Entregable 3

Alejandro Zubiri

January 2, 2025

Sea la aplicación lineal definida por $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (3x - y, 2y - x - z, 3z - y)$

(a) Para que sea un endomorfismo, el espacio vectorial inicial y final deben coincidir, y la aplicación debe ser lineal.
Podemos ver que ambos espacios vectoriales coinciden, por lo que falta ver si la aplicación es lineal. Para que lo sea, se debe cumplir que:

- $f(a\vec{u}) = af(\vec{u}) / a \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(a\vec{u})) &= (3au_1 - au_2, 2au_2 - au_1 - au_3, 3au_3 - au_2) \\ &= (a(3u_1 - u - 2), a(2u_2 - u_1 - u_3), a(3u_3 - u_2)) \\ &= af(\vec{u}) \end{aligned} \tag{1}$$

- $f(\vec{u} + \vec{e}) = f(\vec{u}) + f(\vec{e}) / \vec{e} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{e}) &= (3u_1 + 3e_1 - u_2 - e_2, 2u_2 + 2e_2 - u_1 - e_1 - u_3 - e_3, 3u_3 + 3e_3 - u_2 - e_2) \\ &= f(\vec{u}) + f(\vec{e}) \end{aligned} \tag{2}$$

Para encontrar la matriz asociada al endomorfismo:

$$\begin{gathered} (3x - y, 2y - x - z, 3z - y) = \\ (3x, -x, 0) + (-y, 2y, -y) + (0, -z, 3z) = \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{3}$$

Por tanto, la matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$A_{B_c} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(b) Teniendo el vector $\vec{v} = (1,2,0)$, su imagen es:

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 3, -2) \tag{5}$$

(c) Ahora siendo $\vec{w} = (1, 1, 1)$, buscamos si $\exists \vec{u} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = \vec{w}$. Para hacerlo, igualamos cada componente de la aplicación a cada componente del vector:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ -x + 2y - z &= 1 \\ -y + 3z &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Que tiene como solución:

$$\vec{u} = (0.75, 1.25, 0.75) \tag{7}$$

(d) Para encontrar la matriz asociada respecto a la base

$$B' = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\} = \{v_1, v_2, v_3\} \tag{8}$$

Queremos las coordenadas de las imágenes de cada vector de la base respecto a la base:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (3, -2, 3) \\ f(v_2) &= (4, -3, 1) \\ f(v_3) &= (3, -1, 0) \end{aligned} \tag{9}$$

Y sus respectivas coordenadas son:

$$\begin{aligned} [f(v_1)]_{B'} &= (3, 2, -2) \\ [f(v_2)]_{B'} &= (1, 3, 0) \\ [f(v_3)]_{B'} &= (0, 1, 2) \end{aligned} \tag{10}$$

Por tanto, la matriz es:

$$A_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(e) Siendo $\vec{z} = (0, 1, -1)$, para encontrar las coordenadas de la imagen respecto a B', simplemente la multiplicamos por la matriz asociada respecto a B':

$$[f(\vec{z})]_{B'} = A_{B'}\vec{z} = (-1, -4, -2) \tag{12}$$

(f) Primero debemos buscar los autovalores, por lo que tenemos que resolver la ecuación:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{13}$$

Donde A es la matriz asociada, λ es cada autovector, y I es la matriz identidad.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(3-\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-4) \tag{14}$$

Ahora lo igualamos a cero:

$$(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \implies \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4 \tag{15}$$

Puesto que la $m.a.$ de cada autovalor es 1, sabemos que su $m.g.$ también será 1, y por tanto el endomorfismo es diagonalizable.
Para encontrar la base, buscamos los autovectores reemplazando cada autovalor en la ecuación característica y utilizando un vector genérico $\vec{v} = (x, y, z)$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = (-y, -x-y-z, -y) = (0,0,0) \tag{16}$$

Ahora resolvemos para cada parámetro. Como dos ecuaciones son iguales, nos quedamos con:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Si definimos $z = \alpha$, vemos que $x = -\alpha$, lo que define el siguiente subespacio vectorial:

$$H_1 = \{(-\alpha, 0, \alpha)/\alpha \in \mathbb{R}\} \tag{18}$$

De donde podemos obtener el primer autovector:

$$\vec{v}_1 = H_1(1) = (-1, 0, 1) \tag{19}$$

Repetimos el proceso para el segundo autovalor, obteniendo:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = (2x - y, -x + y - z, -y + 2z) = (0,0,0) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \\ -y + 2z &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Como se cumple que $-(eq_1 + eq_3) = 2eq_2$, descartamos la egunda ecuación, definimos $y = \alpha$ y obtenemos:

$$H_2 = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha)/\alpha \in \mathbb{R}\} \tag{22}$$

Y obtenemos el segundo autovector:

$$\vec{v}_2 = H_2(1) = (1, 2, 1) \tag{23}$$

Finalmente repetimos para el tercer autovector:

$$(A - \lambda_3 I)\vec{v} = (-x - y, -x - 2y - z, -y - z) = (0, 0, 0) \tag{24}$$

La segunda ecuacion es la suma de las otras, por la que la descartamos y obtenemos:

$$H_3 = \{(-\alpha, \alpha, -\alpha)/\alpha \in \mathbb{R}\} \tag{25}$$

Para conseguir:

$$\vec{v}_3 = (-1, 1, -1) \tag{26}$$

Por tanto, nuestra base es:

$$B_D = \{(-1, 0, 1), (1, 2, 1), (-1, 1, -1)\} \tag{27}$$

Y la matriz asociada a esta base es:

$$A_{B_D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{28}$$

(g) Teniendo $\vec{v} = (1, 2, 0)$, queremos $[\vec{v}]_{B_D}$, por lo que expresamos la base como variedad lineal e igualamos cada componente:

$$< B_D >= (-x + y - z, 2y + z, x + y - z) \tag{29}$$

Generando el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 1 \\ 2y + z &= 2 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Obteniendo:

$$[\vec{v}]_{B_D} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}) \tag{31}$$

(h) Para obtener $[f(\vec{v})]_{B_D}$, multiplicamos el vector por la matriz de autovalores.

$$[f(\vec{v})]_{B_D} = A_D\vec{v} = (3 \cdot 1, 1 \cdot 2, 4 \cdot 0) = (3, 2, 0) \tag{32}$$