

# Topología Elemental

Alejandro Zubiri

March 10, 2025

# Índice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Nociones Básicas</b>                      | <b>2</b> |
| 1.1      | Conjuntos . . . . .                          | 2        |
| 1.1.1    | Operaciones con conjuntos . . . . .          | 3        |
| 1.2      | Tablas de verdad . . . . .                   | 4        |
| 1.2.1    | Continuidad por conjuntos abiertos . . . . . | 5        |
| 1.3      | Relaciones . . . . .                         | 6        |
| 1.3.1    | Relaciones de equivalencia . . . . .         | 6        |
| 1.4      | Tipos de funciones . . . . .                 | 8        |
| 1.5      | Topología Euclidiana . . . . .               | 10       |
| 1.5.1    | Conjuntos abiertos y cerrados . . . . .      | 10       |
| 1.6      | Conexidad y conjuntos acotados . . . . .     | 12       |

# Chapter 1

## Nociones Básicas

### 1.1 Conjuntos

Cuando definimos algo, tiene que estar definido de forma que cualquier persona esté de acuerdo con dicha definición.

**Definición 1.** *Un conjunto se puede definir por su **extensión**, mencionando todos sus elementos, o por **compresión**, definiendo la regla que todos los elementos del conjunto deben cumplir.*

- *Extensión:*

$$S = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1.1)$$

- *Compresión:*

$$S = \{x \in \mathbb{N}\} \quad (1.2)$$

*Denotamos los conjuntos por letras mayúsculas, y sus elementos por letras minúsculas.*

*Si  $x$  es un elemento del conjunto  $S$ , decimos que  $a \in S$ , y si no pertenece,  $a \notin S$ . Es importante tener en cuenta que, a menos que se especifique, el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante, solo nos interesan sus elementos. Para especificar orden, podemos utilizar  $(a, b)$ , que se define como **par ordenado**, tal que*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

**Definición 2.** *El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos del conjunto, denotado por  $\#S$ .*

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  es un subconjunto de  $B$  si y solo si

$$\forall x \in A, x \in B \implies A \subset B \quad (1.3)$$

Sino, decimos que  $A \not\subset B$ .

**Definición 3.** *Decimos que  $A$  es subconjunto de  $B$  si*

$$A \subset B \iff (a \in A \implies a \in B) \quad (1.4)$$

Un ejemplo de conjuntos es el conjunto vacío:

$$\phi/\#\phi = 0 \quad (1.5)$$

**Definición 4.** Decimos que dos conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales si y solo si

$$A \subset B \wedge B \subset A \quad (1.6)$$

### 1.1.1 Operaciones con conjuntos

**Definición 5.** La unión  $S$  de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es

$$S = A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\} \quad (1.7)$$

**Definición 6.** La intersección  $S$  de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es

$$S = A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\} \quad (1.8)$$

**Definición 7.** Definimos la diferencia  $S$  de  $A$  menos  $B$  tal que

$$S = A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} \quad (1.9)$$

**Definición 8.** La diferencia simétrica entre  $E$  y  $A$  es

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad (1.10)$$

**Definición 9.** Definimos el complemento  $S^c$  de un conjunto  $S$  como

$$\begin{aligned} S \cup S^c &= E \\ S \cap S^c &= \phi \end{aligned} \quad (1.11)$$

Siendo  $E$  el conjunto total.

**Definición 10.** Definimos el producto cartesiano entre  $A$  y  $B$  como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplos:

- $\emptyset \times B = \emptyset$
- $A \times B \neq B \times A$  (ya que son pares con órdenes diferentes)

**Proposición 1.**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*Demostración.* Sea  $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \in B \cup C$

$$\begin{aligned}
 &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
 &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
 &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

□

**Proposición 2.**  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 x \in A^c \cap B^c &\iff x \in A^c \wedge x \in B^c \\
 &\iff x \notin A \wedge x \notin B \\
 &\iff x \notin A \cap B \\
 &\iff x \in (A \cap B)^c
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

□

## 1.2 Tablas de verdad

Una tabla de verdad nos permite analizar como se comportan dos proposiciones: Se puede deducir que

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| $V$ | $V$ | $V$        |
| $V$ | $F$ | $V$        |
| $F$ | $V$ | $V$        |
| $F$ | $F$ | $F$        |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| $V$ | $F$ | $F$          |
| $F$ | $V$ | $F$          |
| $F$ | $F$ | $F$          |
| $V$ | $V$ | $V$          |

| $p$ | $q$ | $p \implies q$ |
|-----|-----|----------------|
| $V$ | $V$ | $V$            |
| $V$ | $F$ | $F$            |
| $F$ | $V$ | $V$            |
| $F$ | $F$ | $V$            |

$p \implies q \iff \neg p \vee q$ . Con esto, también podemos deducir que

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$$

**Definición 11.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$ , una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $a \in S$  si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - f(a)| < \varepsilon \implies |x - a| < \delta \quad (1.14)$$

**Definición 12.** Sea  $S \subset \mathbb{R}$ .  $S$  es abierto si:

$$\forall x \in S \exists I \subset S / I = (x - \delta, x + \delta) / \delta > 0 \quad (1.15)$$

**Proposición 3.** La unión de abiertos es un abierto.

*Demostración.* Sea  $S_i$  cada conjunto abierto. Sabemos que

$$\forall x \in S_i \exists \delta > 0 / (x - \delta, x + \delta) \subset S_i \quad (1.16)$$

Sea  $U$  la unión de los conjuntos:

$$U = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n = \{x / x \in S_1 \vee \cdots \vee x \in S_n\} \quad (1.17)$$

Sabemos que para cada punto  $x \exists \delta > 0 / (x - \delta, x + \delta) \subset S_i$ . Por tanto, estos subintervalos estarán contenidos en la unión, y por tanto esta es abierta.  $\square$

**Proposición 4.** La intersección finita de abiertos es abierta

*Demostración.* Vamos a definir dos casos:

- **Caso 1:** La intersección es  $\emptyset$ . Como sabemos que  $\emptyset$  es abierto, se cumple.
- **Caso 2:** La intersección no es  $\emptyset$ .

La intersección estará formada por una serie de conjuntos no nulos que sabemos que contienen intervalos abiertos  $\forall x$ . Sea  $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$ . Como este  $\delta$  es el más pequeño, estará contenido en todos los abiertos para todos los puntos, y por tanto lo estará también en la intersección.  $\square$

### 1.2.1 Continuidad por conjuntos abiertos

Vamos a definir el concepto de preimagen:

**Definición 13.** Sea  $f : D \rightarrow C$  una función y  $S \subset C$ . La preimagen de  $S$  bajo  $f$ , escrita como  $f^{-1}(S)$  es el subconjunto de  $D$  definido como:

$$f^{-1}(S) = \{x \in D / f(x) \in S\} \quad (1.18)$$

Sea  $f : S \rightarrow T / U, V \subset T$

## 1.3 Relaciones

Existen dos tipos de relaciones:

- De orden
- De equivalencia

Una relación  $R$  de  $A$  en  $B$  es cualquier subconjunto de  $A \times B$ :

$$R \subset A \times B$$

Y denotamos  $(a, b) \in R$  por  $a R b$ , diciendo que  $a$  está relacionado con  $b$ .

### 1.3.1 Relaciones de equivalencia

Podemos hablar de relaciones **internas** ( $a = b$ ) o **externas** ( $a \neq b$ ). Sea  $A \neq \emptyset$ , una relación de equivalencia definida sobre  $A$  es una relación que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\forall x \in A, x \sim x$  (reflexiva).
2. Dados  $x$  e  $y$  en  $A$ , si  $x \sim y$ , entonces  $y \sim x$  (simetría).
3. Dados  $x \sim y$ , e  $y \sim z$ , entonces  $x \sim z$  (transitiva).

Todo esto se lee como  $x$  equivalente a  $y$ . Todas estas propiedades se deben cumplir. Para escribir esto como subconjuntos del producto cartesiano:

$$x \sim x \equiv (x, x) \in \sim$$

Si tenemos un conjunto  $A$ , y este está dividido en subconjuntos disjuntos, entonces dados dos elementos en  $A$ , estos son equivalentes sí y solo si ambos pertenecen al mismo subconjunto.

$$S_i \subset A, x \sim y \iff x, y \in S_i : A = S_1 \cap \dots \cap S_n$$

**Ejemplos:** Tomamos en  $\mathbb{Z}$ , dado un entero  $n > 1$ , entonces definimos para  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n|b - a$$

$a$  congruente con  $b$  módulo  $n$ . Esto define una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z}$  de módulo  $n$ . Debemos demostrar que esa relación cumple las propiedades definidas anteriormente para poder afirmar que es de equivalencia.

4. Es reflexiva: dado un  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $n|a - a$ , ya que  $a - a = 0$ , entonces  $a$  es congruente con  $a \pmod{n} \forall a \in \mathbb{Z}$ .
5. Es simétrica: dados dos  $a, b \in \mathbb{Z}$ , si  $a \equiv b \pmod{n} \iff n|b - a$ , entonces  $n|a - b \iff b \equiv a \pmod{n}$ .
6. Es transitiva: dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a \equiv b \pmod{n}$  y  $b \equiv c \pmod{n}$ , entonces  $n|b - a$  y  $n|c - b$ , por tanto  $b - a = nx$  y  $c - b = ny$ , entonces  $c - a = n(x + y) = nz \implies n|c - a$ .

Como cumple con las propiedades, es una relación de equivalencia. Si  $n > 1$ , ¿cuáles son las clases de equivalencia de la congruencia módulo  $n$ ? Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , y los dividimos entre  $n$ :

$$a = q_1n + r_1 : 0 \leq r_1 < n$$

$$b = q_2n + r_2 : 0 \leq r_2 < n$$

¿Qué pasa si  $a$  es congruente con  $b$  módulo  $n$ ? Entonces,  $n|b - a$ , y  $b - a = n(q_2 - q_1) + r_2 - r_1$ . Si  $n|b - a$ , entonces  $\exists m \in \mathbb{Z} : b - a = nm \implies nm = (q_2 - q_1)n + r_2 - r_1 \implies n(m - q_2 + q_1) = r_2 - r_1$ . Pero como  $0 \leq |r_2 - r_1| < n$ . Sabiendo que  $r_2 - r_1 = kn$ , y  $r_2 - r_1 < n$ , entonces la única posibilidad es que  $k = 0$ .

Esto implica que  $\frac{n}{a}$  y  $\frac{n}{b}$  tienen el mismo resto. Vamos a demostrar ahora el recíproco: Supongamos ahora que  $a = qn + r$  y  $b = q'n + r$ . Entonces,  $b - a = n(q' - q)$  es decir,  $n|b - a$ , y por tanto,  $a \sim b \pmod{n}$ . Con esto podemos afirmar para  $a \in \mathbb{Z}$ ,

$$[a] = \{b \in \mathbb{Z} : n \% a = n \% b\}$$

Es decir, el conjunto de todos los  $b$  congruentes con  $a$  módulo  $n$ . Como los residuos de dividir un entero entre  $n$  van desde  $[0, n - 1]$ , las clases son las clases de  $[0], [1], \dots, [n - 1]$ . Entonces la clase de un número  $r$  es

$$[r] = \{qn + r : q \in \mathbb{Z}\}$$

Por ejemplo, si dividimos un número entre 3, solo podemos obtener resto 0, 1 o 2.

**Teorema 1.** Sea  $A \neq \emptyset$  y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $A$ . Entonces

$$a \sim b \iff [a] = [b]$$

$$a \not\sim b \iff [a] \cap [b] = \emptyset$$

*Demostración.* Supongamos que  $a \sim b$ . Sea  $x \in [a]$ , entonces  $x \sim a$ . Como es una relación de equivalencia,  $x \sim b$  y por tanto  $x \in [b]$ , y por tanto, como se cumple para todo elemento,  $[a] \subseteq [b]$ . Supongamos  $[a] = [b]$ . Por la reflexividad,  $b \in [b]$ , entonces  $b \in [a]$ , y por tanto  $a \sim b$ . Para la segunda parte, si  $x \in [a] \cap [b] \iff x \sim a$  y  $x \sim b \iff a \sim b$ . Por tanto, dos clases de equivalencia de una misma relación o son iguales o son disjuntas. Sea  $X$  un conjunto. Una partición de  $X$  es un conjunto  $P$  cuyos elementos son subconjuntos de  $X = \cup A : A \in P$  y  $A \in P \wedge B \in P \implies A \cap B = \emptyset$ .  $\square$

**Corolario** Si  $\sim$  es una relación de equivalencia definida sobre  $A$ , entonces el conjunto de todas las clases de equivalencia distintas es una partición.

Vamos a tomar en el plano  $\mathbb{R}^2$ , decimos que dos puntos  $P$  y  $Q$  son equivalentes (o están relacionados) sí y solo sí la distancia de  $P$  al origen es la distancia de  $Q$  al origen, donde  $\vec{O} = (0, 0)$ . Vamos a ver si cumple las propiedades:

$$P \sim Q \iff d(P, O) = d(Q, O)$$

7. Es reflexivo:  $P \sim P \iff d(P, O) = d(P, O)$ . Esto se cumple por sí mismo.
8. Es simétrico:  $P \sim Q \iff d(P, O) = d(Q, O)$ , y se cumple que como  $d(Q, O) = d(P, O) \iff Q \sim P$ .
9. Es transitivo:  $P \sim Q \iff d(P, O) = d(Q, O)$ . Si  $Q \sim R \iff d(Q, O) = d(R, O)$ , entonces si sustituimos tenemos que  $d(P, O) = d(R, O) \iff P \sim R$ .

**Definición 14.** Sea  $A \neq \emptyset$  y  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $A$ . Entonces  $\forall a \in A$ , el conjunto  $[a] = \{x \in A : a \sim x\}$  se llama la clase de equivalencia de  $a$ .

**Definición 15.** El conjunto de todas las clases de equivalencia que define la relación  $\sim$  sobre  $A$ , se llama el conjunto cociente de la relación y se denota por

$$\boxed{A / \sim} \tag{1.19}$$



Para la congruencia de módulo  $n$  en  $\mathbb{Z}$ :

$$\frac{\mathbb{Z}}{\sim} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\} \equiv \mathbb{Z}_n$$

**Definición 16.**  $f : X \rightarrow Y$  es una función si y solo si:

1. Para cada elemento  $x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in f$
2.  $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z$

Si  $(x, y) \in f$ , escribimos  $f(x) = y$ . El conjunto  $X$  se llama **dominio** de la función, y el conjunto  $Y$  se llama **rango** o **codominio** o **conjunto de llegada** de  $f$ . Además, la **imagen** de  $f$  es el conjunto

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y : (\exists x \in X)(f(x) = y)\} \subset Y$$

$$\text{Dom}(f) = X$$

Por ejemplo, para buscar el dominio de la función  $f$  dada por la fórmula

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} : x \in \mathbb{R}$$

Necesitamos saber el conjunto de valores de  $x$  para los cuales  $f(x)$  existe. Es decir, para los cuales  $\sqrt{x^2 - 1}$  tiene sentido. En este caso, esto se cumple cuando

$$x^2 - 1 \geq 0 \implies |x| \geq 1$$

Dado un conjunto  $A \subset X$ , definimos

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

y además, definimos la **preimagen** de un conjunto  $B \subset Y$ :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Es decir, teniendo  $y \in Y$ :

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) \in \{y\}\} \quad (1.20)$$

$$f(x) \in \{y\} \iff f(x) = y$$

## 1.4 Tipos de funciones

Sea  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  es **injectiva** (o 1:1) si y solo si:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

O, equivalentemente

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Una función es **sobreyectiva** si y solo si:

$$\text{Im}(f) = Y$$

Es decir,  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ . Si ocurren ambas propiedades, la función es **biyectiva**. Con esto podemos deducir que:

- $f : A \rightarrow B. \#A = \#B \iff f$  es biyectiva.

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función biyectiva. Sea  $g : Y \rightarrow X : g(y) = x \iff f(x) = y$ . ¿ $g$  define una función de  $Y \rightarrow X$ ? Es decir, ¿ $\forall y \in Y$ , existe un único  $x \in X : g(y) = x$ ? Dado  $y \in Y$ , sabemos que  $\exists x \in X : f(x) = y$ , ya que  $f$  es sobreyectiva. Entonces  $g(y) = x$ . Demostremos que si  $\exists! x \in X : g(y) = x$ . Esto se cumple ya que  $f$  es inyectiva. Por tanto, tenemos una función  $g : Y \rightarrow X : g(y) = x \iff f(x) = y$ . Esta función se llama la **inversa** de  $f$  y la denotamos por  $f^{-1}$ .

$$f^{-1} : Y \rightarrow X : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

**Definición 17.** Sean  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  dos funciones. Definimos la composición de  $f$  con  $g$  como la función  $g \circ f : X \rightarrow Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

Esto se puede entender como un producto de funciones no conmutativo, pero sí es asociativa:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Si  $f : X \rightarrow Y$  es biyectiva, entonces

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \iff (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

La función que cumple que  $f(x) = x \forall x$  se llama la función **identidad**:

$$id : X \rightarrow X$$

Sea  $X$  un conjunto no vacío.  $f : X \rightarrow Y$  una función sobreyectiva. Definimos la siguiente relación:

dados  $x_1, x_2 \in X$ , decimos que  $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$ . ¿Es una relación de equivalencia?

- Reflexiva:  $f(x) = f(x) \iff x \sim x$
- Simétrica:  $x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2) \iff f(x_2) = f(x_1) \iff x_2 \sim x_1$
- Transitiva:  $x_1 \sim x_2 \wedge x_2 \sim x_3 \implies f(x_1) = f(x_2), f(x_2) = f(x_3) \implies f(x_1) = f(x_3) \implies x_1 \sim x_3$

Consideremos el conjunto cociente  $\frac{X}{\sim}$ , es decir, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Entonces, ¿existe una biyección entre  $X/\sim$  e  $Y$ ? Sea  $\hat{f} : X/\sim \rightarrow Y : \hat{f}([x]) = f(x)$   $\hat{f}$  está bien definida ya que  $[x_1] = [x_2] \implies x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$ . Por tanto,  $\hat{f}([x_1]) = \hat{f}([x_2])$ . Por tanto todos los elementos de  $\frac{X}{\sim}$  tienen imagen y esta es única. Dado  $y \in Y$ , como  $f$  es sobreyectiva  $\exists x \in X : y = f(x)$ , pero como  $f(x) = \hat{f}([x])$ , entonces dado  $y \in Y$  existe  $[x] \in \frac{X}{\sim} : \hat{f}([x]) = y$ . Además, podemos definir la función  $\pi : X \rightarrow \frac{X}{\sim}$  como la **proyección canónica**.

$$\pi(x) = [x] \forall x \in X$$

**Definición 18.** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Una colección  $\mathbf{T}$  de subconjuntos  $X$  se dice que es una topología sobre  $X$  si

1.  $X$  y el conjunto vacío  $\phi$  pertenecen a  $\mathbf{T}$ .
2. La unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos de  $\mathbf{T}$  pertenece a  $\mathbf{T}$ .
3. La intersección de dos conjuntos cualesquiera de  $\mathbf{T}$  pertenece a  $\mathbf{T}$

El par  $(X, \mathbf{T})$  se llama **espacio topológico**. Por la propiedad 3 y mediante inducción, se puede

demostrar que si  $A_i$  conjuntos están en  $\mathbf{T}$ , entonces

$$\bigcap A_i \in \mathbf{T}$$

La pertenencia no es transitiva

**Definición 19.** Sea  $X$  no vacío, y  $\mathbf{T}$  la colección de todos los subconjuntos de  $X$ . Entonces  $\mathbf{T}$  es una **topología discreta** sobre  $X$ , y  $(X, \mathbf{T})$  es un **espacio discreto**. Si para un espacio topológico, se cumple que  $\forall x \in X, \{x\} \in \mathbf{T}$ , entonces  $\mathbf{T}$  es una topología discreta. La topología formada por  $(X, \phi)$  es la topología indiscreta.

El conjunto  $X$  de la definición anterior puede ser cualquier conjunto no vacío, por tanto, hay una cantidad infinita de espacios discretos para cada conjunto no vacío  $X$ .

**Definición 20.** Dado un espacio topológico  $(X, \mathbf{T})$ , los elementos de  $\mathbf{T}$  se llaman **conjuntos abiertos**.

**Definición 21.** Sea  $(X, \mathbf{T})$  un espacio topológico. Un subconjunto  $S$  de  $X$  es cerrado en  $(X, \mathbf{T})$  si su complemento es abierto.

**Definición 22.** Sea  $X \neq \phi$ . Una topología  $\mathbf{T}$  sobre  $X$  es llamada **topología cofinita** si y solo si los conjuntos cerrados de  $X$  son,  $X$  y todos los subconjuntos finitos de  $X$ . Por tanto, los conjuntos abiertos son  $\phi$  y todos los subconjuntos de  $X$  con complemento finito.

$$T_{cof} = \{A \subseteq X : X - A \text{ es finito o } A = \phi\}$$

Un subconjunto de  $X$  es abierto si su complemento es finito.

## 1.5 Topología Euclidiana

**Definición 23.** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}$  se llamaba abierto en la topología euclidiana de  $\mathbb{R}$  si y solo si

$$\forall x \in S \exists a, b \in \mathbb{R} : a < b \wedge x \in (a, b) \subseteq S$$

Otra forma de formular esto es

$$\forall x \in S \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq S$$

### 1.5.1 Conjuntos abiertos y cerrados

Los intervalos abiertos  $(r, s)$  son abiertos, ya que  $\forall x \in (r, s) \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subset (r, s)$ .

Propiedades

- $\mathbb{R}, \phi, \mathbb{Z}$  son abiertos.
- $(a, b), (-\infty, a), (a, \infty)$  son abiertos.
- $\mathbb{Q}$  no es ni abierto ni cerrado.
- Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}$  es abierto si y solo si es la unión de intervalos abiertos.

**Definición 24.** Base de una topología Una colección  $B$  de subconjuntos abiertos de  $X$  es una base de  $\mathbf{T}$  si y solo si, cada conjunto abierto es una unión de elementos de  $B$ , es decir:

$$\forall D \in \mathbf{T} \exists \{S_i\} \subset B : D = \bigcup S_i$$

Se cumplirá que  $B$  es una base de una topología sobre  $X$  si:

- $X = \bigcup_{S \in B} S$
- Para todo  $S_1, S_2 \in B$ , el conjunto  $S_1 \cap S_2$  es una unión de elementos de  $B$ .

Otra forma de demostrar si algo es una base de una topología es la siguiente:

$$\forall x \in A \subset \mathbf{T} \exists S \in B : x \in S \subseteq A$$

Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente.  $T_1 = T_2$  si y solo si:

- $\forall S \in B_1, x \in S, \exists S' \in B_2 : x \in S' \subseteq S$
- $\forall S \in B_2, x \in S, \exists S' \in B_1 : x \in S' \subseteq S$

**Definición 25.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio topológico  $(X, \mathbf{T})$ . Un punto  $x \in X$  se llama punto límite de  $A$  si y solo si, todo conjunto abierto  $U$  que contiene a  $x$  contiene también otro punto de  $A$  diferente de  $x$ , es decir, si  $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ . Si  $x \notin A$ , basta con verificar si para todo conjunto abierto,  $U \cap A \neq \emptyset$ . Si la topología contiene el singular de un elemento  $x$ , entonces  $x$  nunca puede ser punto límite de ningún subconjunto.

Con esto podemos llegar a un criterio para demostrar si un conjunto es cerrado:

**Definición 26.** Un conjunto  $A$  es cerrado si y solo si todos los puntos límites de  $A$  pertenecen a  $A$ .

**Definición 27.** La clausura de un conjunto  $A$ , denominado como  $\bar{A}$ , se define como  $A$  unido con sus puntos límites, es decir,  $\bar{A} = A \cup A'$ . Además, será el cerrado más pequeño que contenga a  $A$ .

**Definición 28.** Un subconjunto  $D$  de un espacio topológico  $(X, \mathbf{T})$  es denso en  $X$  si y solo si  $\bar{D} = X$ .

**Proposición 5.** Sea  $D \subset (X, \mathbf{T})$ . Entonces,  $D$  es denso en  $X$ , si y solo si, todo subconjunto abierto y no vacío de  $X$  interseca (no trivialmente) a  $D$ , es decir,  $U \neq \emptyset, U \cap D \neq \emptyset$ .

**Definición 29.** Sea  $(X, \mathbf{T}), V$  un subconjunto de  $X$  y  $p \in V$ .  $V$  es una vecindad de  $P$  si y solo si existe un abierto  $A$  tal que  $p \in A \subseteq V$ . Con esta definición se cumple que:

- En  $\mathbb{R}$ , los intervalos abiertos (y cerrados) que contengan a  $p$ , son vecindades de este.

**Proposición 6.** *Un punto  $x \in X$  es punto límite de  $S$  si y solo si toda vecindad de  $x$  contiene un punto de  $S$  diferente de  $x$ .*

**Teorema 2.** 1. *Sea  $S$  un subconjunto de un ET. Entonces  $S$  es cerrado si y solo si, para cada  $x \in X - S$  existe una vecindad  $V$  de  $x$  tal que  $V \subseteq X - S$ .*

2. *Sea  $A$  un subconjunto de un ET. Entonces  $A \in \mathbf{T}$  si y solo si, para cada  $x \in A$  existe una vecindad  $V$  de  $x$  tal que  $V \subseteq A$ .*

3. *Sea  $A$  un subconjunto de un ET. Entonces  $A \in \mathbf{T}$  si y solo si, para  $x \in A$  existe un  $V \in \mathbf{T}$  tal que  $x \in V \subseteq A$ .*

## 1.6 Conexidad y conjuntos acotados

Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Si existe  $\alpha \in S$  tal que para todo  $x \in S, x \leq \alpha$ , se dice que  $\alpha$  es el máximo de  $S$  (y análogo para el mínimo).  $S \subset \mathbb{R}$ , se dice que  $S$  está acotado superiormente si y solo si, existe un  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\forall x \in S, x \leq c$  (análogo para acotado inferiormente).  $S$  es un conjunto acotado si y solo si tiene cota inferior y superior. Si  $S$  está acotado superiormente, entonces la menor cota superior se llama **supremo** de  $S$ , denotado por  $\sup(S)$ . El máximo será el supremo de  $S$  si este está en  $S$ .

- Si  $S$  está acotado superiormente y  $S$  es cerrado, entonces  $\sup(S) \in S$ .

**Definición 30.** *Sea  $(X, \mathbf{T})$  un espacio topológico. Este es conexo si y solo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son  $X$  y  $\phi$ .  
Por tanto,  $\mathbb{R}$  es un espacio topológico conexo.*

Vamos a pasar a una definición que nos permite saber si dos espacios topológicos son equivalentes.

**Definición 31.** *Dados dos espacios topológicos, estos son homeomorfos si existe una función  $f : X \rightarrow Y$  que satisfice:*

- *$f$  es biyectiva.*
- *Para cada  $U \in \mathbf{T}_2, f^{-1}(U) \in \mathbf{T}_1$*
- *Para cada  $V \in \mathbf{T}_1, f^{-1}(V) \in \mathbf{T}_2$*

*La función  $f$  es un homeomorfismo entre  $(X, \mathbf{T}_1)$  y  $(Y, \mathbf{T}_2)$ , y escribimos  $(X, \mathbf{T}_1) \equiv (Y, \mathbf{T}_2)$*

Con esto podemos llegar a que dos intervalos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son homeomorfos, y que cualquier intervalo abierto es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ .

**Definición 32.** *Una propiedad topológica es una propiedad de un espacio topológico que se conserva mediante un homeomorfismo.  
Es decir, si un espacio tiene una propiedad, y ese espacio es homeomorfo a otro espacio, este otro espacio también tiene esa propiedad.*

De aquí sigue que

**Teorema 3.** *Cualquier espacio topológico homeomorfo a un espacio conexo es conexo.*

Con estas propiedades, y teniendo la definición usual de  $\varepsilon - \delta$  de continuidad, podemos definir la condición para una función continua:

**Teorema 4.** *Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si y solo si, para todo  $U \subset \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(U)$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}$ .*

Y en genérico para dos espacios topológicos:

**Teorema 5.** *Sea  $(X, \mathbf{T}_1)$  y  $(Y, \mathbf{T}_2)$  dos espacios topológicos.  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua respecto a ambas topologías si y solo si,  $U \in \mathbf{T}_2, f^{-1}(U) \in \mathbf{T}_1$*

**Teorema 6** (Lema del pegamento). *Sea  $X = A \cup B$ , donde  $A, B$  son subconjuntos cerrados de  $X$ . Sean  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : B \rightarrow Y$  funciones continuas. Si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A \cap B$ , entonces  $h : X \rightarrow Y$  definida por  $h(x) = f(x)$  si  $x \in A$  y  $h(x) = g(x)$  si  $x \in B$ , es continua.*