Aplicaciones Lineales

Alejandro Zubiri

Wed Dec 11 2024

Contents

Una correspondencia entre dos conjuntos:
A cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.

Definición 1 *Una aplicación entre dos EV es lineal si:*

$$f(ku + \alpha v) = kf(u) + \alpha f(v) \tag{1}$$

Además, se cumplirá que:

$$f(\vec{0}) = f(0 \cdot \bar{u}) = 0f(\bar{u}) = \bar{0} \tag{2}$$

1 Espacio Dual

Conjunto de aplicaciones de un EV a un cuerpo $\mathbb{K}$:

$$V^* = \{w/V \to \mathbb{K}, w \text{ lineal}\} \tag{3}$$

Una A.L. siempre se puede expresar de forma matricial:

$$Y = AX \tag{4}$$

Donde Y son las coordenadas finales, X las coordenadas originales, y A la matriz asociada a la A.L..
A es de orden $m \times n$, y son las imágenes de los vectores de la base canónica.
Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, entonces:

$$A = (f(u_1), \ldots, f(u_n)) \tag{5}$$

2 Endomorfismo

Una aplicación lineal de un espacio sobre sí mismo.

Teorema 1 *Sea B_c la base canónica y B' otra base. Sea $Y = AX$ la expresión de la aplicación respecto a la base canónica y $Y' = A'X'$ respecto a B'*

$$A^{-1} = C^{-1}A = [f(B')]_{B'} \tag{6}$$

Donde C es la matriz de cambio de base de $B' \to B_C$. Esto es como si pasásemos de B' a B_c, aplicásemos la aplicación, y luego pusiésemos las coordenadas respecto a la base B'.

3 Diagonalización de endomorfismos

Como $A' = C^{-1}AC$, se dice que A' y A son matrices semejantes con matriz de paso C. Dos matrices asociadas a un endomofrismo siempre son semejantes.
Para diagonalizar un endomorfismo, buscamos la base respecto a la cual la matriz del endomorfismo es **diagonal**. Esta base estará formada por los **autovectores** de la aplicación.

Definición 2 *Los autovectores $\bar{u}_i$ de una aplicación son aquellos que cumplen que:*

$$A\bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i / \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Los coeficientes λ_i que multiplican a los autovectores son los **autovalores**.
Además, se cumple que:

- Si $\bar{u}$ es un autovector de un autovalor, $\alpha\bar{u}$ también lo es.

Para buscar autovalores, buscamos aquellos que cumplan:

$$\begin{aligned} A\bar{v} &= \lambda\bar{v} \\ (A - I\lambda)\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{8}$$

Las soluciones $\vec{v}$ de este sistema son el núcleo. Este forma un subespacio vectorial, denominado **autoespacio de** λ.

Definición 3 *El autoespacio de un autovalor λ es el subespacio de vectores que cumplen que:*

$$(A - I\lambda)\vec{v} = \vec{0} \tag{9}$$

Para que esto se cumpla para infinitos vectores, el sistema debe ser SCI, y por tanto:

$$\boxed{\det(A - I\lambda) = 0} \tag{10}$$

Definición 4 *El número de veces que aparece un autovalor en la ecuación característica es su* ***multiplicidad algebraica*** *(m.a.).*

Definición 5 *La dimensión del autoespacio de cada autovalor H_λ es la* ***multiplicidad geométrica*** *de dicho autovalor.*

Para cualquier aplicación, se cumple que:

$$\boxed{1 \leq m.g. \leq m.a. \leq n} \tag{11}$$

Donde n es la dimensión del espacio del endomorfismo.
Para que un endomorfismo sea diagonalizable, se debe cumplir que:

$$m.g. = m.a. \tag{12}$$

Podemos unir ambas propiedades para obtener que:

- Si un autovalor tiene $m.a. = 1 \implies m.g. = 1$
- Si todos los autovalores son simples ($m.a. = 1$), el endomorfismo es diagonalizable.
- La matriz que representa la aplicación estará formada por los autovalores, en el mismo orden que estén los autovectores en la base elegida.