

Interpolación Polinómica

Alejandro Zubiri

January 21, 2025

1 Joseph-Louis Lagrange

El físico y matemático definió que, dados $n+1$ puntos, y sabiendo sus imágenes, queremos un polinomio de grado $\leq n$ que proporcione dichos valores.

Definición 1. *Definimos los puntos dados como **nodos de interpolación**.*

2 Método de los coeficientes indeterminados

Para ello, vamos a definir n ecuaciones:

$$\begin{aligned}a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n &= f(x_1) \\a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_nx_2^n &= f(x_2) \\&\vdots \\a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n &= f(x_n)\end{aligned}\tag{1}$$

3 Polinomio interpolador de Lagrange

Definición 2. *Definimos como $L_i(x)$ el polinomio de grado n a las bases polinómicas de Lagrange.*

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\tag{2}$$

Ahora, definimos el polinomio de Lagrange como:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)\tag{3}$$

4 Cotas de error

Son la diferencia (error) entre $f(x)$ (la función real) y $P(x)$ (el polinomio).

Teorema 1. Sea f con $n > 0$ derivadas continuas en $[a, b]/\exists f^{(n+1)}(x)$ en (a, b) y sean $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ y $x_i \neq x_j$ y $P(x)$ el polinomio interpolador de esos puntos. Para cada $x \in [a, b]$ $\exists \xi / \min(x_0, \dots, x_n) < \xi < \max(x_0, \dots, x_n)/$

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (4)$$

Demostración. $x \in [a, b]$ si $\exists n \geq i \geq 0, x_i = x \implies$ se cumple siempre (ya que hemos definido el polinomio como tal). Si $x \neq x_i \forall i \in \mathbb{N} \implies M(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0) \dots (x - x_n)}$

$$\exists \xi \in [a, b] / f^{(n+1)}(\xi) = M(n + 1)! \quad (5)$$

Sea $g(t) = f(t) - P(t) - M(t - x_0) \dots (t - x_n)$

$$g^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t) - P^{(n+1)}(t) - M(n + 1)! \quad (6)$$

Como el grado de $P(t)$ es $\leq n$, esta derivada es 0.

$$= f^{(n+1)} - M(n + 1)! \quad (7)$$

Ahora queremos saber si $\exists t \in [a, b] / g^{(n+1)}(t) = 0$

Si $x = t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - \frac{f(t) - P(t)}{(t - x_0) \dots (t - x_n)} (t - x_0) \dots (t - x_n) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Por otro lado, $g(t) = 0 \implies x = x_0, x_n$, es decir, los nodos.

Por tanto, $g(t)$ tiene $n + 2$ raíces distintas, y $g'(t)$ tiene $n + 1$ raíces, así que $g^{(n+1)}(t)$ tiene una raíz. Hemos llegado a la conclusión deseada. \square

5 Método de Newton

Vamos a empezar definiendo un $P_0 / \delta(P_0) \leq 0 / P_0(x) = f(x_0) \forall x$. Luego

$$P_1(x) / \delta(P_1) \leq 1 / P_1(x_0) = f(x_0), P_1(x_1) = f(x_1) \quad (9)$$

Y así hasta

$$P_n(x) / \delta(P_n(x)) \leq n / P_n(x_0) = f(x_0), P_n(x_1) = f(x_1), \dots, P_n(x_n) = f(x_n) \quad (10)$$

5.1 Construcción

Tenemos que $P_0(x) = f(x_0)$. Luego:

$$P_1(x) = f(x_0) + Q_1(x) \implies Q_1(x_0) = 0 \quad (11)$$

Como $\delta(Q_n) \leq n$, será de la forma:

$$Q_n(x) = c_n(x - x_0) \dots (x - x_n) \quad (12)$$

Para construirlo, utilizaremos el método de diferencias divididas.

5.2 Método de diferencias divididas

Sean $n + 1$ puntos $x_0, \dots, x_n/n > 0$ diferentes entre sí y $f(x)$ definida en esos puntos. Vamos a llamar diferencia dividida de f en los puntos como $f[x_0, \dots, x_n]$ al coeficiente en el desarrollo de potencias de x en el *PIN*. El número n es el orden de la diferencia dividida.

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_n) \quad (13)$$

Tal que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (14)$$

Así hasta llegar a:

$$f[x] = f(x) \quad (15)$$

Lo que nos deja con la siguiente fórmula:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots \quad (16)$$