

Calculo

Alejandro Zubiri

January 30, 2025

Índice

1	Bibliografía	2
2	El espacio \mathbb{R}^n	3
2.1	El conjunto \mathbb{R}^n	3
2.2	\mathbb{R}^n como espacio afín	3
2.3	\mathbb{R}^n como espacio métrico	4
2.4	Rectas e hiperplanos en \mathbb{R}^n	6

1 Bibliografía

- Stewart, J. Cálculo en varias variables.
- Apuntes de Pepe Aranda.
- Tom M. Apostol, "Calculus".
- Tom M. Apostol, Análisis Matemático.

2 El espacio \mathbb{R}^n

2.1 El conjunto \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n es el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

De momento, este conjunto no tiene ninguna estructura. Para ello, se introduce la noción de espacio vectorial (EV a partir de ahora).

- La suma vectorial:

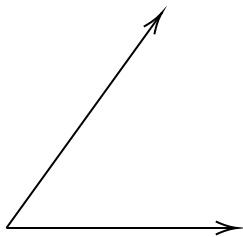
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

- Producto por escalar:

$$k\vec{a} = (ka_1, \dots, ka_n)$$

Con estas dos operaciones, \mathbb{R}^n es EV, y a sus elementos, los vamos a llamar vectores, y los denotaremos por $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Con esta estructura, los elementos de \mathbb{R}^n se pueden ordenar, por ejemplo, en una cuadrícula.



2.2 \mathbb{R}^n como espacio afín

Nos será útil para definir direcciones desde cualquier punto de \mathbb{R}^n . La estructura afín en \mathbb{R}^n se define por la aplicación

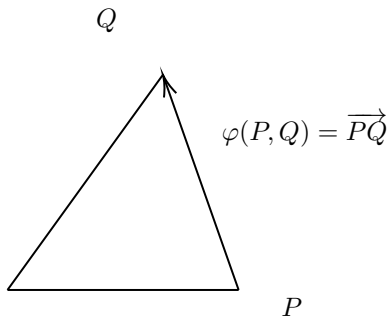
$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \varphi(\vec{u}, \vec{v})$$

donde $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ se representará como un vector cuyo punto de aplicación está en el extremo de \vec{u} y el extremo, el de $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ en el extremo de \vec{v} . Es fácil comprobar que

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$$

En este contexto es conveniente llamar puntos a los vectores con punto de aplicación en el $\vec{0}$ y vectores a los vectores cuyo punto de aplicación es arbitrario. Los puntos también los denotaremos mediante letras mayúsculas, y los vectores con letras minúsculas.



A recordar que punto - punto define un vector, y que punto + vector = punto. Con esto ya podemos definir direcciones.

2.3 \mathbb{R}^n como espacio métrico

Para medir longitudes, ángulos y distancias introduciremos en \mathbb{R}^n el **producto escalar**.

Definición 1. El producto escalar entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} se define como

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{aligned} \quad (1)$$

El producto escalar tiene las propiedades siguientes:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \lambda \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Debido a la propiedad 3, podemos definir la longitud (o norma) de un vector como

Definición 2. La longitud o norma de un vector se define como:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (2)$$

Las propiedades son que:

- $|\vec{v}| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
- $|\lambda \vec{u}| = |\lambda| |\vec{u}|$
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$

Demostración. Observemos que si uno de los vectores es el vector nulo, entonces la desigualdad se satisface por igualdad, o también si ambos vectores son proporcionales entre sí. Supongamos entonces que u y v son LI. Eso significa que la ecuación $u = \lambda v$ no tiene solución.

$$u - \lambda v = \vec{0}$$

$$(u - \lambda v)(u - \lambda v) = 0$$

$$u \cdot u - 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 v \cdot v = 0$$

Recordando la definición de norma queda

$$|u|^2 - 2\lambda |u| |v| \cos \theta + \lambda^2 |v|^2 = 0$$

Ahora tenemos una ecuación de segundo grado en λ . Como no puede tener solución, $b^2 - 4ac < 0$.

$$(2|u| |v| \cos \theta)^2 - 4|u|^2 |v|^2 < 0$$

$$2|u \cdot v| < 2|v| |u|$$

$$|u \cdot v| < |v| |u|$$

Como deben cumplirse ambas

$$|u \cdot v| \leq |v||u| \quad (3)$$

□

- *Desigualdad triangular*

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Demostración. Partimos de $u + v$

$$(u + v) \cdot (u + v) = |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2 = |u + v|^2 \geq 0$$

Por Cauchy-Schwarz, $u \cdot v \leq |u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

$$|u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2$$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

□

De especial importancia son los vectores con norma 1, denominados como **vectores unitarios**.

Definición 3. Definimos como vectores unitarios a esos vectores \vec{v} que cumplen que

$$|\vec{v}| = 1 \quad (4)$$

Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos obtener un método para medir ángulos. Observemos que de C-S se deduce

$$||u||v|| \leq u \cdot v \leq |u||v| \quad (5)$$

Si ninguno de los vectores es el nulo, podemos dividir entre las normas

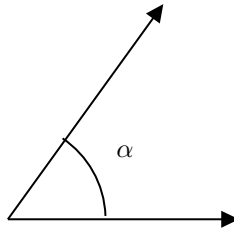
$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq 1 \quad (6)$$

Entonces, como está acotada en $[-1, 1]$, podemos definir el ángulo α entre u y v como

Definición 4. El ángulo α entre u y v como el ángulo que satisface

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad (7)$$

donde $\alpha \in [0, \pi]$. Es de relevancia que α siempre se mide como el ángulo "interior" o el más pequeño.



Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \implies u \cdot v = 0 \implies u$ y v son **ortogonales**.

Aunque el ángulo entre $\vec{0}$ y otro vector cualquiera no está definido, sin embargo, se suele decir que $\vec{0}$ es ortogonal a todos los vectores de \mathbb{R}^n

Ahora en \mathbb{R}^2 ya podemos dibujarlos "correctamente". Ahora falta definir distancias entre puntos de \mathbb{R}^n .

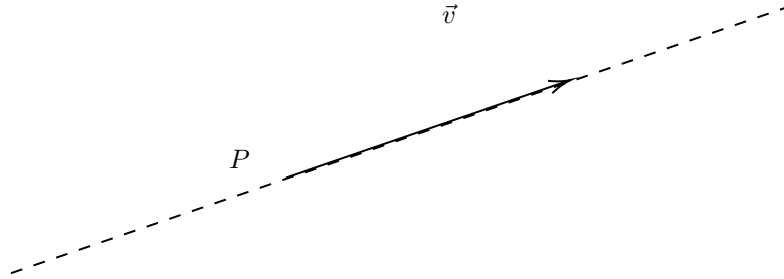
Definición 5. Definimos la distancia entre dos puntos P y Q como

$$d(P, Q) = |\vec{PQ}| = |Q - P| \quad (8)$$

2.4 Rectas e hiperplanos en \mathbb{R}^n

Una recta en \mathbb{R}^n que pasa por un punto P y tiene la dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se define como los puntos X que satisfacen

$$X = P + t\vec{v} \quad (9)$$



La recta está descrita por un solo parámetro libre, por lo que es un objeto de dimensión 1. Si $v_j \neq 0$ con $j \in \{1, \dots, n\}$ podemos eliminar t

$$t = \frac{x_j - p_j}{v_j} \quad (10)$$

Y entonces

$$x_i = p_i + \frac{x_j - p_j}{v_j} v_i \quad / \quad i \neq j \quad (11)$$

Por tanto, la recta está definida por $n - 1$ ecuaciones. Por tanto, la recta es un objeto de codimensión $n - 1$.