

Analisis

Alejandro Zubiri

Tue Oct 15 2024

Contents

1	Corolario del TVM	2
2	Regla de L'Hôpital	2
3	Polinomio de Taylor	2
4	Integrales - Técnicas de resolución	4
4.1	Cambio de variable	4
4.2	Integración por partes	4
4.3	Integración de funciones racionales	5
4.3.1	Múltiples raíces	5
4.3.2	Raíces repetidas	5
4.4	Integrales trigonométricas	6
4.4.1	Funciones impares en el seno	6
4.4.2	Funciones impares en el coseno	6
4.4.3	Funciones pares en ambos	6
4.4.4	Caso general	6
5	Integral de Riemann	7
5.1	Propiedades	8

1 Corolario del TVM

Sea $g(x) = x$. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b) \implies \exists c \in (a, b)/$

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \quad (1)$$

que en este caso sería

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \quad (2)$$

Que reordenando es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3)$$

2 Regla de L'Hôpital

Teorema (Regla de L'Hôpital). Sea f, g derivables en un entorno de un punto $x = a$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4)$$

Demostración. Supongamos que $f(a) = 0$ y que $g(a) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \quad (5)$$

Si tomamos $\lim_{x \rightarrow a}$ en ambos lados

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (6)$$

QED □

3 Polinomio de Taylor

Definición. Sea $f(x)$ una función derivable n veces en el entorno de un punto $x_0 \in (a, b)$. Se define Polinomio de Taylor de orden n alrededor de un punto x_0 :

$$P_n(f, x_0)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (7)$$

□

En caso de $x = x_0$ se denomina **serie McLaurin**.

Teorema (Teorema de Taylor). Sea $f(x)$ una función derivable $n + 1$ veces. Sean $x, x_0 \in (a, b)$:

$$\exists \varepsilon \in (x, x_0) / f(x) - P_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (8)$$

Demostración. Supongamos que $x_0 < x$ (el caso contrario es análogo). Vamos a definir una función auxiliar:

$$h(s) = f(s) + \sum_{k=1}^n \frac{f^k(s)}{k!} (x - s)^k \quad (9)$$

Primero, $h(s)$ es continua y derivable. Vamos a evaluar $h(s)$ en:

- $h(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{f^k(x)}{k!} (x - x)^k = f(x)$
- $h(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = P_n(f, x_0)(x)$

Ahora vamos a derivar la función:

$$\begin{aligned} h'(s) &= f'(s) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{k+1}(s)}{k!} (x - s)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^k(s)}{k!} k(x - s)^{k-1} \cdot -1 \\ &= f'(s) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{k+1}(s)}{k!} (x - s)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^k(s)}{(k-1)!} (x - s)^{k-1} \\ &= f'(s) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{k+1}(s)}{k!} (x - s)^k - f'(s) - \sum_{k=2}^n \frac{f^k(s)}{(k-1)!} (x - s)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{k+1}(s)}{k!} (x - s)^k - \sum_{k=2}^n \frac{f^k(s)}{(k-1)!} (x - s)^{k-1} \\ &= \frac{f^{n+1}(s)}{n!} (x - s)^n \end{aligned} \quad (10)$$

Vamos a crear una segunda función auxiliar:

$$g(s) = (x - s)^{n+1} \quad (11)$$

- $g'(s) = -(n+1)(x - s)^n$
- $g(x) - g(x_0) = (x - x)^{n+1} - (x - x_0)^{n+1} = -(x - x_0)^{n+1}$
- $g'(c) = -(n+1)(x - c)^n$

Si ahora aplicamos el teorema del valor medio, podemos afirmar que:

$$\exists c \in [x, x_0] / \frac{h(x_0) - h(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \quad (12)$$

Ahora evaluamos e igualamos:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - P_n(f, x_0)(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{h'(c)}{g'(c)} &= \frac{\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x - c)^n}{-(n+1)(x - c)^n} \\ &= \frac{f^{n+1}(c)}{-n!(n+1)} \\ &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - P_n(f, x_0)(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \\ f(x) - P_n(f, x_0)(x) &= \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \quad (15)$$

QED

□

4 Integrales - Técnicas de resolución

4.1 Cambio de variable

Queremos integrales de la forma

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx \quad (16)$$

Podemos realizar la sustitución $t = g(x)$ y $dt = g'(x) \, dx$ para obtener

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt = F(t) + C = F(g(x)) + C \quad (17)$$

4.2 Integración por partes

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du \quad (18)$$

Demostración. Vamos a definir una función $h(x)$ tal que

$$h(x) = u(x)v(x) \quad (19)$$

□

Si tomamos su derivada, tenemos

$$\frac{d(u(x)v(x))}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \quad (20)$$

Si multiplicamos ambos lados por dx tenemos que

$$d(u(x)v(x)) = v du + u dv \quad (21)$$

Ahora podemos integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int d(u(x)v(x)) &= \int v du + u dv \\ u(x)v(x) &= \int v du + u dv \end{aligned} \quad (22)$$

Si reordenamos, obtenemos que

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (23)$$

QED

4.3 Integración de funciones racionales

Funciones de la forma

$$\int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (24)$$

Para las raíces que $Q(x) = 0$, tenemos dos casos:

- Varias raíces: $(x-2)(x-3)$
- Valores repetidos: $(x-2)^2$

4.3.1 Múltiples raíces

$$Q(x) = (x-a)(x-b) \dots (x-n) \quad (25)$$

Entonces tenemos

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b) \dots (x-n)} = \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{N}{x-n} \quad (26)$$

4.3.2 Raíces repetidas

$$Q(x) = (x-a)(x-b) \dots (x-b)^n / n > 1 \quad (27)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x-a)(x-b) \dots (x-b)^n} = \\ \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{C}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{D}{x-b} \end{aligned} \quad (28)$$

4.4 Integrales trigonométricas

4.4.1 Funciones impares en el seno

Se verifica que

$$F(-\sin x) = -F(\sin x) \quad (29)$$

Realizaremos las sustituciones

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ \sin x &= \sqrt{1-t^2} \\ dx &= \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned} \quad (30)$$

4.4.2 Funciones impares en el coseno

$$F(\sin x, -\cos x) = -F(\sin x, \cos x) \quad (31)$$

Entonces sustituiremos

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ \cos x &= \sqrt{1-t^2} \\ dx &= \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned} \quad (32)$$

4.4.3 Funciones pares en ambos

$$F(-\sin x, \cos x) = F(\sin x, \cos x) \quad (33)$$

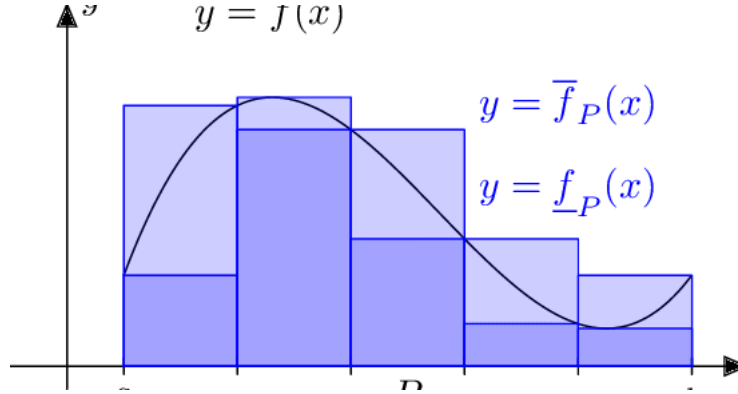
Cambiaremos

$$\begin{aligned} t &= \tan x \\ \sin x &= \frac{t}{t^2+1} \\ dx &= \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned} \quad (34)$$

4.4.4 Caso general

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= t \\ \sin x &= \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt \end{aligned} \quad (35)$$

5 Integral de Riemann



Partimos de una función $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ y continua en todo el intervalo. Dividimos el intervalo en particiones:

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, b] \quad (36)$$

El área total es el área de cada pequeño intervalo. Como $f(x)$ es continua, buscamos el máximo M y el mínimo m de cada intervalo. Definimos cada A_i como el área entre x_{i-1} y x_i . Definimos como $R_i = M_i(x_i - x_{i-1})$ y $r_i = m_i(x_i - x_{i-1})$. Se verifica siempre que:

$$r_i \leq A \leq R_i \quad (37)$$

- Aproximación por defecto:
 $s = \sum_{i=0}^n m_i(x_i - x_{i-1})$
- Aproximación por exceso:
 $S = \sum_{i=0}^n M_i(x_i - x_{i-1})$
- Ahora se verifica también que $s \leq A \leq S$

Definición. Definimos como p el conjunto de puntos que separan un intervalo. Una partición es más fina que otra si tiene menos puntos y si todos los puntos de la primera están contenidos en la segunda:

$$\forall x \in P_1 \implies x \in P_2 \quad (38)$$

□

Supongamos que la partición P_n tiene n puntos. Cuando $n \rightarrow \infty$ la longitud del intervalo tiende a 0:

$$n \rightarrow \infty \implies x_i - x_{i-1} \rightarrow 0 \quad (39)$$

Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \quad (40)$$

y ahora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (41)$$

Ahora, por la regla del sandwich:

$$s_n \leq A \leq S_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A \quad (42)$$

Definición. Sea $f(x)$ una función continua no negativa en $[a, b] \in \mathbb{R}$.

La integral definida entre a y b de $f(x)$ es $\int_a^b f(x) dx$ es el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. a y b son los límites de intergación. \square

5.1 Propiedades

- $\int_a^a f(x) dx = 0 \forall x \in Dom(f)$
- $f(x) > 0 \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx > 0$
- $c \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Teorema de Weierstrass. Si una función continua en un intervalo compacto (cerrado y acotado), sabemos que hay, al menos, dos puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ donde f alcanza valores extremos absolutos:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad (43)$$

\square

Teorema del valor medio para integrales. Si una función es continua en $[a, b]$ entonces existe un punto:

$$c \in (a, b) / f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx \quad (44)$$

\square

Demostración. Sea $f(x)$ como en el enunciado:

- Si f es constante en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = f(x)(b - a) \quad (45)$$

Si no es constante, sean M, m el valor máximo y mínimo, respectivamente. Sea $g(x) = m$:

$$m \leq f(x) \leq M \implies g(x) \leq f(x) \quad (46)$$

Por tanto

$$\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \quad (47)$$

Y análogamente:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a) \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M \end{aligned} \quad (48)$$

Ahora por Weierstrass, sabemos que f alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$,

$$\exists c \in (x_1, x_2) \subset [a, b] / f(x_1) = m \wedge f(x_2) = M \quad (49)$$

Sea $f(c) = C$:

$$m \leq C \leq M \quad (50)$$

Si $C = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \implies c \in [a, b]$, por tanto:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (51)$$

□

Teorema fundamental del cálculo integral. Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt / x \in [a, b] \implies F$ es derivable y

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \quad (52)$$

□

Demostración.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) \, dt}{h} \quad (53)$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales:

$$\exists c \in [x, x+h] / f(c) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t) \, dt \quad (54)$$

Por tanto

$$F'(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x) \quad (55)$$

□

Corolario del TFC. Sea f una función continua en $[a, b]$:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \quad (56)$$

Si $g(x), h(x)$ son derivables entonces:

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) \quad (57)$$

□

Teorema de Barrow. Sea una función continua f y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (58)$$

□

Demostración. Sea $g(x) = \int_a^b f(t) dt$. Por TFC, $g(x)$ es primitiva de $f(x)$:

$$g(x) - F(x) = c \in \mathbb{R} \implies g(x) = F(x) + c \quad (59)$$

En $x = a$:

$$g(x) = \int_a^a f(t) dt = 0 = g(a) = F(a) + c \implies c = -F(a) \quad (60)$$

En $x = b$:

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + c = F(b) - F(a) \quad (61)$$

Por tanto

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (62)$$

□