Dinámica

Alejandro Zubiri

Thu Oct 10 2024

Contents

La dinámica es el estudio de las fuerzas. Definimos como fuerza una interacción que cambia el estado del movimiento de un determinado objeto.

1 Interacciones fundamentales

Las interacciones fundamentales son todas aquellas que hacen que el universo se comporta tal y como lo hace. En la actualidad, se entienden cuatro interacciones:

- **Gravedad**: En la física clásica, es aquella fuerza entre dos objetos, y es la que hace que algo se caiga hacia el centro de la Tierra cuando lo soltamos. En la actualidad, la gravedad no es una fuerza, y se describe, gracias a la teoría de la Relatividad General de Einstein, como la curvatura del propio espacio-tiempo.
- **Electromagnética**: es la responsable de la atracción y respulsión entre protones y electrones, y es mucho más "fuerte" a la gravedad. Esta interacción es la más habitual, responsable de que nosotros no seamos capaces de atravesar otros objetos. Esta, junto con las interacciones nucleares, se describe por la mecánica cuántica, a diferencia de la gravedad.
- **Fuerza nuclear fuerte**: es la responsable de mantener unidas los neutrones y protones, y la que hace que las propias partículas que conforman los protones (cuarks) se mantengan unidas.
- **Fuerza nuclear débil**: es la responsable de la mayoría de procesos de desintegración nuclear.

2 Leyes de Newton

Definición (1ra ley de Newton)**.** *Si no se actua ninguna fuerza sobre un cuerpo, su velocidad se mantiene constante.*

Definición (2da ley de Newton)**.** *La tasa de cambio del momento de una partícula es igual al sumatorio de todas las fuerzas que actuan en ella.*

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \tag{1}$$

Respecto a las fuerzas fundamentales, se entiende una fuerza como

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U \tag{2}$$

Donde U es el potencial de dicha fuerza

Definición (3ra ley de Newton)**.** *Para cada fuerza ejercida hay una fuerza de igual magnitudo en sentido contrario. Esto es consecuencia de la* ***conservación de momento lineal****.*

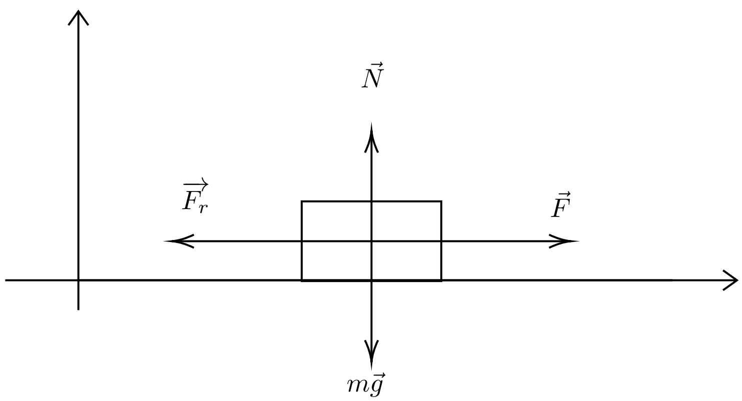
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3}$$

3 Situaciones físicas

Estudiaremos diferentes situaciones. Para notación, utilizaremos:

- $\vec{F}$: fuerza genérica ejercida a menos que se especifique.
- $\vec{F_r}$: fuerza de rozamiento.
- $\vec{P} = m\vec{g}$: peso.
- $\vec{N}$: fuerza normal.

3.1 Plano inclinado



Dividiremos los dos ejes:

$$\sum F_x = F - F_r = ma_x \tag{4}$$

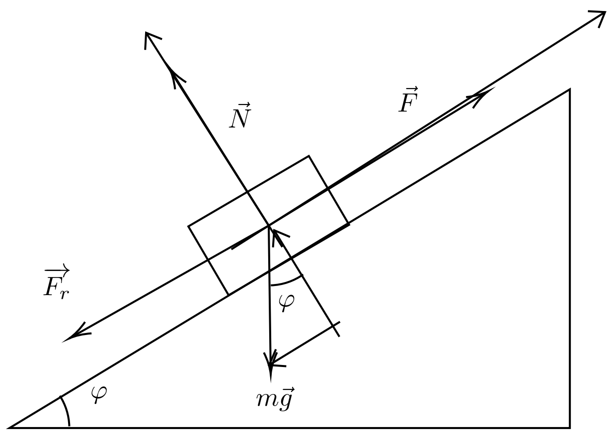
$$\sum F_y = N - mg = 0 \tag{5}$$

La fuerza total es 0 porque no se mueve en el eje Y.

$$F_r = \mu N = \mu mg \tag{6}$$

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu g \tag{7}$$

3.2 Plano inclinado



Dividimos el peso en componentes:

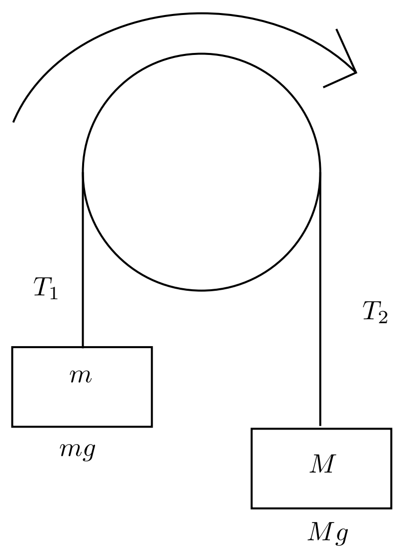
$$\begin{aligned} P_x &= -mg\sin\varphi \\ P_y &= -mg\cos\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

Y dividimos cada eje de nuevo

$$\sum F_y = N - mg\cos\varphi = 0 \tag{9}$$

$$\sum F_x = F - \mu mg\sin\varphi = ma_x \tag{10}$$

3.3 Máquina de Atwood



Consideramos el eje positivo el sentido horario.

$$\begin{aligned} \sum F_1 &= T_1 - mg = ma_1 \\ \sum F_2 &= -T_2 + Mg \end{aligned} \tag{11}$$

Como la cuerda no se extiende ni contrae, ambas tensiones son iguales, y ambas aceleraciones también:

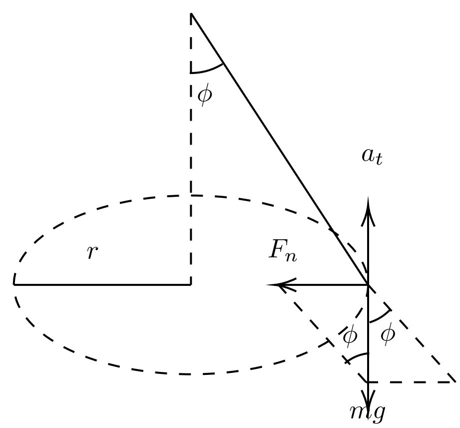
$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \\ a_1 &= a_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Obteniendo así que

$$a(M+m) = g(M-m) \tag{13}$$

$$a = g\frac{M-m}{M+m} \tag{14}$$

3.4 Péndulo Cónico

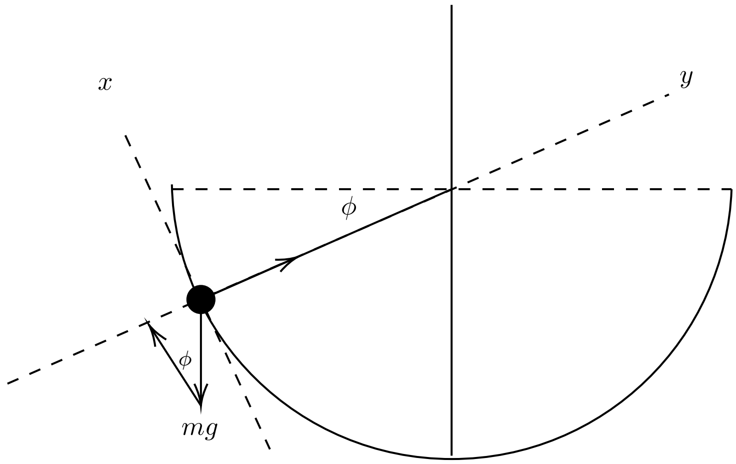


En este caso, contamos con velocidad angular constante, $a_t = 0$.
Si observamos el triángulo inferior, podemos observar una relación entre el ángulo ϕ, el peso mg, y la fuerza normal F_n. Teniendo en cuenta que $r = l\sin\phi$:

$$\tan\phi = \frac{F_n}{mg} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2 \sin\phi l}{g} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{\omega^2 \sin\phi l}{g} \\ \frac{\sin\phi}{\cos\phi} &= \frac{\omega^2 \sin\phi l}{g} \\ \frac{1}{\cos\phi} &= \frac{\omega^2 l}{g} \\ \cos\phi &= \frac{g}{\omega^2 l} \end{aligned} \tag{16}$$

3.5 Superfície Semiesférica



Vamos a dividir cada eje:

$$
\begin{aligned}
F_x &= mg\cos\phi = ma_t \implies g\cos\phi = \frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t} \\
F_y &= -mg\sin\phi + N = ma_n = m\frac{v^2}{r}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Podemos hacer unas piruetas con la primera ecuación:

$$
g\cos\phi = \frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}\phi}\frac{|v|}{r}
\tag{18}
$$

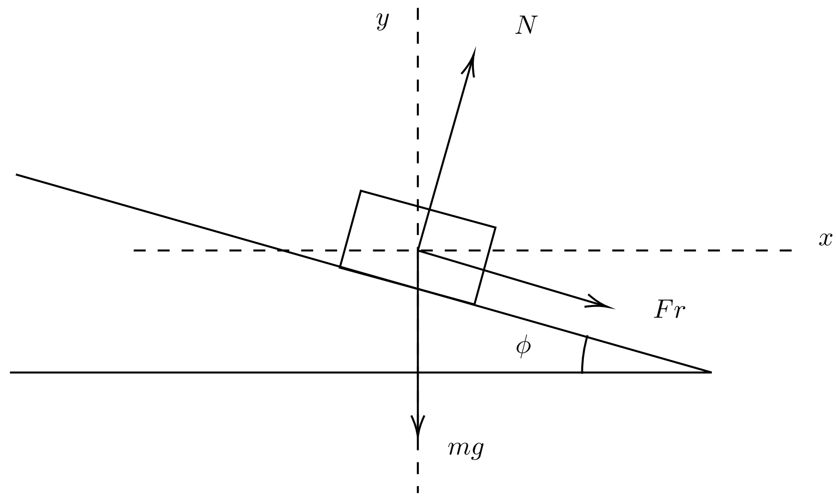
Podemos reorganizar la ecuación e integrar:

$$
\begin{aligned}
\int gr\cos\phi \ \mathrm{d}\phi &= \int |v| \ \mathrm{d}|v| \\
gr\sin\phi &= \frac{|v|^2}{2} \\
|v| &= \sqrt{2rg\sin\phi}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Si realizamos la sustitución $v = \omega r$ y reordenamos, obtenemos que:

$$
t(\phi) = \sqrt{\frac{r}{2g}}\int_0^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\sin\phi}}
\tag{20}
$$

3.6 Curva con peralte



Si realizamos la descomposición de las fuerzas por ejes:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= N\sin\phi + Fr\cos\phi = N\sin\phi + N\mu\cos\phi = ma_x = m\frac{v^2}{r} \\ \sum F_y &= N\cos\phi - mg - Fr\sin\phi = N\cos\phi - mg - N\mu\sin\phi = 0\end{aligned} \tag{21}$$

Reordenando estas ecuaciones, podemos obtener que:

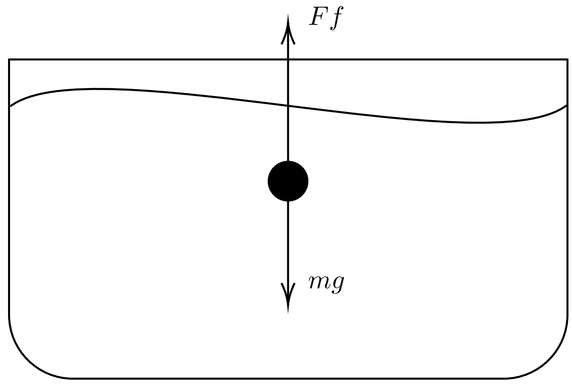
$$N = \frac{mg}{\cos\phi - \mu\sin\phi} \tag{22}$$

Y por tanto

$$v = \sqrt{gr\frac{\sin\phi + \mu\cos\phi}{\cos\phi - \mu\sin\phi}} \tag{23}$$

Donde definimos esta velocidad como la velocidad máxima antes de empiece a derrapar.

3.7 Cuerpo en un fluido



Tenemos un cuerpo de volumen V, de densidad ρ, en un fluido de densidad ρ_f. Definimos la **fuerza de flotabilidad** como

$$Ff = -\kappa\eta v \tag{24}$$

donde

- κ es la "aerodinámica" del objeto.
- η es la viscosidad del fluido.
- v es la velocidad del objeto.

También definimos la **fuerza de empuje** del fluido como el peso del fluido desplazado:

$$E = V\rho_f g \tag{25}$$

Podemos realizar el sumatorio de fuerzas y calcular:

$$\begin{aligned} F &= mg - Ff - E \\ &= V\rho g - \kappa\eta v - V\rho_f g \end{aligned} \tag{26}$$

3.7.1 Velocidad en función del tiempo

: Para simplificar la situación, podemos calcular la velocidad para un fluido poco denso, de forma que $\rho_f \ll \rho$, y por tanto $\cancel{E}^0$:

$$\begin{aligned} F = ma &= mg - \kappa\eta v \\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - \kappa\eta v \end{aligned} \tag{27}$$

Si reordenamos todo lo que está en función de v y de t e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{\kappa\eta v}{m}} &= dt \\ \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{\kappa\eta v}{m}} &= \int_0^t dt \end{aligned} \tag{28}$$

Obteniendo así

$$v(t) = (v_0 - \frac{gm}{\kappa\eta})\exp\left(-\frac{\kappa\eta t}{m}\right) + \frac{gm}{\kappa\eta} \tag{29}$$

También podemos calcular la velocidad límite cuando $F = 0$:

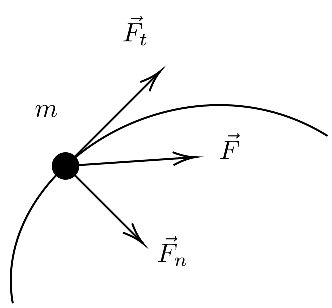
$$\begin{aligned} &Vg(\rho-\rho_f) - \kappa\eta v = 0 \\ &v = \frac{Vg(\rho-\rho_f)}{\kappa\eta} \end{aligned} \tag{30}$$

4 Fuezas ficticias

Dos sistemas son inerciales si mantienen una velocidad **constante** entre ellos. En cambio, si aceleran entre sí, son no inerciales.
Las fuerzas ficticias se dan en sistemas no incerciales:

$$\vec{F_f} = -m\vec{a} \tag{31}$$

4.1 Movimiento Curvilíneo



Podemos descomponer esta fuerza en sus componentes tangencial y normal:

$$F_t = ma_t = m\frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t} \tag{32}$$

$$F_n = ma_n = m\frac{|\vec{v}|^2}{r} \tag{33}$$

5 Momento Angular

Definimos la magnitud vectorial del momento angular L como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \tag{34}$$

Si sustituimos nuestras ecuaciones del movimiento circular, tenemos que

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\omega r^2 \vec{u}_n \times \vec{u}_t = m\omega r^2 \vec{u}_z \tag{35}$$

Para ver como cambia el momento angular respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= m(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}) \\ &= m\vec{v} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{a} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned} \tag{36}$$

Esta última cantidad, la definimos como la **torsión**:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{37}$$

5.1 Fuerzas centrales o radiales

Son fuerzas que son paralelas al vector posición $\vec{r}$:

$$\vec{F}_r \propto \vec{u}_r \tag{38}$$

En estos casos, la torsión es igual a 0:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_r = \vec{r} \times r\vec{u}_r = 0 \tag{39}$$

6 Trabajo y energía

6.1 Impulso mecánico

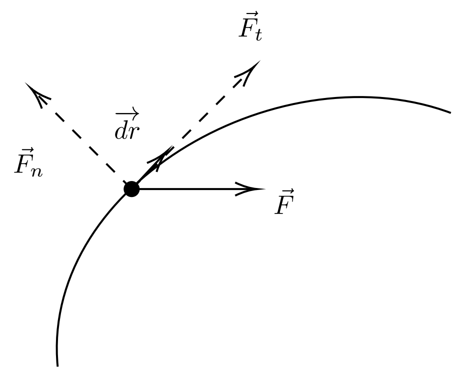
Definimos el impulso como el cambio en el momento:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{40}$$

Por tanto, definimos la posición como:

$$\vec{r} = \frac{1}{m}\vec{p}t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \int \frac{\vec{I}}{m}\,\mathrm{d}t \tag{41}$$

6.2 Trabajo



Definimos el trabajo como la el producto de la fuerza con la posición a lo largo de la trayectoria entre un punto A y un punto B:

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_t \,\mathrm{d}r = F \,\mathrm{d}r \cos\theta \tag{42}$$

Podemos calcular el trabajo mediante una **integral de línea** a lo largo de toda la trayectoria:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad [W] = J$$

6.3 Potencia

Definimos la potencia como el cambio en el trabajo con respecto al tiempo:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{43}$$

La unidad de la potencia es el **watt**, definido como:

$$w = kg\frac{m^2}{s^3} \tag{44}$$

Además, existen las siguientes comunes unidades para la potencia:

- $1cv = 745w$ (Potencia)
- $1kwh = 3.6 \cdot 10^6(J)$ (Trabajo)

6.4 Energía cinética

Definimos la energía cinética como la energía de un sistema a causa de su movimiento:

$$\mathrm{d}W = \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{p} \tag{45}$$

$$W = m\int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}m\Delta v^2 = T \tag{46}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{47}$$

6.5 Energía Potencial

Ejemplos de energía potencial son:

- Gravitatoria: $-G\frac{Mm}{r} \approx mgh$
- Electroestática: $k\frac{Qq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$
- Elástica: $\frac{1}{2}k\Delta x^2$
- Nuclear: $-E_0\frac{a}{r}e^{-\frac{r}{a}}$

6.6 Fuerzas conservativas

Este tipo de fuerzas se caracterizan por:

- Proceden de un potencial: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$
- El trabajo no depende de la trayectoria.
- El trabajo en una trayectoria cerrada es 0.
- Se verifica que: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$
- Son irrotacionales: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

6.7 Conservación de la energía

Nota para Debo: T es la energía cinética, y U es la energía potencial :).
Supongamos que tenemos una fuerza conservativa $\vec{F} = -\nabla U$. Tenemos que el trabajo es:

$$W = \int_A^B \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla}U\,\mathrm{d}\vec{r} = -(U_B - U_A) = -\Delta U \tag{48}$$

Es decir, el trabajo es el **cambio en el potencial**. Similarmente, debido al **teorema de las fuerzas vivas**, el trabajo es también igual al cambio en la energía cinética:

$$W = T_B - T_A \tag{49}$$

Podemos igualar ambas ecuaciones para obtener:

$$\begin{aligned} T_B - T_A &= -(U_B - U_A) = U_A - U_B \\ T_A + U_A &= T_B + U_B \end{aligned} \tag{50}$$

Es decir, la suma de energía cinética y potencial (que definimos como **energía mecánica**), se **conserva**.
En caso de tener una fuerza no conservativa actuando:

$$\vec{F_T} = -\vec{\nabla}U + \vec{F'} \tag{51}$$

Donde $\vec{F'}$ es una fuerza no conservativa.
Mediante el siguiente desarrollo, obtendríamos que:

$$W = \int_A^b \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_A^B \vec{F'}\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{52}$$

Lo que implica que el **cambio en la energía mecánica**, definido como ΔE, es:

$$\Delta E = \int_A^B \vec{F'}\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{53}$$

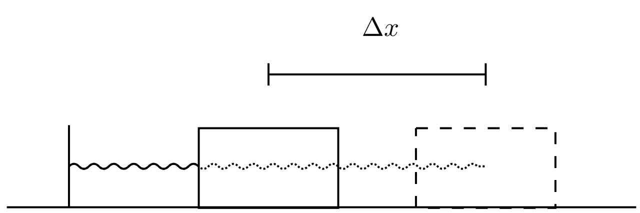
7 Oscilaciones

Un movimiento oscilatiorio es el que cumple que, teniendo una ecuación de movimiento $r(t)$, se cumple que:

$$r(t) = r(t+T) \tag{54}$$

donde T es el **período** del movimiento, definido como el tiempo que tarda el sistema en volver al mismo estado. Un ejemplo es la **ley de Hooke**.

7.1 Ley de Hooke



$$F = -k\Delta x$$

donde Δx es el desplazamiento con respecto al punto de equilibrio, y k es la constante elástica del muelle.
En estos casos, el sistema plantea la siguiente ecuación diferencial:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{55}$$

Podemos resolver esta ecuación para obtener que:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \tag{56}$$

Donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la velocidad angular, y δ la fase inicial. Además, este sistema tiene un período definido como $T = \frac{2\pi}{\omega}$. También definimos la **frecuencia** (el número de oscilaciones por segundo) como la inversa del período: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

7.2 Energía en un muelle

Definimos la fuerza como

$$F = -kx \tag{57}$$

Por tanto, el potencial asociado a esta fuerza es:

$$\begin{aligned} U &= -\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}A^2\sin^2(\omega t + \delta) \end{aligned} \tag{58}$$

Además, definimos la energía cinética como:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}A^2k\cos^2(\omega t + \delta) \tag{59}$$

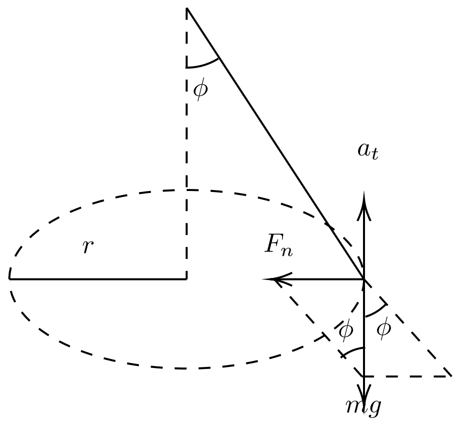
Por tanto, la energía total del sistema es:

$$\begin{aligned} E = U + T &= \frac{1}{2}A^2\sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}A^2k\cos^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \tag{60}$$

Cuando la energía cinética es máxima, el potencial es cero:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}kA^2 \\ v &= \sqrt{\frac{k}{m}}A \\ v_{max} &= A\omega \end{aligned} \tag{61}$$

7.3 Péndulo simple



La fuerza en el eje x es:

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -mg\sin\theta \\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -g\sin\theta
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Además, definimos la longitud del arco como $x = l\theta$. Por ranto, tenemos:

$$
\begin{aligned}
l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= g - \sin\theta \\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{g}{l}\sin\theta
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Para resolver esta ecuación diferencial, podemos aprovechar la aproximación entre $\sin x$ y x cuando son muy pequeños:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{64}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que:

$$\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta\right) \tag{65}$$

Para el caso general, tenemos que

$$\tan\delta = k\frac{\theta_0}{\omega_0} \tag{66}$$

Por lo que si $\omega_0 = 0 \implies \delta = \frac{\pi}{2}$. Además, el período del movimiento es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{67}$$

Por lo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{68}$$

$$\omega(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{69}$$

7.4 Osciladores amortiguados

Son aquellos en los que hay resistencia con el aire:

$$\begin{aligned} F = ma = -kx - bv \\ m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx \end{aligned} \tag{70}$$

La solución a esta ecuación es:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta) \tag{71}$$

Siendo

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{b}{2m} \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \tag{72}$$

7.5 Movimiento ondulatorio

La ecuación de onda general es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{73}$$

La solución general a esta ecuación diferencial parcial es:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta) \tag{74}$$