Entrega 2

Alejandro Zubiri Funes

March 1, 2025

Problema 1

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Halla los puntos en los que f es continua. [1 punto]

Solución

La función no presenta problemas ni discontinuidades en ningún otro punto excepto $\mathbf{x} = (0,0)$, donde podría llegar a ser discontinua. Para ello, vamos a tomar el límite de (x,y) tendiendo a $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Como la función *sin* está acotada entre $[-1,1]$, no tenemos que preocuparnos por el hecho de evaluar $\sin(\infty)$. Por tanto, estamos en una situación donde tenemos una constante por un valor que se acerca a 0, y por tanto, el límite es 0.
Por tanto, como el límite y el valor de la función coinciden, es continua en ese punto, y por tanto lo es en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Halla los puntos en los que existen las primeras derivadas parciales de f. [1 punto]

Solución

Primer determinamos las respectivas derivadas parciales de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} \ \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ahora se puede observar que ambas funciones están definidas para todo $\mathbb{R}^2$. El único problema sería en $(x,y) = (0,0)$, pero hemos definido la función para que sea igual a 0, por lo que existe en todos los puntos.

(c) Halla los puntos en los que f es diferenciable. [1 punto]

Solución

Para que f sea diferenciable en un punto $\mathbf{x}$, las derivaras parciales de f deben existir y ser continuas en una cierta bola $B_r(\mathbf{x})$. Como sabemos que estas derivadas existen en todo $\mathbb{R}^2$, falta ver si estas son continuas en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Como cos está acotado, solo es necesario fijarse en el término de la izquierda. Para ello, vamos a comprobar el límite cuando se sigue el camino $y = mx : m \in \mathbb{R}$:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2mx^2}{x^4(1+m^2)^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{2m}{x^2(1+m^2)^2} = \infty$$

Como no coincide con el valor de la derivada en ese punto, no es continua, y por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(d) Halla, si existe, la derivada de f respecto del vector $\boldsymbol{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ en el punto $\boldsymbol{a} = (1,0)$. [1 punto]

Solución

Nos interesa obtener lo siguiente:

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

Como hemos obtenido ambas derivadas parciales, podemos rápidamente evaluar ambas en el punto $\mathbf{a} = (1,0)$ para obtener que:

$$\nabla f(1,0) = (0, \sin(1))$$

Y ahora para obtener la derivada direccional correspondiente, simplemente calculamos el producto escalar de este vector con el vector $\mathbf{v}$:

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) = (0, \sin(1)) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{4}{5}\sin(1)$$

Problema 2

Sea f la función definida en todo $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y-1} & \text{si } y \neq 1 \\ 0 & \text{si } y = 1 \end{cases}$$

(a) Estudia si f es continua y diferenciable en $(0,1)$. [1 punto]

Solución

Haciendo esto y lo otro...

(b) Halla el vector unitario en cuya dirección es mínima la correspondiente derivada direccional de f en el punto $(1,0)$. [1 punto]

Solución

Haciendo esto y lo otro...

(c) Halla la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$. [1 punto]

Solución

Haciendo esto y lo otro...

Problema 3

Halla los planos tangentes a las siguientes superficies en los puntos indicados

(a) $z = x^2 + y^2$ en $(3, 1, 10)$. [1 punto]

Solución

Haciendo esto y lo otro...

(b) $x^2 + (y-2)^2 + 2z^2 = 4$ en $(1, 3, -1)$. [1 punto]

Solución

Haciendo esto y lo otro...

(c) $yz = \ln(x + z)$ en $(0, 0, 1)$. [1 punto]

Solución

Haciendo esto y lo otro...