# Interpolación Polinómica

Alejandro Zubiri

January 10, 2025

## 1 Joseph-Louis Lagrange

El físico y matemático definió que, dados $n+1$ puntos, y sabiendo sus imágenes, queremos un polinomio de grado $\leq n$ que proporcione dichos valores.

**Definición 1.** *Definimos los puntos dados como **nodos de interpolación**.*

## 2 Método de los coeficientes indeterminados

Para ello, vamos a definir $n$ ecuaciones:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_n x_2^n = f(x_2) \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{gathered} \tag{1}$$

## 3 Polinomio interpolador de Lagrange

**Definición 2.** *Definimos como $L_i(x)$ el polinomio de grado $n$ a las bases polinómicas de Lagrange.*

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j} \tag{2}$$

Ahora, definimos el polinomio de Lagrange como:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \tag{3}$$

## 4 Cotas de error

Son la diferencia (error) entre $f(x)$ (la función real) y $P(x)$ (el polinomio).

**Teorema 1.** *Sea $f$ con $n > 0$ derivadas continuas en $[a,b]/\exists f^{n+1)}(x)$ en $(a,b)$ y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y $x_i \neq x_j$ y $P(x)$ el polinomio interpolador de esos puntos. Para cada $x \in [a,b]\exists \xi / min(x_0, \ldots, x_n) < \xi < max(x_0, \ldots, x_n)/$*

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1)}(\xi) \tag{4}$$

*Demostración.* $x \in [a,b]$ si $\exists n \geq i \geq 0, x_i = x \implies$ se cumple siempre (ya que hemos definido el polinomio como tal). Si $x \neq x_i \forall i \in \mathbb{N} \implies M(x) = \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}$

$$\exists \xi \in [a,b]/f^{n+1)}(\xi) = M(n+1)! \tag{5}$$

Sea $g(t) = f(t) - P(t) - M(t-x_0)\ldots(t-x_n)$

$$g^{n+1)} = f^{n+1)}(t) - P^{n+1)}(t) - M(n+1)! \tag{6}$$

Como el grado de $P(t)$ es $\leq n$, esta derivada es 0.

$$= f^{n+1)} - M(n+1)! \tag{7}$$

Ahora queremos saber si $\exists t \in [a,b]/g^{n+1)}(t) = 0$
Si $x = t$:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - P(t) - \frac{f(t)-P(t)}{(t-x_0)\ldots(t-x_n)}(t-x_0)\ldots(t-x_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, $g(t) = 0 \implies x = x_0, x_n$, es decir, los nodos.
Por tanto, $g(t)$ tiene $n+2$ raíces distintas, y $g'(t)$ tiene $n+1$ raíces, así que $g^{n+1)}(t)$ tiene una raíz. Hemos llegado a la conclusión deseada. □