Topología Elemental

Alejandro Zubiri

Índice

CHAPTER 1

Nociones Básicas

1. Conjuntos

Cuando definimos algo, tiene que estar definido de forma que cualquier persona esté de acuerdo con dicha definición.

Definición 1. *Un conjunto se puede definir por su* ***extensión****, mencionando todos sus elementos, o por* ***compresión****, defininiendo la regla que todos los elementos del conjunto deben cumplir.*

- *Extensión:*

$$S = \{1, 2, 3, \dots\} \tag{1}$$

- *Comprensión:*

$$S = \{x \in \mathbb{N}\} \tag{2}$$

Denotamos los conjuntos por letras mayúsculas, y sus elementos por letras minúsculas.
Si x es un elemento del conjunto S, decimos que $a \in S$, y si no pertenece, $a \notin S$. Es importante tener en cuenta que, a menos que se especifique, el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante, solo nos interesan sus elementos. Para especificar orden, podemos utilizar (a, b), que se define como ***par ordenado****, tal que*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Definición 2. *El* ***cardinal*** *de un conjunto es el número de elementos del conjunto, denotado por $\#S$.*

Dados dos conjuntos A y B, decimos que A es un subconjunto de B si y solo si

$$\forall x \in A, x \in B \implies A \subset B \tag{3}$$

Sino, decimos que $A \not\subset B$.

Definición 3. *Decimos que A es subconjunto de B si*

$$A \subset B \iff (a \in A \implies a \in B) \tag{4}$$

Un ejemplo de conjuntos es el conjunto vacío:

$$\phi / \#\phi = 0 \tag{5}$$

Definición 4. *Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si*

$$A \subset B \wedge B \subset A \tag{6}$$

1.1. Operaciones con conjuntos.

Definición 5. *La unión S de dos conjuntos A y B es*

$$S = A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\} \tag{7}$$

Definición 6. *La intersección S de dos conjuntos A y B es*

$$S = A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\} \tag{8}$$

DEFINICIÓN 7. *Definimos la diferencia S de A menos B tal que*

$$S = A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} \tag{9}$$

DEFINICIÓN 8. *La diferencia simétrica entre E y A es*

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \tag{10}$$

DEFINICIÓN 9. *Definimos el complemento S^c de un conjunto S como*

$$\begin{aligned} S \cup S^c &= E \\ S \cap S^c &= \phi \end{aligned} \tag{11}$$

Siendo E el conjunto total.

DEFINICIÓN 10. *Definimos el producto cartesiano entre A y B como*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplos:

- $\emptyset \times B = \emptyset$
- $A \times B \neq B \times A$ *(ya que son pares con órdenes diferentes)*

PROPOSICIÓN 1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \in B \cup C$

$$\begin{aligned} &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \tag{12}$$

□

PROPOSICIÓN 2. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\iff x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\iff x \notin A \vee x \notin B \\ &\iff x \notin A \cap B \\ &\iff x \in (A \cap B)^c \end{aligned} \tag{13}$$

□

2. Tablas de verdad

Una tabla de verdad nos permite analizar como se comportan dos proposiciones: Se puede deducir

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	V	V

p	q	$p \implies q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

que $p \implies q \iff \neg p \vee q$. Con esto, también podemos deducir que

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$$

Definición 11. *Sea $S \subset \mathbb{R}$, una función $f : S \to \mathbb{R}$ es continua en $a \subset S$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - f(a)| < \varepsilon \implies |x - a| < \delta \tag{14}$$

Definición 12. *Sea $S \subset \mathbb{R}$. S es abierto si:*

$$\forall x \in S \exists I \subset S / I = (x - \delta, x + \delta) / \delta > 0 \tag{15}$$

Proposición 3. *La unión de abiertos es un abierto.*

Demostración. Sea S_i cada conjunto abierto. Sabemos que

$$\forall x \in S_i \exists \delta > 0 / (x - \delta, x + \delta) \subset S \tag{16}$$

Sea U la unión de los conjuntos:

$$U = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n = \{x / x \in S_1 \vee \cdots \vee x \in S_n\} \tag{17}$$

Sabemos que para cada punto $x \exists \delta > 0 / (x - \delta, x + \delta) \in S_i$. Por tanto, estos subintervalos estarán contenidos en la unión, y por tanto esta es abierta. □

Proposición 4. *La intersección finita de abiertos es abierta*

Demostración. Vamos a definir dos casos:

- **Caso 1**: La intersección es $\emptyset$. Como sabemos que $\emptyset$ es abierto, se cumple.
- **Caso 2**: La intersección no es $\emptyset$.
  La intersección estará formada por una serie de conjuntos no nulos que sabemos que contienen intervalos abiertos $\forall x$. Sea $\delta / \delta = min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Como este δ es el más pequeño, estará contenido en todos los abiertos para todos los puntos, y por tanto lo estará también en la intersección.

□

2.1. Continuidad por conjuntos abiertos. Vamos a definir el concepto de preimagen:

Definición 13. *Sea $f : D \to C$ una función y $S \subset C$. La preimagen de S bajo f, escrita como $f^{-1}(S)$ es el subconjunto de D definido como:*

$$f^{-1}(S) = \{x \in D / f(x) \in S\} \tag{18}$$

Sea $f : S \to T / U, V \subset T$

3. Relaciones

Existen dos tipos de relaciones:

- De orden
- De equivalencia

Una relación R de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$:

$$R \subset A \times B$$

Y denotamos $(a, b) \in R$ por $a \ R \ b$, diciendo que a está relacionado con b.

3.1. Relaciones de equivalencia. Podemos hablar de relaciones **internas** ($a = b$) o **externas** ($a \neq b$). Sea $A \neq \phi$, una relación de equivalencia definida sobre A es una relación que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\forall x \in A,\ x \sim x$ (reflexiva).
(2) Dados x e y en A, si $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (simetría).
(3) Dados $x \sim y$, e $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitiva).

Todo esto se lee como x equivalente a y. Todas estas propiedades se deben cumplir. Para escribir esto como subconjuntos del producto cartesiano:

$$x \sim x \equiv (x, x) \in \sim$$

Si tenemos un conjunto A, y este esta dividido en subconjuntos disjuntos, entonces dados dos elementos en A, estos son equivalentes sí y solo sí ambos pertenecen al mismo subconjunto.

$$S_i \subset A, x \sim y \iff x, y \in S_i \ : \ A = S_1 \cap \cdots \cap S_n$$

Ejemplos: Tomamos en $\mathbb{Z}$, dado un entero $n > 1$, entonces definimos para $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \equiv b \ mod_n \iff n|b - a$$

a congruente con b módulo n. Esto define una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ de módulo n. Debemos demostrar que esa relación cumple las propiedades definidas anteriormente para poder afirmar que es de equivalencia.

(4) Es reflexiva: dado un $a \in \mathbb{Z}$, $n|a-a$, ya que $a-a = 0$, entonces a es congruente con $a\ mod_n \forall a \in \mathbb{Z}$.
(5) Es simétrica: dados dos $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b\ mod_n \iff n|b-a$, entonces $n|a-b \iff b \equiv a\ mod_n$.
(6) Es transitiva: dados $a, b, c \in \mathbb{Z}/a \equiv b\ mod_n$ y $b \equiv c\ mod_n$, entonces $n|b-a$ y $n|c-b$, por tanto $b - a = nx$ y $c - b = ny$, entonces $c - a = n(x + y) = nz \implies n|c - a$.

Como cumple con las propiedades, es una relación de equivalencia. Si $n > 1$, ¿cuáles son las clases de equivalencia de la congruencia módulo n? Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, y los dividimos entre n:

$$a = q_1 n + r_1 : 0 \leq r_1 < n$$

$$b = q_2 n + r_2 : 0 \leq r_2 < n$$

¿Qué pasa si a es congruente con b módulo n? Entonces, $n|b-a$, y $b-a = n(q_2 - q_1) + r_2 - r_1$. Si $n|b-a$, entonces $\exists m \in \mathbb{Z} : b - a = nm \implies nm = (q_2 - q_1)n + r_2 - r_1 \implies n(m - q_2 + q_1) = r_2 - r_1$. Pero como $0 \leq |r_2 - r_1| < n$. Sabiendo que $r_2 - r_1 = kn$, y $r_2 - r_1 < n$, entonces la única posibilidad es que $k = 0$. Esto implica que $\frac{n}{a}$ y $\frac{n}{b}$ tienen el mismo resto. Vamos a demostrar ahora el recíproco: Supongamos ahora que $a = qn + r$ y $b = q'n + r$. Entonces, $b - a = n(q' - q)$ es decir, $n|b - a$, y por tanto, $a \sim b\ mod_n$ Con esto podemos afirmar para $a \in \mathbb{Z}$,

$$[a] = \{b \in \mathbb{Z} : n\%a = n\%b\}$$

Es decir, el conjunto de todos los b congruentes con a módulo n. Como los residuos de dividir un entero entre n van desde $[0, n-1]$, las clases son las clases de $[0], [1], \ldots, [n-1]$. Entonces la clase de un número r es

$$[r] = \{qn + r : q \in \mathbb{Z}\}$$

Por ejemplo, si dividimos un número entre 3, solo podemos obtener resto 0, 1 o 2.

Teorema 1. *Sea $A \neq \phi$ y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Entonces*

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

$$a \nsim b \iff [a] \cap [b] = \phi$$

Demostración. Supongamos que $a \sim b$. Sea $x \in [a]$, entonces $x \sim a$. Como es una relación de equivalencia, $x \sim b$ y por tanto $x \in [b]$, y por tanto, como se cumple para todo elemento, $[a] = [b]$. Supongamos $[a] = [b]$. Por la reflexividad, $b \in [b]$, entonces $b \in [a]$, y por tanto $a \sim b$. Para la segunda parte, si $x \in [a] \cap [b] \iff x \sim a$ y $x \sim b \iff a \sim b$. Por tanto, dos clases de equivalencia de una misma relación o son iguales o son disjuntas. Sea X un conjunto. Una partición de X es un conjunto P cuyos elementos son subconjuntos de $X = \cup A : A \in P$ y $A \in P \wedge B \in P \implies A \cap B = \phi$. $\square$

Corolario Si $\sim$ es una relación de equivalencia definida sobre A, entonces el conjunto de todas las clases de equivalencia distintas es una partición.

Vamos a tomar en el plano $\mathbb{R}^2$, decimos que dos puntos P y Q son equivalentes (o están relacionados) sí y solo sí la distancia de P al origen es la distancia de Q al origen, donde $\vec{O} = (0,0)$. Vamos a ver si cumple las propiedades:

$$P \sim Q \iff d(P,O) = d(Q,O)$$

(7) Es reflexivo: $P \sim P \iff d(P,O) = d(P,O)$. Esto se cumple por sí mismo.
(8) Es simétrico: $P \sim Q \iff d(P,O) = d(Q,O)$, y se cumple que como $d(Q,O) = d(P,O) \iff Q \sim P$.
(9) Es transitivo: $P \sim Q \iff d(P,O) = d(Q,O)$. Si $Q \sim R \iff d(Q,O) = d(R,O)$, entonces si sustituimos tenemos que $d(P,O) = d(R,O) \iff P \sim R$.

Definición 14. *Sea $A \neq \phi$ y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Entonces $\forall a \in A$, el conjunto $[a] = \{x \in A : a \sim x\}$ se llama la clase de equivalencia de a.*

Definición 15. *El conjunto de todas las clases de equivalencia que define la relación $\sim$ sobre A, se llama el conjunto cociente de la relación y se denota por*

$$\boxed{A/\sim} \tag{19}$$

Para la congruencia de módulo n en $\mathbb{Z}$:

$$\frac{\mathbb{Z}}{\sim} = \{[0],[1],\ldots,[n-1]\} \equiv \mathbb{Z}_n$$

Definición 16. *$f : X \to Y$ es una función si y solo si:*
(1) *Para cada elemento $x \in X \exists y \in y : (x,y) \in f$*
(2) *$(x,y) \in f \wedge (x,z) \in F \implies y = z$*

*Si $(x,y) \in f$, escribimos $f(x) = y$. El conjunto X se llama **dominio** de la función, y el conjunto Y se llama **rango** o **codominio** o **conjunto de llegada** de f. Además, la **imagen** de f es el conjunto*

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in Y : (\exists x \in X)(f(x) = y)\} \subset Y$$

$$Dom(f) = X$$

Por ejemplo, para buscar el dominio de la función f dada por la fórmula

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} : x \in \mathbb{R}$$

Necesitamos saber el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ existe. Es decir, para los cuales $\sqrt{x^2-1}$ tiene sentido. En este caso, esto se cumple cuando

$$x^2 - 1 \geq 0 \implies |x| \geq 1$$

Dado un conjunto $A \subset X$, definimos

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}$$

y además, definimos la **preimagen** de un conjunto $B \subset Y$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Es decir, teniendo $y \subset Y$:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) \in \{y\}\} \tag{20}$$

$$f(x) \in \{y\} \iff f(x) = y$$

4. Tipos de funciones

Sea $f : X \to Y$. f es **injectiva** (o 1:1) si y solo si:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \ \forall x_1, x_2 \in X$$

O, equivalentemente

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Una función es **sobreyectiva** si y solo si:

$$\mathrm{Im}(f) = Y$$

Es decir, $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ Si ocurren ambas propiedades, la función es **biyectiva**. Con esto podemos deducir que:

- $f : A \to B. \#A = \#B \iff f$ es biyectiva.

Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva. Sea $g : Y \to X : g(y) = x \iff f(x) = y$. ¿$g$ define una función de $Y \to X$? Es decir, ¿$\forall y \in Y$, existe un único $x \in X : g(y) = x$? Dado $y \subset Y$, sabemos que $\exists x \in X : f(x) = y$, ya que f es sobreyectiva. Entonces $g(y) = x$. Demostremos que si $\exists! x \in X : g(y) = x$. Esto se cumple ya que f es inyectiva. Por tanto, tenemos una función $g : Y \to X : g(y) = x \iff f(x) = y$. Esta función se llama la **inversa** de f y la denotamos por f^{-1}.

$$f^{-1} : Y \to X : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Definición 17. *Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos funciones. Definimos la composición de f con g como la función $g \circ f : X \to Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Esto se puede entender como un producto de funciones no conmutativo, pero sí es asociativa:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Si $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \iff (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

La función que cumple que $f(x) = x \forall x$ se llama la función **identidad**:

$$id : X \to X$$

Sea X un conjunto no vacío. $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Definimos la siguiente relación:

dados $x_1, x_2 \in X$, decimos que $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. ¿Es una relación de equivalencia?

- Reflexiva: $f(x) = f(x) \iff x \sim x$
- Simétrica: $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2) \iff f(x_2) = f(x_1) \iff x_2 \sim x_1$
- Transitiva: $x_1 \sim x_2 \wedge x_2 \sim x_1 \implies f(x_1) = f(x_2), f(x_2) = f(x_3) \implies f(x_1) = f(x_3) \implies x_1 \sim x_3$

Consideremos el conjunto cociente $\frac{X}{\sim}$, es decir, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Entonces, ¿existe una biyección entre $X/\sim$ e Y? Sea $\hat{f} : X/\sim \to Y : \hat{f}([x]) = f(x)$ $\hat{f}$ está bien definida ya que $[x_1] = [x_2] \implies x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$. Por tanto, $\hat{f}([x_1]) = \hat{f}([x_2])$. Por tanto todos los elementos de $\frac{X}{\sim}$ tienen imagen y esta es única. Dado $y \in Y$, como f es sobreyectiva $\exists x \in X : y = f(x)$, pero como $f(x) = \hat{f}([x])$, entonces dado $y \in Y$ existe $[x] \in \frac{X}{\sim} : \hat{f}([x]) = y$. Además, podemos definir la función $\pi : X \to \frac{X}{\sim}$ como la **proyección canónica**.

$$\pi(x) = [x] \forall x \in X$$

Definición 18. *Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathbf{T}$ de subconjuntos X se dice que es una topología sobre X si*

1. *X y el conjunto vacío ϕ pertenecen a $\mathbf{T}$.*
2. *La unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos de $\mathbf{T}$ pertenece a $\mathbf{T}$.*
3. *La intersección de dos conjuntos cualesquiera de $\mathbf{T}$ pertenece a $\mathbf{T}$*

El par $(X, \mathbf{T})$ *se llama* ***espacio topológico****. Por la propiedad 3 y mediante inducción, se puede demostrar que si* A_i *conjuntos están en* $\mathbf{T}$*, entonces*

$$\bigcap A_i \in \mathbf{T}$$

La pertenencia no es transitiva

Definición 19. *Sea* X *no vacío, y* $\mathbf{T}$ *la colección de todos los subconjuntos de* X*. Entonces* $\mathbf{T}$ *es una* ***topología discreta*** *sobre* X*, y* $(X, \mathbf{T})$ *es un* ***espacio discreto****. Si para un espacio topológico, se cumple que* $\forall x \in X, \{x\} \in \mathbf{T}$*, entonces* $\mathbf{T}$ *es una topología discreta. La topología formada por* (X, ϕ) *es la topología indiscreta.*

El conjunto X de la definición anterior puede ser cualquier conjunto no vacío, por tanto, hay una cantidad infinita de espacios discretos para cada conjunto no vacío X.

Definición 20. *Dado un espacio topológico* $(X, \mathbf{T})$*, los elementos de* $\mathbf{T}$ *se llaman* ***conjuntos abiertos****.*

Definición 21. *Sea* $(X, \mathbf{T})$ *un espacio topológico. Un subconjunto* S *de* X *es cerrado en* $(X, \mathbf{T})$ *si su complemento es abierto.*

Definición 22. *Sea* $X \neq \phi$*. Una topología* $\mathbf{T}$ *sobre* X *es llamada* ***topología cofinita*** *si y solo si los conjuntos cerrados de* X *son,* X *y todos los subconjuntos finitos de* X*. Por tanto, los conjuntos abiertos son* ϕ *y todos los subconjuntos de* X *con complemento finito.*

$$T_{cof} = \{A \subseteq X : X - A \text{ es finito o } A = \phi\}$$

Un subconjunto de X *es abierto si su complemento es finito.*

5. Topología Euclidiana

Definición 23. *Un subconjunto* $S \subset \mathbb{R}$ *se llamaba abierto en la topología euclidiana de* $\mathbb{R}$ *si y solo si*

$$\forall x \in S \exists a, b \in \mathbb{R} : a < b \wedge x \in (a, b) \subseteq S$$

Otra forma de formular esto es

$$\forall x \in S \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq S$$

5.1. Conjuntos abiertos y cerrados. Los intervalos abiertos (r, s) son abiertos, ya que $\forall x \in (r, s) \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subset (r, s)$.

Propiedades

- $\mathbb{R}, \phi, \mathbb{Z}$ son abiertos.
- $(a, b), (-\infty, a), (a, \infty)$ son abiertos.
- $\mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado.
- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ es abierto si y solo si es la unión de intervalos abiertos.

Definición 24. *Base de una topología Una colección* B *de subconjuntos abiertos de* X *es una base de* $\mathbf{T}$ *si y solo si, cada conjunto abierto es una unión de elementos de* B*, es decir:*

$$\forall D \in \mathbf{T} \exists \{S_i\} \subset B : D = \bigcup S_i$$

Se cumplirá que B *es una base de una topología sobre* X *si:*

- $X = \bigcup_{S \in B} S$
- *Para todo* $S_1, S_2 \in B$*, el conjunto* $S_1 \cap S_2$ *es una unión de elementos de* B*.*

Otra forma de demostrar si algo es una base de una topología es la siguiente:

$$\forall x \in A \subset \mathbf{T} \exists S \in B : x \in S \subseteq A$$

Sean B_1 y B_2 bases de T_1 y T_2 respectivamente. $T_1 = T_2$ si y solo si:

- $\forall S \in B_1, x \in S, \exists S' \in B_2 : x \in S' \subseteq S$
- $\forall S \in B_2, x \in S, \exists S' \in B_1 : x \in S' \subseteq S$

Definición 25. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathbf{T})$. Un punto $x \in X$ se llama punto límite de A si y solo si, todo conjunto abierto U que contiene a x contiene también otro punto de A diferente de x, es decir, si $U \cap A - \{x\} \neq \phi$. Si $x \notin A$, basta con verificar si para todo conjunto abierto, $U \cap A \neq \phi$. Si la topología contiene el singular de un elemento x, entonces x nunca puede ser punto límite de ningún subconjunto.*

Con esto podemos llegar a un criterio para demostrar si un conjunto es cerrado:

Definición 26. *Un conjunto A es cerrado si y solo si todos los puntos límites de A pertenecen a A.*

Definición 27. *La clausura de un conjunto A, denominado como $\bar{A}$, se define como A unido con sus puntos límites, es decir, $\bar{A} = A \cup A'$. Además, será el cerrado más pequeño que contenga a A.*

Definición 28. *Un subconjunto D de un espacio topológico $(X, \mathbf{T})$ es denso en X si y solo si $\overline{D} = X$.*

Proposición 5. *Sea $D \subset (X, \mathbf{T})$. Entonces, D es denso en X, si y solo si, todo subconjunto abierto y no vacío de X interseca (no trivialmente) a D, es decir, $U \neq \phi, U \cap D \neq \phi$.*

Definición 29. *Sea $(X, \mathbf{T}), V$ un subconjunto de X y $p \in V$. V es una vecindad de P si y solo si existe un abierto A tal que $p \in A \subseteq V$. Con esta definición se cumple que:*

- *En $\mathbb{R}$, los intervalos abiertos (y cerrados) que contengan a p, son vecindades de este.*

Proposición 6. *Un punto $x \in X$ es punto límite de S si y solo si toda vecindad de x contiene un punto de S diferente de x.*

Teorema 2.
(1) *Sea S un subconjunto de un ET. Entonces S es cerrado si y solo si, para cada $x \in X - S$ existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq X - S$.*
(2) *Sea A un subconjunto de un ET. Entonces $A \in \mathbf{T}$ si y solo si, para cada $x \in A$ existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq A$.*
(3) *Sea A un subconjunto de un ET. Entonces $A \in \mathbf{T}$ si y solo si, para $x \in A$ existe un $V \in \mathbf{T}$ tal que $x \in V \subseteq A$.*

6. Conexidad y conjuntos acotados

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si existe $\alpha \in S$ tal que para todo $x \in S, x \leq \alpha$, se dice que α es el máximo de S (y análogo para el mínimo). $S \subset \mathbb{R}$, se dice que S está acotado superiormente si y solo si, existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in S, x \leq c$ (análogo para acotado inferiormente). S es un conjunto acotado si y solo si tiene cota inferior y superior. Si S está acotado superiormente, entonces la menor cota superior se llama **supremo** de S, denotado por $sup(S)$. El máximo será el supremo de S si este está en S.

- Si S está acotado superiormente y S es cerrado, entonces $sup(S) \in S$.

Definición 30. *Sea $(X, \mathbf{T})$ un espacio topológico. Este es conexo si y solo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son X y ϕ.*
Por tanto, $\mathbb{R}$ es un espacio topológico conexo.

Vamos a pasar a una definición que nos permite saber si dos espacios topológicos son equivalentes.

Definición 31. *Dados dos espacios topológicos, estos son homeomorfos is existe una función $f : X \to Y$ que satisface:*

- *f es biyectiva.*
- *Para cada $U \in T_2, f^{-1}(U) \in T_1$*
- *Para cada $V \in T_1, f^{-1}(V) \in T_2$*

La función f es un homemorfismo entre $(X, \mathbf{T}_1)$ y $(Y, \mathbf{T}_2)$, y escribimos $(X, \mathbf{T}_1) \equiv (Y, \mathbf{T}_2)$

Con esto podemos llegar a que dos intervalos (a, b) y (c, d) son homeomorfos, y que cualquier intervalo abierto es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Definición 32. *Una propiedad topológica es una propiedad de un espacio topológico que se conserva mediante un homeomorfismo.*
Es decir, si un espacio tiene una propiedad, y ese espacio es homeomorfo a otro espacio, este otro espacio también tiene esa propiedad.

De aquí sigue que

Teorema 3. *Cualquier espacio topológico homeomorfo a un espacio conexo es conexo.*

Con estas propiedades, y teniendo la definición usual de $\varepsilon - \delta$ de continuidad, podemos definir la condición para una función continua:

Teorema 4. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y solo si, para todo $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.*

Y en genérico para dos espacios topológicos:

Teorema 5. *Sea $(X, \mathbf{T}_1)$ y $(Y, \mathbf{T}_2)$ dos espacios topológicos. $f : X \to Y$ es una función continua respecto a ambas topologías si y solo si, $U \in \mathbf{T}_2, f^{-1}(U) \in \mathbf{T}_1$*

Teorema 6 (Lema del pegamento). *Sea $X = A \cup B$, donde A, B son subconjuntos cerrados de X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces $h : X \to Y$ definida por $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$, es continua.*

CHAPTER 2

Bajas Dimensiones

Dados dos subconjuntos A y B, decimos que son separados si y solo si

- $A \cap B = \phi$
- Ninguno de los dos contiene un punto de acumulación del otro: $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \phi$

DEFINICIÓN 33. *Un subconjunto A de un espacio topológico X es disconexo si existen subconjuntos abiertos G y H de X tal que:*

- $G \cap A \neq \phi$ *y* $H \cap A \neq \phi$
- $(G \cap A) \cap (H \cap A) = G \cap H = \phi$
- $(G \cap A) \cup (H \cap A) = G \cup H = A$

A es conexo si y solo si no es disconexo.

CHAPTER 3

Espacios Métricos

DEFINICIÓN 34. *Sea un conjunto X. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica o una función distancia sobre X si d cumple que:*

- $d(x, y) > 0 \forall x, y \in X$. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Al par (X, d) se le llama espacio métrico.

DEFINICIÓN 35. *Sea V un espacio vectorial real, y sean $x, y, z \in V$. Decimos que el punto z está entre x e y si y solo si existe $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$ tal que $z = tx + (1-t)y$.*

PROPOSICIÓN 7. *Sea $(V, \cdot)$ un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$. La igualdad en la desigualdad triangular se cumple si y solo si z está entre x e y.*

PROPOSICIÓN 8. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. La norma euclidiana se define como:*

$$\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$$

La norma euclidiana es una norma.

DEFINICIÓN 36. *Definimos el diámetro de un conjunto y la distancia de un punto a un conjunto como:*

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

y la distancia de un punto a un conjunto:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

DEFINICIÓN 37. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $x \in X$ y $r > 0$. Los subconjuntos*

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \tag{21}$$

Se denominan ***bolas abiertas*** *con centro en x y radio r.*

Se da que en $\mathbb{R}$, los intervalos abiertos son bolas abiertas.

DEFINICIÓN 38. *Sea V un espacio vectorial real, y $x, y \in V$. Sea*

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\} \tag{22}$$

A este conjunto lo llamaremos ***segmento de recta***. *Un subconjunto A de V es convexo si para cualquier par de elementos x e y en el segmento $[x, y] \subset A$.*

TEOREMA 7. *Sea (X, d) un espacio métrico y un punto x. La bola abierta $B(x, r)$ es un abierto en X.*

DEFINICIÓN 39. *Decimos que un subconjunto $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y solo si para todo $x, y \in J$ y para todo $z : x < z < y$ o al revés, se cumple que $z \in J$.*

Sea X, d un espacio métrico. Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los subconjuntos abiertos de X. Entonces $\mathcal{T}$ satisface que:

- $\phi, X \in \mathcal{T}$
- La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.
- La intersección de dos elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

A $\mathcal{T}$ se le llama la topología determinada por d.

CHAPTER 4

Espacio Cociente

Definición 40. *Sea X un espacio topológico, y sea Y un conjunto. Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. La topología cociente determiada por f sobre Y de la siguiente forma. Un subconjunto A de Y es abierto si y solo si $f^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto de X.*

Esta topología es la más grande sobre Y.

Proposición 9. *Un subconjunto $C \subset Y$ es cerrado en Y si y solo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X.*

Teorema 8. *Sean X e Y espacios topológicos y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Sea $\phi : X/\sim \to Y$ una función y sea $\pi : X \to X/\sim$ la proyección canónica. Entonces ϕ es continua si y solo si*

$$\phi \circ \pi : X \to Y$$

es continua.