Entrega: Homeomorfismos y conexidad

Alejandro Zubiri & David Mateos

1. Ejercicio 1 (6 puntos)

Demuestre que los únicos conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos, $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío.

1.1. Solución.

Empezamos definiendo ambos elementos. Un subconjunto I es un intervalo si para todo $x, y \in I, x < z < y, z \in I$. Por otro lado, un conjunto E no es conexo si existen dos conjuntos abiertos G, H tal que $G \neq \phi$, $H \neq \phi$, $E = (E \cap G) \cup (E \cap H)$ y $G \cap H$.
Empezaremos demostrando que un conjunto es un intervalo sí y solo sí es conexo.
Si es un intervalo, es conexo: supongamos que existen dos conjuntos G, H abiertos que forman una desconexión en un intervalo I. Sea $a \in G \cap I$ y $b \in H \cap I$, y asumamos que $a < b$. Puesto que I es un intervalo, se tiene que $[a, b] \subseteq I$. Ahora definamos $c = \sup((I \cap G) \cap [a, b])$. Con esta definición, tenemos que $c \geq a$ y que $c \leq b$, y puesto que I es un intervalo, $c \in I$.
Si se cumple esto, hay dos opciones:

- Si $c \in G \cap I$, como G es abierto, $\exists \delta > 0 : (c - \delta, c + \delta) \subseteq G$. Pero entonces c ya no sería el supremo, y por tanto c no pertenece a $G \cap I$.
- Si $c \in H \cap I$, se tiene que $c \in H$. Como H es abierto, tenemos que $\exists \delta > 0 : (c - \delta, c) \subset H$. Como $a < c - \delta$, tenemos que $(c - \delta, c) \subset I$, por lo que $(c - \delta, c) \subset H \cap I$, luego $(c - \delta, c) \cap (G \cap I) = \phi$. Pero entonces $c < c - \delta$, que es una contradicción, luego c no pertenece a $H \cap I$, luego c no pertenece a I, que es una contradicción, luego I es conexo.

Si es conexo, es un intervalo: Sea I un conjunto conexo que no es un intervalo, entonces dados $a, b \in I, \exists c : a < c < b, c \notin I$. Sea entonces $U = (-\infty, c)$ y $V = (c, \infty)$. Tenemos que ambos son abiertos en $\mathbb{R}$, y que $a \in U$ y que $b \in V$, lo que implica que $I \cap U \neq \phi$ y que $I \cap V \neq \phi$. Teniendo que son disjuntos, que $(I \cap U) \cup (I \cap V) = I$, y que luego $(I \cap U) \cap (I \cap V) = \phi$, tenemos que I no es conexo, lo que es una contradicción, luego I es un intervalo.
Habiendo demostrado que todos los intervalos son conexos, podemos definir $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, que es un intervalo, luego $\mathbb{R}$ es conexo, y $\phi = (a, a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$, luego $\mathbb{R}, \phi$ son conexos.

2. Ejercicio 2 (3 puntos)

Sea X un espacio topológico y sea $Y = \{0, 1\}$ considerado como espacio topológico con la topología discreta. Demuestre que si X es conexo, entonces X no puede ser homeomorfo a Y.

2.1. Solución.

Si $X \cong Y$, existe una función continua y biyectiva $f : X \to Y$. Como Y tiene dos elementos, entonces hay dos casos:

- Caso 1: X tiene más o menos de dos elementos: entonces la función ya no es biyectiva.
- Caso 2: X tiene dos elementos: entonces X no es conexo.