Teoremas Final

Alejandro Zubiri

January 11, 2025

1 Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \,/ x \in [a, b] \implies$ F es derivable y

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \tag{1}$$

Demostración.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \tag{2}$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales:

$$\exists c \in [x, x+h] / f(c) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Por tanto

$$F'(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h \to 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x) \tag{4}$$

Para memorizar:

- Definir $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Aplicar derivada por definición.
- Usar el TVM para integrales.

□

2 Teorema del valor medio

Sean dos funciones $f, g : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas y derivables en $[a, b]$.

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{5}$$

Demostración. Sea una función real y continua en $[a, b]$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \tag{6}$$

Si evaluamos $h(a)$ tenemos que

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{7}$$

Y $h(b)$ es

$$h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{8}$$

Por tanto,

$$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] : h'(c) = 0 \tag{9}$$

Es decir

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \tag{10}$$

Que implica que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{11}$$

QED
Para memorizar:

- La función $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$
- Aplicar teorema de Rolle.

□

3 Teorema de Rolle

Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), si $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Demostración. Para demostrarlo, vamos a partir de que toda función contínua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo.
Como el máximo y el mínimo son análogos, vamos a demostrar para el máximo.
Caso 1: el máximo no pertenece a (a, b), que implica que $Max = f(a)$ o $Max = f(b)$. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow Max = Min \Rightarrow f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$.
Caso 2: Supongamos que $m \in (a, b)$ es el máximo. Como $f(x)$ es derivable $\Rightarrow \exists f'(m)$. Como m es un punto máximo, $f(x)$ es creciente en $a < x < m$:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0 \\ \lim_{x \to m^+} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Al ser derivable, ambos límites deben coincidir, por lo que si se debe cumplir que

$$\begin{aligned} f'(m) &\geq 0 \\ f'(m) &\leq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Entonces

$$f'(m) = 0 \tag{14}$$

Para memorizar demostración:

- Hacer casos para los cuales $Max \in (a, b)$ y los que no.
- Hacer derivada por definición de $f'(max)$ y hacer $\leq$ y $\geq$.

$\square$

4 Teorema del error del método de iteración de punto fijo

Sea la iteración definida para el método de iteración de punto fijo donde $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema del punto fijo para un intervalo $[a, b]$.
Sea un $x_0 \in [a, b]$, sea $\varepsilon > 0$ la tolerancia y sea $k_0(\varepsilon)$ el entero positivo más pequeño tal que $|x_k - \xi| < \varepsilon \forall k \geq k_0(\varepsilon)$:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1 - L))}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \right\rfloor + 1 \tag{15}$$

Demostración. Primero, demostramos por inducción que:

$$|x_k - \xi| \leq L^K |x_0 - \xi| \forall k \geq 1 \tag{16}$$

Empezamos por el caso base:

$$|x_1 - \xi| \leq L|x_0 - \xi| \tag{17}$$

Tal que:

$$x_1 = g(x_0) \quad \xi = g(\xi) \tag{18}$$

$$|g(x_0) - g(\xi)| \leq L|x_0 - \xi| \tag{19}$$

Que se cumple $\forall x_0 \in [a, b], L \in (0, 1)$ ya que es contractiva.
Asumimos para $n = p$:

$$|x_p - \xi| \leq L^p |x_0 - \xi| \tag{20}$$

Deberá cumplirse para $n = p + 1$:

$$|x_{p+1} - \xi| = |g(x_p) - g(\xi)| \leq L|x_p - \xi| \leq L^p L|x_0 - \xi| \leq L^{p+1}|x_0 - \xi| \tag{21}$$

Volvemos para el caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} |x_0 - \xi| &= |x_0 - \xi + x_1 - x_1| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \\ &\leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi| \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} |x_0 - \xi| &\leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi| \\ |x_0 - \xi|(1 - L) &\leq |x_0 - x_1| \\ |x_0 - \xi| &\leq \frac{|x_0 - x_1|}{1 - L} \\ |x_k - \xi| &\leq L^K|x_0 - \xi| \leq L^k \frac{1}{1 - L}|x_1 - x_0| \end{aligned} \tag{23}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} |x_k - \xi| &< \varepsilon \forall k \geq k_0 \\ |x_k - \xi| &\leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0| < \varepsilon \\ L^k|x_1 - x_0| &\leq \varepsilon(1 - L) \end{aligned} \tag{24}$$

Luego despejamos para k:

$$\begin{aligned} k \ln L + \ln|x_1 - x_0| &\leq \ln(\varepsilon(1 - L)) \\ \ln|x_1 - x_0| - \ln(\varepsilon(1 - L)) &\leq -k \ln L = k \ln\left(\frac{1}{L}\right) \\ k &> \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1 - L))}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \end{aligned} \tag{25}$$

Para que obtengamos los mismos valores y sea una cota superior:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1 - L))}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \right\rfloor + 1 \tag{26}$$

□

Para memorizar:

- Demostrar por inducción que $|x_k - \xi| \leq L^K|x_0 - \xi| \forall k \geq 1$
- Reordenar hasta obtener $|x_0 - \xi|(1 - L) \leq |x_0 - x_1|$
- Utilizar lo demostrado por induccion y sistituir $|x_0 - \xi|$
- Aplicar desigualdad para $|x_k - \xi| < \varepsilon$ y despejar para K.
- Aplicar función suelo y $+1$.

5 Teorema del error del método de interpolación polinómica

Sea f con $n > 0$ derivadas continuas en $[a,b]/\exists f^{n+1)}(x)$ en (a,b) y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y $x_i \neq x_j$ y $P(x)$ el polinomio interpolador de esos puntos. Para cada $x \in [a,b] \exists \xi / min(x_0, \ldots, x_n) < \xi < max(x_0, \ldots, x_n)/$

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1)}(\xi) \tag{27}$$

Demostración. $x \in [a,b]$ si $\exists n \geq i \geq 0, x_i = x \implies$ se cumple siempre (ya que hemos definido el polinomio como tal). Si $x \neq x_i \forall i \in \mathbb{N} \implies M(x) = \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)\ldots(x-x_{n)}}$

Queremos saber si

$$\exists \xi \in [a,b]/f^{n+1)}(\xi) = M(n+1)! \tag{28}$$

Ya que entonces se cumplirá que:

$$f^{n+1)(\xi)} = (n+1)! \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)\ldots(x-x_{n)}} \tag{29}$$

Que implica la proposición inicial.
Sea $g(t) = f(t) - P(t) - M(t-x_0)\ldots(t-x_n)$

$$g^{n+1)} = f^{n+1)}(t) - P^{n+1)}(t) - M(n+1)! \tag{30}$$

Como el grado de $P(t)$ es $\leq n$, esta derivada es 0.

$$= f^{n+1)} - M(n+1)! \tag{31}$$

Ahora queremos saber si $\exists t \in [a,b]/g^{n+1)}(t) = 0$
Si $x = t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - \frac{f(t) - P(t)}{(t-x_0)\ldots(t-x_n)}(t-x_0)\ldots(t-x_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Por otro lado, $g(t) = 0 \implies x = x_0, x_n$, es decir, los nodos.
Por tanto, $g(t)$ tiene $n+2$ raíces distintas, y $g'(t)$ tiene $n+1$ raíces, así que $g^{n+1)}(t)$ tiene una raíz. Hemos llegado a la conclusión deseada. □

Para memorizar:

- Definir $M(x) = \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}$
- Plantear $\exists \xi \in [a,b]/f^{n+1)}(\xi) = M(n+1)!$

- Definit $g(t) = f(t) - P(t) - M(t - x_0)\dots(t - x_n)$ y sacar derivada $n + 1$.
- Intentar igualar la derivada anterior a 0, y hacerlo mediante $t = x$ o $x = x_0, \dots, x_n$ (nodos)
- Hacer lo de las raíces en función del número de la derivada, hasta llegar a la derivada $n + 1$ y decir que tiene una raíz.