Geometría

Terminología

$\vec{V}$: vector
$\vec{u}$: vector director
$|u|$: módulo
P: punto
P_c: punto de corte
α: plano
$\vec{n_\alpha}$: vector normal de un plano

Vectores

$A = (a_1, a_2, a_3)$
$B = (b_1, b_2, b_3)$
$\vec{AB} = B - A$
$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Producto Escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$

Eq. Vectorial	Eq. Paramétrica
$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$	$x = a_1 + \lambda \cdot u_1$ $y = a_2 + \lambda \cdot u_2$ $z = a_3 + \lambda \cdot u_3$
Eq. Continua	**Eq. General**
$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$	$Ax + By + Cz + D = 0$ $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Planos

Eq. Vectorial	Eq. Paramétrica	
$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$	$x = a_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1$ $y = a_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2$ $z = a_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3$	

Partimos de dos vectores que definen un plano:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{AP} = P - A = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$$

Definimos el plano como:

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - a_1 \\ u_2 & v_2 & y - a_2 \\ u_3 & v_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Al ser la tercera columna la resta de las dos primeras, este determinante es igual a 0, por tanto:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Recta normal de un plano

Se forma por los valores que multiplican a x, y, z:

$$\alpha = Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{n_\alpha} = (A, B, C)$$

Intersecciones

Recta - Recta

Dadas dos rectas $\vec{u}$ y $\vec{v}$, podemos encontrar su punto de intersección P solo si se cumple que **ambas rectas están en el mismo plano**.

$$\vec{u} \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\vec{v} \equiv \begin{cases} x = -4 - \mu \\ y = 3 + 2\mu \\ z = 7 + 5\mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 + 3\lambda &= -4 - \mu \\ 4 + 5\lambda &= 3 + 2\mu \\ 2 - 2\lambda &= 7 + 5\mu \end{aligned}$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, podemos introducir esos valores en cualquier de ambas rectas, y obtendremos $P(x, y, z)$.

Plano - recta

Hay diferentes casos para la intersección entre una recta $\vec{r}$ y un plano π:

1. $\vec{r} \parallel \pi \Rightarrow$ no hay punto de intersección.
    1. Para comprobar este caso, el *producto escalar* entre la recta $\vec{r}$ y la recta normal del plano $\vec{n_\pi}$ es igual a 0 (o si el ángulo θ entre ellos es 90):

    $$\vec{r} \cdot \vec{n_\pi} = |r| \cdot |n_\pi| \cdot \cos\theta = 0$$

2. $\vec{r} \equiv \pi \Rightarrow$ todos los punto de la recta pertenecen al plano.
    1. Para saber si una recta $\vec{r}$ y un plano π son coincidentes, podemos elegir dos puntos arbitrarios de la reca A_r y B_r, y si estos puntos pertenecen al plano π, significa que la recta está contenida en el plano.
    2. Para comprobar si un punto pertenece a un plano, podemos sustituir las coordenadas (x, y, z) en la ecuación del plano, y si la igualdad se cumple, es que el punto pertenece al plano.
3. $\vec{r}$ corta a $\pi \Rightarrow$ un punto de intersección.
    1. Podemos saber si una recta corta a un plano si el producto escalar entre la recta $\vec{r}$ y la normal del plano $\vec{n_\pi}$ no es igual a 0.

2. Para sacar el punto de corte, sustituimos los valores de las ecuaciones paramétricas de la recta $\vec{r}$ en la ecuación general del plano π. Si esto da una **única solución**, el plano y la recta **se cortan**. Si esto da **infinitas soluciones**, el plano y la recta **son coincidentes**: Si no da **ninguna solución**, son paralelos.

Plano - Plano

Para encontrar la intersección entre dos planos α y π, planteamos las ecuaciones generales de ambos planos en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{Bmatrix}$$

Al tener dos ecuaciones y tres incógnitas, tenemos un **grado de libertad**. Por tanto, podemos asignar una de esas incógnitas a un valor arbitrario λ:

$$\begin{Bmatrix} Ax + By = -C\lambda - D \\ A'x + B'y = -C'\lambda - D' \end{Bmatrix}$$

A continuación, despejamos x e y, y planteamos la ecuación de la nueva recta $\vec{r}$, que será la recta de intersección entre ambos planos:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda(p, q, r)$$

Sin embargo, si este sistema no tiene solución, los planos son **paralelos**. También podemos plantear las ecuaciones de los planos en una matriz A y su respectiva ampliada A', y si el sistema es incompatible $(S.I.)$, es que **no tiene solución**, y por tanto, son paralelos.

Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas como intersecciones entre planos:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

Dadas dos rectas paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \mu v_1 \\ y = b_2 + \mu v_2 \\ z = b_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Construimos el vector $\vec{Q} = \vec{A_r A_s} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & Q_1 \\ u_2 & v_2 & Q_2 \\ u_3 & v_3 & Q_3 \end{pmatrix}$$

$rg(A)$	$rg(A')$	Posición relativa	Tipo de sistema
2	3	Se cruzan	S.I.
2	2	Se cortan	S.C.D.
1	2	Paralelas	
1	1	Coincidentes	

Posición relativa entre planos

Dos planos

$$\begin{Bmatrix} \alpha = Ax + By + Cz + D = 0 \\ \beta = A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{Bmatrix}$$

Secantes	**Paralelos**	**Coincidentes**
$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

Secantes	Paralelos	Coincidentes

Tres planos

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha = Ax + By + Cz + D = 0 \\ \beta = A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \delta = A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

$rg(a)$	$rg(A')$	**Posición relativa**	**Tipo de sistema**
1	1	3 planos coincidentes	S.C.I.
1	2	2 planos coincidentes y uno paralelo	S.I.
"	"	3 planos paralelos	"
2	2	2 planos coincidentes y uno secante	S.C.I.
"	"	3 planos formando un haz de planos	"
2	3	2 planos paralelos y uno secante	S.I.
"	"	3 planos secantes formando un triángulo	"
3	3	3 planos cortando en un punto	S.C.D

Posición relativa entre plano y recta

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

1. Si nos dan una recta como intersección de planos

$$r \equiv \left\{\begin{array}{c} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{array}\right.$$

$$m = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

$$m' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

$rg(M)$	$rg(M')$	Posición relativa	Tipo de sistema
2	2	Recta contenida en el plano	S.C.I.
2	3	Recta paralela al plano	S.I.
3	3	Recta secante al plano	S.C.D.

2. Recta con otra ecuación

$$r \equiv \begin{cases} \vec{u_r} = (a, b, c) \\ P_r = (x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \vec{n_\pi} = (A, B, C) \end{cases}$$

$$\text{Si } \vec{u_r} \cdot \vec{n_\pi} \neq 0 \implies r \nparallel \pi \implies r \text{ y } \pi \text{ son secantes.}$$

$$\text{Si } \vec{u_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0 \implies \begin{cases} \text{Si } P_r \notin \pi \implies r \parallel \pi \\ \text{Si } P_r \in \pi \implies r \in \pi \end{cases}$$

Simetría

Punto simétrico respecto de una recta.

Dado un punto

$$P = (a, b, c)$$

y una recta

$$r \equiv \frac{x - p_1}{u_1} = \frac{y - p_2}{u_2} = \frac{z - p_3}{u_3}$$

Para encontrar el punto simétrico P', debemos :

- Comprobamos que $P \notin r \implies$ sustituimos los valores de P en r, y si alguna λ, no coincide $\implies P \notin r$.
- Encontrar el plano π, tal que π es perpendicular a r, y pasa por el punto P $(\pi / \pi \perp r \wedge P \in \pi)$.
    - Como $r \perp \pi \implies \vec{u_r} = \vec{n_\pi} \implies \pi \equiv r_1 x + r_2 y + r_3 z + D = 0$.
    - Como $P \in \pi$, sustituimos P en π, y despejamos D, para obtener la ecuación final del plano.
- Encontrar la intersección Q entre π y r $(Q = \pi \cap r)$.
    - Con r en forma paramétrica, sustituimos los valores en el plano π, despejamos λ, y sustituimos la λ obtenida en la recta r.
- Encontrar P', que es $P + 2\vec{PQ}$.
    - Obtenemos $\vec{PQ}$, que es el vector que va desde P hasta el punto de intersección Q. Después, P' será dos veces $\vec{PQ}$ desde P.

Ejemplo

$P = (5, 2, -5)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

$$\vec{n_\pi} = \vec{u_r} = (1, 1, 1)$$

$$\pi \equiv x + y + z + D = 0$$

$$5 + 2 - 5 + D = 0 \implies D = -2$$

$$\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$$

$$\pi \cap r = 4 + \lambda + 1 + \lambda - 3 + \lambda - 2 = 0 \implies 3\lambda = 0 \implies \lambda = 0$$

$$\pi \cap r = r(0) = (4, 1, -3)$$

$P' = 2P_\pi - P = 2(4, 1, -3) - (5, 2, -5) = (8, 2, -6) - (5, 2, -5) = (3, 0, -1)$

Punto simétrico respecto de un plano

Dado un punto

$$P = (a, b, c)$$

y un plano

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

1. Comprobamos que $P \notin \pi$
2. Hallamos $P_\pi \implies$ proyección ortogonal de P sobre π
    1. Recta $r \perp \pi \land P \in r$
3. Hallamos $P_\pi = r \cap \pi \implies$ Sustituimos las paramétricas de r en π.
4. Hallamos $P' \implies \frac{P+P'}{2} = P_\pi \implies P' = 2P_\pi - P$

Ejemplo

$P = (4, -4, 3)$
$\pi \equiv x - y - 2z + 2 = 0$

1. $P \in \pi \implies 4 - -4 + 2 \cdot 3 + 4 \neq 0$
2. $\vec{u_r} = \vec{n_\pi} = (1, -1, 2)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

3. $$4 + \lambda - (-4 - \lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2 = 0 \implies \lambda = -1$$
$$P_\pi = r(-1) = (3, -3, 5)$$

4. $P' = 2(3, -3, 5) - (4, -4, 3) = (6, -6, 10) - (4, -4, 3) = (2, -2, 7)$

Proyección ortogonal de recta sobre plano

- Posición relativa entre π y r.
- Calculamos el punto de intersección $A = \pi \cap r$ y un punto cualquiera P.
- Calculamos la proyección de P sobre π.
- Calculamos la proyección ortogonal como $\vec{AP}$.

Ejemplo

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\pi \equiv x - z = 0$$

1. Posición relativa de r y π
   $\vec{u_r} = (1, -1, -1); \vec{n_\pi} = (1, 0, -1)$
   $\vec{u_r} \cdot \vec{n_\pi} = 2 \neq 0 \implies \exists \pi \cap r.$
2. Hallamos $A / A = \pi \cap r$
   $1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \implies 2\lambda - 2 = 0 \implies \lambda = 1$
   $A = r(1) = (2, -2, 2)$
3. Proyección de un punto de r sobre π
   $P = (1, -1, 3)$

$$\vec{u_s} = (1, 0, -1)$$

$$P_s = (1, -1, 3)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$1 + \lambda - (3 - \lambda) = 0 \implies -2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = 1$$

$$P_\pi = s(1) = (2, -1, 2)$$

4. Hallar r_π
   $\vec{u_{r_\pi}} = \vec{AP_\pi} = P_\pi - A = (2, -1, 2) - (2, -2, 2) = (0, 1, 0)$

$$r_\pi \equiv \frac{x - 2}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{0}$$

Vector perpendicular a dos rectas

Dadas dos rectas r y s, podemos calcular el vector director de la recta perpendicular a ambas t mediante:

$$\vec{u_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}$$

Distancia entre dos rectas

Dadas dos recas r y s, si estas no son paralelas, calcularemos su distancia más corta entre ellas de la siguiente forma:

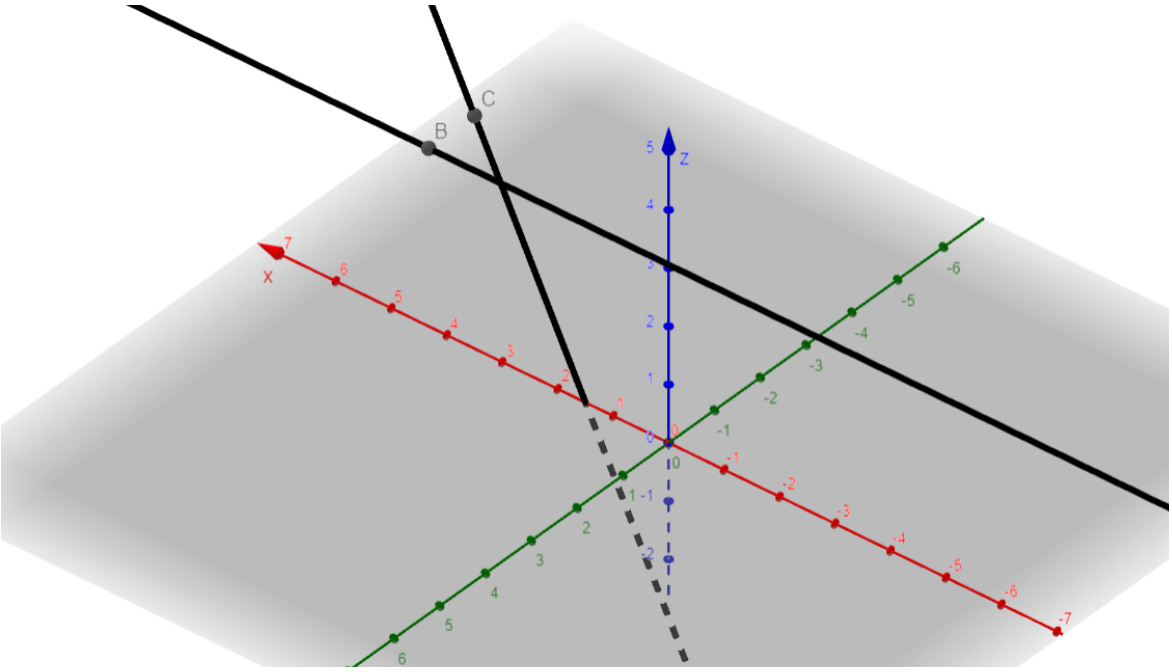
- Sacamos el vector t perpendicular a ambas:

$$\vec{u_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}$$

- Planteamos la siguiente ecuación:

$$r(\lambda) = s(\mu) + t(\delta)$$

  Donde $r(\lambda)$ es un punto de la recta r, que es igual a su punto más cercano de la recta s, más la recta t:



Ángulos

Ángulo entre dos rectas

Sea α el ángulo **más pequeño** entre dos rectas r y s:

$$\vec{u_r} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{v_s} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\cos\alpha = \cos(\hat{r, s}) = \frac{|\vec{u_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{u_r}| \cdot |\vec{v_s}|}$$

- **Ejemplo**
  Ángulo formado por

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{k} - 3\vec{j} - 2\vec{i} = (-8, -3, 2)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

$$\vec{u_s} = (2, -1, 1)$$

$$\cos(\hat{r, s}) = \frac{|\vec{u_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{u_r}| \cdot |\vec{v_s}|} = \frac{|-8 \cdot 2 - 3 \cdot -1 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{8^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{6}}$$

$$(\hat{r, s}) = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{6}}\right) = 59,22^{\text{o}}$$

Ángulo entre planos

Dados dos planos α y β:

$$\cos(\hat{\alpha, \beta}) = \cos(\hat{\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta}}) = \frac{|\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|}$$

- **Ejemplo**
  Comprueba que los planos $\pi \equiv 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ y τ determinado

por $A=(2,-3,0)$, $B=(-1,1,1)$ y $C=(0,0,0)$ son perpendiculares.
$\vec{AB}=(-3,4,1)$
$\vec{AC}=(-2,3,0)$

$$\tau \equiv \begin{vmatrix} -3 & -2 & x-2 \\ 4 & 3 & y+3 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \tau \equiv -9z-2y-6-(3x-6-8z)=0$$

$$\tau \equiv -3x-2y-z=0$$

$\vec{n_\pi}=(2,-4,2)$
$\vec{n_\tau}=(-3,-2,-1)$
$\vec{n_\pi}\times\vec{n_\tau}=(2,-4,2)\times(-3,-2,-1)=-6+8-2=0 \implies \cos(\hat{\pi,\tau})=0$
$(\hat{\pi,\tau})=90^{\text{o}} \implies \pi\perp\tau$

Ángulo entre recta y plano

Dado un plano π y una recta r

$$\cos(\hat{r,\pi})=\cos(90-\alpha)=\sin\alpha=\frac{|\vec{n_\pi}\cdot\vec{u_r}|}{|\vec{n_\pi}|\cdot|\vec{u_r}|}=$$

$$(\hat{r,\pi})=90-(r,\hat{\vec{n_\pi}})$$

- **Ejemplo**
  Ángulo entre $\pi\equiv 2x-y-z-4=0$

$$r\equiv\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 3x-3y+2z=-3 \end{cases}$$

$$\vec{u_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}-(-3\vec{k}+2\vec{j}-3\vec{i})=(1,1,0)$$

$\vec{n_\pi}=(2,-1,-1)$

$$\cos(\vec{u_r},\hat{\vec{n_\pi}})=\frac{2\cdot 1-1\cdot 1-1\cdot 0}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$(\vec{u_r},\hat{\vec{n_\pi}})=73,22^{\text{o}})$$

$$(r,\hat{}\pi) = 90 - 73,22 = 16.78^{\text{o}}$$

Distancias

Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos A y B, la distancia entre ellos es:

$$d(A,B) = |\vec{AB}|$$

- **Ejemplo: 08.01, EJ.31**
  $A = (2,1,2)$

Distancia entre punto y recta

Sea una recta r, un punto P:
Formamos un plano $\pi/\pi \perp r \cap P \in \pi$
Calculamos la intersección entre π y r
La distancia entre P y r es:

$$d(P,r) = d(P, \pi \cap r) = |P\vec{\pi} \cap r|$$

- **08.01, EJ.31**
  $A = (2,1,2)$
  $B = (0,4,1)$

$$r \equiv x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

$C = (\lambda, 2+\lambda, 3+2\lambda)$

$$d(A,C) = d(B,C)$$

Distancia entre recta y recta

Dadas dos rectas en su forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} \vec{u_r} = (r_1, r_2, r_3) \\ P_r = (p_1, p_2, p_3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} \vec{v_s} = (s_1, s_2, s_3) \\ Q_s = (q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Seguiremos los siguientes pasos:
Crearemos un plano π que contenga $\vec{u_r}, \vec{v_s}$ y P_r

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & x - p_1 \\ r_2 & s_2 & y - p_2 \\ r_3 & s_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

Después, encontraremos la distancia entre el plano π y Q_s (el punto de la recta que no está en en plano)

$$d(r, s) = d(\pi, P_s) = \frac{|A \cdot q_1 + B \cdot q_2 + C \cdot q_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$