Analisis

Alejandro Zubiri

Tue Oct 15 2024

Contents

1 Corolario del TVM

Sea $g(x) = x$. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \implies \exists c \in (a,b)/$

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \tag{1}$$

que en este caso sería

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \tag{2}$$

Que reordenando es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3}$$

2 Regla de L'Hôpital

Teorema (Regla de L'Hôpital)**.** *Sea f, g derivables en un entorno de un punto $x = a$ y $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ y $\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4}$$

Demostración. Supongamos que $f(a) = 0$ y que $g(a) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \tag{5}$$

Si tomamos $\lim_{x \to a}$ en ambos lados

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6}$$

QED □

3 Polinomio de Taylor

Definición. Sea $f(x)$ una función derivable n veces en el entorno de un punto $x_0 \in (a,b)$. Se define Polinomio de Taylor de orden n alrededor de un punto x_0:

$$Pn(f, x_0)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{7}$$

□

En caso de $x = x_0$ se denomina **serie McLaurin**.

Teorema (Teorema de Taylor)**.** *Sea $f(x)$ una función derivable $n+1$ veces. Sean $x, x_0 \in (a,b)$:*

$$\exists \varepsilon \in (x, x_0) / f(x) - Pn(f, x_0)(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{8}$$

Demostración. Supongamos que $x_0 < x$ (el caso contrario es análogo). Vamos a definir una función auxiliar:

$$h(s) = f(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!}(x-s)^k \tag{9}$$

Primero, $h(s)$ es contínua y derivable. Vamos a evaluar $h(s)$ en:

- $h(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x)}{k!}(x-x)^k = f(x)$
- $h(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = P_n(f, x_0)(x)$

Ahora vamos a derivar la función:

$$\begin{aligned}
h'(s) &= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x-s)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{k!} k(x-s)^{k-1} \cdot -1 \\
&= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x-s)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x-s)^{k-1} \\
&= f'(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x-s)^k - f'(s) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x-s)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k+1}(s)}{k!}(x-s)^k - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^k(s)}{(k-1)!}(x-s)^{k-1} \\
&= \frac{f^{n+1}(s)}{n!}(x-s)^n
\end{aligned} \tag{10}$$

Vamos a crear una segunda función auxiliar:

$$g(s) = (x-s)^{n+1} \tag{11}$$

- $g'(s) = -(n+1)(x-s)^n$
- $g(x) - g(x_0) = (x-x)^{n+1} - (x-x_0)^{n+1} = -(x-x_0)^{n+1}$
- $g'(c) = -(n+1)(x-c)^n$

Si ahora aplicamos el teorema del valor medio, podemos afirmar que:

$$\exists c \in [x, x_0] / \quad \frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \tag{12}$$

Ahora evaluamos e igualamos:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - P_n(f, x_0)(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{h'(c)}{g'(c)} &= \frac{\frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n} \\ &= \frac{f^{n+1}(c)}{-n!(n+1)} \\ &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - P_n(f, x_0)(x)}{-(x - x_0)^{n+1}} &= -\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \\ f(x) - P_n(f, x_0)(x) &= \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{15}$$

QED $\square$

4 Integrales - Técnicas de resolución

4.1 Cambio de variable

Queremos integrales de la forma

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

Podemos realizar la sustitución $t = g(x)$ y $\mathrm{d}t = g'(x)\,\mathrm{d}x$ para obtener

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C \tag{17}$$

4.2 Integración por partes

$$\int u\,\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\,\mathrm{d}u \tag{18}$$

Demostración. Vamos a definir una función $h(x)$ tal que

$$h(x) = u(x)v(x) \tag{19}$$

$\square$

Si tomamos su derivada, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}(u(x)v(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{20}$$

Si multiplicamos ambos lados por dx tenemos que

$$\mathrm{d}(u(x)v(x)) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v \tag{21}$$

Ahora podemos integrar para obtener

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}(u(x)v(x)) &= \int v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v \\ u(x)v(x) &= \int v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{22}$$

Si reordenamos, obtenemos que

$$\int u\,\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\,\mathrm{d}u \tag{23}$$

QED

4.3 Integración de funciones racionales

Funciones de la forma

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

Para las raíces que $Q(x) = 0$, tenemos dos casos:

- Varias raíces: $(x-2)(x-3)$
- Valores repetidos: $(x-2)^2$

4.3.1 Múltiples raíces

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-n) \tag{25}$$

Entonces tenemos

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-n)} = \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{N}{x-n} \tag{26}$$

4.3.2 Raíces repetidas

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-b)^n \;/\; n > 1 \tag{27}$$

Entonces

$$\begin{gathered} \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-b)^n} = \\ \frac{A}{x-a} + \dots + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{C}{(x-c)^{n-1}} + \dots + \frac{D}{x-d} \end{gathered} \tag{28}$$

4.4 Integrales trigonométricas

4.4.1 Funciones impares en el seno

Se verifica que

$$F(-\sin x) = -F(\sin x) \tag{29}$$

Realizaremos las sustituciones

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ \sin x &= \sqrt{1-t^2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned} \tag{30}$$

4.4.2 Funciones impares en el coseno

$$F(\sin x, -\cos x) = -F(\sin x, \cos x) \tag{31}$$

Entonces sustituiremos

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ \cos x &= \sqrt{1-t^2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned} \tag{32}$$

4.4.3 Funciones pares en ambos

$$F(-\sin x, \cos x) = F(\sin x, \cos x) \tag{33}$$

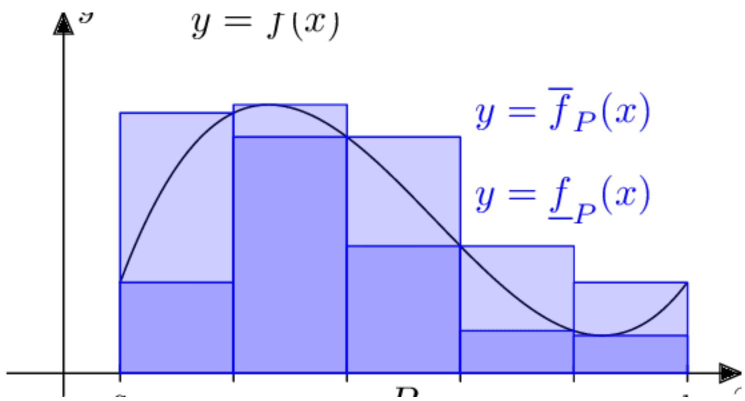
Cambiaremos

$$\begin{aligned} t &= \tan x \\ \sin x &= \frac{t}{t^2-1} \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{aligned} \tag{34}$$

4.4.4 Caso general

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= t \\ \sin x &= \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{35}$$

5 Integral de Riemann



Partimos de una función $f(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ y continua en todo el intervalo. Dividimos el intervalo en particiones:

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, b] \tag{36}$$

El área total es el área de cada pequeño intervalo.
Como $f(x)$ es continua, buscamos el máximo M y el mínimo m de cada intervalo. Definimos cada A_i como el área entre x_{i-1} y x_i. Definimos como $R_i = M_i(x_i - x_{i-1})$ y $r_i = m_i(x_i - x_{i-1})$. Se verifica siempre que:

$$r_i \leq A \leq R_i \tag{37}$$

- Aproximación por defecto:
  $s = \sum_{i=0}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$
- Aproximación por exceso:
  $S = \sum_{i=0}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$
- Ahora se verifica también que $s \leq A \leq S$

Definición. Definimos como p el conjunto de puntos que separan un intervalo. Una partición es más fina que otra si tiene menos puntos y si todos los puntos de la primera están contenidos en la segunda:

$$\forall x \in P_1 \implies x \in P_2 \tag{38}$$

□

Supongamos que la partición P_n tiene n puntos.
Cuando $n \to \infty$ la longitud del intervalo tiende a 0:

$$n \to \infty \implies x_i - x_{i-1} \to 0 \tag{39}$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n - S_n = \lim_{n\to\infty} \sum M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \tag{40}$$

y ahora

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{41}$$

Ahora, por la regla del sandwich:

$$s_n \leq A \leq S_n \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = A \tag{42}$$

Definición. Sea $f(x)$ una función continua no negativa en $[a, b] \in \mathbb{R}$.
La integral definida entre a y b de $f(x)$ es $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. a y b son los límites de intergación. □

5.1 Propiedades

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \forall x \in Dom(f)$
- $f(x) > 0 \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$
- $c \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Teorema de Weierstrass. Si una función continua en un intervalo compacto (cerrado y acotado), sabemos que hay, al menos, dos puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ donde f alcanza valores extremos absolutos:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \tag{43}$$

□

Teorema del valor medio para integrales. Si una función es continua en $[a, b]$ entonces existe un punto:

$$c \in (a, b) / f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{44}$$

□

Demostración. Sea $f(x)$ como en el enunciado:

- Si f es constante en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = f(x)(b - a) \tag{45}$$

Si no es constante, sean M, m el valor máximo y mínimo, respectivamente. Sea $g(x) = m$:

$$m \leq f(x) \leq M \implies g(x) \leq f(x) \tag{46}$$

Por tanto

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{47}$$

Y análogamente:

$$\begin{gathered} m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a) \\ m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M \end{gathered} \tag{48}$$

Ahora por Weierstrass, sabemos que f alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$,

$$\exists c \in (x_1, x_2) \subset [a, b] / f(x_1) = m \wedge f(x_2) = M \tag{49}$$

Sea $f(c) = C$:

$$m \leq C \leq M \tag{50}$$

Si $C = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies c \in [a, b]$, por tanto:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{51}$$

□

Teorema fundamental del cálculo integral. Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \,/ x \in [a, b] \implies$ F es derivable y

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \tag{52}$$

□

Demostración.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \tag{53}$$

Ahora podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales:

$$\exists c \in [x, x+h] / f(c) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{54}$$

Por tanto

$$F'(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{55}$$

□

Corolario del TFC. Sea f una función continua en $[a, b]$:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{56}$$

Si $g(x), h(x)$ son derivables entonces:

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) \tag{57}$$

□

Teorema de Barrow. Sea una función continua f y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{58}$$

□

Demostración. Sea $g(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Por TFC, $g(x)$ es primitiva de $f(x)$:

$$g(x) - F(x) = c \in \mathbb{R} \implies g(x) = F(x) + c \tag{59}$$

En $x = a$:

$$g(x) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 = g(a) = F(a) + c \implies c = -F(a) \tag{60}$$

En $x = b$:

$$g(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) + c = F(b) - F(a) \tag{61}$$

Por tanto

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{62}$$

□