

Básicos

La **mecánica cuántica** es actualmente la mejor forma que tenemos de describir los fenómenos más fundamentales. En sí misma, esta es una **herramienta de trabajo**, aplicada a diferentes campos:

- **Electrodinámica cuántica:** mecánica cuántica aplicada a electromagnetismo.
- **Óptica cuántica:** mecánica cuántica aplicada a los fotones.

Linealidad

A la hora de trabajar con una teoría que describa como funciona nuestro mundo, tenemos una serie de **variables dinámicas** (variables no constantes) cuyo valor queremos conocer ya que están relacionadas con la observación de estos fenómenos. Los valores obtenidos en los cálculos de un experimento se pueden comparar a los valores observados durante la ejecución de dicho experimento.

Un ejemplo de una **teoría lineal** es la **teoría del electromagnetismo de Maxwell**. Esto quiere decir que podemos sumar directamente las soluciones de dos fenómenos diferentes para obtener como funcionan en su conjunto, sin cambiar nada. Por ejemplo, con el campo generado **individualmente** por dos cargas q_1 y q_2 , podemos saber como funcionan en su conjunto si sumamos ambos campos: $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Ecuación lineal

Una ecuación lineal es la que tiene la siguiente forma:

$$L(u) = 0$$

Donde L es un operador lineal y u es cualquier valor. Para que L sea un operador lineal, debe cumplir las siguientes propiedades:

- $L(k \cdot u) = k \cdot L(u)$
- $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$

Ejemplo

Sea una ecuación lineal la siguiente:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0$$

Podemos definir Lu como:

$$Lu = 0$$

tal que:

$$Lu = \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u$$

Si quisiéramos obtener el operador L por individual, tendríamos:

$$L = \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}$$

Vamos a comprobar si L es **lineal**:

- $Lku = \frac{dku}{dt} + \frac{1}{\tau}ku = k\left(\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u\right) \checkmark$
- $L(u+v) = \frac{d(u+v)}{dt} + \frac{1}{\tau}(u+v) = \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u + \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v \checkmark$

Mecánica cuántica

La mecánica cuántica **es lineal**, y la ecuación que describe su movimiento es la **ecuación de Schrödinger**. La **variable dinámica** de esta ecuación es la **función de onda** (Ψ). Esta función de onda depende de t (tiempo). Esta ecuación es:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

Donde \hat{H} es el **Hamiltoniano**, un operador lineal. Si definimos esta ecuación como $L\Psi = 0$, obtenemos que:

$$L\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \hat{H} \Psi$$

Se puede observar que L en este caso es un **operador lineal**, lo que implica que esta ecuación **es una ecuación lineal**.

Necesidad de números complejos

En la ecuación de Schrödinger, aparece el valor i , definido como:

$$i = \sqrt{-1}$$

Un número complejo z se define como:

$$z = a + bi \mid \in \mathbb{C}$$

- $Re(z) = a \mid a \in \mathbb{R}$: parte **real**.
- $Im(z) = b \mid b \in \mathbb{R}$: parte **imaginaria**.

Definimos el **conjugador** de z como z^* siendo este:

$$z^* = a - bi$$

La **norma** (o módulo) de un número complejo se define como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \mid |z| \in \mathbb{R}$$

tal que:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = zz^*$$

Como un número complejo se puede representar en un plano de dos dimensiones (x, y) , podemos representar este número complejo mediante su **ángulo** (θ) respecto de la línea de los reales:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

Por tanto:

$$\Psi \in \mathbb{C}$$

Esto implica dos hechos importantes:

- **Todas las soluciones son imaginarias:** puesto que Ψ es imaginario por definición, todas las soluciones **serán imaginarias**.
- **No se pueden medir números imaginarios**

Esto conlleva al problema de que, si la ecuación de onda es imaginaria, ¿cual es su interpretación física?

La “solución” a este problema fue deducida por **Max Born**. Este físico y matemático interpretó que la **norma** de la función de onda era una **probabilidad**:

$$|\Psi|^2 \propto p$$

El famoso gato de Schrödinger fue una analogía para ejemplificar la ridiculez de esta teoría basada en probabilidades.

Determinismo

Tras el trabajo de Einstein, Planck, Maxwell, etc, se observó que los fotones tenían comportamientos tanto de **onda** como de **partícula**. Einstein descubrió que la energía de un fotón era:

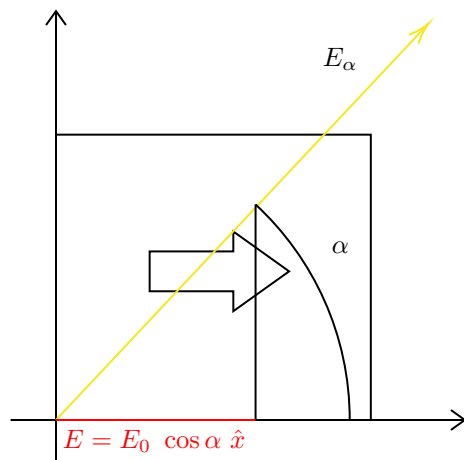
$$E = hf$$

Donde f es la frecuencia de la luz, tal que:

$$\lambda f = c$$

Un polarizador

Definición (Polarizador). *Material que deja pasar la luz o no en función de si esta está alineada con su dirección de preferencia. En la imagen, la dirección de preferencia es la flecha, que está alineada con el eje **X**. La luz alineada con este eje **pasará completamente**. Por el contrario, la luz alineada con el eje **Y**, **no pasará**.*



$$\vec{E}_\alpha = E_0 \cos \alpha \hat{x} + E_0 \sin \alpha \hat{y}$$

Tras pasar por el **polarizador**:

$$E = E_0 \cos \alpha \hat{x}$$

La fracción de fotones que pasa es:

$$\frac{|E|}{|E_a|} = \frac{E_0^2 \cos^2 \alpha}{E_0^2} = \cos^2 \alpha$$

Sin embargo, esto es ciertamente incorrecto, ya que no pueden pasar una fracción de fotones. O bien pasan todos, o bien no pasan ninguno. En física clásica, lo que le pasa a un fotón, le pasa a todos. En la experimentación, observamos que

llevando a cabo el mismo experimento, **obtenemos diferentes resultados**. A veces pasan los fotones, y a veces no.
En conclusión, **se ha perdido el determinismo**.

Variables ocultas

Tras el desastre que supuso la aparente pérdida del determinismo, Einstein, junto a otros, trataron de explicar que la razón por la que aparentemente era imposible predecir el comportamiento de los fotones era debido a la existencia de **variables ocultas**.

Definición (Variables ocultas). *Variables o características de un sistema que determinan el comportamiento de este, pero que sin embargo son desconocidas para el observador, y que por tanto podrían explicar la razón por la que no podemos predecir estos comportamientos. En sí, la naturaleza de estos permite predecirlos, pero carecemos de la información necesaria para hacerlo.*

Representar fotones

Para representar los movimientos de fotones como vectores, Paul Dirac inventó una notación para representarlos utilizando las funciones de onda. Si queremos representar un **fotón** moviéndose en el eje X, se representaría de la siguiente forma:

$$|\text{fotón}; x\rangle$$

o en el eje Y:

$$|\text{fotón}; y\rangle$$

Gracias a la linealidad, si queremos representar estos dos estados como una única **superposición**, simplemente debemos sumarlos y multiplicarlos por su respectiva razón trigonométrica. El estado de este fotón se representaría así:

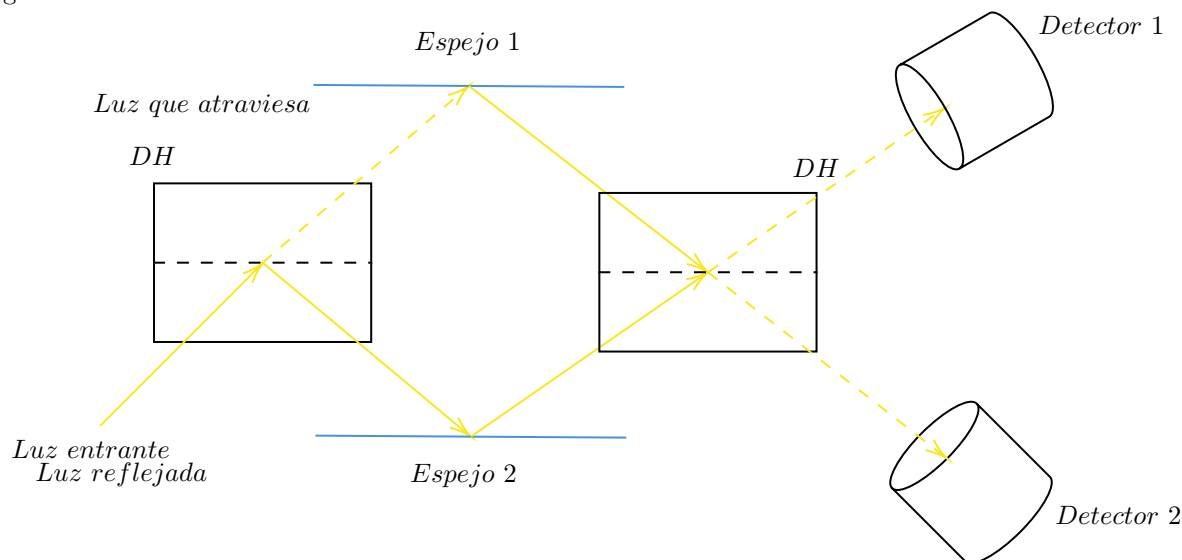
$$|\text{fotón}; \alpha\rangle = \cos \alpha |\text{fotón}; x\rangle + \sin \alpha |\text{fotón}; y\rangle$$

Superposición

Para ilustrar la naturaleza de la superposición cuántica, una de las herramientas que allanarán el camino será el **interferómetro Mach-Zehnder**.

Definición (Interferómetro). *Dispositivo que utiliza las interferencias de ondas para medir longitudes de onda, velocidades de onda y otras características.*

Este dispositivo tiene un **divisor de haz** como se muestra en el siguiente diagrama:



Ahora bien, este experimento debería plantearse como que cada haz de luz representa fotones individuales. Debido a que este experimento trabaja con interferencias, es importante definir qué son estas interferencias.

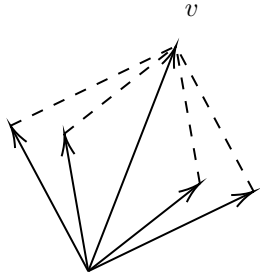
Si por un lado tenemos interferencias **destructivas**, es intuitivo pensar que dos fotones se **destruyen**, entre sí. Sin embargo, esto es imposible, ya que violaría la **ley de conservación de energía**. De la misma forma, si interfiriesen de forma constructiva, no se obtendrían más fotones ni más energía.

Lo que en realidad está pasando, es que cada haz de luz es una **posible posición** del fotón, todas superpuestas, y las interferencias son estas **superposiciones** cancelándose y aumentándose entre sí.

Al pasar por el primer divisor, el fotón está en los dos haces de luz a la vez, y cuando llega al segundo, el fotón interfiere consigo mismo, donde se determina su posición final.

Estados y vectores

Cuando hablamos de estados, podemos asociar estos con vectores. Sin embargo, un único vector puede ser representado como la **suma** de otros vectores:



De la misma forma, podemos representar un único estado como la **superposición** de otros estados.

Para poner esto en práctica, supongamos que estamos en la siguiente situación. Tenemos dos estados: $|A\rangle$ y $|B\rangle$. Cuando medimos una propiedad concreta en $|A\rangle$ (posición, momento, etc), obtenemos un hipotético valor a . Cuando medimos la **misma propiedad** en $|B\rangle$, obtenemos otro hipotético valor b .

Ahora bien, supongamos que tenemos un estado cuántico compuesto de la siguiente forma:

$$\alpha |A\rangle + \beta |B\rangle$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Si ahora medimos esta propiedad, ¿qué resultado obtendremos?

La respuesta es que **a veces** obtendremos a y otras veces b , con diferentes probabilidades. Estas probabilidades se caracterizan por:

$$p(a) \propto |\alpha|^2$$

$$p(b) \propto |\beta|^2$$

Conectemos esto con lo establecido anteriormente.

Cuando desarrollamos la situación con los fotones, establecimos que el estado cuántico de los fotones era el siguiente:

$$|\text{fotón}; \alpha\rangle = \cos \alpha |\text{fotón}; x\rangle + \sin \alpha |\text{fotón}; y\rangle$$

Por lo que la probabilidad de que pasase por los ejes \hat{x} e \hat{y} eran $\cos^2 \alpha$ y $\sin^2 \alpha$, respectivamente.

De la misma forma, cuando calculamos la fracción de fotones que pasarían en el eje \hat{x} y en el eje \hat{y} (que es igual a la probabilidad), determinamos que estas eran $\cos^2 \alpha$ y $\sin^2 \alpha$, respectivamente, que coincide con la probabilidad del estado cuántico. Una importante suposición es que superponer un estado cuántico consigo mismo no tiene **ningún efecto físico**. Es decir que:

$$|A\rangle = 2|A\rangle = n|A\rangle / n \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Esto significa que en algunos casos podremos utilizar un factor que nos sea más conveniente utilizar.

Para tener una intuición de esto, vamos a plantear el caso del polarizador.

A partir de ahora utilizaremos el símbolo gamma (γ) para representar fotones. Tenemos el siguiente estado cuántico:

$$\alpha |\gamma; x\rangle + \beta |\gamma; y\rangle$$

Puesto que el coeficiente no importa, ya que este estado es el más general, podemos multiplicar todo el estado por un factor a elegir, como por ejemplo $\frac{1}{\alpha}$:

$$|\gamma; x\rangle + \frac{\beta}{\alpha} |\gamma; y\rangle$$

De este forma, si decidimos que $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$, nos damos cuenta de que hemos pasado de tener **dos** parámetros complejos (α, β) a tener **uno** (δ).

$$|\gamma; x\rangle + \delta |\gamma; y\rangle$$