Sistema de partículas

Alejandro Zubiri

Tue Nov 26 2024

Contents

1 Centro de masas

Definimos el centro de masas de un sistema discreto de partículas como

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \tag{1}$$

Para una distribución continua, tenemos

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \rho \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V} \tag{2}$$

donde ρ es la densidad en cada posición.

2 Movimiento del centro de masas

Si obtenemos la tasa de cambio de la posición respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}\right) = \frac{\sum m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_i)}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \vec{V}_{CM} \tag{3}$$

3 Dinámica del centro de masas

Definimos el momento total como:

$$\vec{p}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i \tag{4}$$

Por tanto, si observamos como cambia respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_{CM}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_{\mathrm{EXT}} \tag{5}$$

Es decir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}_{CM}) = \sum \vec{F}_{\mathrm{EXT}} = M_T \vec{a}_{CM} \tag{6}$$

4 Momento angular

Definimos el momento angular **total** como:

$$\vec{L}_T = \sum \vec{L}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{7}$$

Y ahora

$$\frac{\mathrm{d}L_T}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times (\vec{F}_E + \vec{F}_I) \tag{8}$$

Hacemos una distinción entre fuerzas externas $\vec{F}_E$ e internas $\vec{F}_I$:

$$= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_E + \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_t + \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \tag{9}$$

Por lo general, si las fuerzas son radiales, el último elemento es 0:

$$\frac{\mathrm{d}L_t}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\tau} \tag{10}$$

5 Energías

Supongamos que tenemos dos partículas siendo interactuadas entre sí, generando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_1 + F_{1,2} \\ m_2 a_2 &= F_2 + F_{2,1} \end{aligned} \tag{11}$$

Podemos realizar la sustitución $F_{1,2} = -F_{2,1}$, multiplicar todo por $\mathrm{d}r$, y sumarlas:

$$m_1 a_1 \,\mathrm{d}r_1 + m_2 a_2 \,\mathrm{d}r_2 = F_1 \,\mathrm{d}r_1 + F_2 \,\mathrm{d}r_2 + F_{1,2}(\mathrm{d}r_1 - \mathrm{d}r_2) \tag{12}$$

Vamos a desarrollar $\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}$:

$$\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\mathrm{d}v \tag{13}$$

Obteniendo así:

$$m_1 v_1 \,\mathrm{d}v_1 + m_2 v_2 + \mathrm{d}v_2 = F_1 \,\mathrm{d}r_1 + F_2 \,\mathrm{d}r_2 + F_{1,2}(\mathrm{d}r_1 - \mathrm{d}r_2) \tag{14}$$

Podemos integrar a ambos lados para obtener:

$$\Delta T_1 + \Delta T_2 = W_1 + W_2 + W_{\mathrm{EXT}} \tag{15}$$

Es decir, que podemos generalizar este principio para afirmar que:

$$\Delta T = W_{\mathrm{INT}} + W_{\mathrm{EXT}} \tag{16}$$

Si las fuerzas internas son conservativas, obtenemos que:

$$\Delta E = W_{\mathrm{EXT}} \tag{17}$$

6 Colisiones

Hay diferentes tipos de colisiones:

- Elásticas: se conserva la energía cinética tras la colisión.
- Inelástica: no se conserva.

Además, definimos la cantidad $Q = \Delta T$, y observamos que:

- $Q = 0$: se conserva la energía cinética.
- $Q > 0$: se ha ganado energía, colisión endoenergética.
- $Q < 0$: se ha perdido energía, colisión exoenergética.

7 Sólido rígido

Un sistema de partículas continuas con posiciones relativas constantes. En este caso, tenemos una distribución continua de masa:

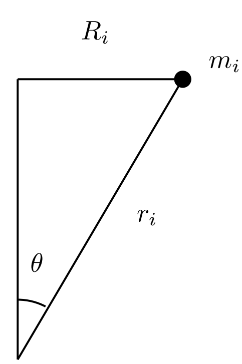
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \rho\vec{r}\,\mathrm{dV}}{\int \rho\,\mathrm{dV}} \tag{18}$$

7.1 Rotación de un solído rígido

En este caso, todas las partículas tienen la misma velocidad angular ω a lo largo del mismo eje:

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i} = |\omega||r_i| \sin\theta \tag{19}$$

Un diagrama rápido nos permite ver lo siguiente:



$$\sin\theta = \frac{R_i}{r_i} \tag{20}$$

Lo que implica que:

$$\vec{v_i} = |\omega||r_i| \sin\theta = |\omega||r_i|\frac{R_i}{r_i} = |\omega||R_i| \tag{21}$$

Si multiplicamos por la masa de cada partícula, obtenemos que el momento angular L_i de cada partícula es:

$$L_i = m_i \omega R_i^2 \tag{22}$$

Para calcular el momento total, sumamos todos los momentos:

$$L_T = \sum L_i = \sum m_i \omega R_i^2 = \omega \sum m_i R_i^2 \tag{23}$$

Este último término es el **momento de inercia**:

$$I = \sum m_i R_i^2 \tag{24}$$

Que en distribuciones continuas es:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int r^2 \rho \, \mathrm{d}V \tag{25}$$

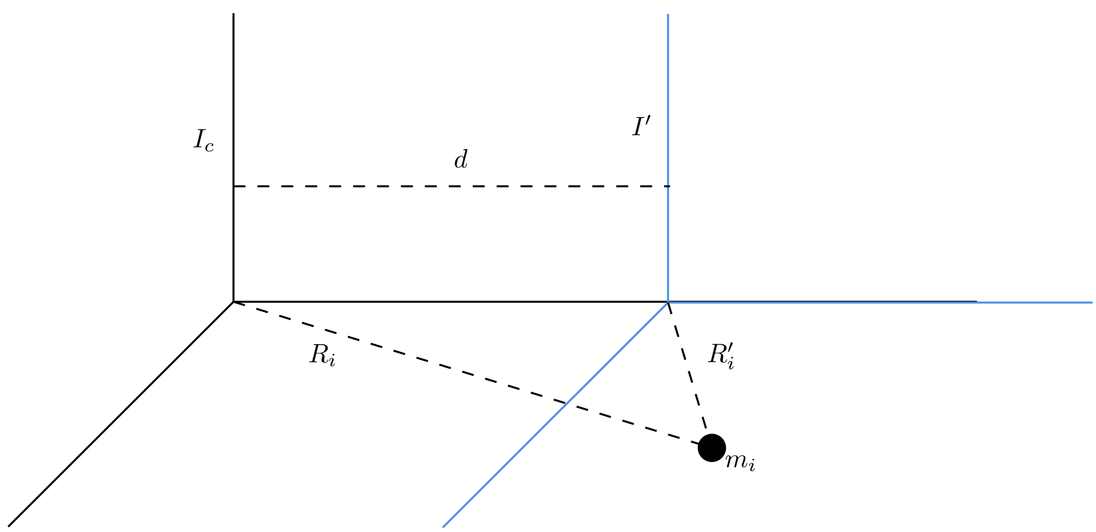
Por tanto, el momento angular del sólido es:

$$L = \omega I \tag{26}$$

Teorema 1 (Teorema de Steiner o de los ejes paralelos)**.** *Dados dos ejes paralelos y un sólido en rotación, la relación entre el momento de inercia alrededor del centro de masa I_c y alrededor de un eje paralelo I' a una distancia d es:*

$$I' = I_c + M_t d^2 \tag{27}$$

Proof. Tenemos el siguiente diagrama de un objeto rotando alrededor de los dos ejes:



El momento de inercia a lo largo del eje I' es:

$$I' = \sum m_i r_i^2 \tag{28}$$

Observando el diagrama, podemos ver que:

$$R_i^2 = x^2 + y^2 = x_{I'}^2 + y_{I'}^2 = x_I^2 + y_I^2 + 2y_i d + d^2 = R_I^2 + 2y_i d + d^2 \tag{29}$$

Si introducimos esto en nuestra ecuación del momento de intercia paralelo obtenemos:

$$I' = \sum m_i (R_I^2 + 2y_i d + d^2) \tag{30}$$

El primer término $\sum m_i R_i^2 = I_C$, el segundo $d^2 \sum m_i = M_t d^2$. Del tercer término $2d \sum m_i y_{Ic}$, es fácilmente reconocible que:

$$Y_{CM} = \frac{\sum m_i y_{ic}}{\sum m_i} \implies \sum m_i y_{ic} = Y_{CM,c} M_T \tag{31}$$

Como estamos midiendo la distancia al centro de masas desde el centro de masas:

$$2d \sum m_i y_{Ic} = 0 \tag{32}$$

Obteniendo así:

$$I' = I_c + M_t d^2 \tag{33}$$

□

8 Segunda ley de Newton para rotación

Partimos de que

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau} \tag{34}$$

A su vez, $\vec{L} = \vec{\omega} I$, por tanto

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \alpha I + \omega \dot{I} \tag{35}$$

Si la masa del objeto es constante, y la distancia al eje no cambia, $\dot{I} = 0$, por tanto:

$$\boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}} \tag{36}$$

9 Energía cinética

Partimos de la energía cinética de una única partícula:

$$T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i(v_{CM} + v_{rel})^2 = \frac{1}{2}m_i(v_{CM}^2 + 2v_{cm}v_{rel} + v_{rel}^2) \tag{37}$$

Ahora sumamos para obtener la energía cinética total:

$$\begin{aligned} T_T &= \sum \frac{1}{2}m_i v_{CM}^2 + \sum m_i v_{cm} v_{rel} + \sum \frac{1}{2} m_i v_{rel}^2 \\ &= \frac{1}{2}v_{CM}^2 \sum m_i + \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 + v_{CM} \sum m_i v_{rel} \\ &= \frac{1}{2}v_{CM}^2 M_T + \frac{1}{2}\omega^2 I + v_{CM} \sum m_i v_{rel} \end{aligned} \tag{38}$$

Puesto que estamos midiendo la velocidad del centro de masas respecto a sí mismo, $\sum m_i v_{rel} = 0$, por tanto:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 I} \tag{39}$$