

# Entregable Representación Gráfica

Alejandro Zubiri

December 29, 2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Dominio</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Asíntotas</b>	<b>2</b>
2.1	Verticales . . . . .	2
2.2	Horizontales . . . . .	2
2.3	Oblicuas . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Monotonía y extremos relativos</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Curvatura</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Boceto y representación</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Imagen</b>	<b>4</b>

Queremos representar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln |x| \quad (1)$$

## 1 Dominio

El dominio de la función es:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \quad (2)$$

## 2 Asíntotas

### 2.1 Verticales

El único punto conflictivo es en  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \ln |x| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} + \ln |x| = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln |x| = \infty \end{cases} \quad (3)$$

Por tanto, hay una asíntota vertical en  $x = 0$ .

### 2.2 Horizontales

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \ln |x| &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \ln |x| &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} + \ln |x| = \infty \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.3 Oblicuas

La pendiente de la recta oblicua en  $+\infty$  es:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\ln |x|}{x} = \quad (5)$$

La primera parte tiende a 0, y al tener una indeterminación de tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , aplicamos L'Hôpital:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (6)$$

Por tanto, no hay asíntota oblicua en  $+\infty$ . Si miramos en  $-\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad (7)$$

De nuevo, podemos aplicar L'Hôpital para obtener un resultado similar, donde vemos que tampoco hay asíntota oblicua en  $-\infty$ .

### 3 Monotonía y extremos relativos

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{x-1}{x^2} \quad (8)$$

Podemos igualar a 0 para encontrar los extremos relativos:

$$f'(x) = 0 \implies x-1 = 0 \implies x = 1 \quad (9)$$

Si evaluamos la derivada en puntos cercanos al extremo, vemos que por la izquierda es negativa, y que por la derecha es positiva, lo que indica que  $x = 1$  es un mínimo relativo.

Además, la función es decreciente  $\forall x \in (-\infty, 1)$  y creciente  $\forall x \in (1, \infty)$ .

### 4 Curvatura

La segunda derivada de la función es:

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2-x}{x^3} \quad (10)$$

Para obtener los puntos donde la curvatura cambia, igualamos la segunda derivada a 0, obteniendo:

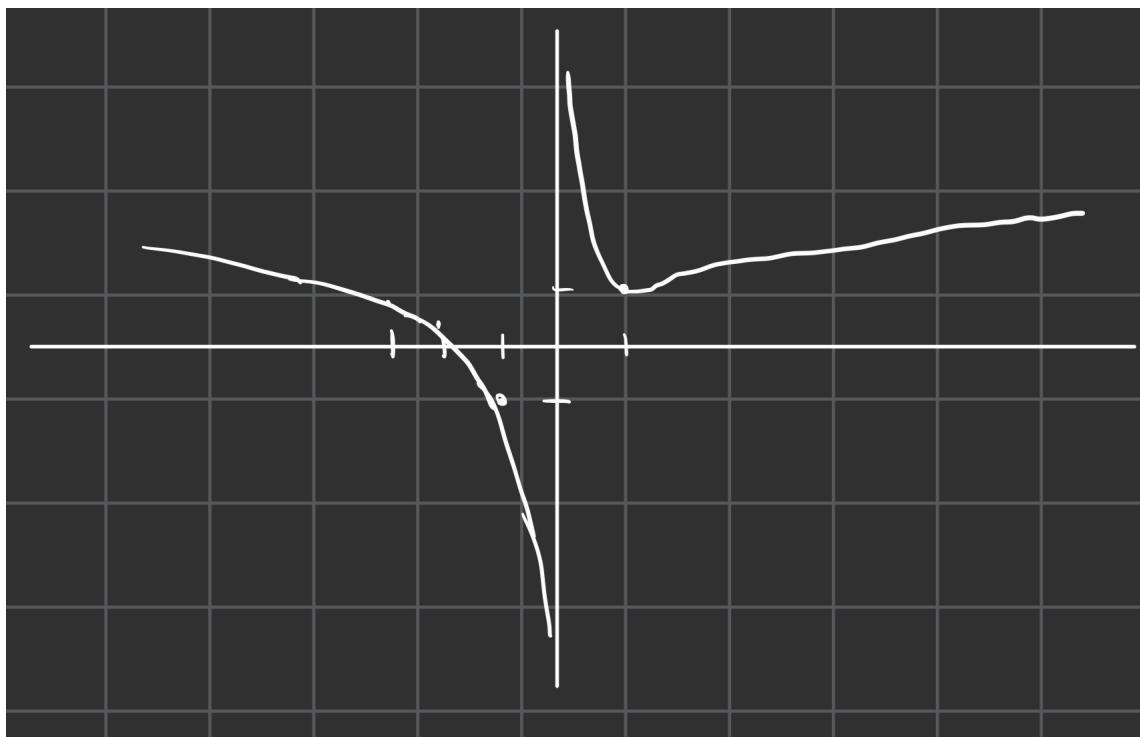
$$f''(x) = 0 \implies 2-x = 0 \implies x = 2 \quad (11)$$

De nuevo, evaluando a la izquierda la segunda derivada es positiva, y a la derecha es negativa, lo que indica que la función es cóncava hacia abajo  $\forall x \in (-\infty, 2)$  y cóncava hacia arriba  $\forall x \in (2, +\infty)$ .

### 5 Boceto y representación

Evaluando en algunos puntos podemos realizar el siguiente boceto de la función:

x	f(x)
1	1
-1	-1
-2	0.19
-3	0.76



## 6 Imagen

Una vez hemos analizado la función, podemos afirmar que la imagen de la función es:

$$\text{Im } f = \mathbb{R} \quad (12)$$