Límite y Continuidad

Alejandro Zubiri

Thu Oct 10 2024

Contents

1 Definición de límite

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \tag{1}$$

La función f tiende hacia el valor l a medida que x se aproxima al valor a.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{2}$$

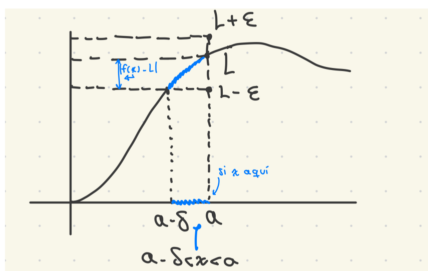
Esto significa que el límite de f cuando x se acerca al valor a es l si, para cualquier valor real $\varepsilon > 0$, existe otro valor $\delta > 0$ tal que la distancia entre x y a ($|x - a|$) es menor que δ, y la distancia entre f y l ($|f(x) - l|$) es menor que ε.

2 Límites laterales

2.1 Límite lateral por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} \; = l^- \tag{3}$$

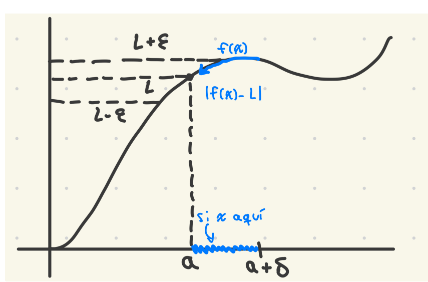
Se cumple si dado un valor real $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l^-| < \varepsilon$.



2.2 Límite lateral por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} \; = l^+ \tag{4}$$

Se cumple si dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l^+| < \varepsilon$.



Teorema 1 (Teorema de unicidad del límite.). *$\exists \lim_{x\to a} f(x)$ solo si existen ambos límites laterales y son iguales:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \tag{5}$$

Además, el límite l será

$$l = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \tag{6}$$

2.3 Propiedades de los límites

Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, y evaluamos el límite cuando ambas tienden al mismo valor a, entonces:
Sea $\lim_{x\to a} f(x) = m$ y $\lim_{x\to a} g(x) = n$:

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = m + n$
- $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = m \cdot n$
- $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{m}/m \neq 0$
- $\lim_{x\to a} k^{g(x)} = k^m$
- $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$
- $\lim_{x\to a} \log_k(g(x)) = \log_b(\lim_{x\to a}(g(x)))$

3 Infinitesimales

Una función es infinitesimal en $x = a$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \tag{7}$$

3.1 Infinitesimales comparables

Sean dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Son infinitesimales comparables si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ / \ k \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Si

- $k \neq 0$: $f(x)$ y $g(x)$ son infinitesimales de mismo orden cuando $x \to a$.
- $k = 0$ $f(x)$ es un infinitesimal de mayor orden que $g(x)$ cuando $x \to a$.

3.2 Infinitesimales equivalentes

Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitesimales equivalentes, se verifica que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim g(x) \tag{9}$$

3.2.1 Lista de infinitesimales equivalentes

$$x \to 0 \implies x \approx \sin x \approx \tan x \approx \arcsin x \approx \arctan x \approx \ln(1+x) \approx e^x - 1$$
$$\frac{x^2}{2} \approx 1 - \cos x \tag{10}$$

$$f(x) \to 0 \implies f(x) \approx \ln(1 + f(x)) \tag{11}$$

$$f(x) \to 1 \implies \ln(f(x)) \approx f(x) - 1 \tag{12}$$

4 Regla de comparaión de infinitos

Se verifica que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

1. $f(x)$ es un infinito de orden superior a $g(x)$ si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \tag{13}$$
2. $f(x)$ es un infinito de orden inferior a $g(x)$ si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{14}$$
3. $f(x)$ es un infinito de mismo orden que $g(x)$ si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad / \quad k \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{15}$$

Teorema 1 (Teorema del Sandwich)**.** *Sean tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Si $\forall x \in (a,b) f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ entonces:*

$$\forall c \in (a,b) \lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x) \leq \lim_{x\to c} h(x) \tag{16}$$

5 Continuidad

Una función $f(x)$ es continua si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(x_0) \in \mathbb{R} \implies |x - x_0| - \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{17}$$

Que verifica lo siguiente:

1. $x_0 \in Dom(f(x)) \implies f(x_0) \in \mathbb{R}$
2. $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \wedge \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema. Una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en el subconjunto $E \subset D$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0 \implies \exists \delta > 0 / y \in E, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{18}$$

$\square$

5.1 Continuidad lateral

Por la izquierda (análogo a la derecha) se cumple:

1. $x_0 \in Dom(f)$
2. $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$
3. $f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

5.2 Discontinuidades

5.2.1 Salto finito

Se cumple si

$$| \lim_{x \to x_0^-} - \lim_{x \to x_0^+} | \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{19}$$

5.2.2 Salto infinito

Se cumple si

$$| \lim_{x \to x_0^-} - \lim_{x \to x_0^+} | \to \infty \tag{20}$$

5.2.3 Evitable

Se cumple cuando $\nexists f(x_0)$ pero sí $\lim_{x \to x_0} f(x)$