Interpolación Polinómica

Alejandro Zubiri

January 20, 2025

1 Joseph-Louis Lagrange

El físico y matemático definió que, dados $n+1$ puntos, y sabiendo sus imágenes, queremos un polinomio de grado $\leq n$ que proporcione dichos valores.

Definición 1. *Definimos los puntos dados como* ***nodos de interpolación****.*

2 Método de los coeficientes indeterminados

Para ello, vamos a definir n ecuaciones:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_nx_2^n = f(x_2) \\ \cdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{gathered} \tag{1}$$

3 Polinomio interpolador de Lagrange

Definición 2. *Definimos como $L_i(x)$ el polinomio de grado n a las bases polinómicas de Lagrange.*

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j} \tag{2}$$

Ahora, definimos el polinomio de Lagrange como:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) \tag{3}$$

4 Cotas de error

Son la diferencia (error) entre $f(x)$ (la función real) y $P(x)$ (el polinomio).

Teorema 1. *Sea f con $n > 0$ derivadas continuas en $[a,b]/\exists f^{n+1)}(x)$ en (a,b) y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y $x_i \neq x_j$ y $P(x)$ el polinomio interpolador de esos puntos. Para cada $x \in [a,b] \exists \xi / min(x_0, \ldots, x_n) < \xi < max(x_0, \ldots, x_n)/$*

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1)}(\xi) \tag{4}$$

Demostración. $x \in [a,b]$ si $\exists n \geq i \geq 0, x_i = x \implies$ se cumple siempre (ya que hemos definido el polinomio como tal). Si $x \neq x_i \forall i \in \mathbb{N} \implies M(x) = \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)\ldots(x-x_{n)}}$

$$\exists \xi \in [a,b]/f^{n+1)}(\xi) = M(n+1)! \tag{5}$$

Sea $g(t) = f(t) - P(t) - M(t-x_0)\ldots(t-x_n)$

$$g^{n+1)} = f^{n+1)}(t) - P^{n+1)}(t) - M(n+1)! \tag{6}$$

Como el grado de $P(t)$ es $\leq n$, esta derivada es 0.

$$= f^{n+1)} - M(n+1)! \tag{7}$$

Ahora queremos saber si $\exists t \in [a,b]/g^{n+1)}(t) = 0$
Si $x = t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - \frac{f(t)-P(t)}{(t-x_0)\ldots(t-x_n)}(t-x_0)\ldots(t-x_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, $g(t) = 0 \implies x = x_0, x_n$, es decir, los nodos.
Por tanto, $g(t)$ tiene $n+2$ raíces distintas, y $g'(t)$ tiene $n+1$ raíces, así que $g^{n+1)}(t)$ tiene una raíz. Hemos llegado a la conclusión deseada. □

5 Método de Newton

Vamos a empezar definiendo un $P_0/\delta(P_0) \leq 0/P_0(x) = f(x_0)\forall x$. Luego

$$P_1(x)/\delta(P_1) \leq 1/P_1(x_0) = f(x_0), P_1(x_1) = f(x_1) \tag{9}$$

Y así hasta

$$P_n(x)/\delta(P_n(x)) \leq n/P_n(x_0) = f(x_0), P_n(x_1) = f(x_1), \ldots P_n(x_n) = f(x_n) \tag{10}$$

5.1 Construcción

Tenemos que $P_0(x) = f(x_0)$. Luego:

$$P_1(x) = f(x_0) + Q_1(x) \implies Q_1(x_0) = 0 \tag{11}$$

Como $\delta(Q_n) \leq n$, será de la forma:

$$Q_n(x) = c_n(x - x_0) \dots (x - x_n) \tag{12}$$

Para construirlo, utilizaremos el método de diferencias divididas.

5.2 Método de diferencias divididas

Sean $n+1$ puntos $x_0, \dots, x_n / n > 0$ diferentes entre sí y $f(x)$ definida en esos puntos. Vamos a llamar diferencia dividida de f en los puntos como $f[x_0, \dots, x_n]$ al coeficiente en el desarrollo de potencias de x en el PIN. El número n es el orden de la diferencia dividida.

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0 + f[x_0, \dots x_n](x - x_0) \dots (x - x_n) \tag{13}$$

Tal que

$$f[x_0, \dots x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{14}$$

Así hasta llegar a:

$$f[x] = f(x) \tag{15}$$

Lo que nos deja con la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} P(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \\ f[x_3, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots \end{aligned} \tag{16}$$