Funciones

Alejandro Zubiri

Fri Oct 11 2024

Una función es una correspondencia que a cada valor de un conjunto, le asigna otro único valor de otro conjunto. En este caso, se estudiarán funciones **reales**:

$$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

Para representar una función, utilizamos un **grafo**, que es una representación de todos valores que f toma dependiendo del valor que toma x.
El conjunto **dominio** es el conjunto de valores para los cuales $\exists f(x)$.
El conjunto **imagen** es el conjunto de todos los valores que puede tomar $f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f(x)) &= \{x / \forall x \in \mathbb{R}, \exists f(x)\} \\ \text{Im}(f(x)) &= \{y / \forall x, y \in \mathbb{R}, y = f(x)\} \end{aligned} \tag{2}$$

Distinguimos entre funciones:

- Pares: $f(x) = f(-x)$
- Impares: $f(x) = -f(-x)$
- Periódicas: $\sin x, \cos x \ldots$

1 Continuidad y derivabilidad

Definición 1 (Derivada)**.** *La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es la tasa de cambio instantánea de $f(x)$ con respecto a x:*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Definición 2 (Diferencial)**.** *El diferencial $\mathrm{d}f$ de una función f es un incremento infinitesimal a lo largo de esta:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f = \lim_{x\to x_0} f(x) - x_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) - x_0 \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = f'(x_0)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4}$$

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si se cumple que:

- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Similarmente, una función es derivable en un punto $x = a$ si se cumple que:

$$\exists \lim_{x\to a} f'(x) \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f'(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x) \tag{5}$$

Teorema 1 (Teorema)**.** *Si una función es derivable en un punto $x = a$, entonces también es continua.*

Demostración. Queremos demostrar que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \tag{6}$$

que es la definición de continuidad.
Partimos de que nuestra función es derivable, lo que implica que

$$\exists f'(a) \Rightarrow \lim_{x\to} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) \cdot \frac{x-a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} x - a \tag{8}$$

Podemos identificar que el primer término es la definición de derivada, que sabemos que existe y que es menor a ∞. El segundo término tiende a 0.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} x - a = f'(a) \cdot 0 = 0 \tag{9}$$

Obteniendo así que

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \tag{10}$$

QED □

2 Representación de funciones

Para representar una función, debemos encargarnos de una serie de apartados:

2.1 Dominio

Debemos calcular el conjunto dominio de la función:

$$\mathrm{Dom}(f(x)) = \{x / \forall x \in \mathbb{R}, \exists f(x)\} \tag{11}$$

2.2 Asíntotas

Una asíntota es una curva de una recta a la cual tiende la función en el infinito de x o de $f(x)$.

2.2.1 Verticales

Una recta en $x = x_0$ es una asíntota si se cumple que:

$$\begin{gathered} \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \end{gathered} \tag{12}$$

2.2.2 Horizontales

Una función tiene una asíntota horizontal si se cumple una de estas condiciones:

$$\begin{gathered} \exists \lim_{x \to \infty} f(x) \\ \exists \lim_{x \to -\infty} f(x) \end{gathered} \tag{13}$$

2.2.3 Oblicuas

Una asíntota oblicua es una recta de la forma $y = mx + n \,/\, m \neq 0$ a la que $f(x)$ se aproxima en $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = mx + n \tag{14}$$

Para obtener la pendiente, podemos despejar m para obtener:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \tag{15}$$

Similarmente, podemos reordenar n para obtener:

$$n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx \tag{16}$$

2.3 Monotonía

Una función es creciente en un intervalo $[a, b]$ para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in [a, b]/x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
Si $f(x)$ es derivable en (a, b):

- $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \implies f(x)$ es creciente en (a, b).
- $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \implies f(X)$ es decreciente en $k(a, b)$.
- $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \implies f(x)$ es constante en (a, b).

2.3.1 Puntos críticos

Una función derivable en $x = a$ tiene un máximo o un mínimo si $f'(a) = 0$.
Un punto crítico es donde la derivada es 0 o no existe.

2.4 Curvatura

Una función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo (a, b) si en todos los puntos del intervalo, la curva está por encima de las tangentes en dichos puntos.

Definición. Llamamos **puntos de inflexión** de una curva a los puntos donde cambia la concavidad. Son los puntos donde la recta corta a la función. Debemos comprobar si la segunda derivada se anula en dicho punto, y si cambia de signo. □

Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que es cóncava hacia arriba en (a, b) si

$$\forall x \in (a, b) \exists \varepsilon > 0 / f'(x + \varepsilon) > f'(x) \tag{17}$$

□

Teorema 1 (Teorema). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una $k + 1$ derivable en (a, b). Sea $c \in (a, b)$, si $f'(c) = f'(c) = \cdots = f^k(c) = 0$ y $f^{k+1}(c) \neq 0$:*

- *Si k es impar, $f(c)$ es un máximo relativo.*
- *Si k es par, $f(c)$ es un punto de inflexión.*

3 Recta tangente y normal

Para hallar la ecuación de la recta tangente de una función en un punto a, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f'(a) \\ y(a) &= f(a) \end{aligned} \tag{18}$$

Con esto podemos llegar a que la recta se describe por la siguiente ecuación:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{19}$$

Para obtener la recta normal, debemos transformar la pendiente para que pase a ser $m \to -\frac{1}{m}$:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \tag{20}$$

4 Tipos de funciones

- Injectiva: a cada valor del dominio de la función, le corresponde un valor de su rango. Para estas funciones, se cumple que:

$$f(a) = f(b) \implies a = b \tag{21}$$

  Ejemplos: $2x, 5x + 5, x^3 + 2x$

- Biyectiva: a todos los elementos del rango, les corresponde un **único** valor de la función. Es decir, no hay ningún elemento del dominio que comparta valor en la imagen.

- Sobreyectiva: múltiples valores del dominio pueden corresponder a un único valor de su rango.

4.1 Funciones periódicas

Una función f es periódica de período T, si $\forall x \in Dom(f)$:

$$f(x) = f(x + kT) \;/\; k \in \mathbb{Z} \tag{22}$$

5 Funciones inversas

La inversa de una función $f(x)$ es la que cumple que:

$$(fof^{-1})(x) = x \tag{23}$$

La derivada de una función inversa es:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{(fof^{-1}(y))} \tag{24}$$

Teorema de Rolle 5.1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), si $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.*

Demostración. Para demostrarlo, vamos a partir de que toda función contínua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo.
Como el máximo y el mínimo son análogos, vamos a demostrar para el máximo.
Caso 1: el máximo no pertenece a (a, b), que implica que $Max = f(a)$ o $Max = f(b)$. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow Max = Min \Rightarrow f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$.
Caso 2: Supongamos que $m \in (a, b)$ es el máximo. Como $f(x)$ es derivable $\Rightarrow \exists f'(m)$. Como m es un punto máximo, $f(x)$ es creciente en $a < x < m$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to m^-} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \geq 0 \\ \lim_{x \to m^+} \frac{f(x) - f(m)}{x - m} \leq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Al ser derivable, ambos límites deben coincidir, por lo que si se debe cumplir que

$$\begin{aligned} f'(m) \geq 0 \\ f'(m) \leq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Entonces

$$f'(m) = 0 \tag{27}$$

□

Teorema del punto medio 1. *Sean dos funciones* $f, g : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continuas y derivables en* $[a, b]$.

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{28}$$

Demostración. Sea una función real y continua en $[a, b]$

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \tag{29}$$

Si evaluamos $h(a)$ tenemos que

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{30}$$

Y $h(b)$ es

$$h(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \tag{31}$$

Por tanto,

$$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b] : h'(c) = 0 \tag{32}$$

Es decir

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \tag{33}$$

Que implica que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{34}$$

QED □

6 Álgebra de funciones

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \tag{35}$$

Distinguimos entre funciones **elementales**, que son aquellas basadas en combinaciones de series o productos infinitos, integrales indefinidas, a trozos o ecuaciones diferenciales.