Teoremas Parcial

Alejandro Zubiri

December 27, 2024

1 Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \,/ x \in [a, b] \implies$ F es derivable y

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \tag{1}$$

Demostración.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \tag{2}$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales:

$$\exists c \in [x, x+h] / f(c) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Por tanto

$$F'(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h \to 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x) \tag{4}$$

Para memorizar:

- Definir $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Aplicar derivada por definición.
- Usar el TVM para integrales.

□

2 Teorema del valor medio

Sean dos funciones $f, g : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas y derivables en $[a, b]$.

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{5}$$

Demostración. Sea una función real y continua en $[a, b]$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \tag{6}$$

Si evaluamos $h(a)$ tenemos que

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{7}$$

Y $h(b)$ es

$$h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{8}$$

Por tanto,

$$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] : h'(c) = 0 \tag{9}$$

Es decir

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \tag{10}$$

Que implica que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{11}$$

QED
Para memorizar:

- La función $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$
- Aplicar teorema de Rolle.

□

3 Teorema de Rolle

Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), si $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Demostración. Para demostrarlo, vamos a partir de que toda función contínua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo.
Como el máximo y el mínimo son análogos, vamos a demostrar para el máximo.
Caso 1: el máximo no pertenece a (a, b), que implica que $Max = f(a)$ o $Max = f(b)$. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow Max = Min \Rightarrow f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$.
Caso 2: Supongamos que $m \in (a, b)$ es el máximo. Como $f(x)$ es derivable $\Rightarrow \exists f'(m)$. Como m es un punto máximo, $f(x)$ es creciente en $a < x < m$:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0 \\ \lim_{x \to m^+} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Al ser derivable, ambos límites deben coincidir, por lo que si se debe cumplir que

$$\begin{aligned} f'(m) &\geq 0 \\ f'(m) &\leq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Entonces

$$f'(m) = 0 \tag{14}$$

Para memorizar demostración:

- Hacer casos para los cuales $Max \in (a, b)$ y los que no.
- Hacer derivada por definición de $f'(max)$ y hacer $\leq$ y $\geq$.

□

4 Teorema de Taylor

Sea $f(x)$ una función derivable $n+1$ veces. Sean $x, x_0 \in (a, b)$:

$$\exists \varepsilon \in (x, x_0) / f(x) - Pn(f, x_0)(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{15}$$

Demostración. Supongamos que $x_0 < x$ (el caso contrario es análogo). Vamos a definir una función auxiliar:

$$h(s) = f(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!}(x - s)^k \tag{16}$$

Primero, $h(s)$ es contínua y derivable. Vamos a evaluar $h(s)$ en:

- $h(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x)}{k!}(x - x)^k = f(x)$
- $h(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = P_n(f, x_0)(x)$

Ahora vamos a derivar la función:

$$\begin{aligned} h'(s) &= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!} k (x - s)^{k-1} \cdot -1 \\ &= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\ &= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - f'(s) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\ &= \frac{f^{n+1}(s)}{n!}(x - s)^n \end{aligned} \tag{17}$$

Vamos a crear una segunda función auxiliar:

$$g(s) = (x-s)^{n+1} \tag{18}$$

- $g'(s) = -(n+1)(x-s)^n$
- $g(x) - g(x_0) = (x-x)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1} = -(x-x_0)^{n+1}$
- $g'(c) = -(n+1)(x-c)^n$

Si ahora aplicamos el teorema del valor medio, podemos afirmar que:

$$\exists c \in [x, x_0] / \quad \frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \tag{19}$$

Ahora evaluamos e igualamos:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-P_n(f,x_0)(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{h'(c)}{g'(c)} &= \frac{\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} \\ &= \frac{f^{n+1}(c)}{-n!(n+1)} \\ &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-P_n(f,x_0)(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \\ f(x)-P_n(f,x_0)(x) &= \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{22}$$

QED
Para memorizar

- Definimos $h(s) = f(s) + \frac{\sum f^{k)(s)}}{k!}(x-s)^k$
- Evaluar $h(x), h(x_0)$
- Sacar derivada $h'(s)$
- Definir $g(s) = (x-s)^{n+1}$
- Aplicar TVM para $h(s)$ y $g(s)$ en $[x, x_0]$ y despejar.

□

5 Teorema del error del método de iteración de punto fijo

Sea la iteración definida para el método de iteración de punto fijo donde $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema del punto fijo para un intervalo $[a, b]$.
Sea un $x_0 \in [a, b]$, sea $\varepsilon > 0$ la tolerancia y sea $k_0(\varepsilon)$ el entero positivo más pequeño tal que $|x_k - \xi| < \varepsilon \forall k \geq k_0(\varepsilon)$:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1 - L))}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \right\rfloor + 1 \tag{23}$$

Demostración. Primero, demostramos por inducción que:

$$|x_k - \xi| \leq L^K |x_0 - \xi| \forall k \geq 1 \tag{24}$$

Empezamos por el caso base:

$$|x_1 - \xi| \leq L|x_0 - \xi| \tag{25}$$

Tal que:

$$x_1 = g(x_0) \quad \xi = g(\xi) \tag{26}$$

$$|g(x_0) - g(\xi)| \leq L|x_0 - \xi| \tag{27}$$

Que se cumple $\forall x_0 \in [a, b], L \in (0, 1)$ ya que es contractiva.
Asumimos para $n = p$:

$$|x_p - \xi| \leq L^p |x_0 - \xi| \tag{28}$$

Deberá cumplirse para $n = p + 1$:

$$|x_{p+1} - \xi| = |g(x_p) - g(\xi)| \leq L|x_p - \xi| \leq L^p L|x_0 - \xi| \leq L^{p+1}|x_0 - \xi| \tag{29}$$

Volvemos para el caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} |x_0 - \xi| &= |x_0 - \xi + x_1 - x_1| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \\ &\leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi| \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} |x_0 - \xi| &\leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi| \\ |x_0 - \xi|(1 - L) &\leq |x_0 - x_1| \\ |x_0 - \xi| &\leq \frac{|x_0 - x_1|}{1 - L} \\ |x_k - \xi| &\leq L^K |x_0 - \xi| \leq L^k \frac{1}{1 - L} |x_1 - x_0| \end{aligned} \tag{31}$$

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
|x_k - \xi| &< \varepsilon \forall k \geq k_0 \\
|x_k - \xi| &\leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \varepsilon \\
L^k|x_1 - x_0| &\leq \varepsilon(1-L)
\end{aligned} \tag{32}
$$

Luego despejamos para k:

$$
\begin{aligned}
k \ln L + \ln|x_1 - x_0| &\leq \ln(\varepsilon(1-L)) \\
\ln|x_1 - x_0| - \ln(\varepsilon(1-L)) &\leq -k \ln L = k \ln\left(\frac{1}{L}\right) \\
k &> \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)}
\end{aligned} \tag{33}
$$

Para que obtengamos los mismos valores y sea una cota superior:

$$
K_0(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \right\rfloor + 1 \tag{34}
$$

$\square$

Para memorizar:

- Demostrar por inducción que $|x_k - \xi| \leq L^K|x_0 - \xi| \forall k \geq 1$
- Reordenar hasta obtener $|x_0 - \xi|(1-L) \leq |x_0 - x_1|$
- Utilizar lo demostrado por induccion y sistituir $|x_0 - \xi|$
- Aplicar desigualdad para $|x_k - \xi| <$ y despejar para K.
- Aplicar función suelo y $+1$.