Física II

Alejandro Zubiri

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Índice

1. Bibliografía

- Física para la ciencia y la tecnología - Tipler y Mosca
- Física, Volumen II - Campos y Ondas - M. Alonso. E. J. Finn

CHAPTER 1

Campo eléctrico

Definición 1. *Definimos la* ***fuerza de Coulomb*** *entre dos cargas, siendo una fija (foco) y otra la que se mueve (receptora).*

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r = k_0\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r \ (N) \tag{2}$$

Siendo $k_0 = 9 \cdot 10^9 \ (\frac{Nm^2}{r^2})$, ε_0 *la permitividad eléctrica del vacío, y* $\vec{u}_r$ *el vector que va desde el foco al receptor.*

Definición 2. *El campo eléctrco es una region en el espacio alrededor de una carga en la que se pueda situar otra carga receptora para que esta sufra una fuerza repulsora o atractora.*

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \ \left(\frac{N}{C}\right) \tag{3}$$

Podemos representar un campo eléctrico mediante punto-vector o líneas de fuerza.

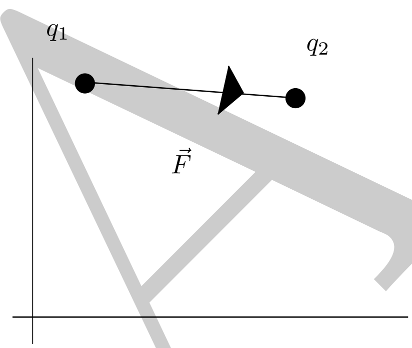


Figure 1. fuerza-coulumb

Definición 3. *Las líneas de fuerza es aquella que tienen como origen el foco, y su vector tangente es el campo eléctrico en cada uno de sus puntos.*

0.1. Sistema de cargas puntuales. Supongamos un conjunto de N cargas $q_1, \ldots, q_n$ y están situadas en sus vectores $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$. La fuerza que actúa sobre una carga receptora Q cuyo vector posición es $\vec{r}_p$ es la suma vectorial de las fuerzas creadas por el resto de las cargas:

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i Q}{|r_p - r_i|^3}(r_p - r_i)\ (N) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|r_p - r_i|^3}(r_p - r_i)\ (N) \\ &= Q \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\ (N)\end{aligned} \tag{4}$$

1. Sistemas de coordenadas

Para unas coordenadas necesitamos un origen $\vec{0}$, y una base. Para unas coordenadas cartesianas, tenemos los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Sin embargo, también podemos utilizar las coordenadas polares, que consisten en una distancia al origen r, y un ángulo respecto al eje horizontal ϕ.
Para definir el ángulo, hay que tener en cuenta que, al desplazar el vector un ángulo, proyectamos el vector sobre el eje x positivo, y giramos el vector en sentido anti horario hasta alcanzar la posición del vector original. Ese ángulo es nuestra coordenada ϕ. Si trazamos el vector unitario de r, su vector perpendicular $\vec{u}_\phi$ es tangencial al ángulo ϕ. Para poder cambiar entre coordenadas cartesianas y polares, utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= |r|\cos\phi \\ y &= |r|\sin\phi \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x} \\ \vec{u}_r &= (\cos\phi, \sin\phi) \\ \vec{u}_\phi &= (-\sin\phi, \cos\phi) \end{aligned} \tag{5}$$

Respecto a la velocidad en coordenadas polares, tenemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= \dot{r}^2\cos^2\phi - 2\dot{r}r\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\sin^2\phi\dot{\phi}^2 \\ &+ \dot{r}^2\sin^2\phi + 2\dot{r}r\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi + r^2\cos^2\phi\dot{\phi}^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

2. Distribuciones de cargas continuas

En estas distribuciones se considera que no se pueden distinguir dos cargas vecinas. Por tanto, consideramos que la carga total Q se distribuye de forma continua a lo largo de un determinado volumen, superfície, etc. Esta aproximación es válida cuando se estudia el campo eléctrico a grandes distancias del objeto cargado.
Vamos a estudiar las diferentes distribuciones:

- Lineal: carga distribuida a lo largo de un camino:

  $$\lambda = \frac{Q}{l}$$

  Cuando este valor es constante, la densidad es **homogénea**. Si tomamos un incremento de longitud dl, encontramos un diferencial de carga dq, obteniendo que

  $$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

- Superficial: carga distribuida a lo largo de una superfície:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

- Volumétrica: carga en un volumen:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

3. Flujo eléctrico

El flujo eléctrico es una medida del flujo del campo eléctrico que atraviesa una superfície:

$$\phi = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dA \, \left(\frac{N \cdot m^2}{C} \right)$$

Donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superfície en cada punto. Si dividimos la superficie total en áreas infinitesimalmente pequeñas dA. El flujo infinitesimal $d\phi$ que atraviesa esa superficie es

$$d\phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

El flujo que atraviesa una superficie cerrada se expresa de la siguiente forma:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

TEOREMA 1. *El teorema establece que el flujo neto que atraviesa una superficie cerrada A es igual a la carga total Q entre la permitividad del espacio encerrada por la superficie:*

$$\phi_{neto} = \oint_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dA = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}$$

4. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se definen como

$$\mathbf{r} = (\rho, \phi, z)$$

Donde ρ es el radio en el plano XY, ϕ es el ángulo (en sentido antihorario) con respecto al eje X, y z es la "altura" o desplazamiento respecto al eje XY. En coordenadas cartesianas, esto sería

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$$

La base definida por este sistema de coordenadas es:

$$\{(\cos \phi, \sin \phi, 0), (-\sin \phi, \cos \phi), (0, 0, 1)\}$$

5. Coordenadas esféricas

El punto P se define mediante unas coordenadas esféricas.

$$P = (r, \phi, \theta) : \ \theta \in [0, \pi], \ \phi \in [0, 2\pi]$$

En coordenadas cartesianas, esto pasa a ser:

$$P = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

6. Electrización de un cuerpo

DEFINICIÓN 4 (Dipolo eléctrico). *Un sistema formado por un centro de carga (positivo y negativo). La carga positiva es igual y opuesta a la negativa. La distancia entre ambos centros son constantes.*

DEFINICIÓN 5 (Momento dipolar). *A todo dipolo se le asocia un momento dipolar* $\mathbf{p}$. *El origen de este vector está en el centro de carga negativo. La dirección de este es la recta que une el centro de carga negativo con el positivo.*
El módulo de este viene dado por

$$|\mathbf{p}| = q \cdot d \ (C \cdot m) = (e \cdot pm)$$

Cada enlace tendrá asociado un momento dipolar, y el total será la suma de todos ellos. Una molécula es apolar si su momento dipolar total es 0.

6.1. Campo eléctrico por un dipolo.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{u}_r \\ \mathbf{E}_\theta &= \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{u}_\theta \end{aligned} \tag{7}$$

6.2. Par de fuerza sobre un dipolo en un campo exterior. Situamos un dipolo en el interior de un campo eléctrico dado por $\mathbf{E} = E_0\mathbf{u}_r$. El dipolo gira, y se genera un momento de fuerza dado por

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

CHAPTER 2

Potencial Eléctrico

1. Trabajo y energía potencial

Supongamos una carga q_2, sometida a un determinado campo eléctrico $\mathbf{E}$, generado por una carga q_1 (en reposo). La carga q_2 se sitúa inicialmente en $\mathbf{r}_i$, y se desplaza, bajo el efecto del campo eléctrico, hasta $\mathbf{r}_f$.
Este trabajo, aplicando la ley de Coulomb, termina siendo

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_f} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \right) = U_i - U_f = -\Delta U$$

de aquí se deduce que el trabajo depende de la función **energía potencial** U. Esta depende únicamente de la posición de la partícula q_2 en cada momento t, y viene dada por

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r|}}$$

El trabajo realizado al desplazar la carga de $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_f$ se puede expresar como la diferencia de la energía potencial:

$$W = -\Delta U$$

De aquí se puede deducir que el trabajo realizado para desplazar no depende de la trayectoria, sino únicamente de lo punto inicial y final.

2. Potencial eléctrico

Si la carga receptora q_2 está sometida a un campo eléctrico $\mathbf{E}$, se cumple que la fuerza generada es $\mathbf{F} = q_2\mathbf{E}$. Por tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar q_2 se puede definir como

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_i}^{r_f} q_2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \\ \frac{W}{q_2} &= \int_{r_i}^{r_f} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \\ \frac{W}{q_2} &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_i} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_f} = -\Delta V \end{aligned} \tag{8}$$

por tanto, definimos el potencial eléctrico como

$$\boxed{V(r) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \ \left(\frac{J}{C}\right) = \frac{U}{q_2} \ (V)}$$

que es la energía potencial por unidad de carga. También podemos deducir que

$$[E] = \left[\frac{V}{m}\right]$$

Si sabemos la expresión de un campo elécitro, se da que

$$V(\mathbf{r}) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{9}$$

3. Campo vectorial

Supongamos una carga q_1 que genera un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre una carga de 1 (C) a una distancia r del foco. Se dice que $\mathbf{E}$ es conservativo si cumple que:
- $\mathbf{E}$ solo depende de la posición, y no depende explícitamente del tiempo.
- Si se cumple 1, existe una función $V(\mathbf{r})$ tal que $V(\mathbf{r}_i)$ $-V(\mathbf{r}_f) = \frac{W}{q_2}$. La diferencia de potencial solo depende de la posición inicial y final de la carga desplazada.
- La integral del trabajo a lo largo de un camino cerrado es 0. Consecuentemente, la circulación de un vector siempre es nula.
- $dV = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}$

4. Potencial por una distribución de carga

Supongamos un conjunto de cargas que se denotan $\{q_i\}^n$, la posición relativa de cada carga al punto P se denota $\mathbf{r}_i$.
El potencial en P es la suma de potenciales inviduales:

$$V(\mathbf{r}_P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i|} \tag{10}$$

5. Potencial por distribución de carga continua

5.1. Lineal. El potencial debido a una distribución de carga lineal con densidad de carga

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

Al tener una carga infinitesimal dq, le corresponde un potencial infinitesimal dV, por lo que, integrando, tenemos

$$V(r) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{|r|} \tag{11}$$

5.2. Superficie equipotencial. Una superfície equipotencial (Figura 1) es el conjunto de puntos donde el potencial en cada uno de ellos es el mismo. En una superfície equipotencial, se cumple que $V(\mathbf{r}) = C$, por lo que

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Las líneas de campo siempre son perpendiculares a la superfície equipotencial.

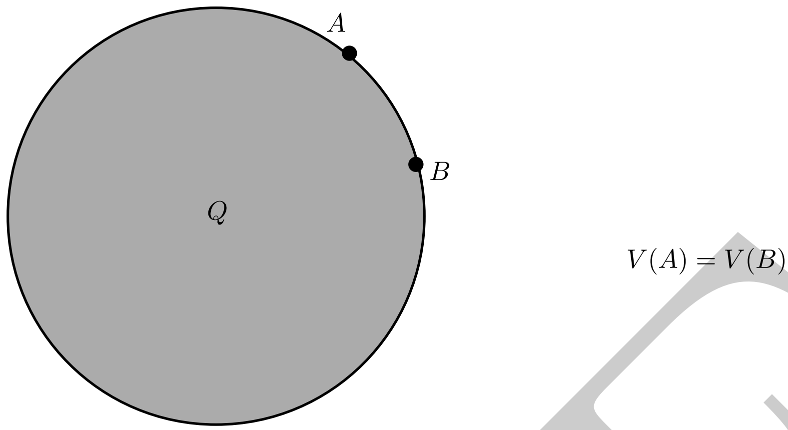


FIGURE 1. Superfície Equipotencial

6. Principios de la transferencia de la carga en un conductor

- Si el potencial asociado a una superfície equipotencial es distinto de 0, entonces la carga neta del cuerpo es no nula.
- Las superfícies equipotenciales no se cortan entre sí.
- El campo eléctrico en una esfera conductora asociada a una superfície equipotencial (con potencial no nulo) siempre es perpendicular a la superfície.

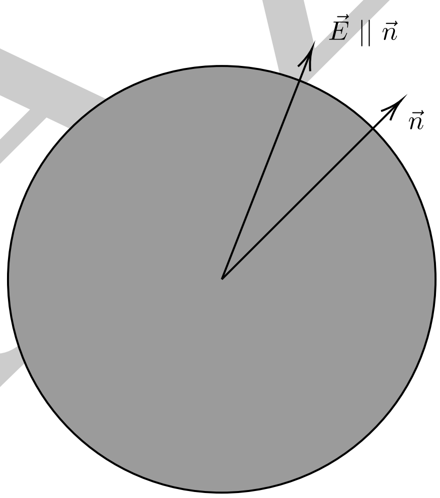


FIGURE 2. Campo perpendicular a la superfície

Se da siempre que

$$W = \int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

Esto es debido a que el potencial es constante, además de que el campo **E** es perpendicular a la dirección de desplazamiento. Si la carga es distinta de 0 , el campo no puede ser nulo. Por tanto, tenemos dos opciones:

- El campo es perpendicular: $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$
- En el interior del conductor, el campo eléctrico **E** es nulo, por tanto, también se cumple que $\int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$, debido a que la carga en el interior es 0.

Esto se cumple tanto en las superfícies equipotenciales de exterior como las superficies equipotenciales del interior del conductor que este está en equilibrio eléctrico: las cargas están en reposo.

$$\Delta V = 0 \implies \Delta T = 0$$

7. Transferencia de carga

Si el campo eléctrico es conservativo, el sistema se va a comportar de forma que llegue a su estado de menor energía potencial. Si se traslada una unidad carga positiva, se pasa de un potencial mayor a uno menor, y el sistema llega al equilibrio cuando el potencial se mantiene constante.

8. Movimiento de cargas entre conductores

Supongamos dos conductores esféricos en equilibrio electroestático (cargas inmóviles). Los conductores tenderán a su estado de menor energía potencial.
La primera esfera tiene un radio r_1 y una carga en la superfície q_1.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$

La segunda esfera tiene un radio y carga r_2 y q_2, respectivamente, con un potencial

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

Definamos un nuevo parámetro llamado 'capacidad del conductor'. Esta es la relación entre la carga y su potencial:

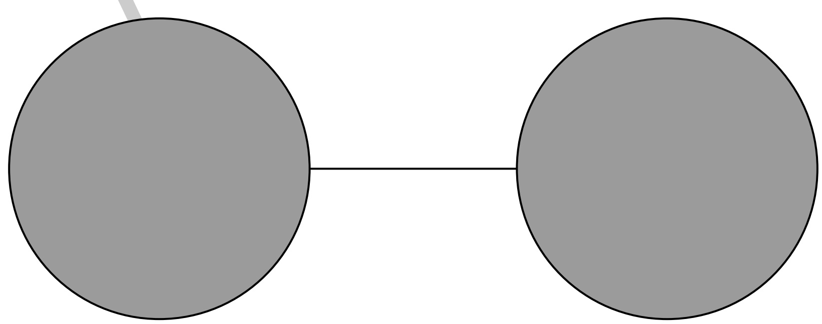
$$C = \frac{q}{V} \implies [C] = 1 faradio = \frac{C}{V}$$

Por tanto, la capacidad del primer conductor es

$$C_1 = \frac{q_1}{V_1} = 4\pi\varepsilon_0 r_1 = \frac{r}{k}$$

Si unimos ambas esferas por un hilo metálico o conductor, tiene lugar la transferencia de carga de una esfera con mayor potencial a otra con menor potencial. Cuando se llega al equilibrio electroestático, el potencial de ambas esferas coincide.

$$V_1 = V_2$$



Ejemplo: sean 2 esferas conductoras aisladas, dadas las siguientes condiciones:

- Esfera 1: $r_1 = 2\ cm, q_1 = 1\ nC$

- Esfera 2: $r_2 = 4\ cm, q_2 = 3\ nC$

Determina el potencial de cada esfera y las capacidades de ambas esferas.

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1} = 450\ (V)$$
$$V_2 = k\frac{q_2}{r_2} = 675\ (V)$$

Si se unen ambas esferas por un hilo conductor, ¿cuál seria la carga transferida de una esfera a otra? La carga irá de la segunda esfera a la primera, por lo que planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} V_1 = V_2 \\ q_1 + q_2 = q_1' + q_2' \end{gathered} \tag{12}$$

Con esto obtenemos que

$$\begin{gathered} q_1' = 1.34\ (nC) \\ q_2' = 2.66\ (nC) \end{gathered} \tag{13}$$

9. Energía electroestática asociada a cargas puntuales

Supongamos dos cargas puntuales, con la distancia relativa entre ellas siendo $r_{1,2}$. Se puede expresar el trabajo realizado para transportar la carga q_1 desde el infinito hasta $r_{1,2}$ debido al campo eléctrico generado por q_2. La energía electroestática es:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}\ (J) \tag{14}$$

Sin embargo, esto genera problemas cuando la cantidad de cargas aumenta. Podemos expresar el potencial anterior como

$$U = \frac{1}{2}q_1 k\frac{q_2}{r} + \frac{1}{2}q_2 k\frac{q_2}{r} \tag{15}$$

Podemos generalizar esto a un número n de cargas:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k\frac{q_j}{r_{i,j}}\ (J) \tag{16}$$

Que sería el equivalente al potencial de todo el sistema.

CHAPTER 3

Corriente Eléctrica

La habilidad de diferentes substancias para permitir el flujo de una carga está determinada por la movilidad de los electrones portadores de la carga o de los iones que contenga la sustancia.

1. Tipos de conductores

- Conductores de primer orden: son aquellos que conducen corriente en su interior y tienen poca resistencia.

2. Corriente

La corriente continua consiste en que los portadores se trasladan de forma continua en el mismo sentido y dirección. Por otro lado, la corriente alterna se caracteriza por los portadores, ya que el sentido de su movimiento cambia.
Al trasladar una carga de un punto A a un punto B, la diferencia de potencial es:

$$V_A - V_B = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

Si exponemos esta carga a un campo eléctrico a lo largo de su trayectoria, la partícula (si tiene carga positiva) irá del polo positivo al negativo. En este caso la partícula sigue el **sentido convencional**. Sin embargo, el **sentido real** es aquel en el que la partícula va del negativo al positivo.

2.1. Generadores. Tenemos dos tipos:

- Si generan una diferencial de potencial, entonces son generadores de voltaje.
- Si producen corriente, son generadores de corriente.

Cuando tenemos un generador de corriente continua, el voltaje es constante respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$$

Sin embargo, un generador de corriente alterna generará funciones periódicas.
Típicamente, en nuestras casas, tenemos un voltaje de corriente alterna de la siguiente forma.

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Donde $\omega = 2\pi f$, siendo $f = 50s^{-1}$. Típicamente, $V_0 = 250(V)$.

3. Parámetros característicos

Definimos la intensidad de la corriente como

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = q\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\ (A)$$

Esta es una magnitud escalar. Por otro lado, tenemos la densidad volumétrica de carga:

$$\rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = q\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V} = qn$$

Donde n es la densidad volumétrica. Finalmente, tenemos el vector densidad de corriente $\mathbf{J}$, que tiene como dirección y sentido la de la velocidad media de las partículas:

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S}\mathbf{n} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t\,S} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V}\mathbf{n} = \rho\mathbf{v}\ (\frac{A}{m^2})$$

4. Densidad de corriente y campo eléctrico

Las fuerzas en una corriente eléctrica son:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = \eta\mathbf{v} - q\mathbf{E}$$

Cuando la aceleración es nula, llegamos a la **velocidad crítica**, obteniendo:

$$q\mathbf{E} = \eta\mathbf{v}$$

Donde definimos $\mu = \frac{q}{\eta}$ como la movilidad de la carga. Si combinamos la definición de densidad de corriente en esta ecuación, obtenemos:

$$q\mathbf{E} = \eta\frac{\mathbf{J}}{\rho}$$

De donde, despejando, tenemos que

$$\mathbf{J} = \rho\mu\mathbf{E}$$

Por otro lado, definimos la resistencia como la dificultad que ofrece un conductor al paso de la corriente, y tiene unidades de Ohms (Ω). Otro parámetro que nos interesa es la conductancia, y es la facilidad que ofrece un conductor al paso de la corriente.

$$G = \frac{1}{R}\ (\frac{1}{\Omega})$$

Análogamente, la resistividad ρ_r es la resistencia que ofrece un metal por unidad de distancia en una sección de área. Su inverso es la conductividad γ.

$$\rho_r = \frac{1}{\gamma}$$

Para un elemento cualquiera, su resistencia es

$$\boxed{R = \rho_r\frac{l}{s}}$$

Sumando lo deducido hasta ahora obtenemos la **ley de Ohm**, definida como

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

Cuando tengamos un circuito, definiremos V_ε como la **fuerza electromotriz**. Si desarrollamos la potencia, tenemos que:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{-\,\mathrm{d}q\,\Delta V}{\mathrm{d}t} = -I\Delta V$$

Lo que nos indica que la potencia generada por una fuente es

$$P = IV_\varepsilon$$

Cuando tenemos una resistencia, parte de la potencia que recibe se disipa en forma de calor. Como se indicó anteriormente, los electrones que se mueven en la banda de conducción chocan con los iones de la red. Este fenómeno se denomina **fuerza de arrastre**. Es decir, parte de la energía cinética que inyecta el campo eléctrico se transfiere a la red, aumentando la energía vibracional de los iones. Esta energía vibracional es el **calor**. Esto conduce a un aumento de la temperatura del metal. Este efecto se llama **efecto Joule**. La potencia disipada es entonces:

$$P = I\Delta V$$

Aplicando la ley de Ohm:

$$P = I^2R \tag{17}$$

Para entender esta energía calorífica, despejamos el diferencial de trabajo $\mathrm{d}W$ para obtener

$$W = \int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

Esto nos lleva al concepto de **densidad de potencia disipada**.

$$u = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} \; (\frac{Wat}{m^3}) \tag{19}$$

Teniendo potencia y volumen constante:

$$u = \frac{P}{V} = \frac{RI^2}{V} = \frac{R\mathbf{J}^2S^2}{Sl} = \mathbf{J}^2\rho_r \tag{20}$$

5. Cortocircuitos

Un cortocircuito es un tramo de un conductor que se le asocia una resistencia **nula**, mientras que en un cortacircuito, la resistena es **infinita**.

Definición 6 (Circuito). *Está formado por un conjunto de dispositivos electrónicos que están conectados entre sí. Si uno de los elementos es una fuente de voltaje, puede circular corriente a través de dicho circuito, por lo que la intensidad es distinta de* 0.

Definición 7 (Circuito cerrado). *Es aquel circuito que nos proporciona un camino continuo a la corriente.*

Definición 8 (Circuito abierto). *En este, la intensidad es nula al no poder pasar la corriente.*

Por otro lado, los elementos pasivos son aquellos como resistencias, bombillas, conductores, etc.

6. Acoplamiento de resistencias

6.1. En serie. Es colocar dos o más resistencias una detrás de la otra. La tensión total en los extremos del acoplamiento es igual a la suma de tensiones en los extremos de cada uno de ellos:

$$V_A - V_B = \sum_{A}^{B-1} V_i - V_{i+1} = I \sum R_i = V_\varepsilon$$

En estos circuitos,

$$V_\varepsilon = I \sum R_i \tag{21}$$

Cuando tenemos circuitos complejos, tomamos la misma fuente de voltaje, y utilizamos una resistencia equivalente. El generador se va a caracterizar por una cierta tensión a generar, mientras que mantiene la intensidad del circuito original. La resistencia equivalente produce los mismos efectos térmicos que las resistencias en serie.
En el circuito anterior, la potencia disipada es:

$$P = I^2 \sum R_i \tag{22}$$

6.2. En paralelo. Consiste en conectar dos o más resistencias de tal forma que los extremos de cada una de ellos estén conectados a dos puntos en común. Las intensidad total es la suma de intensidades:

$$I = \sum I_i$$

Se debe cumplir que la diferencia de potencial debe ser la misma. Por tanto:

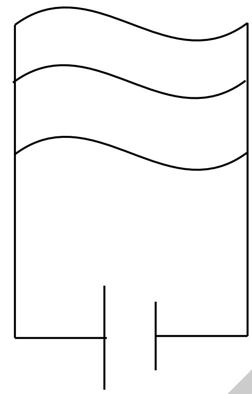
$$I = (V_A - V_B) \sum \frac{1}{R_i} = V_\varepsilon \sum \frac{1}{R_i}$$

Respecto al circuito equivalente, hay que tener en cuenta que la intensidad va a ser la misma, así como el voltaje de la fuente.

$$I = \frac{V_\epsilon}{R_{eqv}}$$

Igualando ambas expresiones, obtenemos

$$\frac{1}{R_{eqv}} = \sum \frac{1}{R_i}$$



Definición 9. *Un generador de voltaje es aquel que genera una diferencia de voltaje entre dos extremos. A este se le asocia una fuerza electromotriz, de forma que la corriente que genera va de positivo a negativo. Esto genera una corriente interna que va del negativo al positivo. Esto se define como la* ***intensidad nominal****, sin provocar efectos adversos en el generador que pueden deteriorarlo. Además, tenemos la resistencia interna* r_i.

$$V_a - V_b = V_\varepsilon - r_i I$$

7. Leyes de Kirchhoff

Estas leyes se aplican siempre que trabajemos con circuitos cerrados. Tenemos los siguientes elementos:

- Nudo: son aquellos puntos de intersección en los que se conectan dos o más conductores. Se caracterizan porque entra y sale corriente.
- Rama: tramo entre dos conductores, delimitado por dos nudos.
- Malla: conjunto de ramas que forman un camino cerrado en un circuito, y que no puede dividirse en otros, ni pasar dos veces por la misma rama.

A cada rama del circuito se le va a asignar una corriente que circula a través de ella y esta se denomina I_i. r es el número de ramas o de incógnitas del sistema.

(1) En cada nudo, la suma de las intensidades que entran es igual a la suma de las intensidades que salen. La intensidad es positiva si esta llega al nudo o entra. Por tanto, es negativa si sale. Por tanto, obtendremos $n-1$ ecuaciones.
(2) **Ley de mallas**: la suma de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla debe ser igual a cero.

En la práctica, esto es:

- En cada **nodo** (intersección), la suma de las corrientes entrantes es igual a la suma de las corrientes salientes.
- La suma de los voltajes (en una malla) es igual a la suma del producto de las intensidades por la resistencia por la que pasan.

8. Vector polarización

Supongamos el sistema formado por una batería conectado a dos metales. Se genera un campo exterior que va del polo positivo al negativo, denominado $\mathbf{E}_0$. Los metales son dos planos con densidad uniforme σ y $-\sigma$. Esta densidad se debe a la carga libre de electrones. Como respuesta a esta campo, los dipolos se alinean, de tal forma que en la superfície de los dieléctricos se crea una densidad superficial $sigma_i$ inducida en $x=0$, y otra σ_i en $x=l$. Esta carga se conoce como **carga ligada**, ya que está fija y no se puede desplazar. En el interior, la carga total es 0.

Como consecuencia de esto, se genera un campo inducido $\mathbf{E}_i = \frac{-\sigma_i}{\varepsilon_0}\mathbf{i}$, cuyo sentido es opuesto al campo externo. El campo total es ahora

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i$$

Definición 10. *El vector polarización se define como la suma de momentos dipolares por unidad de volumen*

$$\mathbf{P} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}V} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{V} = \frac{Nq}{S}\mathbf{i} \tag{23}$$

Este vector cumple que

$$\sigma_i = \mathbf{P} \cdot \hat{n} \tag{24}$$

Por tanto, cuando están alineados, θ es 0, y por tanto σ_i es máximo.

La densidad superficial inducida σ_i es máxima cuando los dipolos eléctricos giran hasta obtener el alineamiento perfecto. Es decir, los dipolos se orientan todos en la misma dirección que el campo exterior, o bien en dirección del vector perpendicular a la superficie.
La carga por unidad de área polarizada, o σ_i es igual a la componente normal de $\mathbf{P}$.

9. Ley de Gauss aplicada a dieléctricos

Supongamos dos planos conectados a una batería, y dentro, otros dos planos con carga inducida σ_i y $-\sigma_i$. Si aplicamos la ley de Gauss al centro del sistema con un cilindro que corta perpendicularmente a los planos, tenemos que

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\int \sigma \,\mathrm{d}s - \int \sigma_i \,\mathrm{d}s}{\varepsilon_0}$$

En total tendríamos tres superfícies:

$$\int_{S_1} \mathbf{E}\,\mathrm{d}s + \int_{S_2} \mathbf{E}\,\mathrm{d}s + \int_{S_3} \mathbf{E}\,\mathrm{d}s = |E||S_2| = |E|2\pi rd$$

Juntando

$$\varepsilon_0 \int \mathbf{E}\,\mathrm{d}s = \int \sigma \,\mathrm{d}s - \int \mathbf{P} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}s$$

Pasando al otro lado

$$\varepsilon_0 \int (\mathbf{E} + \mathbf{P})\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int \sigma \,\mathrm{d}s$$

Y por tanto definimos el vector desplazamiento como

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{25}$$

Esto conforma la **ley de Gauss**:

$$\int \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = q_{\text{libre}} \tag{26}$$

O de otra forma

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \hat{n} \tag{27}$$

9.1. Conclusión. La densidad superficial de carga libre es igual a la componente normal del vector desplazamiento. Este tiene unidades de densidad de carga superficial.

10. Campo eléctrico y polarización

Se tiene que

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}$$

Si $\mathbf{P}$ tiene esa forma y $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, podemos sustituir para obtener

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$$

Es decir

(28) $$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

11. Capacidad de un condensador plano paralelo

Relacionando el campo de un condensador y lo deducido hasta ahora, tenemos que

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u} - \frac{1}{\varepsilon_0}(\varepsilon_r - 1)\varepsilon|E|\hat{u}$$

También se puede deducir que

$$\mathbf{P} = \sigma(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$$

Deduciendo que el campo del condensador es $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{\imath}$, tenemos que

$$V(0) - V(l) = \int_0^l \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^l \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{\imath}\,\mathrm{d}x$$

Cuando calculemos esto y lo introdujamos en la ecuación de la capacidad:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{q\varepsilon}{\sigma l} = \frac{\sigma S\varepsilon}{\sigma l} = \varepsilon\frac{S}{l}$$

11.1. Energía electroestática almacenada. Anteriormente vimos que la energía electroestática de una esfera cargada era

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

Cuando sustituimos la capacidad, obtenemos

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{S}{l}(EL)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon SlE^2$$

Por otra parte, sabiendo que $Vol = Sl$, tenemos

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon Vol \cdot E^2$$

11.2. Densidad de energía electroestática. Denotada como u, es

(29) $$u = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}(Vol)} = \frac{U}{Vol} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

CHAPTER 4

Campo magnético

Definición 11. *Un campo magnético es una región alrededor de una carga en movimiento que es capaz de atraer o repeler otra carga en movimiento.*

Las líneas de campo asociadas a una carga en movimiento siempre son concéntricas alrededor de la carga, y son perpendiculares al vector desplazamiento.

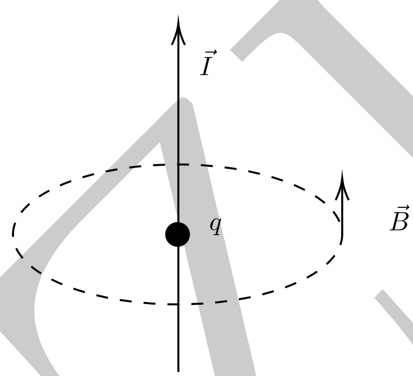


Figure 1. Campo magnético por carga

1. Fuerza magnética sobre una carga en movimiento

Supongamos una carga en movimiento q con velocidad $\mathbf{v}$, que se desplaza en el interior de un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$. La fuerza magnética sobre dicha carga está dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{30}$$

y

$$|\mathbf{F}| = |q||\mathbf{v}||\mathbf{B}| \sin \theta \tag{31}$$

La dirección de la fuerza es la normal del plano generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$. El sentido de la fuerza se puede determinar haciendo como que recorremos el ángulo que va desde $\mathbf{v}$ hasta $\mathbf{B}$ (el más pequeño). Suponiendo $q > 0$:

- Si es antihorario, es saliente.
- Si es horario, es entrante.

2. Ley de Laplace

Define la fuerza magnética sobre un elemento de carga que se desplaza por un hilo conductor. Supongamos un hilo conductor de sección S y de longitud L, en el que circula una corriente I. Este está situado en el interior de una región en la que existe un campo magnético uniforme. En un intervalo de tiempo limitado por t_0 y $t + \mathrm{d}t$, un elemento de carga $\mathrm{d}q$ se desplaza una distancia $\mathrm{d}\mathbf{l}$. Las cargas se mueven con velocidad uniforme $\mathbf{v}$. La fuerza magnética que actua sobre $\mathrm{d}q$ es igual a

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{32}$$

teniendo

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = I(\mathbf{v}\,\mathrm{d}t\times\mathbf{B}) = I(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B})$$

y por tanto

$$\int \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_0^L I(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B})$$

Y si "todo" es constante, tenemos

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L}\times\mathbf{B}) \tag{33}$$

Si una carga q está sometida a una fuerza eléctrica **E** y magnética **B**, entonces

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{34}$$

que es la **fuerza de Lorentz**.

3. Ley de Ampère

La circulación de un campo **B** a lo largo de una línea cerrada C es igual al producto de la permeabilidad magnética de medio μ_0 por la suma de corriente que atraviesa la superfície limitada por el contorno C.

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i \tag{35}$$

4. Ley de Biot-Savart

El campo magnético creado por un elemento de corriente que transporta una corriente estacionaria en un punto P es un vector perpendicular por el elemento de corriente d**l** y el vector posición $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ está dado por

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{R})}{R^3} \tag{36}$$