Entrega 1

Alejandro Zubiri Funes

4 de febrero de 2025

Problema 1 [3 puntos]

Si $A = (a_{ij})$ y $S = (s_{ij})$ son matrices $n \times n$ tales que

$$a_{ji} = -a_{ij}$$
$$s_{ji} = s_{ij}$$

demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, s_{ij} = 0.$$

Solución

Si empezamos analizando las consecuencias de ambas restricciones, obtenemos lo siguiente:

- Para la primera matriz, si $a_{ij} = -a_{ji}$, tenemos que la matriz es **antisimétrica**, es decir, los elementos por debajo de la diagonal son los opuestos a los de por encima de la diagonal. Y respecto a la diagonal, se tiene que $a_{ii} = -a_{ii}$, por lo que la única posibilidad es una diagonal llena de ceros.

- Las propiedades de la segunda matriz son análogas, excepto que es **simétrica**, es decir, los elementos por debajo de la diagonal son los mismos a los de por encima de la diagonal. Con esto, obtenemos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos empezar a desarrollar el sumatorio. Para empezar, todo producto de la forma $a_{ii} \cdot s_{ij}$ o $a_{ij} \cdot s_{ii}$ será 0 debido a las propiedades explicadas anteriormente. Respecto al resto de elementos, al ser una matrix $n \times n$, podemos reescribir los elementos del sumatorio como los siguientes pares:

$$a_{ij} \cdot s_{ij} + a_{ji} \cdot s_{ji}$$

Si ahora sustutuimos las restricciones iniciales:

$$a_{ij} \cdot s_{ij} - a_{ij} \cdot s_{ij} = 0$$

Como podemos realizar esta sustitución para cada elemento del sumatorio, la suma total es 0.

Problema 2 [1'5 puntos + 1'5 puntos]

En las siguientes expresiones el rango de definición de los índices es $\{1, 2, \ldots, n\}$, además se usa el criterio de suma de Einstein. Llega, en cada caso, a una expresión algebraica más sencilla.

(a) δ_{ii}.

Solución

Haciendo esto y lo otro...

(b) $\delta_{ij}\,\delta_{jk}$.

Solución

Haciendo esto y lo otro...

Problema 3 [2 puntos]

Expande el siguiente sumatorio

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,a_{1i}\,a_{2j}\,a_{3k}$$

después da el valor correspondiente a cada ϵ y comprueba que obtienes el determinante de la matriz (a_{ij}).

Solución

Haciendo esto y lo otro...

Problema 4 [2 puntos]

Calcula

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk}$$

Solución

Haciendo esto y lo otro...