Movimiento Circular

Alejandro Zubiri

Tue Oct 08 2024

Contents

1 Resumen

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$

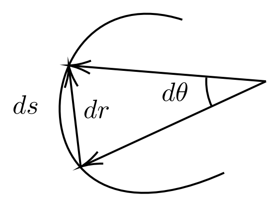
$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$\vec{v} = |v|\vec{u_t}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{u_t}} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u_n} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{u_n}$

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$

$= \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$



Para empezar con algunas definiciones básicas, definimos la velocidad lineal de una partícula en un movimiento circular de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1}$$

Donde $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular y $\vec{r}$ es el vector posición. Ambas son funciones de tiempo. Más precisamente:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \tag{2}$$

2 Movimiento Circular Uniforme

Este movimiento se caracteriza por $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega = cte$.

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega \tag{3}$$

Si despejamos para ω e integramos, obtenemos el cambio en el ángulo en función del tiempo:

$$\int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Si establecemos $\theta = 2\pi$, es decir, una vuelta entera

$$2\pi = \omega t \tag{5}$$

Y si despejamos en función de t

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = T \tag{6}$$

Obtenemos el tiempo que tarda nuestra partícula en dar una vuelta, que es lo que entendemos por **período**.
Además, tenemos la siguiente relación:

$$ds = Rd\theta \tag{7}$$

Que podemos despejar como

$$d\theta = \frac{ds}{R} \tag{8}$$

Si dividimos ambos lados por dt:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} \tag{9}$$

Obteniendo así:

$$R\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} \tag{10}$$

Por definición, la velocidad es

$$\vec{v} = \vec{u_t}|v| \tag{11}$$

Donde u_t representa el vector director unitario de la velocidad. Despejando con respecto a este, tenemos que

$$\vec{u_t} = \frac{\vec{v}}{|v|} = \frac{1}{|v|}(v_x, v_y) = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{12}$$

El vector normal a este

$$\vec{u_n} = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{13}$$

La derivada con respecto al tiempo del vector unitario es:

$$\frac{du_t}{dt} = (\frac{d\cos\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\sin\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}) = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta, cos\theta) = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_n} \tag{14}$$

Obteniendo la siguiente relación:

$$\frac{du_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_n} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{u_n} \tag{15}$$

Vamos a desarrollar la **aceleración**. La aceleración es, por tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{u_t}|v|) = \frac{du_t}{dt}|v| + u_t\frac{d|v|}{dt} \tag{16}$$

Si utilizamos los resultados de la ecuación 11, obtenemos que

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t}\vec{u_t} + \frac{|v|^2}{R}\vec{u_n} \tag{17}$$

Donde identificamos $\frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t}\vec{u_t}$ como la aceleratión tangencial $\vec{a_t}$ y $\frac{|v|^2}{R}\vec{u_n}$ como la aceleración normal $\vec{a_n}$

3 Movimiento Circular Uniformemente Acelerado

En este caso, la aceleración no es cero, y por tanto nuestra velocidad angular **no** es constante. Definimos la aceleración angular $\vec{\alpha}$ como:

$$\vec{\alpha} = |\alpha|\vec{k} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{k} \tag{18}$$

La aceleración tangencial es

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \times \vec{R} + \omega \times \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{19}$$

Si recordamos, $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha}$ y $\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$. Si realizamos estas substituciones, obtenemos

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \tag{20}$$

Lo que nos daría como resultado una ecuación de movimiento $\theta(t)$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{21}$$