Formas Cuadráticas

Alejandro Zubiri

January 10, 2025

Una forma cuadrática es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}/Q = \sum_i \sum_j a_{ij} \in \mathbb{R}$ con términos de grado 2. Un ejemplo es:

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/Q(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy \tag{1}$$

1 Matriz asociada

Sea Q una forma cuadrática y B_c la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Existe una matriz simétrica de orden n tal que:

$$Q(\vec{v}) = \vec{v}^T A\vec{v} \tag{2}$$

Donde $\vec{v}$ son las coordenadas de un vector de $\mathbb{B}_c$. La matriz A es la matriz asociada.
Para calcular esta matriz, a cada variable le corresponde una fila y columna (a x le corresponde la primera fila y colunma, a y la segunda fila y colunma, etc).

- Los elementos de la diagonal corresponden a los coeficientes de variables al cuadrado (x_{ii}^2.
- El resto de coeficientes son donde cortan cada variable, y son la mitad del coeficiente que los acompaña.

2 Signo

Una forma cuadrática será:

- Nula si $Q = 0 \forall \vec{v}$.
- Definida positiva si $Q > 0 \forall \vec{v}$.
- Semidefinida positiva si $Q \geq 0 \forall \vec{v}$.
- Definida negativa si $Q < 0 \forall \vec{v}$.
- Semidefinida negativa si $Q \leq 0 \forall \vec{v}$.
- Indefinida si Q alcanza todo tipo de valores.

2.1 Cálculo del signo

2.1.1 Por autovalores

Sacando los autovalores λ de la matriz asociada:

- Q es DP si $\lambda_i > 0 \forall i$
- Q es SDP si $\lambda_i \geq 0 \forall i$
- Q es DN si $\lambda_i < 0 \forall i$
- Q es SDN si $\lambda_i \leq 0 \forall i$
- Q es IND si λ_i toma tanto valores positivos como negativos.

2.1.2 Por la matriz asociada

Denotamos por Δ_k el $k-$ésimo menor principal de la matriz asociada. Un menor principal siempre contiene el primer elemento.

- DP: $\Delta_k > 0 \forall k$
- DN: $\Delta_k < 0 \forall k$
- Si $\Delta_n \neq 0$ y no estamos en los casos anteriores, Q es IND.
- $\Delta_n = 0$ y $\Delta_k > 0$, es SDP.
- $\Delta_n = 0$ y $(-1)^k \Delta_k > 0$, es SDN.

3 Cambio de base

Sea A' la matriz respecto a $\mathbb{B}'$.

$$A' = (\mathbb{B}')^T A \mathbb{B}' \tag{3}$$

Y, sea $x' = [u]_{B'}$

$$Q(u) = (x')^T A' X' \tag{4}$$