Entregable Representación Gráfica

Alejandro Zubiri

January 7, 2025

Contents

1 Dominio **2**

2 Asíntotas **2**

2.1 Verticales 2

2.2 Horizontales 2

2.3 Oblicuas 2

3 Monotonía y extremos relativos **3**

4 Curvatura **3**

5 Boceto y representación **3**

6 Imagen **3**

7 Corte con los ejes **4**

Queremos representar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln|x| \tag{1}$$

1 Dominio

El dominio de la función es:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \tag{2}$$

2 Asíntotas

2.1 Verticales

El único punto conflictivo es en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} + \ln|x| = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} + \ln|x| = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \ln|x| = \infty \end{cases} \tag{3}$$

Por tanto, hay una asíntota vertical en $x = 0$.

2.2 Horizontales

$$\begin{gathered} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \ln|x| = \infty \\ \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} + \ln|x| = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} + \ln|x| = \infty \end{gathered} \tag{4}$$

2.3 Oblicuas

La pendiente de la recta oblicua en $+\infty$ es:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\ln|x|}{x} = \tag{5}$$

La primera parte tiende a 0, y al tener una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{6}$$

Por tanto, no hay asíntota oblicua en $+\infty$. Si miramos en $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0 \tag{7}$$

De nuevo, podemos aplicar L'Hôpital para obtener un resultado similar, donde vemos que tampoco hay asíntota oblicua en $-\infty$.

3 Monotonía y extremos relativos

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{x-1}{x^2} \tag{8}$$

Podemos igualar a 0 para encontrar los extremos relativos:

$$f'(x) = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1 \tag{9}$$

Si evaluamos la derivada en puntos cercanos al extremo, vemos que por la izquierda es negativa, y que por la derecha es positiva, lo que indica que $x = 1$ es un mínimo relativo.
Además, la función es decreciente $\forall x \in (-\infty, 1)$ y creciente $\forall x \in (1, \infty)$.

4 Curvatura

La segunda derivada de la función es:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2-x}{x^3} \tag{10}$$

Para obtener los puntos donde la curvatura cambia, igualamos la segunda derivada a 0, obteniendo:

$$f''(x) = 0 \implies 2 - x = 0 \implies x = 2 \tag{11}$$

De nuevo, evaluando a la izquierda la segunda derivada es positiva, y a la derecha es negativa, lo que indica que la función es cóncava hacia abajo $\forall x \in (-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba $\forall x \in (2, +\infty)$.

5 Boceto y representación

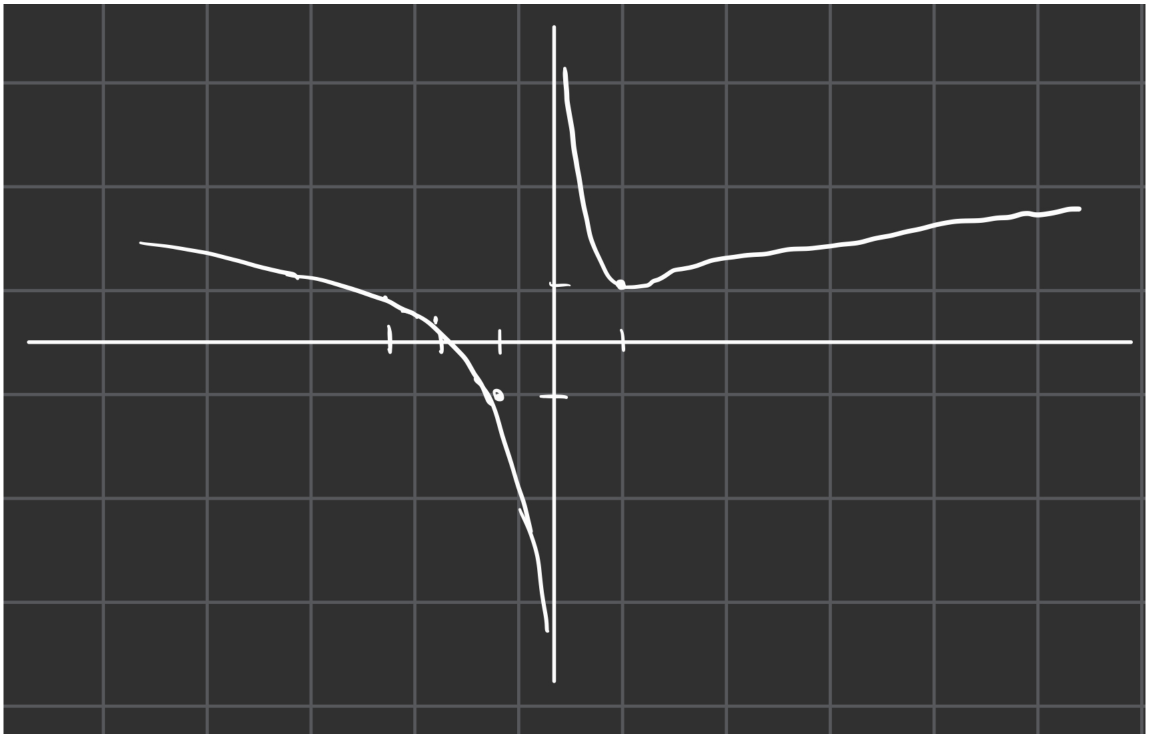
Evaluando en algunos puntos podemos realizar el siguiente boceto de la función:

x	f(x)
1	1
-1	-1
-2	0.19
-3	0.76

6 Imagen

Una vez hemos analizado la función, podemos afirmar que la imagen de la función es:

$$\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R} \tag{12}$$



7 Corte con los ejes

Como $f(x)$ no es continua en $x = 0$, la función no corta con el eje Y. Si buscamos el corte con el eje X, gracias a la representación, sabemos que está a la izquierda de $x = 0$. Queremos resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x} + \ln|x| = 0 \tag{13}$$

Como no es una ecuación lineal, podemos utilizar técnicas de aproximación para encontrar la siguiente solución:

$$f(\xi) = 0 \implies \xi \approx -1.76322 \tag{14}$$

Por lo que la función corta con los ejes en $x \approx -1.76322$.