Topología Elemental

Alejandro Zubiri

January 31, 2025

Índice

1 Conjuntos

Cuando definimos algo, tiene que estar definido de forma que cualquier persona esté de acuerdo con dicha definición.

Definición 1. *Un conjunto se puede definir por su* ***extensión****, mencionando todos sus elementos, o por* ***compresión****, defininiendo la regla que todos los elementos del conjunto deben cumplir.*

- *Extensión:*

$$S = \{1, 2, 3, \dots\} \tag{1}$$

- *Comprensión:*

$$S = \{x \in \mathbb{N}\} \tag{2}$$

Denotamos los conjuntos por letras mayúsculas, y sus elementos por letras minúsculas.
Si x es un elemento del conjunto S, decimos que $a \in S$, y si no pertenece, $a \notin S$. Es importante tener en cuenta que, a menos que se especifique, el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante, solo nos interesan sus elementos. Para especificar orden, podemos utilizar (a, b), que se define como ***par ordenado****, tal que*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Definición 2. *El* ***cardinal*** *de un conjunto es el número de elementos del conjunto, denotado por $\#S$.*

Dados dos conjuntos A y B, decimos que A es un subconjunto de B si y solo si

$$\forall x \in A, x \in B \implies A \subset B \tag{3}$$

Sino, decimos que $A \not\subset B$.

Definición 3. *Decimos que A es subconjunto de B si*

$$A \subset B \iff (a \in A \implies a \in B) \tag{4}$$

Un ejemplo de conjuntos es el conjunto vacío:

$$\phi / \#\phi = 0 \tag{5}$$

Definición 4. *Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si*

$$A \subset B \wedge B \subset A \tag{6}$$

1.1 Operaciones con conjuntos

Definición 5. *La unión S de dos conjuntos A y B es*

$$S = A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\} \tag{7}$$

Definición 6. *La intersección S de dos conjuntos A y B es*

$$S = A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\} \tag{8}$$

Definición 7. *Definimos la diferencia S de A menos B tal que*

$$S = A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} \tag{9}$$

Definición 8. *La diferencia simétrica entre E y A es*

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \tag{10}$$

Definición 9. *Definimos el complemento S^c de un conjunto S como*

$$\begin{aligned} S \cup S^c &= E \\ S \cap S^c &= \phi \end{aligned} \tag{11}$$

Siendo E el conjunto total.

Definición 10. *Definimos el producto cartesiano entre A y B como*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplos:

- $\emptyset \times B = \emptyset$
- $A \times B \neq B \times A$ *(ya que son pares con órdenes diferentes)*

Proposición 1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración. Sea $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \in B \cup C$

$$\begin{aligned} &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \tag{12}$$

$\square$

Proposición 2. $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A^c \cup B^c &\iff x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\iff x \notin A \vee x \notin B \\ &\iff x \notin A \cap B \\ &\iff x \in (A \cap B)^c \end{aligned} \tag{13}$$

□

2 Tablas de verdad

Una tabla de verdad nos permite analizar como se comportan dos proposiciones: Se puede deducir que

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	V	V

p	q	$p \implies q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p \implies q \iff \neg p \vee q$. Con esto, también podemos deducir que

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$$

Definición 11. *Sea $S \subset \mathbb{R}$, una función $f : S \to \mathbb{R}$ es continua en $a \subset S$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |f(x) - f(a)| < \varepsilon \implies |x - a| < \delta \tag{14}$$

Definición 12. *Sea $S \subset \mathbb{R}$. S es abierto si:*

$$\forall x \in S \exists I \subset S / I = (x - \delta, x + \delta) / \delta > 0 \tag{15}$$

Proposición 3. *La unión de abiertos es un abierto.*

Demostración. Sea S_i cada conjunto abierto. Sabemos que

$$\forall x \in S_i \exists \delta > 0/(x-\delta, x+\delta) \subset S \tag{16}$$

Sea U la unión de los conjuntos:

$$U = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n = \{x/x \in S_1 \vee \cdots \vee x \in S_n\} \tag{17}$$

Sabemos que para cada punto $x \exists \delta > 0/(x-\delta, x+\delta) \in S_i$. Por tanto, estos subintervalos estarán contenidos en la unión, y por tanto esta es abierta. □

Proposición 4. *La intersección finita de abiertos es abierta*

Demostración. Vamos a definir dos casos:

- **Caso 1**: La intersección es $\emptyset$. Como sabemos que $\emptyset$ es abierto, se cumple.
- **Caso 2**: La intersección noe es $\emptyset$ La intersección estará formada por una serie de conjuntos no nulos que sabemos que contienen intervalos abiertos $\forall x$. Sea $\delta/\delta = min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Como este δ es el más pequeño, estará contenido en todos los abiertos para todos los puntos, y por tanto lo estará también en la intersección.

□

2.1 Continuidad por conjuntos abiertos

Vamos a definir el concepto de preimagen:

Definición 13. *Sea $f : D \to C$ una función y $S \subset C$. La preimagen de S bajo f, escrita como $f^{-1}(S)$ es el subconjunto de D definido como:*

$$f^{-1}(S) = \{x \in D/f(x) \in S\} \tag{18}$$

Sea $f : S \to T/U, V \subset T$