

Algoritmos de resolución

Alejandro Zubiri

Tue Nov 26 2024

Contents

1	Método de la bisección	2
2	Método de la secante	3
3	Punto fijo	5
4	Método de Newton	8

Definición 1. Definimos como ceros o soluciones de una función a los valores ξ tal que:

$$f(\xi) = 0 \quad (1)$$

Definición 2. Sea g una función continua en $[a, b]$ de forma que $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$.

La recursión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ es la iteración simple y x_k los iterandos.

Definición 3. Un método recursivo tiene propiedad de convergencia local hacia ξ si $\exists \delta > 0 \forall x_0 \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ se puede construir una sucesión de x_k y $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$

Definición 4. Sea una sucesión de números reales $\{x_k\} / \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ y $p > 0$. La sucesión es convergente a ξ con orden de convergencia al menos p si:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = L \in (0, \infty) \quad (2)$$

Si $p = 1 \implies L \in (0, 1)$, donde L es la **constante de error asintótica**.

Si $p = 1$, converge de forma lineal.¹

Si $p = 2$, converge de forma cuadrática.

Definición 5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el entorno de un punto x_0 , decimos que $f = O(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ si y solo si:

$$\exists \varepsilon > 0 \wedge \text{entorno } U(x_0) / |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \forall x \in U \quad (3)$$

Decimos que $f = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \wedge \text{entorno } U(x_0)$

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \forall x \in U \quad (4)$$

De forma equivalente:

$$\begin{aligned} f(x) = o(g(x)) / \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 \\ f(x) = O(g(x)) / \frac{f(x)}{g(x)} &= L < \infty \text{ para } x \text{ grandes} \end{aligned} \quad (5)$$

1 Método de la bisección

Demostramos la existencia de una raíz y su unicidad. Necesitamos una función continua en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Sabemos que $\exists c \in [a, b] / f(c) = 0$. Ahora continuamos dividiendo el intervalo inicial y evaluando en $\frac{a+b}{2}$. El error absoluto en el paso n es:

$$\boxed{\frac{b-a}{2^n} \leq E_n} \quad (6)$$

¹No toda sucesión convergente tiene orden de convergencia.

2 Método de la secante

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}} \quad (7)$$

Se asume que $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0 \forall k \geq 1$

- x_0, x_1 deben estar cercanos a la raíz.
- La funcion debe ‘comportarse bien’.

Teorema 1. Sea $f : \mathbb{R}$ una función continua y derivable en un intervalo cerrado y acotado $I = (\xi - h, \xi + h)/h > 0$.

Si $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0 \implies \{x_k\}$ definida por el método de la secante converge linealmente a ξ para casos en los que x_0 y x_1 son cercanos a ξ .

Demostración. Por hipótesis sabemos que $f'(\xi) \neq 0$. Supongamos que $f(\xi) = \alpha > 0$. Como la derivada es continua en I , entonces vamos a coger unos intervalos $I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta]/0 < \delta < h$:

$$|f'(x) - \alpha| < \varepsilon > 0 \forall x \in I_\delta \quad (8)$$

Como podemos elegir, sea $\varepsilon = \frac{\alpha}{4} \implies 0 < \frac{3\alpha}{4} < f'(x) < \frac{5\alpha}{4} \forall x \in I_\delta$.

Usando el TVM en $[x_k, \xi] \implies \exists \phi_k \in [x_k, \xi]/f'(\phi_k) = \frac{f(\xi) - f(x_k)}{\xi - x_k}$.

Como $f(\xi) = 0 \implies \varepsilon - x_{k+1} = \varepsilon - x_k + \frac{(x_k - \xi)f'(\phi_k)}{f'(\beta_k)}/\beta_k \in [x_k, x_{k-1}]$.

Si $x_{k-1} \in I_\delta \wedge x_k \in I_\delta \implies \phi_k, \beta_k \in I_\delta$

$$|\xi - x_{k+1}| \leq |\xi - x_k| \frac{2}{3} \implies x_{k+1} \in I_\delta \quad (9)$$

Como esto aplica $\forall k \implies$ se cumple que $\forall \{x_k\} \implies p = 1$. \square

Teorema 2. El orden de convergencia de la secante es

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (10)$$

Demostración. Sea $\varepsilon_k = |\xi - x_k| = E_a(x_k)$. Como $f(\xi) = 0$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - \xi = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \xi \\
&= x_n - f(x_n) \frac{x_n - \xi - x_{n-1} + \xi}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \varepsilon_n - \frac{f(x_n)\varepsilon_n + f(x_n)\varepsilon_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{\varepsilon_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) - f(x_n)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \frac{\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}}}{\frac{\varepsilon_n}{x_n - x_{n-1}} - \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}} (\varepsilon_n \varepsilon_{n-1})
\end{aligned} \tag{11}$$

Ahora hacemos el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en ξ para $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$.

Nota: $\varepsilon_n = x_n - \xi$:

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\xi) + f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + O(n^3) \\
&= f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + O(n^3) \\
\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} &= f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &= f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_{n-1} + O(\varepsilon_{n-1}^2) \\
\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &= \frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + O(\varepsilon_{n-1}^2)
\end{aligned} \tag{13}$$

A medida que $n \rightarrow \infty$, $O(\varepsilon_{n-1}^2) \rightarrow 0$

$$\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} \approx \frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \tag{14}$$

Ahora volviendo a nuestra ecuación inicial:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \tag{15}$$

Ahora volviendo:

$$\varepsilon - \varepsilon_{n-1} = x_n - \xi - x_{n-1} + \xi = x_n - x_{n-1} \tag{16}$$

Además:

$$\forall x_n, x_{n-1} \text{ cercanos a } \xi \implies \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1}))} \approx f'(\xi) \quad (17)$$

Sea $L = f'(\xi) \frac{1}{2} f''(\xi) < \infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &\approx f'(\xi) \frac{1}{2} f''(\xi) \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \\ &= L \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \end{aligned} \quad (18)$$

Para hallar el orden de convergencia exacto supongamos un $A \in \mathbb{R}$, una relación entre los errores $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}$:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\leq A |\varepsilon_k|^\alpha \\ |\varepsilon_{k+1}| &= A^{-1} |\varepsilon_k|^{\frac{1}{\alpha}} \implies |\varepsilon_{n+1}| = A |\varepsilon_n|^\alpha \\ &= L \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} = L |\varepsilon_n| (A^{-1} |\varepsilon_n|^{\frac{1}{\alpha}}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A |\varepsilon_n|^\alpha &= L \cdot A^{-1} |\varepsilon_n|^{1+\frac{1}{\alpha}} \\ A^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot L^{-1} &= |\varepsilon_n|^{1+\frac{1}{\alpha}-\alpha} \end{aligned} \quad (20)$$

Como no depende de n , ambos lados deben ser independientes, y por tanto, si $n \rightarrow \infty$:

$$1 + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \quad (21)$$

Que tiene como única solución positiva a la cual converge:

$$\boxed{\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad (22)$$

□

Para aproximar el error, utilizamos el pseudo error relativo:

$$\varepsilon_R = \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} \right| \quad (23)$$

Cuando el método está bien utilizado.

3 Punto fijo

Definición 6. Sea g una función definida y continua en $[a, b]$. g es una contracción sobre $[a, b]$ si:

$$\exists L/0 < L < 1 \wedge |g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in [a, b] \quad (24)$$

Si $L \in \mathbb{R}^+$, se dice que cumple la condición de Lipschitz.

Definición 7. Sea $f : \mathbb{R}$, un punto fijo ξ de $f(x)$ cumple que:

$$f(\xi) = \xi \quad (25)$$

Teorema 3 (Teorema del punto fijo). Sea $g(x)$ una función continua en $[a, b]$, y $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$. Si $g(x)$ es contractiva, tiene un único punto fijo x_i en $[a, b]$ y la sucesión $\{x_k\}$ definida por $x_{k+1} = g(x_k)$, que converge a ξ si $k \rightarrow \infty$.

Esto se cumplirá $\forall x_k \in [a, b]$

Teorema 4. Sea la iteración definida para el método de iteración de punto fijo donde $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema del punto fijo para un intervalo $[a, b]$.

Sea un $x_0 \in [a, b]$, sea $\varepsilon > 0$ la tolerancia y sea $k_0(\varepsilon)$ el entero positivo más pequeño tal que $|x_k - \xi| < \varepsilon \forall k \geq k_0(\varepsilon)$:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lceil \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1 - L))}{\ln(\frac{1}{L})} \right\rceil + 1 \quad (26)$$

Demostración. Primero, demostramos por inducción que:

$$|x_k - \xi| \leq L^k |x_0 - \xi| \forall k \geq 1 \quad (27)$$

Empezamos por el caso base:

$$|x_1 - \xi| \leq L |x_0 - \xi| \quad (28)$$

Tal que:

$$x_1 = g(x_0) \quad \xi = g(\xi) \quad (29)$$

$$|g(x_0) - g(\xi)| \leq L |x_0 - \xi| \quad (30)$$

Que se cumple $\forall x_0 \in [a, b]$, $L \in (0, 1)$ ya que es contractiva.

Asumimos para $n = p$:

$$|x_p - \xi| \leq L^p |x_0 - \xi| \quad (31)$$

Deberá cumplirse para $n = p + 1$:

$$|x_{p+1} - \xi| = |g(x_p) - g(\xi)| \leq L |x_p - \xi| \leq L^p L |x_0 - \xi| \leq L^{p+1} |x_0 - \xi| \quad (32)$$

Volvemos para el caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} |x_1 - \xi| &\leq L |x_0 - \xi + x_1 - x_1| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \\ &\leq |x_0 - x_1| + L |x_0 - \xi| \\ |x_0 - \xi| &\leq |x_0 - x_1| + L |x_0 - \xi| \\ |x_0 - \xi| (1 - L) &\leq |x_0 - x_1| \\ |x_0 - \xi| &\leq \frac{|x_0 - x_1|}{1 - L} \\ |x_k - \xi| &\leq L^k |x_0 - \xi| \leq L^k \frac{1}{1 - L} |x_1 - x_0| \end{aligned} \quad (33)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
|x_k - \xi| &< \varepsilon \forall k \geq k_0 \\
|x_k - \xi| &\leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| < \varepsilon \\
L^k |x_1 - x_0| &\leq \varepsilon(1-L)
\end{aligned} \tag{34}$$

Luego despejamos para k :

$$\begin{aligned}
k \ln L + \ln |x_1 - x_0| &\leq \ln(\varepsilon(1-L)) \\
\ln |x_1 - x_0| - \ln(\varepsilon(1-L)) &\leq -k \ln L = k \ln\left(\frac{1}{L}\right) \\
k &> \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln(\frac{1}{L})}
\end{aligned} \tag{35}$$

Para que obtengamos los mismos valores y sea una cota superior:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lceil \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln(\frac{1}{L})} \right\rceil + 1 \tag{36}$$

□

Teorema 5. Sea $g(x)$ continua y derivable en un intervalo $(\xi - r_0, \xi + r_0)/r_0 > 0$:

$$|g'(\xi)| < 1 \implies \exists r_0 > 0 / \forall r < r_0 \wedge \forall x_0 \in (\xi - r, \xi + r) \tag{37}$$

Vamos a poder construir una sucesión $x_{n+1} = g(x_n)/n \geq 0$ con todos los términos dentro del intervalo. Esta sucesión converge a ξ .

Además, la sucesión de errores $\varepsilon_n = |x_n - \xi|$ no son nulos y:

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \rightarrow g'(\xi) \tag{38}$$

Teorema 6. Sea $g(x)$ una función definida, continua y derivable en $(\xi - r_0, \xi + r_0)/r_0 > 0$, $\xi = g(\xi)$ y $|g'(x)| > 1$:

Las únicas sucesiones de términos que cumplen $x_{k+1} = g(x_k) \rightarrow \xi$ si $k \rightarrow \infty$ son aquellos que $x_i = \xi \forall i \in \mathbb{N}$

Demostración. Elegimos $M/1 < M < |g'(\xi)| \implies$ Como $g'(x)$ es continua, elegimos $r/r_0 > r \forall x \in (\xi - r, \xi + r)$.

$$g'(x) \geq M \tag{39}$$

Haremos reducción al absurdo:

Supongamos que $\exists \{x_k\}/x_k \neq \xi \forall k \geq 0 / \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$. Aplicando el TVM:

$$x_k \in (\xi - r, \xi + r) \implies |x_{k+1} - \xi| = |g(x_k) - \xi| = |g'(\xi_n)(x_k - \xi)| \geq M|x_k - \xi| \tag{40}$$

$$|x_{k+1} - \xi| \geq M|x_k - \xi| \geq M^2|x_{k-1} - \xi| \geq \dots \geq M^{k-k_0}|x_{k_0} - \xi| \implies |x_{k+1} - \xi| \geq \infty \tag{41}$$

Como $M > 1$, hemos llegado a una contradicción.

□

4 Método de Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \quad (42)$$

Se asume que $f'(x_k) \neq 0 \forall k \geq 0$

Teorema 7. Sea $f : \mathbb{R}$ definida y continua en $I_\gamma = [\xi - \gamma, \xi + \gamma]/\gamma > 0$, y $f''(x)$ continua y $f(\xi) = 0 \wedge f''(\xi) \neq 0$.

Si $\exists c > 0 / \frac{f''(x)}{f'(y)} \leq c \forall x, y \in I_\gamma$ y $|\xi - x_0| \leq h/h = \min(\gamma, \frac{1}{c})$ El método de Newton converge cuadráticamente a ξ .