Geometría Proyectiva

Alejandro Zubiri

March 20, 2025

Índice

Chapter 1

Introducción

Correo: *mruizleo@campusunie.es*

1.1 Nomenclatura

- Punto: letras mayúsculas $P(a, b)$.
- Vectores: minúsculas con notación vector $\vec{u}(a, b)$

Chapter 2

Espacio Afín

2.1 El espacio afín

Dados un conjunto de elementos, siendo estos puntos, A, y un espacio vectorial $\mathbb{V}$, llamamos el espacio afín a la terna $(A, \mathbb{V}, \varphi)$, siendo φ una aplicación entre elementos de A, tal que:

$$\varphi : A \times A \mapsto \mathbb{V}$$

Esta terna debe cumplir que:

- $\forall p \in A \land \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \exists! Q \in A / \varphi(P, Q) = \mathbf{PQ} = \mathbf{u} = Q - P$
- Relación de Chasles: $\forall P, Q, R \in A \land \varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$

$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR}$$

Demostración

- $\mathbf{PQ} = Q - P$
- $\mathbf{QR} = R - Q$

$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = Q - P + R - Q = R - P = \mathbf{PR}$$

La dimensión del espacio afín va a ser la dimensión de $\mathbb{V}$.

2.2 Propiedades del espacio afín

- $\forall P \in A, \varphi(P, P) = 0$
- $\varphi(P, Q) = 0 \iff P = Q$
- $\forall P, Q \in A, \varphi(P, Q) = -\varphi(Q, P)$
- Regla del paralelogramo: $\forall P, Q, R, S \in A$:

$$\varphi(P, Q) = \varphi(R, S) \iff \varphi(P, R) = \varphi(Q, S)$$

2.3 Vector de posición

Es un vector que representa la posición de un punto en el espacio respecto a un origen, además de la distancia que separa dichos puntos. El vector **OP** es el vector que une el origen al punto P. Esta aplicación es **biyectiva** (inyectiva y sobreyectiva).

Definición 1. *Supongamos que no es inyectiva. Es decir, existen dos $\varphi(x) = \varphi(y)/x \neq y$*

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} &= \mathbf{OQ} \\ \mathbf{P} + \mathbf{PQ} &= \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} = \mathbf{Q} &\implies \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} \\ &\implies P = Q \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.4 Estructura afín canónica

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, la aplicación φ

$$\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}; \mathbf{uv} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

satisface los axiomas de la definición de un espacio afín y define una estructura de espacio afín $(\mathbb{V}, \mathbb{V}, \varphi)$ conocida como la estructura afín canónica de $\mathbb{V}$.

2.5 Traslación de un vector

Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, la traslación de un vector es la aplicación

$$\tau_{\mathbf{v}} : A \to A$$

$$\tau_{\mathbf{v}}(P) = P + \mathbf{v} = Q$$

Una traslación de vector $\mathbf{v}$ transforma el punto P a otro punto Q.

2.5.1 Propiedades de traslación

- $\tau_{\mathbf{0}}(P) = P$
- $\tau_{\mathbf{u}} \circ \tau_{\mathbf{v}} = \tau_{\mathbf{v}} \circ \tau_{\mathbf{u}} = \tau_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$

Teorema 1. *Cualquier transformación afín se puede escribir como un producto de una transformación afín.*

2.6 Suma de un punto y un vector

Fijado $P \in A$, denotaremos por $F_P : A \to \mathbf{A}$ a la aplicación dada por $F_P(Q) = \mathbf{PQ}$. Si $P \in A$ y $\mathbf{v} \in A$, el único punto $Q \in A$ dado, tal que $\mathbf{PQ} = \mathbf{v}$ se denotará como $P + \mathbf{v}$.

Teorema 2. *Dados un espacio afín y una transformación afín $f : A \to A$. Entonces son equivalentes:*

- *Existe un conjunto fijo V no trivial ($V \neq \{0\}$).*
- *El 1 es autovalor de f.*

El conjunto de puntos fijos es un subespacio afín de A con subespacio vectorial asociado de V de autovectores de $\bar{f}$ con autovalor $\lambda = 1$.

Chapter 3

Sistemas de referencia

Para definir un espacio afín, tenemos dos elementos: - Una referencia formada por un conjunto de puntos. - Un sistema de coordenadas. Podemos definir cualquier punto como

$$Q = P + \mathbf{v}$$

por tanto, un subespacio afín como

$$L = P + \mathcal{L}\{\mathbf{v}_i\}$$

y finalmente, nuestro espacio afín como

$$A = P + \mathbb{V}$$

Como el espacio vectorial tendrá una base B, podemos definir el espacio como

$$A = P + B$$

Definición 2. *Combinación afín*

Dados los puntos $\{P_i\}$ y los escalares $\{\lambda_i\}$ tal que $\sum \lambda_i = 1$, la combinación afín es

$$P = \sum_{i=0} \lambda_i \mathbf{P_0 P_i}$$

Entonces se dice que P es combinación afín de los puntos $P_0, \ldots, P_r$

Teorema 3. *Corolario*

Sea A un SA de dimensión n con puntos $P_0, \ldots, P_r$. Entonces - Si $P_0, \ldots, P_r$ son afínmente independientes, $r \leq n$ - Si $P_0, \ldots, P_r$ son afínmente generadores, $r \geq n$ - Si $P_0, \ldots, P_r$ son referencia afín, $r = n + 1$

Teorema 4. *Sistema de referencia*

*Sea un espacio afín (A, V, ϕ) de dimensión n, llamamos sistema de referencia a cualquier conjunto de $n + 1$ puntos de A tal que, fijado uno de ellos, se obtiene una base B del sistema vectorial $\mathbb{V}$. - **Base**: $B = \{\mathbf{P_1 P_2}, \ldots, \mathbf{P_1 P_{n+1}}\}$ - **SR**: $\{O, B\}$*

Teorema 5. *Sistema de referencia cartesiano*
Es aquel donde el origen O es el punto 0 y la base es la base canónica.

Existe una correspondencia entre la referencia cartesiana y la afín. Dada una referencia cartesiana

$$R_c = \{O; B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\}$$

le asociamos la referencia afín

$$R_\alpha = \{P_0 = O, P_1 = O + \mathbf{v}_1, \ldots, P_n = O + \mathbf{v}_n\}$$

Teorema 6. *Teorema de la base*
En todo espacio vectorial finitamente generado existe siempre una base con tantos elementos como dimensión del espacio vectorial.

3.1 Coordenadas

3.2 Afines de un punto

Teniendo una base $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, un punto X, el vector $\mathbf{OX}$ se podrá expresar únicamente como

$$\mathbf{OX} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Y los valores λ_i son las **coordenadas afines** del punto X respecto a nuestro sistema de referencia.

3.3 De un vector por dos puntos

Dados dos puntos A, B, el vector se define como

$$\mathbf{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$$

La aplicación que envía un punto P a las coordenadas de P respecto a R es un **isomorfismo afín**.

3.4 Del punto medio de un segmento

Teniendo dos puntos A, B y el M el punto medio del segmento $\mathbf{AB}$, entonces

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OA} + \frac{1}{2}\mathbf{AB}$$

3.5 Baricéntricas

Sean $P_0, \ldots, P_n$ puntos afínmente independientes. Entonces una referencia afín

$$R = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

es un sistema de referencia baricéntrico de A. Dado un punto X, si $x_0, \ldots, x_n$ son los únicos escalares tales que

$$x_0\mathbf{XP_0} + \cdots + x_n\mathbf{XP_n} = 0,\ x_0 + \cdots + x_n = 1$$

entonces $X = (x_0, \ldots, x_n)$ son sus coordenadas baricéntricas.

3.6 Cambio de sistema de referencia

Sea $(A, \mathbb{V}, \phi)$ un espacio afín y sean

$$\begin{aligned} R &= \{O; B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\} \\ R' &= \{O', B' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

dos sistemas de referencia afines de A. Sea $P \in A : P(x_1, \ldots, x_n)_R = (y_1, \ldots, y_n)_{R'}$. Entonces, el vector que va desde O hasta P se define como

$$\boxed{\mathbf{OP} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}}$$

Esto se cumple debido a la **relación de Chasles**. Esta relación nos permite obtener el vector que une el origen de un sistema de referencia a un punto, si tenemos el vector que une ambos orígenes, y el vector que va desde el segundo origen al punto. También nos permite obtener el vector que relaciona dos orígenes, si tenemos los vectores que van a un mismo punto desde dos sistemas de referencia. El vector **OP** se define como

$$\mathbf{OP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

mientras que **O′P** se define como

$$\mathbf{O'P} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{u}_i$$

Es decir, cada vector está respecto a su propia base (aquella definida por el sistema de referencia) y por tanto tendrá sus propias coordenadas.

Definición 3. *Cada sistema de referencia (siempre que cumpla las condiciones adecuadas) es válido, y no existe una preferencia para un determinado sistema. Por tanto, es conveniente buscar un sistema de referencia (siempre que sea posible) que simplifique el problema a resolver.*

3.7 Matriz de cambio de sistema de referencia

Esta matriz se define como

$$M_{R'R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & M_{B'B} \end{pmatrix}$$

Donde a son las coordenadas de O' respecto de R, y es una matriz de $n \times 1$. Esta matriz es la de cambio de sistema de referencia de R' a R.

Teorema 7. *Corolario*

Si se desarrolla el determinante (por adjuntos) de $M_{R'R}$ por la primera fila, se observa que esta es igual al determinante de la matriz $M_{B'B}$. Como esta última tiene determinante distinto de 0 (ya que esta matriz debe ser invertible), entonces la matriz $M_{R'R}$ es también invertible.

$$M_{R'R} = M_{RR'}^{-1}$$

A menudo esta ecuación acaba siendo

$$P_R = O' + M_{B'B} P_{R'}$$

Con esto se dan diversas situaciones. Supongamos dos sistemas de referencia como descritos anteriormente. - Si se cumple que $O = O'$, entonces el punto de referencia es el mismo y por tanto solo cambia la base. - Si $\forall i \; \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$, entonces los vectores de la base no cambian (la matriz de cambio de sistema es la identidad) y por tanto solo estamos trasladando el origen. - Si se cumplen ambas propiedades, (evidentemente) ambos sistemas de referencia coinciden.

3.8 Teorema

Cualquier transformación afín se puede escribir como un producto entre una transformación afín y una traslación que deja invariante un punto. Se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz M es la transformación que deja un punto P fijo, y v representa el vector de la traslación.

Sean dos espacios afines, y sea $R = \{O, \mathcal{B} = \{\mathbf{v}_i\}\}$ la referencia cartesiana de la primera. Sea O' un punto cualquiera de A' y sean $\{\mathbf{v}'_i\}$ vectores cualesquiera de $\mathbb{V}'$. Existe una única **aplicación afín** f tal que $f(O) = O'$ y cuya aplicación lineal asociada cumple que

$$\bar{f}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}'_i$$

Además, dados $\{P_i\}$ $n+1$ puntos **afínmente indepedientes** de A, y $\{P'_i\}$ $n+1$ puntos de A' existe una única aplicación afñin tal que

$$f(P_i) = P'_i$$

Si se tienen dos espacios afines de dimensión n, teniendo una aplicación afín f de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}'$, las siguientes afirmaciones son equivalentes: 1. f es un isomorfismo afín. 2. Existe una referencia cartesiana $\{O; B\}$ de $\mathbb{A}$ que f transforma en una referencia cartesiana de $\mathbb{A}'$. 3. Existe un conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes de $\mathbb{A}$ que f transforma en un conjunto de $n+1$ puntos afínmente independientes de $\mathbb{A}'$.

Teniendo dos espacios afines de dimensión n y m, cada uno con sus respectivas referencias cartesianas R y R', con la aplicación afín $f : A \to A'$ y su respectiva aplicación lineal asociada $\bar{f}$, y siendo M la matriz de $\bar{f}$ respecto de las bases B y B'. Si las coordenadas de $P \in A$ de R son (x_i) y las coordenadas de $f(P)$ respecto de A' son (y_i), se tiene que

$$M \cdot X + D = Y$$

Donde $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$ y D es la matriz fila traspuesta formada por las coordenadas de $f(O)$ respecto a R'. Realmente estamos afirmando que

$$\begin{aligned} f(P) &= f(O') + M \cdot P \\ \bar{f}(\mathbf{OP}) &= M \cdot P \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.9 Composiciones de aplicaciones afines con matrices

Sean tres espacios afines con sus respectivas referencias cartesianas $R_1, R_2 R_3$. Sean $h : A_1 \to A_2$ y $g : A_2 \to A_3$ dos aplicaciones afines, sea $f = g \circ h = g(h)$. Entonces

$$M_{R_1R_3}(f) = M_{R_2R_3}(g) \cdot M_{R_1R_2}(h)$$

Propiedades - Dados dos espacios afines, cada uno con dos referencias cartesianas R_1, R_2 y R'_1, R'_2, siendo $f : A \to A'$, entonces

$$M_{R_2R'_2}(f) = M_{R'_1R'_2} \cdot M_{R_1R'_1}(f) \cdot M_{R_2R_1}$$

- Teniendo dos espacios afines de la misma dimensión, con sus respectivas referencias cartesianas R, R', y siendo $f : A \to A'$ un isomorfismo afín, entonces $M_{RR'}(f)$

$$M_{R'R}(f^{-1}) = (M_{RR'}(f))^{-1}$$

- Teniendo un espacio afín con tres referencias cartesianas de $\mathbb{A}$, entonces

$$M_{R_1R_3} = M_{R_2R_3} \cdot M_{R_1R_2}$$

- Dadas dos referencias cartesianas de un mismo espacio, $M_{R_1 R_2}$ es invertible y

$$M_{R_2 R_1} = (M_{R_1 R_2})^{-1}$$

Se tiene que, si en un espacio, con una aplicación $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $f(P) = P$, entonces - f es la identidad - Toda referencia cartesiana R de A, la matriz de f respecto a R es la identidad.

Chapter 4

Variedades afines y posiciones relativas

4.1 Variedades Afines

Se define como un subespacio afín de dimensión finita, y estos se pueden definir de diferentes formas.

$$S = \{P_0, \dots, P_n\}$$

Este conjunto de puntos generan el subespacio vectorial asociado:

$$W = \{\mathbf{P_0P_1}, \dots, \mathbf{P_0P_n}\}$$

Y estos generan el subespacio afín

$$L = P + W$$

También, dado un conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_i\}$ que formen un sistema generador, junto con un punto, podríamos generar la variedad.
Todas estas definiciones conforman la misma variedad afín.

> **Definición 4.** *Sea A un espacio afín (A, V, ϕ) asociado a un espacio vectorial V. Sea L un subespacio afín de A, y $P \in L$, y U un subespacio vectorial de V.*
> *Se llama variedad lineal de A que pasa por P y con dirección U al conjunto de puntos*
>
> $$P + U = \{P + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in U\} \tag{4.1}$$
>
> *También se da que en un espacio afín (A, V, ϕ), A es variedad lineal de A.*

Dada una variedad afín $P + W$ y un punto $Q \in P + W$, entonces

$$P + W = Q + W$$

lo que quiere decir que podemos definir la misma variedad afín con cualquier punto que pertenezca a esta.
Dado un subconjunto de puntos L de A, podemos comprobar si es una variedad afín si:

- Que el conjunto de vectores generado por los puntos pertenece a V.
- en tal caso, comprobar que $L = P + \{\mathbf{AB}, A, B \in L\}$ para algún punto de L.

Definición 5. *Dado un espacio afín A de dimensión n y $L = P + W$ una variedad lineal de A con dirección W. Dado que L es espacio afín sobre W, entonces*

$$dim(L) = dim(W)$$

El conjunto de soluciones de un sistema lineal

$$PX = C$$

de m ecuaciones con n incógnitas, compatible, es una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$.

4.1.1 Ecuaciones de una variedad lineal

Sea $L = P + W$ una variedad lineal de $\mathbb{R}^n$ de dimensión n, tal que W está generado por una base de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Para cualquier punto $X \in L$, se cumple que

$$\mathbf{PX} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Ahora, siendo O el origen, entonces un punto $X \in L$ se puede expresar como

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OP} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

que llamaremos **ecuación vectorial**.

4.1.2 Ecuaciones paramétricas de una VA

Si conocemos las coordenadas de un punto P, podemos sustituir en la ecuación vectorial, y tras igualar coordenadas obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} &x_1 = p_1 + \lambda_1 v_{11} + \cdots + \lambda_k v_{k_1} \\ &\ldots \\ &x_n = p_n + \lambda_n v_{1n} + \cdots + \lambda_k v_{kn} \end{aligned}$$

4.1.3 Ecuaciones cartesianas

Si despejamos los valores λ_i, obtenemos las ecuaciones cartesianas.

4.2 Variedades afines en el plano A_2

Teniendo el sistema de referencia

$$R = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

que define un punto por sus coordenadas

$$P = (p_1, p_2)$$

4.2.1 Rectas

Una recta es un **hiperplano**, determinada por

- Un punto $P(p_1, p_2)$
- Un vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \neq \mathbf{0}$

Este vector de dirección determina el subespacio de dirección:

$$S = L(\mathbf{v})$$

Si una recta viene determinada por dos puntos P, Q, podemos expresarla de forma continua como

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2}$$

Siendo el vector director de esta el vector $\mathbf{PQ}$. En el caso particular en el que $P = (a, 0)$ y $Q = (0, b)$, se da que

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4.3 Variedades afines en A_3

Teniendo un sistema de referencia

$$R = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

Un punto se define por sus coordenadas

$$P = (p_1, p_2, p_3)$$

4.3.1 Rectas

Las rectas se definen (de nuevo) por un punto P y un vector director $\mathbf{u}$, y cualquier punto de la recta se define como

$$X = P + \lambda\mathbf{u}$$

Si una recta viene determinada por dos puntos P, Q, esta se puede expresar como

$$\frac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{z - p_3}{q_3 - p_3}$$

Que es su forma de ecuación continua, con vector director $\mathbf{PQ}$.

Tipos de ecuaciones de una recta

- Implícitas: expresadas como la intersección de dos planos.
- Vectorial: punto más vector.
- Continua: despejar los parámetros.
- Paramétrica: una ecuación para cada componente de un punto.

4.3.2 Planos

Un plano se define como una base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ apoyado sobre un punto P. La base define todos los puntos que se pueden expresar de la forma

$$X = P + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$$

que serán los puntos que pertenecen al plano. También podemos definir un plano con tres puntos P, Q, R, siendo la base los vectores $\mathbf{PQ}$ y $\mathbf{PR}$, apoyados sobre cualquiera de los tres puntos.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - p_1 & u_1 & v_1 \\ y - p_2 & u_2 & v_2 \\ z - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2}$$

4.4 Haces de variedades afines

Se llama **haz de rectas** al conjunto de rectas del plano que pasan por un punto, este se denomina **vértice**. La ecuación del haz de rectas que pasa por el punto P es:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

4.4.1 Haces de rectas dado por dos rectas

Dadas dos rectas r, s por sus ecuaciones cartesianas, el haz de rectas formado por r y s es el conjunto de todas las rectas que pasan por su interseccion.

4.4.2 Haces de planos en A^3

Dados dos planos π_1, π_2, definimos el haz de planos como todos los planos que contienen a la intersección de los planos π_1 y π_2.
Para calcular este haz, como necesitamos tres puntos, tomamos dos puntos que pertenezcan a la intersección de los planos, y dejamos el resto de valores como parámetros. Geométricamente, el plano puede "girar" alrededor de la recta. También, podemos escribir sumar la ecuación de π_1 más $k \cdot \pi_2$ e igualarlo a 0.
Por otro lado, para obtener un haz de planos **paralelos**, simplemente obtenemos la normal del plano, y dejamos la constante final D como parámetro.

4.4.3 Recta afín que se apoya en dos rectas

Una recta que se apoya en otras dos es aquella que corta de forma **perpendicular** a ambas rectas, además de que pasa por un punto concreto. Ambas rectas deben cruzarse y no ser paralelas.

4.5 Posiciones relativas

4.5.1 Posiciones relativas de dos variedades afines

Dadas dos variedades lineales afines $L_1 = P + W_1$ y $L_2 = Q + W_2$, con sus respectivas ecuaciones, entonces la intersección de estas variedades son las soluciones de las ecuaciones que representan ambas variedades. Analizando la matriz de los coeficientes de las ecuaciones, tenemos que

- Las variedades se cortan si la matriz es compatible, es decir, el rango de la matriz de coeficientes A es igual al rango de la matriz ampliada A'.
- Las variedades se cruzan ambos rangos no coinciden.
- Son paralelas si no hay intersección.

Chapter 5

Espacio Afín Euclídeo

Un espacio afín es euclídeo al incluir el **producto escalar**:

Definición 6. *El producto escalar, que definimos como $< x, y >= x \cdot y$, nos permite medir distancias, entre otras cosas. Esto pasa a ser*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum x_i y_i$$

Esta es una aplicación:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Este cumple que:

- *Es simétrico.*
- *Es positivo siempre.*
- *Es una forma bilineal.*

Figura 5.1

Y ahora

Definición 7. *Un espacio afín euclídeo es una cuaterna definida por $(A, \mathbb{V}, \phi, \cdot)$, formado por un espacio afín y el producto escalar.*
La dimensión del EA euclídeo es la dimensión de su EA asociado.

5.1 Coordenadas covariantes y contravariantes

Definición 8. *Dado un EA euclídeo sobre $\mathbb{R}$, con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_i\}$, llamamos* ***coordenadas contravariantes*** *del vector $\mathbf{u} \in E$, respecto a la base $\mathcal{B}$, a la n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ de escalares tal que:*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

Por contraste, tenemos

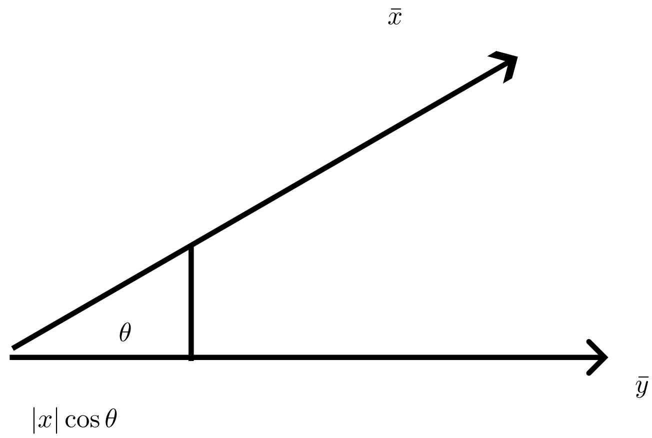

Figure 5.1: Producto Escalar

Definición 9. *Dado un EA euclídeo, las* ***coordenadas covariantes*** *de un vector* $\mathbf{u}$*, respecto a una base* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_i\}$*, son la n-upla definida por los escalares* $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$*:*

$$a_i^* = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}$$

Figura 5.2
Lo importante de estas coordenadas, es que

$$< u_1, u_2 >< u_1^*, u_2^* >= c$$

Es decir, el producto de coordenadas covariantes entre coordenadas contravariantes es constante. Además, se cumplirá que si la base es ortonormal, ambas coincidirán.

Las coordenadas covariantes se pueden obtener multiplicando las coordenadas contravariantes por la **matriz de Gram**:

$$\begin{pmatrix} a_1^* \\ \ldots \\ a_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

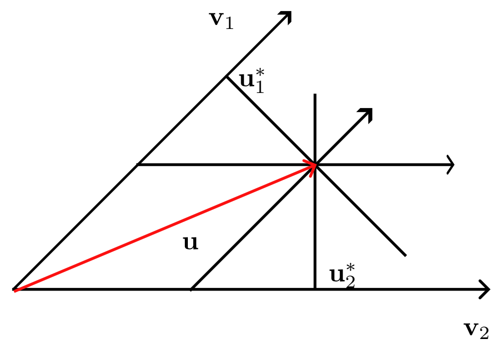

Figure 5.2: Coordenadas Covariantes

5.2 Ángulos

Definición 10. *Dado un EA euclídeo, y dos vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *no nulos, definimos el ángulo no orientado entre* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$ *como el* arccos *entre* 0 *y* π *de*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$$

Donde $|\mathbf{v}|$ *es la norma del vector, definido como*

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Definición 11 (Perpendicularidad)**.** *Dado un EAE de dimensión* n*, y dos vectores* $\mathbf{v}, \mathbf{u}$*, estos dos son perpendiculares u ortogonales si y solo si*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$$

También, dos variedades afines $L_1 = P_1 + S_1$*,* $L_2 = P_2 + S_2$*, estos serán perpendiculares si se cumple que:*

- $L_1 \cap L_2 \neq \phi$
- $S_1 \perp S_2$

Ahora introducimos el siguiente teorema

Teorema 8. *Dado un hiperplano L cuya ecuación cartesiana respecto a un sistema rectangular (ortonormal), es*

$$\sum a_i x_i = c$$

El vector de coordenadas $\mathbf{n} = (a_1, \ldots, a_n)$ define rectas perpendiculares a L y es el vector normal al hiperplano. Estas coordenadas son las ***covariantes*** *del vector normal.*

Definición 12. *Dado un EAE de dimensión n, y un subespacio afín $L \subset A$ de dimensión m y dirección W, entonces, para cada punto $P \in A$, existe un único subespacio afín L' de A por P, ortogonal a L y con dimensión $n - m$. Este es*

$$L' = P + W^{\perp}$$

La intersección entre ambas variadades, $L \cap L'$, es la proyección de P sobre L.

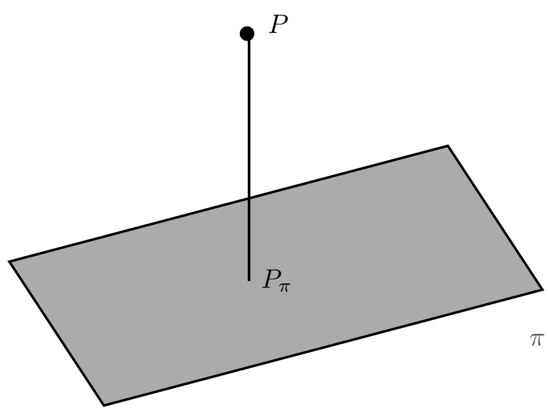

Figure 5.3: Proyección Ortogonal