Entregable 1

Alejandro Zubiri

Fri Nov 01 2024

Contents

1 Ejercicio 1

Sea $G = e, a, b, c$ un conjunto con la operación $\star$ definida por la siguiente tabla, donde e representa el elemento identidad:

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

1.1 Determina si $(G, \star)$ es un grupo

Vamos a desarrollar las condiciones que debe cumplir cualquier grupo:

1. $\star$ es asociativa
   Esto se puede comprobar realizando dos operaciones:
   $$(a \star b) \star c = c \star c = e \tag{1}$$
   $$a \star (b \star c) = a \star a = e \tag{2}$$
   Como ambos resultados son iguales, podemos confirmar que es asociativa.

2. Existe el elemento neutro respecto a $\star$
   Esto se puede comprobar observando la tabla, donde el elemento neutro es e:
   $$a \star e = a \tag{3}$$
   $$b \star e = b \tag{4}$$
   $$c \star e = c \tag{5}$$

3. Existe el inverso para cada elemento
   Gracias a la tabla, se observa rápidamente que el inverso de cada elemento es el propio elemento:
   $$a \star a = e \tag{6}$$
   $$b \star b = e \tag{7}$$
   $$c \star c = e \tag{8}$$

1.2 $(G, \star)$ es abeliano

Esto es algo fácilmente observable, viendo que la tabla es simétrica respecto a la diagonal:

$$a \star b = b \star a = c \tag{9}$$
$$a \star c = c \star a = b \tag{10}$$
$$c \star b = b \star c = a \tag{11}$$

1.3 Determina si $H = \{e, a\}$ es un subgrupo de G.

Estos elementos forman la tabla

$\star$	e	a
e	e	a
a	a	e

De donde podemos comprobar que es

- Asociativo: $(a \star e) \star a = a \star a = e$
- Existe el neutro, siendo e
- Existe el invero: $a \star a = e \star e = e$

2 Ejercicio 2

Si cierto vector $\vec{u}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ y, éstos satisfacen:

- $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 - \vec{w}_3$
- $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_3$
- $\vec{v}_3 = -\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3$

2.1 Expresa $\vec{u}$ como CL de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, y $\vec{w}_3$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 \\ &= a(\vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 - \vec{w}_3) + b(\vec{w}_2 - \vec{w}_3) + c(-\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3) \\ &= \vec{w}_1(a-c) + \vec{w}_2(4a+b-c) + \vec{w}_3(-a-b+c) \end{aligned} \tag{12}$$

2.2 Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ son LI, ¿qué podemos decir de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, y $\vec{w}_3$?

Si $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ son LI, significa que la única solución al sistema

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0} \tag{13}$$

Es $a = b = c = 0$.
Lo que implica que el sistema

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{\vec{w}_1 + 4\vec{w}_2 - \vec{w}_3, \vec{w}_2 - \vec{w}_3, -\vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3\} \tag{14}$$

Es un sistema libre, lo que implica que

$$< S >= \vec{0} = \vec{w}_1(a-c) + \vec{w}_2(4a+b-c) + \vec{w}_3(-a-b+c) \implies a = b = c = 0 \tag{15}$$

La variedad lineal generada por $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, y $\vec{w}_3$ es

$$a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 \tag{16}$$

Si son LI, entonces la única solución a

$$a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 = \vec{0} \tag{17}$$

es $a = b = c = 0$. Podemos igualarlo a la variedad lineal generada por $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ya que si son LI, tendrán las mismas soluciones al igualarlo a $\vec{0}$.

$$a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 = \vec{w}_1(a-c) + \vec{w}_2(4a+b-c) + \vec{w}_3(-a-b+c) \tag{18}$$

Esto genera el sistema

$$\begin{aligned} a &= a - c \\ b &= 4a + b - c \\ c &= -a - b + c \end{aligned} \tag{19}$$

Solucionando el sistema podemos obtener que $a = b = c = 0$, que implica que los vectores son LI.

3 Ejercicio 3

Determina los valores de k para los cuales el conjunto de vectores $S = \{1 + x, x + x^2, 2 - x + kx^2\}$ forma un sistema libre o ligado en los siguientes casos:
S no es base en ninguno de los casos, ya que tiene 3 elementos, y para $\mathbb{R}_3[x]$ debe tener 4, y para $\mathbb{R}_4[x]$ debe tener 5.
Tampoco puede ser sistema generador en ninguno de los casos, ya que $x^3 \notin S \wedge x^4 \notin S$.
Para ver si S es libre o ligado, podemos analizar el sistema generado al igualar su variedad lineal a $\vec{0}$:

$$< S >= a(1 + x) + b(x + x^2) + c(2 - x + kx^2) = x^2(a + b - c) + x(b + kc) + a + 2c = 0 \tag{20}$$

Esto genera el sistema

$$\left.\begin{aligned} a + b - c = 0 \\ b + kc = 0 \\ a + 2c = 0 \end{aligned}\right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Si calculamos el determinante, obtenemos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + k - (-1) = 3 + k \tag{22}$$

Si $|A| = 0 \implies 3 + k = 0 \implies k = -3$. Por tanto

$$\begin{aligned} k \neq -3 \implies rg(A) = 3 \implies \text{S es libre} \\ k = 3 \implies rg(A) = 2 \implies \text{S es ligado} \end{aligned} \tag{23}$$

Esto se cumplirá tanto para $\mathbb{R}_3[x]$ como para $\mathbb{R}_4[x]$.