Entrega 1

Alejandro Zubiri Funes

11 de febrero de 2025

Problema 1 [3 puntos]

Si $A = (a_{ij})$ y $S = (s_{ij})$ son matrices $n \times n$ tales que

$$a_{ji} = -a_{ij}$$
$$s_{ji} = s_{ij}$$

demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, s_{ij} = 0.$$

Solución

Si empezamos analizando las consecuencias de ambas restricciones, obtenemos lo siguiente:

- Para la primera matriz, si $a_{ij} = -a_{ji}$, tenemos que la matriz es **antisimétrica**, es decir, los elementos por debajo de la diagonal son los opuestos a los de por encima de la diagonal. Y respecto a la diagonal, se tiene que $a_{ii} = -a_{ii}$, por lo que la única posibilidad es una diagonal llena de ceros.

- Las propiedades de la segunda matriz son análogas, excepto que es **simétrica**, es decir, los elementos por debajo de la diagonal son los mismos a los de por encima de la diagonal. Con esto, obtenemos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos empezar a desarrollar el sumatorio. Para empezar, todo producto de la forma $a_{ii} \cdot s_{ij}$ o $a_{ij} \cdot s_{ii}$ será 0 debido a las propiedades explicadas anteriormente. Respecto al resto de elementos, sabemos que para cada producto $a_{ij}s_{ij}$ existe otro igual con signo negativo. Como los elementos de la diagonal son 0 por sí solos, el resto de los productos se irán cancelando uno a uno hasta obtener que el resultado es 0.

Problema 2 [1’5 puntos + 1’5 puntos]

En las siguientes expresiones el rango de definición de los índices es $\{1, 2, \dots, n\}$, además se usa el criterio de suma de Einstein. Llega, en cada caso, a una expresión algebraica más sencilla.

(a) δ_{ii}.

Solución

Al utilizar el criterio de suma de Einstein, sumamos los índices repetidos hasta un valor n:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ii}$$

Como la delta de Kronecker vale 1 cuando los índices son iguales, todos los elementos del sumatorio van a ser 1, y por tanto:

$$= \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

(b) $\delta_{ij}\, \delta_{jk}$.

Solución

De nuevo, expresamos esto como un sumatorio:

$$= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{jk}$$

Ahora, para que ambos valores valgan 1, se tiene que cumplir que

$$i = j, \quad j = k \implies i = k$$

Para que esto ocurra, hay dos posibilidades:

- Si $i = k \wedge i < n$, entonces hay algún valor j donde $j = i$ y por tanto $j = k$, obteniendo así $\delta_{jj}\delta_{jj} = 1$.

- Si $i \neq k$, entonces en ningún punto ambas delta valdrán 1, y por tanto el sumatorio total será 0.

Problema 3 [2 puntos]

Expande el siguiente sumatorio

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$$

después da el valor correspondiente a cada ϵ y comprueba que obtienes el determinante de la matriz (a_{ij}).

Solución

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij1} a_{1i} a_{2j} a_{31} + \varepsilon_{ij2} a_{1i} a_{2j} a_{32} + \varepsilon_{ij3} a_{1i} a_{2j} a_{33} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i11} a_{1i} a_{21} a_{31} + \varepsilon_{i12} a_{1i} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{i13} a_{1i} a_{21} a_{33} \\
&+ \varepsilon_{i21} a_{1i} a_{22} a_{31} + \varepsilon_{i22} a_{1i} a_{22} a_{32} + \varepsilon_{i23} a_{1i} a_{22} a_{33} \\
&+ \varepsilon_{i31} a_{1i} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{i32} a_{1i} a_{23} a_{32} + \varepsilon_{i33} a_{1i} a_{23} a_{33}
\end{aligned}$$

Como todos los símbolos de Levi-Civita con símbolos repetidos son igual a 0, podemos simplificar este sumatorio y continuar:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i12} a_{1i} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{i13} a_{1i} a_{21} a_{33} + \varepsilon_{i21} a_{1i} a_{22} a_{31} \\
&+ \varepsilon_{i23} a_{1i} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{i31} a_{1i} a_{23} a_{31} + \varepsilon_{i32} a_{1i} a_{23} a_{32}
\end{aligned}$$

Con el objetivo de simplificar, para cada índica i, solo vamos a escribir aquellos términos cuyo símbolo de Levi-Civita no sea 0, es decir, donde los índices no se repitan. Por ejemplo, para $i = 1$, el primer, segundo y tercer término son 0,y así sucesivamente. Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} \\ &+ \varepsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \varepsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} \\ &+ \varepsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

Ahora podemos pasar a evaluar cada símbolo, obteniendo:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{123} = 1 \quad \varepsilon_{231} = 1 \\ &\varepsilon_{132} = -1 \quad \varepsilon_{312} = 1 \\ &\varepsilon_{213} = -1 \quad \varepsilon_{321} = -1 \end{aligned}$$

Y ahora sustituyendo:

$$\begin{aligned} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &- (a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31}) \end{aligned}$$

Si ahora comparamos con el determinante de una 3×3:

$$\begin{aligned} \det(3 \times 3) = &\ a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ &- (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32}) \end{aligned}$$

Vemos que hemos obtenido el mismo resultado.

Problema 4 [2 puntos]

Calcula

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, \epsilon_{ijk}$$

Solución

Como $\varepsilon_{ijk} = 1$ o $\varepsilon_{ijk} = -1$, $\varepsilon_{ijk}^2 = 1$:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij1}^2 + \varepsilon_{ij2}^2 + \varepsilon_{ij3}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i11}^2 + \varepsilon_{i12}^2 + \varepsilon_{i13}^2 \\
&+ \varepsilon_{i21}^2 + \varepsilon_{i22}^2 + \varepsilon_{i23}^2 \\
&+ \varepsilon_{i31}^2 + \varepsilon_{i32}^2 + \varepsilon_{i33}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i12}^2 + \varepsilon_{i13}^2 + \varepsilon_{i21}^2 \\
&+ \varepsilon_{i23}^2 + \varepsilon_{i31}^2 + \varepsilon_{i32}^2
\end{aligned}
$$

De nuevo, vamos a eliminar directamente aquellos elementos que vayan a ser 0 una vez realidad la sustitución, obteniendo así:

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_{123}^2 + \varepsilon_{132}^2 \\
&+ \varepsilon_{213}^2 + \varepsilon_{231}^2 \\
&+ \varepsilon_{312}^2 + \varepsilon_{321}^2
\end{aligned}
$$

Como estos elementos van a ser siempre 1^2 o $(-1)^2$, obtenemos

$$= 6$$