Repaso

Alejandro Zubiri

Wed Oct 09 2024

1 Tipos de funciones

- Injectiva: a cada valor del dominio de la función, le corresponde un valor de su rango.
- Biyectiva: a todos los elementos del rango, les corresponde un valor de la función.
- Sobreyectiva: múltiples valores del dominio pueden corresponder a un único valor de su rango.

2 Funciones inversas

La inversa de una función $f(x)$ es la que cumple que:

$$(fof^{-1})(x) = x \tag{1}$$

La derivada de una función inversa es:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{(fof^{-1}(y))} \tag{2}$$

Teorema de Rolle 2.1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), si $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.*

Demostración. Para demostrarlo, vamos a partir de que toda función contínua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo.
Como el máximo y el mínimo son análogos, vamos a demostrar para el máximo.
Caso 1: el máximo no pertenece a (a, b), que implica que $Max = f(a)$ o $Max = f(b)$. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow Max = Min \Rightarrow f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$.
Caso 2: Supongamos que $m \in (a, b)$ es el máximo. Como $f(x)$ es derivable $\Rightarrow \exists f'(m)$. Como m es un punto máximo, $f(x)$ es creciente en $a < x < m$:

$$\begin{gathered}\lim_{x \to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0 \\ \lim_{x \to m^+} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0\end{gathered} \tag{3}$$

Al ser derivable, ambos límites deben coincidir, por lo que si se debe cumplir que

$$\begin{aligned} f'(m) &\geq 0 \\ f'(m) &\leq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Entonces

$$f'(m) = 0 \tag{5}$$

□

Teorema del punto medio 1. *Sean dos funciones* $f, g : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continuas y derivables en* $[a, b]$.

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{6}$$

Demostración. Sea una función real y continua en $[a, b]$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \tag{7}$$

Si evaluamos $h(a)$ tenemos que

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{8}$$

Y $h(b)$ es

$$h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{9}$$

Por tanto,

$$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] : h'(c) = 0 \tag{10}$$

Es decir

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \tag{11}$$

Que implica que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{12}$$

QED □