Parcial: Aproximación numérica Nombre y Apellidos: ______________________________
Curso 2023/24 Fecha: 5 de diciembre de 2023

Por favor, desarolla el procedimiento para llegar a tu respuesta. No se puntuarán resultados que no estén debidamente justificados. Cada ejercicio debe ser resuleto en una hoja distinta. El tiempo de duración del examen es de 2 horas. Una vez finalizado el examen, se debe escanear y subir a la entrega habilitada en blackboard. Posteriormente, debes entregar todas las hojas del examen, incluído el enunciado, al docente.

1. **(1,25 puntos)** Sea $f(x)$ una función continua para todo $\mathbb{R}$ y derivable en el intervalo cerrado $[-10, 10]$, de forma que $f(2) = 2$ y $\int_0^2 3xf'(x)\,dx = 1$. Calcula el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. **(1,5 puntos)** Enuncia y demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

3. **(1,25 puntos)** Calcula el área que queda encerrada dentro del bucle definido por la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

4. **(2 puntos)** Usando $\hat{\mathrm{e}} = 2.71828$ como aproximación del número e:
   (a) **(1 punto)** Indica cuál es el error absoluto y relativo que se comete al calcular e^4, $2\mathrm{e}$ y e^{e}.
   (b) **(1 punto)** Averigua cuántas cifras exactas se han de tomar para obtener el producto $A = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}$ con cuatro cifras exactas.

5. **(2 puntos)** Considera la siguiente tabla de valores

x_i	-4	-3	2	-6
y_i	-16	-5	-10	-50

   (a) **(1 punto)** Plantea el problema de interpolación polinómica. Resuelvelo mediante el método de coeficientes indeterminados
   (b) **(1 punto)** Resuleve el problema de interpolación polinómica mediante el método de Lagrange, explicando paso a paso el procedimiento.

6. **(2 puntos)** Plantea el pseudocódigo en MATLAB de una función ("interpolacionLagrange") que implemente el método de interpolación de Lagrange y devuelva la interpolación en un punto recibido como argumento. Indica los argumentos de entrada y su significado, el/los argumentos de salida, así como la declaración de la función y el procedimiento para implementarla.
   PISTA: implementa primero una función "calculaBasesLagrange", que será llamada desde la función "interpolacionLagrange".

Parcial: Aproximación numérica Nombre y Apellidos: ______________________________

Curso 2023/24 Fecha: 5 de diciembre de 2023

SOLUCIONES

1. **(1,25 puntos)** Sea $f(x)$ una función continua para todo $\mathbb{R}$ y derivable en el intervalo cerrado $[-10, 10]$, de forma que $f(2) = 2$ y $\int_0^2 3xf'(x)\,dx = 1$. Calcula el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$.

   Resolvemos la integral $\int_0^2 3xf'(x)\,dx$ mediante el cambio de variable $u = 3x$ y $dv = f'(x)dx \Rightarrow du = 3dx$ y $v = f(x)$. Por tanto:

$$\int_0^2 3xf'(x)\,dx = 3xf(x)|_0^2 - 3\int_0^2 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$$
$$\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{1-(3\cdot 2\cdot f(2) - 3\cdot 0\cdot f(0))}{3} = \frac{11}{3}.$$

2. **(1,5 puntos)** Enuncia y demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

   Sea f una función diferenciable en el intervalo $[a, b]$, se define F en el intervalo $[a, b]$ como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

   Si f es continua en $c \in [a, b]$ entonces

$$F'(c) = f(c).$$

   <u>Demostración:</u> Cogiendo un intervalo cerrado $[a, x]$ sobre $[a, b]$, ya que $f(t)$ es continua en $[a, b]$, también lo será en $[a, x]$. Entonces, aplicamos el teorema del valor medio para integrales, que nos dice que $\exists \epsilon \in [a, x]$ tal que

$$f(\epsilon) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt.$$

   Haciendo el intervalo muy pequeño de tal manera que $x \to a$, consecuentemente se tiene que $\epsilon \to a$. Es decir:

$$\lim_{\epsilon\to a} f(\epsilon) = \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}.$$

   Como sabemos que $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, podemos reescribir la ecuación como:

$$\lim_{\epsilon\to a} f(\epsilon) = \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt}{x-a}.$$

   Debido a que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt$. Además como f es continua $\lim\limits_{\epsilon\to a} f(\epsilon) = f(a)$:

$$f(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a}.$$

   Aplicando la definición de derivada:

$$f(x)|_{x=a} = \frac{dF}{dx}|_{x=a}.$$

   Como a es genérico $f(x) = \frac{dF}{dx}$, o también

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

   En consecuencia:

$$\forall c \in (a, b): \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt|_{x=c} = f(c)$$

3. **(1,25 puntos)** Calcula el área que queda encerrada dentro del bucle definido por la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

Primero buscamos en que puntos corta la función con sí misma, es decir, los puntos en los que está definido el bucle. Para ello observamos que para un mismo valor de x, y puede ser de dos formas:

$$y_1 = \sqrt{x}(x-1), \qquad y_2 = -\sqrt{x}(x-1).$$

Igualando y_1 con y_2 obtenemos

$$2\sqrt{x}(x-1) = 0 \to \begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Por tanto sabemos que el bucle esta definido desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Para no tener que averiguar si y_1 está por encima o por debajo de y_2, ponemos un valor absoluto en la integral, para que el área resultante quede siempre positiva:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 y_1 - y_2 \, dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 2\sqrt{x}(x-1) \, dx \right| \\ &= 2 \left| \int_0^1 x^{3/2} - x^{1/2} \, dx \right| \\ &= 2 \left| \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \right| \\ &= 8/15 u^2. \end{aligned}$$

4. **(2 puntos)** Usando $\hat{\mathrm{e}} = 2.71828$ como aproximación del número e:

(a) **(1 punto)** Indica cuál es el error absoluto y relativo que se comete al calcular e^4, $2\mathrm{e}$ y e^{e}.
Calculamos las aproximaciones de las cantidades pedidas:

$$p_1 = \hat{\mathrm{e}}^4 = 54.59800, \qquad p_2 = 2\hat{\mathrm{e}} = 5.43656, \qquad p_3 = \hat{\mathrm{e}}^{\hat{\mathrm{e}}} = 15.15420.$$

Mientras que

$$\mathrm{e}^4 = 54.59815, \qquad 2\mathrm{e} = 5.43656, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{e}} = 15.15426.$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{abs}(p_1) &= 1.5 \cdot 10^{-4}, & \mathrm{E}_{rel}(p_1) &= 2.74734 \cdot 10^{-6} = 2.74734 \cdot 10^{-4}\,\% \\ \mathrm{E}_{abs}(p_2) &= 3.6569 \cdot 10^{-6}, & \mathrm{E}_{rel}(p_2) &= 6.7265 \cdot 10^{-7} = 6.7265 \cdot 10^{-5}\,\% \\ \mathrm{E}_{abs}(p_3) &= 6.2241 \cdot 10^{-5}, & \mathrm{E}_{rel}(p_3) &= 4.10719 \cdot 10^{-6} = 4.10719 \cdot 10^{-4}\,\%. \end{aligned}$$

(b) **(1 punto)** Averigua cuántas cifras exactas se han de tomar para obtener el producto $A = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}$ con cuatro cifras exactas.
Sea $\hat{A} = \hat{e} \cdot \hat{e}$, queremos que

$$E_r(\hat{A}) = 2E_r(\hat{e}) = 2\frac{E_A(\hat{e})}{2} = 0.5 \cdot 10^{-n+1} \leq_{(\mathrm{m}=0)} \frac{0.5}{7} 10^{-3} \Rightarrow n - 1 > 3$$

con lo que concluimos que $n > 4$. Es decir, debemos tomar al menos 5 cifras exactas en la aproximación de e para que su producto tenga al menos cuatro cifras exactas.

5. **(2 puntos)** Considera la siguiente tabla de valores

x_i	-4	-3	2	-6
y_i	-16	-5	-10	-50

(a) **(1 punto)** Plantea el problema de interpolación polinómica. Resuelvelo mediante el método de coeficientes indeterminados

El problema de interpolación polinómica consiste en intentar ajustar con un polinomio una serie de puntos obtenidos de una función desconocida. Si por ejemplo observamos los puntos de f de la forma $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^N$ y estamos interesados en conocer el comportamiento de f en otro punto distinto a los anteriores, una aproximación es calcular un polinomio que se "asemeje" a $f(x)$. Para conseguir esta similaridad, forzamos al polinomio a que pase por todos los puntos observados de f, y finalmente interpolamos en el nuevo punto deseado. El polinomio buscado, deberá tener com mucho tantas raíces como puntos -1 observados, y por tanto el problema consiste en obtener un polinomio de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_N \cdot x^N$$

que satisfaga:

$$a_0 + a_1 \cdot x_0 + \ldots + a_N \cdot x_0^N = f(x_0),$$
$$\vdots$$
$$a_0 + a_1 \cdot x_N + \ldots + a_N \cdot x_N^N = f(x_N).$$

Partiendo de este planteamiento, en el caso concreto de los datos del ejercicio tendremos el sistema

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot (-4) + a_2 \cdot (-4)^2 + a_3 \cdot (-4)^3 &= -16, \\ a_0 + a_1 \cdot (-3) + a_2 \cdot (-3)^2 + a_3 \cdot (-3)^3 &= -5, \\ a_0 + a_1 \cdot (2) + a_2 \cdot (2)^2 + a_3 \cdot (2)^3 &= -10, \\ a_0 + a_1 \cdot (-6) + a_2 \cdot (-6)^2 + a_3 \cdot (-6)^3 &= -50. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $a_0 = 4, a_1 = -3, a_2 = -2, a_4 = 0$. Por tanto el polinomio buscado es de la forma

$$P(x) = 4 - 3x - 2x^2$$

.

(b) **(1 punto)** Resuleve el problema de interpolación polinómica mediante el método de Lagrange, explicando paso a paso el procedimiento.

Buscamos el polinomio de la forma $P(X) = \sum_{i=0}^{3} b_i \cdot l_i(x)$, donde $b_i = f(x_i)$ y:

$$l_0(x) = \frac{(x+3)(x-2)(x+6)}{(-4+3)(-4-2)(-4+6)} = \frac{1}{12}(x^3 + 7x^2 - 36)$$
$$l_1(x) = \frac{(x+4)(x-2)(x+6)}{(-3+4)(-3-2)(-3+6)} = \frac{-1}{15}(x^3 + 8x^2 + 4x - 48)$$
$$l_2(x) = \frac{(x+4)(x+3)(x+6)}{(2+4)(2+3)(2+6)} = \frac{1}{240}(x^3 + 13x^2 + 54x + 72)$$
$$l_3(x) = \frac{(x+4)(x+3)(x-2)}{(-6+4)(-6+3)(-6-2)} = \frac{-1}{48}(x^3 + 5x^2 - 2x - 24)$$

El polinomio buscado entonces es:

$$\begin{aligned} P(x) =& \frac{-16}{12}(x^3 + 7x^2 - 36) + \frac{5}{15}(x^3 + 8x^2 + 4x - 48) \\ & - \frac{10}{360}(x^3 + 13x^2 + 54x + 72) + \frac{50}{48}(x^3 + 5x^2 - 2x - 24) \\ =& 4 - 3x - 2x^2. \end{aligned}$$

6. **(2 puntos)** Plantea el pseudocódigo en MATLAB de una función ("interpolacionLagrange") que implemente el método de interpolación de Lagrange y devuelva la interpolación en un punto recibido como argumento. Indica los argumentos de entrada y su significado, el/los argumentos de salida, así como la declaración de la función y el procedimiento para implementarla.
PISTA: implementa primero una función "calculaBasesLagrange", que será llamada desde la función "interpolacionLagrange".

```
function [p] = interpolacionLagrange(x,y, punto)
   n = length(x);
   b = y;
   l = [ ]
   for i=0:n
      l = [l, calculaBasesLagrange(i, x, punto)]
   end
   p = sum(b.*l);


function [l] = calculaBasesLagrange(i,x,punto)
   num = 1;
   den = 1;
   n = length(x);
   for j=0:n
      if j != n:
         num = num*(punto-x[j]);
         den = den*(x[i]-x[j]);
   end
   l = num/den;
```