Álgebra Vectorial

Alejandro Zubiri

Mon Oct 14 2024

Contents

1 Espacio Vectorial

Un espacio vectorial es una terna $(V; +, \cdot)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, denominado $\mathbb{K} - \mathrm{EV}$. Donde V es un conjunto no vacío, $+$ es una operación interna en V, y $\cdot$ una operación de un elemento de V con uno de $\mathbb{K}$ denominado producto por escalar.

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V \tag{1}$$

Para que sea un espacio vectorial siendo $u, v, w \in V$ y $c, t \in \mathbb{K}$, debe cumplir que:

1. La suma es asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. La suma es conmutativa: $u + v = v + u$
3. Existe el neutro para la suma: $\exists \bar{0} \in V / u + \bar{0} = u$
4. Existe inverso para la suma: $\forall u \in V \exists u^{-1} / u + u^{-1} = \bar{0}$
5. Producto por escalar es distributivo respecto a la suma: $c(u+v) = cu+cv$
6. $(c + t)u = cu + tu$
7. $(c \cdot t) \cdot u = c(tu)$
8. Existe neutro para producto: $\exists I \in V / uI = Iu = u, \forall u \in V$

1.1 Bases

Una base es un sistema de vectores libre que a su vez es un sistema generador. Para que se cumpla que un sistema S es una base, basta con comprobar las siguientes condiciones.

- La cardinalidad del sistema es igual a la dimensión del espacio.
- Es un sistema libre.
- El sistema es generador.

Teorema (Teorema)**.** *Todas las bases de un espacio vectorial finitamente generado (con base no infinite) no nulo tienen el mismo número de elementos.*

1.2 Bases canónicas

Son aquellas bases "simplificadas" de cada espacio:

- $\mathbb{R}^2 : \; B_c = \{(1,0), (0,1)\}$
- $\mathbb{R}_2[x] : \; B_c = \{1, x, x^2\}$

1.3 Matriz de cambio de base

Definimos una matric C compuesta por las coordenadas de los vectores de la segunda base respecto a la primera base.
Si tenemos dos bases $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $B_2 = \{e_1, \ldots, e_b\}$, podemos escribir la matriz que cambia de B_1 a B_2 como:

$$C = ([u_1]_{B_2}, \ldots, [u_n]_{B_2}) \tag{2}$$

Las coordenadas se escriben **en columnas**.
Si X y X' son las coordenadas de un $u \in V$ respecto a B_1 y B_2, se cumple que:

$$\begin{aligned} X' &= CX \\ X &= C^{-1}X' \end{aligned} \tag{3}$$

Estas se conocen como las **ecuaciones de cambio de base**.

1.4 Dimensión

La dimension n de un espacio vectorial es el número de elementos de una de sus bases.

Teorema (Teorema)**.** *Sea V un espacio vectorial de dimensión n:*

- *Un conjunto LI de n vectores es una base.*
- *Un conjunto generador de n vectores es una base.*
- *Los sistemas generadores tienen mínimo n vectores.*
- *Un sistema de vectores es generador si tiene n vectores LI.*
- *Los sistemas LI tienen máximo n vectores.*
- *El vector nulo $\bar{0}$ no pertenece nunca a una base.*

1.5 Coordenadas

En un espacio vectorial V de dimensión n, las coordenadas de un vector $\bar{v}$ con respecto a una base $\mathfrak{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ son el conjunto de coeficientes $(a_1, \ldots, a_n)$ tal que:

$$\bar{v}_{\mathfrak{B}} = a_1u_1 + \ldots a_nu_n \tag{4}$$

1.5.1 Propiedades

Si $[v]_B = (a_1, \ldots, a_n)$, $[u]_B = (b_1, \ldots, b_b)$ y $r \in \mathbb{K}$:

- $[v]_B + [u]_B = [u + v]_B$
- $r[v]_B = [rv]_B$

2 Sistema de vectores

Un sistema de vectores es un conjunto finito de vectores que pertenecen a un espacio vectorial V:

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}/u_i \in V \tag{5}$$

2.1 Combinación lineal

Decimos que un vector u es combinación linea de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ que cumpla que:

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{6}$$

Una combinación lineal es una forma de generar vectores.

2.2 Variedad lineal

Con k vectores finitos, la variedad lineal generada por $< u_1, u_2, \ldots, u_n >$ es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales. La cardinalidad de una variedad lineal es infinita, excepto la variedad lineal del elemento nulo: $< \bar{0} >= \bar{0}$

2.3 Sistema generador

Un sistema generador es un sistema de vectores cuya variedad puede generar todo el espacio vectorial:

$$< S >= V \tag{7}$$

3 Espacios Vectoriales Comunes

3.1 EV Común R^n

Un vector de R^n es una lista de n elementos.

- $+ : R^n \times R^n \to R^n$
- $\cdot : R \times R^n \to R^n$
- Neutro: $\bar{0}$

3.2 EV Común $M_{2\times 2}$

De **orden definido**:

- $+ : M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$
- $\cdot : R \times M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$
- Neutro: $\bar{0}$

3.3 Polinomios

Definidos como $R_n[x]$, de la forma $ax^2 + bx + c$

- $+ : R_n[x] \times R_n[x] \to R_n[x]$
- $\cdot : R \times R_n[x] \to R_n[x]$
- Neutro: $\bar{0}$

4 Tipos de sistemas

Un sistema **ligado** es aquel en el que algún vector es CL del resto. Si igualasemos al sistema a cero, tendríamos un **SCI**.
Un sistema **libre** es aquel donde todos los vectores son LI. Sería un sistema **SCD**.
El rango de una matriz de vectores es el número de vectores LI.

5 Subespacios Vectoriales

Un conjunto de vectores contenido en el espacio vectorial inicial. Deben cumplir las siguientes condiciones:

- Clausura en la suma.
- Clausura en el producto por escalar.
- El vector nulo está incluido

5.1 Propiedades

Sea H un subespacio vectorial:

- Una variedad lineal siempre es un SEV
- Los SEV triviales son $H_1 = \{\vec{0}\}$ y $H_2 = \{V\}$
- Tienen bases y dimensión
- $dim(H) \leq dim(V)$

5.2 SEV como variedad lineal

- $dim(< H >) = rg(H)$
- Una base de $< H >$ son los vectores LIs de H.

5.3 SEV en forma paramétrica

Ej:

$$H = \{(a, 1, b)/a, b \in \mathbb{R}\} \tag{8}$$

- Tiene estructura de SEV
- Viene dado por parámetros

5.4 SEV en forma implícita

Ej:

$$\{(x, y, z)/x + y = 0, z = 0\} \tag{9}$$

- Estructura de SEV
- Las ecuaciones lineales
- Formado por las soluciones a las ecuaciones
- Siempre tiene la solución homogénes (vector nulo)
- $dim(H) = dim(V) -$ n eqs. LI

5.5 Suma e intersección de subespacios

5.5.1 Intersección

Denotada como $H \cap W$, es el conjunto de vectores que pertenece tanto a H como a W:

$$H \cap W = \{v/v \in H \wedge v \in W\} \tag{10}$$

Cumple que:

- $H \cap W$ es siempre SEV.
- $H \cap W$ es no vacío, ya que al menos tiene el vector nulo.
- $dim(H \cap W) \leq min(dim(W), dim(H))$

5.5.2 Suma

Denotada $H + W$, es el conjunto de vectores que se pueden expresar como una suma de un vector de H y otro de W:

$$H + W = \{v/v = u + e/u \in H \wedge e \in W\} \tag{11}$$

- $H + W$ tiene estructura de SEV.

- $dim(H+W) = dim(H)+dim(W)-dim(H\cap W)$ (Ecuación de Grassman).
- Si $H \cap W = \{\vec{0}\}$, entonces $H + W = H \bigoplus W$ (suma directa). Cada $v \in H \bigoplus W$ se puede expresar de forma única como un vector de H y de W.