Entregable 2

Alejandro Zubiri

Tue Dec 03 2024

Contents

Ejercicio 1

(a) Expresa H como variedad lineal y en forma implícita

$$\begin{pmatrix} a+c & b+c \\ a+c & -a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Por tanto:

$$H = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > \tag{2}$$

(b) Puesto que la tercer matriz es la suma de las dos primeras, la base del subespacio sería[1]:

$$B_H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \} \tag{3}$$

Como $\#B_H = 2 \implies dim(H) = 2$.
Para obtener las ecuaciones implícitas, igualamos una matriz genérica de incógnitas a las matrices de la base:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= a \\ t &= -a+b \end{aligned} \tag{4}$$

Y ahora despejamos, obteniendo que:

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ t + x - y &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Así que el subespacio en forma implícita sería:

$$H = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} x, y, z, t \in \mathbb{R} / x - z = 0, t + x - y = 0 \} \tag{6}$$

(c) Para saber si pertenece a la base, sustituimos los componentes en las ecuaciones y vemos si las cumplen:

$$\begin{aligned} x - z &= 3 - 3 = 0 \\ t + x - y &= 2 + 3 - 5 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Por tanto, pertenece al subespacio.

[1] No se ha demostrado explícitamente, pero es fácil ver que estos dos vectores son LI.

(d) Primero debemos comprobar que todos los vectores de este conjunto pertenecen a la base:

$$x - y = 1 - 0 = 1 \neq 0 \tag{8}$$

Como el primero no pertenece, este conjunto no puede ser base.

(e) Primero expresamos este subespacio en forma de variedad lineal para obtener su base:

$$H =< \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > \tag{9}$$

Si son el mismo subespacio, deberán generar los mismos vectores, y por tanto también los vectores de la base. Esto significa que también deberán cumplir con las ecuaciones implícitas:

$$x - y = 0 - 2 = -2 \neq 0 \tag{10}$$

Luego no pertenece a la base y luego no son el mismo subespacio.

Ejercicio 2

Tenemos el siguiente subespacio:

$$U = \{A \in M_{3\times3}/tr(A) = 0\} \tag{11}$$

Esto nos deja con el siguiente subespacio:

$$U = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3\times3}/a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\} \tag{12}$$

Ahora resolvemos la ecuación asignando parámetros genéricos:

$$a_{11} + q + z = 0 \implies a_{11} = -q - z \tag{13}$$

Dejándonos así el siguiente subespacio:

$$U = \{ \begin{pmatrix} -q - z & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} /b, c, p, q, r, x, y, z \in \mathbb{R}\} \tag{14}$$

De donde podemos (tediosamente) extraer la siguiente base:

$$\begin{split} B_U = \{ & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} \end{split} \tag{15}$$

Puesto que $\#B_U = 8 \implies dim(U) = 8$

Ejercicio 3

$$\begin{aligned} U = \{(a, b, a-b, a-2b)/a, b \in \mathbb{R}\} = &< (1,0,1,1), (0,1,-1,-2) > \\ \implies B_U = \{(1,0,1,1), (0,1,-1,-2)\} & \end{aligned} \tag{16}$$

Para sacar las ecuaciones implícitas:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= b \\ z &= a-b \\ t &= a-2b \end{aligned} \tag{17}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} z - x + y &= 0 \\ t - x + 2y &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Para W:

$$W = \{(x, y, z, t)/x - z = 0, x + y - z + t = 0\} \tag{19}$$

Al tener dos ecuaciones (dos grados de libertad), asignamos $x = a$ e $y = b$:

$$\begin{aligned} z &= a \\ a + b - a + t &= 0 \implies t = -b \end{aligned} \tag{20}$$

Obteniendo así:

$$W = \{(a, b, a, -b)/a, b \in \mathbb{R}\} \tag{21}$$

De donde obtenemos que:

$$B_W = \{(1,0,1,0), (0,1,0,-1)\} \tag{22}$$

Para hallar $U \cap W$, buscamos el subespacio que cumpla con todas las ecuaciones **únicas** de ambos subespacios. Para determinar el número de ecuaciones únicas, buscamos el rango de la matriz formada por las coeficientes de las ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Podemos calcular que $\det(A) = -1 \neq 0 \implies$ las cuatro ecuaciones son independientes. Esto implica que el sistema es SCD, por lo que la única solución es:

$$x = y = z = t = 0 \tag{24}$$

Es decir:

$$U \cap W = \{\vec{0}\} \tag{25}$$

Debido a que $U \cap W = \{\vec{0}\}$, sabemos que:

$$U + W = U \oplus W \tag{26}$$

Ahora, gracias a la ecuación de Grassmann:

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4 \tag{27}$$

Puesto que la dimensión del subespacio es igual a la dimensión del espacio al que pertenece:

$$U + W = \mathbb{R}^4 \tag{28}$$

Y por tanto:

$$U \oplus W = \mathbb{R}^4 \tag{29}$$