Teoremas

Alejandro Zubiri

December 25, 2024

Contents

Teorema 1. *Sea $f(x)$ una función derivable $n+1$ veces. Sean $x, x_0 \in (a,b)$:*

$$\exists \varepsilon \in (x, x_0) / f(x) - Pn(f, x_0)(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{1}$$

Demostración. Supongamos que $x_0 < x$ (el caso contrario es análogo). Vamos a definir una función auxiliar:

$$h(s) = f(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!}(x - s)^k \tag{2}$$

Primero, $h(s)$ es contínua y derivable. Vamos a evaluar $h(s)$ en:

- $h(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x)}{k!}(x - x)^k = f(x)$
- $h(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = P_n(f, x_0)(x)$

Ahora vamos a derivar la función:

$$\begin{aligned}
h'(s) &= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!} k (x - s)^{k-1} \cdot -1 \\
&= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\
&= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - f'(s) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x - s)^k - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x - s)^{k-1} \\
&= \frac{f^{n+1}(s)}{n!}(x - s)^n
\end{aligned} \tag{3}$$

Vamos a crear una segunda función auxiliar:

$$g(s) = (x - s)^{n+1} \tag{4}$$

- $g'(s) = -(n+1)(x - s)^n$
- $g(x) - g(x_0) = (x - x)^{n+1} - (x - x_0)^{n+1} = -(x - x_0)^{n+1}$
- $g'(c) = -(n+1)(x - c)^n$

Si ahora aplicamos el teorema del valor medio, podemos afirmar que:

$$\exists c \in [x, x_0] / \quad \frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \tag{5}$$

Ahora evaluamos e igualamos:

$$\begin{aligned} \frac{h'(c)}{g'(c)} &= \frac{\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} \\ &= \frac{f^{n+1}(c)}{-n!(n+1)} \\ &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{f(x)-P_n(f,x_0)(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \tag{7}$$

$$\boxed{f(x)-P_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} \tag{8}$$

□

Teorema 2. *Si una función es continua en* $[a,b]$ *entonces existe un punto:*

$$c \in (a,b)/f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

Demostración. Sea $f(x)$ como en el enunciado:

- Si f es constante en $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = f(x)(b-a) \tag{10}$$

Si no es constante, sean M, m el valor máximo y mínimo, respectivamente. Sea $g(x) = m$:

$$m \leq f(x) \leq M \implies g(x) \leq f(x) \tag{11}$$

Por tanto

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

Y análogamente:

$$\begin{aligned} m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a) \\ m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora por Weierstrass, sabemos que f alcanza el máximo y el mínimo en $[a,b]$,

$$\exists c \in (x_1, x_2) \subset [a,b]/f(x_1) = m \wedge f(x_2) = M \tag{14}$$

Sea $f(c) = C$:

$$m \leq C \leq M \tag{15}$$

Si $C = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies c \in [a,b]$, por tanto:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

□

Teorema 3. *Sea f una función continua en $[a,b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,/x \in [a,b] \implies F$ es derivable y*

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b] \tag{17}$$

Demostración.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \tag{18}$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales:

$$\exists c \in [x, x+h]/f(c) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

Por tanto

$$F'(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{20}$$

□