Algoritmos de resolución

Alejandro Zubiri

Tue Nov 26 2024

Contents

Definición 1. *Definicimos como ceros o soluciones de una función a los valores* ξ *tal que:*

$$f(\xi) = 0 \tag{1}$$

Definición 2. *Sea* g *una función continua en* $[a, b]$ *de forma que* $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$.
La recursión definida por $x_{k+1} g(x)/k = 0, 1, 2 \dots$ *es la iteración simple y* x_k *los iterandos.*

Definición 3. *Un método recursivo tiene propiedad de convergencia local hacia* ξ *si* $\exists \delta > 0 / \forall x_0 \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ *se puede construir una sucesión de* x_k *y* $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$

Definición 4. *Sea una sucesión de números reales* $\{x_k\} / \lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ *y* $p > 0$. *La sucesión es convergente a* ξ *con orden de convergencia al menos* p *si:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = L \in (0, \infty) \tag{2}$$

Si $p = 1 \implies L \in (0, 1)$, *donde* L *es la* ***constante de error asintótica****.*
Si $p = 1$, *converge de forma lineal.*[1]
Si $p = 2$, *converge de forma cuadrática.*

Definición 5. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones definidas en el entorno de un punto* x_0, *decimos que* $f = O(g(x))$ *cuando* $x \to x_0$ *si y solo si:*

$$\exists \varepsilon > 0 \wedge \textit{entorno } U(x_0) / |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \forall x \in U \tag{3}$$

Decimos que $f = o(g(x))$ *cuando* $x \to x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \wedge \textit{entorno} U(x_0)$

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \forall x \in U \tag{4}$$

De forma equivalente:

$$\begin{aligned} f(x) &= o(g(x)) / \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(x) &= O(g(x)) / \frac{f(x)}{g(x)} = L < \infty \textit{para } x \textit{ grandes} \end{aligned} \tag{5}$$

1 Método de la biseccón

Demostramos la existencia de una raíz y su unicidad. Necesitamos una función continua en un intervalo $[a, b]$ cerrado y acotado tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Sabemos que $\exists c \in [a, b] / f(c) = 0$. Ahora continuamos dividiendo el intervalo inicial y evaluando en $\frac{a+b}{2}$. El error absoluto en el paso n es:

$$\boxed{\frac{b - a}{2^n} \leq E_a} \tag{6}$$

[1] No toda sucesión convergente tiene orden de convergencia.

2 Método de la secante

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}} \tag{7}$$

Se asume que $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0 \forall k \geq 1$

- x_0, x_1 deben estar cercanos a la raíz.
- La funcion debe 'comportarse bien'.

Teorema 1. *Sea $f : \mathbb{R}$ una función continua y derivable en un intervalo cerrado y acotado $I = (\xi - h, \xi + h)/h > 0$.*
Si $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0 \implies \{x_k\}$ definida por el método de la secante converge linealmente a ξ para casos en los que x_0 y x_1 son cercanos a ξ.

Demostración. Por hipótesis sabemos que $f'(\xi) \neq 0$. Supongamos que $f(\xi) = \alpha > 0$. Como la derivada es continua en I, entonces vamos a coger unos intervalos $I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta]/0 < \delta < h$:

$$|f'(x) - \alpha| < \varepsilon > 0 \forall x \in I_\delta \tag{8}$$

Como podemos elegir, sea $\varepsilon = \frac{\alpha}{4} \implies 0 < \frac{3\alpha}{4} < f'(x) < \frac{5\alpha}{4} \forall x \in I_\delta$.
Usando el TVM en $[x_k, \xi] \implies \exists \phi_k \in [x_k, \xi]/f'(\phi_k) = \frac{f(\xi) - f(x_k)}{\xi - x_k}$.
Como $f(\xi) = 0 \implies \varepsilon - x_{k+1} = \varepsilon - x_k + \frac{(x_k - \xi)f'(\phi_k)}{f'(\beta_k)}/\beta_k \in [x_k, x_{k-1}]$.
Si $x_{k-1} \in I_\delta \wedge x_k \in I_\delta \implies \phi_k, \beta_k \in I_\delta$

$$|\xi - x_{k+1}| \leq |\xi - x_k|\frac{2}{3} \implies x_{k+1} \in I_\delta \tag{9}$$

Como esto aplica $\forall k \implies$ se cumple que $\forall \{x_k\} \implies p = 1$. $\square$

Teorema 2. *El orden de convergencia de la secante es*

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{10}$$

Demostración. Sea $\varepsilon_k = |\xi - x_k| = E_a(x_k)$. Como $f(\xi) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \xi &= x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \xi \\
&= x_n - f(x_n)\frac{x_n - \xi - x_{n-1} + \xi}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \varepsilon_n - \frac{f(x_n)\varepsilon_n + f(x_n)\varepsilon_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{\varepsilon_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) - f(x_n)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f_(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{\varepsilon_{n-1}f(x_n) - \varepsilon_n f_(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\
&= \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\frac{\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}}(\varepsilon_n\varepsilon_{n-1})
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Ahora hacemos el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en ξ para $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$.
Nota: $\varepsilon_n = x_n - \xi$:

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\xi) + f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + O(n^3) \\
&= f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + O(n^3) \\
\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} &= f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2) \\
\frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &= f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_{n-1} + O(\varepsilon_{n-1}^2)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + O(\varepsilon_{n-1}^2) \tag{13}
$$

A medida que $n \to \infty, O(\varepsilon_{n-1}^2) \to 0$

$$
\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} \approx \frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \tag{14}
$$

Ahora volviendo a nuestra ecuación inicial:

$$
\varepsilon_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \tag{15}
$$

Ahora volviendo:

$$
\varepsilon - \varepsilon_{n-1} = x_n - \xi - x_{n-1} + \xi = x_n - x_{n-1} \tag{16}
$$

Además:

$$\forall x_n, x_{n-1} \text{ cercanos a } \xi \implies \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n - f(x_{n-1}))} \approx f'(\xi) \tag{17}$$

Sea $L = f'(\xi)\frac{1}{2}f''(\xi) < \infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &\approx f'(\xi)\frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \\ &= L\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Para hallar el orden de convergencia exacto supongemos un $A \in \mathbb{R}$, una relación entre los errores $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}$:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{k+1}| &\leq A|\varepsilon_k|^{\alpha} \\ |\varepsilon_{k+1}| &= A^{-1}|\varepsilon_k|^{\frac{1}{\alpha}} \implies |\varepsilon_{n+1}| = A|\varepsilon_n|^{\alpha} \\ &= L\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} = L|\varepsilon_n|(A^{-1}|\varepsilon_n|^{\frac{1}{\alpha}}) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} A|\varepsilon_n|^{\alpha} &= L \cdot A^{-1}|\varepsilon_n|^{1+\frac{1}{\alpha}} \\ A^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot L^{-1} = |\varepsilon_n|^{1+\frac{1}{\alpha}-\alpha} \end{aligned} \tag{20}$$

Como no depende de n, ambos lados deben ser independientes, y por tanto, si $n \to \infty$:

$$1 + \frac{1}{\alpha} - \alpha = 0 \tag{21}$$

Que tiene como única solución positiva a la cual converge:

$$\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \tag{22}$$

□

Para aproximar el error, utilizamos el pseudo error relativo:

$$\varepsilon_R = |\frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}| \tag{23}$$

Cuando el método está bien utilizado.

3 Punto fijo

Definición 6. *Sea g una función definida y continua en $[a, b]$. g es una contracción sobre $[a, b]$ si:*

$$\exists L / 0 < L < 1 \wedge |g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in [a, b] \tag{24}$$

Si $L \in \mathbb{R}^+$, se dice que cumple la condición de Lipschitz.

Definición 7. *Sea $f : \mathbb{R}$, un punto fijo ξ de $f(x)$ cumple que:*

$$f(\xi) = \xi \tag{25}$$

Teorema 3 (Teorema del punto fijo)**.** *Sea $g(x)$ una función continua en $[a, b]$, y $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$. Si $g(x)$ es contractiva, tiene un único punto fijo $x_i nn[a, b]$ y la sucesión $\{x_k\}$ definida por $x_{k+1} = g(x_k)$, que converge a ξ si $k \to \infty$.*
Esto se cumplirá $\forall x_k \in [a, b]$

Teorema 4. *Sea la iteración definida para el método de iteración de punto fijo donde $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema del punto fijo para un intervalo $[a, b]$.*
Sea un $x_0 \in [a, b]$, sea $\varepsilon > 0$ la tolerancia y sea $k_0(\varepsilon)$ el entero positivo más pequeño tal que $|x_k - \xi| < \varepsilon \forall k \geq k_0(\varepsilon)$:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1 - L))}{\ln(\frac{1}{L})} \right\rfloor + 1 \tag{26}$$

Demostración. Primero, demostramos por inducción que:

$$|x_k - \xi| \leq L^K |x_0 - \xi| \forall k \geq 1 \tag{27}$$

Empezamos por el caso base:

$$|x_1 - \xi| \leq L|x_0 - \xi| \tag{28}$$

Tal que:

$$x_1 = g(x_0) \quad \xi = g(\xi) \tag{29}$$

$$|g(x_0) - g(\xi)| \leq L|x_0 - \xi| \tag{30}$$

Que se cumple $\forall x_0 \in [a, b], L \in (0, 1)$ ya que es contractiva.
Asumimos para $n = p$:

$$|x_p - \xi| \leq L^p |x_0 - \xi| \tag{31}$$

Deberá cumplirse para $n = p + 1$:

$$|x_{p+1} - \xi| = |g(x_p) - g(\xi)| \leq L|x_p - \xi| \leq L^p L|x_0 - \xi| \leq L^{p+1}|x_0 - \xi| \tag{32}$$

Volvemos para el caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} |x_1 - \xi| &\leq L|x_0 - \xi + x_1 - x_1| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \xi| \\ &\leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi| \\ |x_0 - \xi| &\leq |x_0 - x_1| + L|x_0 - \xi| \\ |x_0 - \xi|(1 - L) &\leq |x_0 - x_1| \\ |x_0 - \xi| &\leq \frac{|x_0 - x_1|}{1 - L} \\ |x_k - \xi| &\leq L^K |x_0 - \xi| \leq L^k \frac{1}{1 - L} |x_1 - x_0| \end{aligned} \tag{33}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} |x_k - \xi| &< \varepsilon \forall k \geq k_0 \\ |x_k - \xi| &\leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \varepsilon \\ L^k|x_1 - x_0| \leq \varepsilon(1-L) \end{aligned} \tag{34}$$

Luego despejamos para k:

$$\begin{aligned} k \ln L + \ln|x_1 - x_0| &\leq \ln(\varepsilon(1-L)) \\ \ln|x_1 - x_0| - \ln(\varepsilon(1-L)) &\leq -k \ln L = k \ln(\frac{1}{L}) \\ k > \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln(\frac{1}{L})} \end{aligned} \tag{35}$$

Para que obtengamos los mismos valores y sea una cota superior:

$$K_0(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{\ln(x_1 - x_0) - \ln(\varepsilon(1-L))}{\ln(\frac{1}{L})} \right\rfloor + 1 \tag{36}$$

□

Teorema 5. *Sea $g(x)$ continua y derivable en un intervalo $(\xi - r_0, \xi + r_0)/r_0 > 0$:*

$$|g'(\xi)| < 1 \implies \exists r_0 > 0/\forall r < r_0 \wedge \forall x_0 \in (\xi - r, \xi + r) \tag{37}$$

Vamos a poder construir una sucesión $x_{n+1} = g(x_n)/n \geq 0$ con todos los términos dentro del intervalo. Esta sucesión converge a ξ.
Además, la sucesión de errores $\varepsilon_n = |x_n - \xi|$ no son nulos y:

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to g'(\xi) \tag{38}$$

Teorema 6. *Sea $g(x)$ una función definida, continua y derivable en $(\xi - r_0, \xi + r_0)/r_0 > 0, \xi = g(\xi)$ y $|g'(x)| > 1$:*
Las únicas sucesiones de términos que cumplen $x_{k+1} = g(x_k) \to \xi$ si $k \to \infty$ son aquellos que $x_i = \xi \forall i \in \mathbb{N}$

Demostración. Elegimos $M/1 < M < |g'(\xi)| \implies$ Como $g'(x)$ es continua, elegimos $r/r_0 > r \forall x \in (\xi - r, \xi + r)$.

$$g'(x) \geq M \tag{39}$$

Haremos reducción al absudro:
Supongamos que $\exists \{x_k\}/x_k \neq \xi \forall k \geq 0/\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$. Aplicando el TVM:

$$x_k \in (\xi - r, \xi + r) \implies |x_{k+1} - \xi| = |g(x_k) - \xi| = |g'(\xi_n)(x_k - \xi)| \geq M|x_k - \xi| \tag{40}$$

$$|x_{k+1} - \xi| \geq M|x_k - \xi| \geq M^2|x_{k-1} - \xi| \geq \cdots \geq M^{k-k_0}|x_{k_0} - \xi| \implies |x_{k+1} - \xi| \geq \infty \tag{41}$$

Como $M > 1$, hemos llegado a una contradicción. □

4 Método de Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \tag{42}$$

Se asume que $f'(x_k) \neq 0 \forall k \geq 0$

Teorema 7. *Sea* $f : \mathbb{R}$ *definida y continua en* $I_\gamma = [\xi - \gamma, \xi + \gamma] / \gamma > 0$*, y* $f''(x)$ *continua y* $f(\xi) = 0 \wedge f''(\xi) \neq 0$.
Si $\exists c > 0 / \frac{f''(x)}{f'(y)} \leq c \forall x, y \in I_\gamma$ *y* $|\xi - x_0| \leq h / h = min(\gamma, \frac{1}{c})$ *El método de Newton converge cuadráticamente a* ξ.