Probabilidad

Definiciones

Experimento aleatorio

Aquel del cual repitiéndolo en las mismas condiciones, **no puedo predecir el resultado**.

Espacio muestral

Conjunto de **todos los posibles resultados** de un experimento aleatorio.

Suceso

Subconjunto del espacio muestral.

Contrario de un suceso

Conjunto de valores que **no** están en el conjunto de sucesos. Se expresa como $\hat{A}$ o A^c.

Operaciones con conjuntos

Unión

Conjunto de los elementos que están en A, en B, o en ambos. Se expresa con $A \cup B$.

Intersección

Conjunto de elementos que están en A **y** en B. Se expresa como $A \cap B$.

Leyes de De Morgan

El contrario de la unión es la intersección de contrarios, y el contrario de la intersección es la unión de contrarios.

$$A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- **Ejemplo**: lanzar un dado.
  Espacio muestral:

  $$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Suceso:

  $$A: \text{ sacar un número par.} = \{2, 4, 6\}$$

  $$B: \text{sacar número mayor a dos} = \{3, 4, 5, 6\}$$

  Unión:

  $$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Intersección:

  $$A \cap B = \{4, 6\}$$

  Contrario de un suceso:

  $$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

Cálculo de probabilidades

Regla de Laplace

Dado un suceso A de un experimento aleatorio, se define $p(A)$ como la **probabilidad** de que ocurra el suceso A, y se calcula como:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos totales}}$$

Axiomática de Kolmogorov

1. Probabilidad de que ocurra un suceso: $p(A) \geq 0$
2. Probabilidad de que ocurra algo del experimento: $p(E) = 1$
3. Si dos sucesos son **incompatibles** o **mutuamente excluyentes**: $A \cap B = \varnothing$

Propiedades de la probabilidad

1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
2. $0 \leq p(A) \leq 1$
3. $p(\varnothing) = 0$
4. Si $A \subset B \implies p(A) \leq p(B)$
5. $p(A - B) = p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$
6. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Teorema de Bayes - Probabilidad condicionada

La probabilidad de que ocurra un suceso **después** de que ocurra otro primero. Dados 2 sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A **si** ha ocurrido B es:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B)}$$

Sucesos independientes

Si el hecho de que ocurra A no depende de que ocurra B, decimos que A y B **son independientes**.

$$p(A/B) = p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

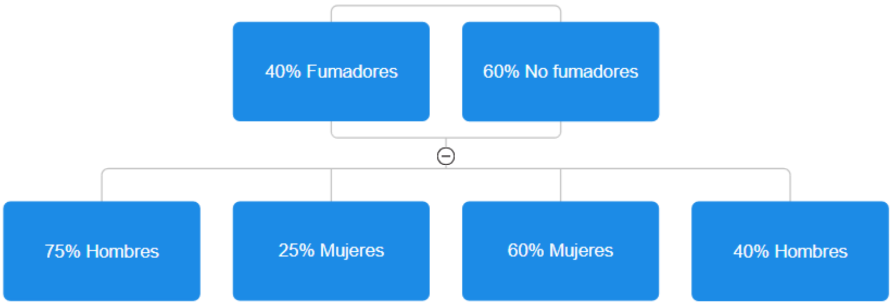
$$p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)$$

Si se cumple ese producto, dos sucesos **independientes**.

Teorema de la probabilidad total y regla de Bayes

Ejemplo: un médico observa que el 40% de sus pacientes son fumadores. De estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres.
F: "fuman" - H: "hombre" - M: "mujer"

Diagrama de árbol



a) Probabilidad de que sea mujer - aplicando **probabilidad total**

$$p(M) = p(F \cap M) + p(\bar{F} \cap M) = p(F) \cdot p(M/F) + p(\bar{F}) \cdot p(M/\bar{F}) =$$
$$0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.6 = 0.46$$

b) Probabilidad de fumar y ser hombre

$$p(F \cap H) = p(F) \cdot p(H/F) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3$$

c) Probabilidad de que fume sabiendo que es mujer

$$p(F/M) = \frac{p(F \cap M)}{p(M)} = p(F) \cdot \frac{p(M/F)}{p(M)} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.46} =$$