Resumen teoremas

Alejandro Zubiri

Mon Nov 11 2024

Contents

1 Teorema de Taylor **2**

2 Regla de L'Hôpital **3**

3 Teorema de Weierstrass **4**

4 TFC del cálculo integral **5**

5 Corolario del TFC **6**

6 Teorema del valor medio **7**

7 Derivable implica continua **7**

8 Derivada par o impar **8**

9 Teorema de Rolle **8**

10 Convergencia del método de la secante **9**

1 Teorema de Taylor

Teorema 1 (Teorema de Taylor)**.** *Sea $f(x)$ una función derivable $n+1$ veces. Sean $x, x_0 \in (a, b)$:*

$$\exists \varepsilon \in (x, x_0) / f(x) - Pn(f, x_0)(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1}$$

Demostración. Supongamos que $x_0 < x$ (el caso contrario es análogo). Vamos a definir una función auxiliar:

$$h(s) = f(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!}(x - s)^k \tag{2}$$

Primero, $h(s)$ es contínua y derivable. Vamos a evaluar $h(s)$ en:

- $h(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x)}{k!}(x - x)^k = f(x)$
- $h(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = P_n(f, x_0)(x)$

Ahora vamos a derivar la función:

$$\begin{aligned}
h'(s) &= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!} k(x - s)^{k-1} \cdot -1 \\
&= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\
&= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - f'(s) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\
&= \frac{f^{n+1}(s)}{n!}(x - s)^n
\end{aligned} \tag{3}$$

Vamos a crear una segunda función auxiliar:

$$g(s) = (x - s)^{n+1} \tag{4}$$

- $g'(s) = -(n+1)(x - s)^n$
- $g(x) - g(x_0) = (x - x)^{n+1} - (x - x_0)^{n+1} = -(x - x_0)^{n+1}$
- $g'(c) = -(n+1)(x - c)^n$

Si ahora aplicamos el teorema del valor medio, podemos afirmar que:

$$\exists c \in [x, x_0] / \quad \frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \tag{5}$$

Ahora evaluamos e igualamos:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-P_n(f,x_0)(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{h'(c)}{g'(c)} &= \frac{\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} \\ &= \frac{f^{n+1}(c)}{-n!(n+1)} \\ &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-P_n(f,x_0)(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \\ f(x)-P_n(f,x_0)(x) &= \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned} \tag{8}$$

QED
Para memorizar

- Definimos $h(s) = f(s) + \frac{\sum f^{k)(s)}}{k!}(x-s)^k$
- Evaluar $h(x), h(x_0)$
- Sacar derivada $h'(s)$
- Definir $g(s) = (x-s)^{n+1}$
- Aplicar TVM para $h(s)$ y $g(s)$ en $[x, x_0]$ y despejar.

□

2 Regla de L'Hôpital

Teorema 1 (Regla de L'Hôpital)**.** *Sea f, g derivables en un entorno de un punto $x = a$ y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*

entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{9}$$

Demostración. Supongamos que $f(a) = 0$ y que $g(a) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \tag{10}$$

Si tomamos $\lim_{x\to a}$ en ambos lados

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{11}$$

QED □

3 Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass. Si una función continua en un intervalo compacto (cerrado y acotado), sabemos que hay, al menos, dos puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ donde f alcanza valores extremos absolutos:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \tag{12}$$

□

Teorema del valor medio para integrales. Si una función es continua en $[a, b]$ entonces existe un punto:

$$c \in (a, b) / f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

□

Demostración. Sea $f(x)$ como en el enunciado:

- Si f es constante en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = f(x)(b - a) \tag{14}$$

Si no es constante, sean M, m el valor máximo y mínimo, respectivamente. Sea $g(x) = m$:

$$m \leq f(x) \leq M \implies g(x) \leq f(x) \tag{15}$$

Por tanto

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

Y análogamente, sea $h(x) = M$:

$$\begin{gathered} m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b - a) \\ m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \end{gathered} \tag{17}$$

Ahora por Weierstrass, sabemos que f alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$,

$$\exists (x_1, x_2) \subset [a, b] / f(x_1) = m \wedge f(x_2) = M \tag{18}$$

Por tanto, sea $c \in (x_1, x_2) / f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$

$$m \leq f(c) \leq M \tag{19}$$

Como $f(x)$ va a alcanzar todos los valores en el intervalo, entonces:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \tag{20}$$

Para memorizar:

- Caso constante, trivial.
- Definir dos funciones que sean el máximo y el mínimo y hacer desigualdad.
- "Aplicar" integrales a ambos lados y despejar máximo y mínimo.
- Aplicar Weierstrass

□

4 TFC del cálculo integral

Teorema fundamental del cálculo integral. Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \, / x \in [a, b] \implies$ F es derivable y

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \tag{21}$$

□

Demostración.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t}{h} \tag{22}$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales:

$$\exists c \in [x, x+h] / f(c) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{23}$$

Por tanto

$$F'(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{h \to 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x) \tag{24}$$

Para memorizar:

- Definir $F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$.
- Aplicar derivada por definición.
- Usar el TVM para integrales.

□

5 Corolario del TFC

Corolario del TFC. Sea f una función continua en $[a, b]$:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

Si $g(x), h(x)$ son derivables entonces:

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) \tag{26}$$

$\square$

Teorema de Barrow. Sea una función continua f y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{27}$$

$\square$

Demostración. Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Por TFC, $g(x)$ es primitiva de $f(x)$:

$$g(x) - F(x) = c \in \mathbb{R} \implies g(x) = F(x) + c \tag{28}$$

En $x = a$:

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 = g(a) = F(a) + c \implies c = -F(a) \tag{29}$$

En $x = b$:

$$g(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) + c = F(b) - F(a) \tag{30}$$

Por tanto

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{31}$$

Para memorizar:

- Usar $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Evaluar en a y en b y despejar.

$\square$

6 Teorema del valor medio

Teorema 1. *Sean dos funciones* $f, g : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, continuas y derivables en* $[a, b]$.

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{32}$$

Demostración. Sea una función real y continua en $[a, b]$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \tag{33}$$

Si evaluamos $h(a)$ tenemos que

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{34}$$

Y $h(b)$ es

$$h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{35}$$

Por tanto,

$$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] : h'(c) = 0 \tag{36}$$

Es decir

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \tag{37}$$

Que implica que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{38}$$

QED
Para memorizar:

- La función $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$
- Aplicar teorema de Rolle.

□

7 Derivable implica continua

Teorema 1 (Teorema). *Si una función es derivable en un punto* $x = a$*, entonces también es continua.*

Demostración. Queremos demostrar que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \tag{39}$$

que es la definición de continuidad.
Partimos de que nuestra función es derivable, lo que implica que

$$\exists f'(a) \Rightarrow \lim_{x\to} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R} \tag{40}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) \cdot \frac{x-a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} x - a \tag{41}$$

Podemos identificar que el primer término es la definición de derivada, que sabemos que existe y que es menor a ∞. El segundo término tiende a 0.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} x - a = f'(a) \cdot 0 = 0 \tag{42}$$

Obteniendo así que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \tag{43}$$

QED □

8 Derivada par o impar

Teorema 1 (Teorema)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una $k+1$ derivable en (a,b). Sea $c \in (a,b)$, si $f'(c) = f'(c) = \cdots = f^k(c) = 0$ y $f^{k+1}(c) \neq 0$:*

- *Si k es impar, $f(c)$ es un máximo relativo.*
- *Si k es par, $f(c)$ es un punto de inflexión.*

9 Teorema de Rolle

Teorema 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), si $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.*

Demostración. Para demostrarlo, vamos a partir de que toda función contínua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo.
Como el máximo y el mínimo son análogos, vamos a demostrar para el máximo.
Caso 1: el máximo no pertenece a (a,b), que implica que $Max = f(a)$ o $Max = f(b)$. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow Max = Min \Rightarrow f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$.

Caso 2: Supongamos que $m \in (a,b)$ es el máximo. Como $f(x)$ es derivable $\Rightarrow \exists f'(m)$. Como m es un punto máximo, $f(x)$ es creciente en $a < x < m$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0 \\ \lim_{x \to m^+} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Al ser derivable, ambos límites deben coincidir, por lo que si se debe cumplir que

$$\begin{aligned} f'(m) \geq 0 \\ f'(m) \leq 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Entonces

$$f'(m) = 0 \tag{46}$$

Para memorizar demostración:

- Hacer casos para los cuales $Max \in (a,b)$ y los que no.
- Hacer derivada por definición de $f'(max)$ y hacer $\leq$ y $\geq$.

□

10 Convergencia del método de la secante

Teorema 1. *El orden de convergencia de la secante es*

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{47}$$

Demostración. Sea $\varepsilon_k = |\xi - x_k| = E_a(x_k)$. Como $f(\xi) = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \xi \\ = x_n - f(x_n)\frac{x_n - \xi - x_{n-1} + \xi}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)\varepsilon_n + f(x_n)\varepsilon_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ = \frac{\varepsilon_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) - f(x_n)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ = \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f_(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ = \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f_(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \frac{\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}}(\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}) \end{aligned} \tag{48}$$

Ahora hacemos el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en ξ para $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$.
Nota: $\varepsilon_n = x_n - \xi$:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\xi) + f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + O(n^3) \\ &= f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + O(n^3) \\ \frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} &= f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) \\ \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &= f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_{n-1} + O(\varepsilon_{n-1}^2) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + O(\varepsilon_{n-1}^2) \tag{50}$$

A medida que $n \to \infty, O(\varepsilon_{n-1}^2) \to 0$

$$\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} \approx \frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \tag{51}$$

Ahora volviendo a nuestra ecuación inicial:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \tag{52}$$

Ahora volviendo:

$$\varepsilon - \varepsilon_{n-1} = x_n - \xi - x_{n-1} + \xi = x_n - x_{n-1} \tag{53}$$

Además:

$$\forall x_n, x_{n-1} \text{ cercanos a } \xi \implies \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n - f(x_{n-1}))} \approx f'(\xi) \tag{54}$$

Sea $L = f'(\xi)\frac{1}{2}f''(\xi) < \infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &\approx f'(\xi)\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \\ &= L\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \end{aligned} \tag{55}$$

Para hallar el orden de convergencia exacto supongemos un $A \in \mathbb{R}$, una relación entre los errores $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}$:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\leq A|\varepsilon_k|^\alpha \\ |\varepsilon_{k+1}| &= A^{-1}|\varepsilon_k|^{\frac{1}{\alpha}} \implies |\varepsilon_{n+1}| = A|\varepsilon_n|^\alpha \\ &= L\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} = L|\varepsilon_n|(A^{-1}|\varepsilon_n|^{\frac{1}{\alpha}}) \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} A|\varepsilon_n|^{\alpha} &= L \cdot A^{-1}|\varepsilon_n|^{1+\frac{1}{\alpha}} \\ A^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot L^{-1} &= |\varepsilon_n|^{1+\frac{1}{\alpha}-\alpha} \end{aligned} \tag{57}$$

Como no depende de n, ambos lados deben ser independientes, y por tanto, si $n \to \infty$:

$$1 + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \tag{58}$$

Que tiene como única solución positiva a la cual converge:

$$\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \tag{59}$$

□