puede tener solución,  $b^2 - 4ac < 0$ .

$$(2u \cdot v)^2 - 4|v|^2|u|^2 < 0$$

$$2|u \cdot v| < 2|v||u|$$

$$|u \cdot v| < |v||u|$$

Como deben cumplirse ambas

$$|u \cdot v| \leq |v||u| \tag{1.3}$$

□

- *Desigualdad triangular*

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

*Demostración.* Partimos de  $u + v$

$$(u + v) \cdot (u + v) = |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2 = |u + v|^2 \geq 0$$

Por Cauchy-Schwarz,  $u \cdot v \leq |u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

$$|u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

□

De especial importancia son los vectores con norma 1, denominados como **vectores unitarios**.

**Definición 3.** Definimos como vectores unitarios a esos vectores  $\vec{v}$  que cumplen que

$$|\vec{v}| = 1 \tag{1.4}$$

Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos obtener un método para medir ángulos. Observemos que de C-S se deduce

$$||u|||v| \leq u \cdot v \leq |u||v| \tag{1.5}$$

Si ninguno de los vectores es el nulo, podemos dividir entre las normas

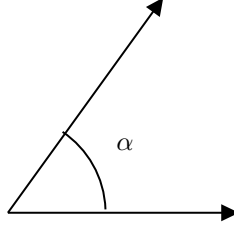
$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq 1 \tag{1.6}$$

Entonces, como está acotada en  $[-1, 1]$ , podemos definir el ángulo  $\alpha$  entre  $u$  y  $v$  como

**Definición 4.** El ángulo  $\alpha$  entre  $u$  y  $v$  como el ángulo que satisface

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad (1.7)$$

donde  $\alpha \in [0, \pi]$ . Es de relevancia que  $\alpha$  siempre se mide como el ángulo "interior" o el más pequeño.



Si  $\alpha = \frac{\pi}{2} \implies u \cdot v = 0 \implies u$  y  $v$  son **ortogonales**.

Aunque el ángulo entre  $\vec{0}$  y otro vector cualquiera no está definido, sin embargo, se suele decir que  $\vec{0}$  es ortogonal a todos los vectores de  $\mathbb{R}^n$

Ahora en  $\mathbb{R}^2$  ya podemos dibujarlos "correctamente". Ahora falta definir distancias entre puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

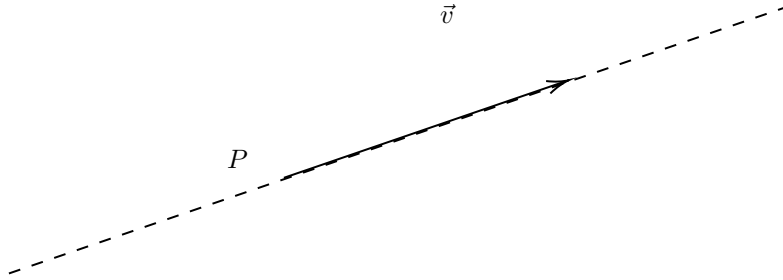
**Definición 5.** Definimos la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  como

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |Q - P| \quad (1.8)$$

### 1.1.3 Rectas e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$

Una recta en  $\mathbb{R}^n$  que pasa por un punto  $P$  y tiene la dirección  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  se define como los puntos  $X$  que satisfacen

$$X = P + t\vec{v} \quad (1.9)$$



La recta está descrita por un solo parámetro libre, por lo que es un objeto de dimensión 1. Si  $v_j \neq 0$  con  $j \in \{1, \dots, n\}$  podemos eliminar  $t$

$$t = \frac{x_j - p_j}{v_j} \quad (1.10)$$

Y entonces

$$x_i = p_i + \frac{x_j - p_j}{v_j} v_i \quad / \quad i \neq j \quad (1.11)$$

Por tanto, la recta está definida por  $n - 1$  ecuaciones. Por tanto, la recta es un objeto de codimensión  $n - 1$ .

## Chapter 2

# Funciones Implícitas

### 2.1 Funciones Inversas

Dada  $f : A \rightarrow B$ , se dice que  $f$  tiene inversa si existe una función  $g : B \rightarrow A$  tal que

$$f \circ g = Id_b$$

y similarmente

$$g \circ f = Id_a$$

Si esta función existe, se denota por

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Se puede demostrar que  $f^{-1}$  existe si y solo si  $f$  es inyectiva y sobreyectiva (biyectiva). Sin embargo, dadas ciertas funciones que no sean ni inyectivas ni sobreyectivas, se pueden restringir de forma que sean biyectivas.

**Ejemplos:**

- $f(x) = x^2$ . Esta función es sobreyectiva, pero no es inyectiva, y por tanto no tiene inversa. Sin embargo, podemos restringir el dominio tal que  $x \geq 0$ , y entonces sí que es inyectiva, por tanto biyectiva, y por tanto tiene inversa.
- $g(x) = \cos x$ . Esta función es periódica, pero si restringimos la función a un período  $[0, \pi]$ , entonces es biyectiva.

Sea  $\bar{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Queremos ver si podemos invertir esta relación ( $\bar{f}^{-1}$ ), y obtener

$$\mathbf{x} = \bar{f}^{-1}(\mathbf{y})$$

Para ello, introducimos el siguiente teorema.

**Teorema 1** (Teorema de la función inversa). *Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , esta tiene inversa si y solo si el determinante jacobiano (determinante de su diferencial) es distinto a 0.*



Dado un sistema de ecuaciones, no necesariamente lineales, siempre lo podemos escribir de la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_{n+k}) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_{n+k}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vamos a analizar en qué condiciones podemos despejar  $n$  incógnitas en función de las  $k$  restantes, que serían parámetros libres. En este caso, estas ecuaciones describen un objeto de  $k$  dimensiones en  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Para distinguir entre parámetros libres e incógnitas, introduciremos la siguiente notación:

- Las incógnitas son  $x_i, \dots, x_n$ .
- Los parámetros libres serán  $t_1 = x_{n+1}, \dots, t_k = x_{n+k}$ .

Además, introduciremos la función vectorial  $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ , entonces el sistema a resolver acaba siendo

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$$

Ahora, supongamos que  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)$  es una solución del sistema que cumple la ecuación anteriormente establecida, y que además  $\bar{f} \in \mathcal{C}^1$ . Entonces, podemos hacer la aproximación

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \approx \bar{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) + D\bar{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{t} - \mathbf{t}_0)$$

Como hemos asumido que la anterior tupla era solución del sistema, y queremos una solución a la ecuación, queda

$$D\bar{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{t} - \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$$

Si escribimos explícitamente el diferencial, obtenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t_k} \end{bmatrix} \overset{\text{Evaluado en } (\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)}{\cdot} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{t} - \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$$

Aquí sigue que

$$(D_x \bar{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0), D_t \bar{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{t} - \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$$

Reordenando y simplificando, obtenemos que debe existir la inversa de la matriz  $D_x \bar{f}$ , y por tanto su determinante debe ser distinto a 0.