Aproximación Numérica
Curso 2023/24

Entrega 1: fecha límite 21 diciembre

---

1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\text{sen}(x)}{2x} + \frac{1}{2}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ x\mathrm{e}^x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

   (a) Determina si existe un valor para a para que la función f sea continua, y en caso afirmativo calcúlalo.

   (b) Decide si existe algún valor para a para que la función sea derivable en $x = 0$, y en caso afirmativo calcúlalo.

   (c) Calcula $\int_1^{\ln 5} f(x)dx$.

2. Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ con $\int_a^b f(x)dx = 0$. Demuestra que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

3. Calcula el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2} dt}.$$

4. Halla una función polinómica de tercer grado $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

   - $f'(x) = x^2 - 3x$,
   - El valor del máximo relativo es el doble del valor del mínimo relativo.

5. Calcular la diferencia de $a = a_1 - a_2$ de los números aproximados de a_1 y a_2 y evaluar los errores absoluto y relativo del resultado, si $A_1 = 17.5 \pm 0.02$ y $A_2 = 45.6 \pm 0.03$.

6. Calcular el número de cifras exactas de $a = a_1 \cdot a_2$ donde $a_1 = 3.1416$ y $a_2 = 2.72$ son aproximaciones con todas sus cifras exactas de π y e, respectivamente.

7. El peso específico p del agua a diversas temperaturas centígradas t es como sigue

t	p
0	0.999871
1	0.999928
2	0.999969
3	0.999991

   Aproxime el valor en $t = 4$ utilizando la forma de Lagrange para:

(a) Interpolación lineal en las abscisas 2,3.

(b) Interpolación cuadrática en las abscisas 1,2,3.

(c) Interpolación cúbica en las abscisas 0,1,2,3.

¿Qué interpolación de las anteriores aproxima mejor el valor teniendo en cuenta que su verdadero valor es 1.000000?

8. Calcula el polinomio de interpolación de Newton de la siguiente tabla de valores

x_i	-2	-1	0	1
y_i	6	2	1	0

Para ello:

(a) Calcúlalo primero sin usar el método de diferencias divididas.

(b) Calcúlalo ahora utilizando el método de diferencias divididas ¿Tiene sentido que se obtenga el mismo polinomio?

9. Calcula el error teórico que se comete al aproximar el valor de la función $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ en el punto de abscisas $x = -0.5$ si se interpola en el intervalo $[-1, 1]$ mediante tres puntos equidistantes. Calcula explícitamente el error real cometido.

10. Programa una función en MATLAB llamada *diferenciasdivididas* que reciba un vector de puntos x, otro vector de puntos $y = f(x)$ y un vector *index* que contenga los índices de las x para calcular la diferencia dividida en dichos puntos. Por ejemplo, si $index = [2, 3, 4]$ entonces querremos calcular $f[x_2, x_3, x_4]$. Programa esta función de manera recursiva.

11. A partir de la función anterior, programa una función en MATLAB que implemente el polinomio interpolador de Newton mediante diferencias divididas. Esta nueva función, deberá llamar a la anterior cada vez que se quiera calcular una diferencia dividida. De argumentos recibirá los puntos de abscisas x y los valores de la función $f(x)$ en dichos puntos a partir de los cuales se quiere interpolar, y devolverá una función que será el polinomio interpolador de Newton.

12. A partir de los ejercicios anteriores, prueba a graficar en MATLAB en dos colores distintos la función original y su polinomio interpolador del ejercicio 9. También marca los puntos que se han utilizado para la interpolación.
Nota: Aquellas personas que no hayan realizado el ejercicio 11, no tendrán implementada la función de interpolación de Newton. Dichas personas pueden utilizar la función ya implementada en Matlab llamada “interp1”. Esta función recibe como primer argumento los puntos de la x que se utilizan para construir la interpolación, como segundo argumento $f(x)$ el valor de la función que queremos interpolar en dichos puntos, y como tercer argumento los puntos en los que se quiere interpolar el polinomio resultante. Adicionalmente, para que el polinomio interpolador resultante no sea lineal, deberéis añadir como cuarto argumento la palabra, con comillas simples incluidas, ’Spline’.

Entrega 1: SOLUCIONES

1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\text{sen}(x)}{2x} + \frac{1}{2}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ xe^x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

(a) Determina si existe un valor para a para que la función f sea continua, y en caso afirmativo calcúlalo.

$$-> \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{5\text{sen}(x)}{2x} + \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{5\text{sen}(x) + x}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos(x) + 1}{2} = 3.$$
$$-> \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} xe^x + 3 = 3.$$
$$-> f(0) = a \Rightarrow a = 3.$$

(b) Decide si existe algún valor para a para que la función sea derivable en $x = 0$, y en caso afirmativo calcúlalo.
Para que sea derivable, una condicion necesaria (no suficiente) es que sea continua. Por tanto, para cualquier $a \neq 3$, la función no será derivable en $x = 0$. Tomamos $a = 3$ y comprobamos la derivabilidad:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{5\text{sen}(0+h)}{2(0+h)} + \frac{1}{2} - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{5\text{sen}(h) - 5h}{2h^2} = \frac{0}{0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5\text{sen}(h) - 5}{4h} = \frac{0}{0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{5\text{sen}(h)}{4} = 0. \\ f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)e^{0+h} + 3 - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{he^h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, la función no es derivable en $x = 0$ para ningún valor de a.

(c) Calcula $\int_1^{\ln 5} f(x)dx$.

$$\int_1^{\ln 5} f(x)dx = \int_1^{\ln 5} xe^x + 3dx = 3x|_1^{\ln 5} + \int_1^{\ln 5} xe^x dx = \left[\begin{array}{r} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right]$$
$$= (3x + xe^x)\,|_1^{\ln 5} - \int_1^{\ln 5} e^x\, dx = [3x + e^x(x-1)]_1^{\ln 5} = 8(\ln 5 - 1) \approx 4.88.$$

2. Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$ con $\int_a^b f(x)dx = 0$. Demuestra que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.
   Para que no haya confusión en la notación, vamos a demostrar que $f(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.
   Sea $t \in [a,b]$. Entonces podemos expresar

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx.$$

   Como $f(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$, se verifica que $\int_t^b f(x)dx \geq 0$, y por tanto $0 = \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^t f(x)dx \geq 0$. Deducimos que $\int_a^t f(x)dx = 0$. Como además f es continua en $[a,b]$, la función $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ es derivable en $t \in [a,b]$ y $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Como $F(t) = \int_a^t f(x)dx = 0 \Rightarrow F'(t) = f(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.

3. Calcula el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2} dt}.$$

   Se trata de una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que utilizamos L'Hôpital en conjunto con el teorema fundamental del calculo para derivar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2} dt} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\text{(L'Hopital)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(x \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)\left(\int_0^x \mathrm{e}^{2x^2} dt + x\mathrm{e}^{x^2}\right)}{\mathrm{e}^{2x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)^2}{\mathrm{e}^{2x^2}} + \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2\mathrm{e}^{x^2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)}{\mathrm{e}^{2x^2}} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{2x\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)^2}{\mathrm{e}^{2x^2}}}_{(1)} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt\right)}{\mathrm{e}^{x^2}}}_{(2)}
\end{aligned}$$

Seguimos con (1):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{e^{2x^2}} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\text{(L'Hopital)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2 + 4x\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\left(e^{x^2}\right)}{4xe^{2x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{2xe^{2x^2}} + \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} \\
\text{(L'Hopital)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\left(e^{x^2}\right)}{e^{2x^2}(2+8x^2)} + \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}(1+4x^2)} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} \\
&= \frac{\infty}{\infty} + 0 \\
\text{(L'Hopital)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}(8x^3+10x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(8x^3+10x)} = 0.
\end{aligned}
$$

Ahora resolvemos (2):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{e^{x^2}} &= \frac{\infty}{\infty} \\
\text{(L'Hopital)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right) + 2x^2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{e^{x^2}} + x \\
\left(\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{e^{x^2}} > 0\right) &= \infty
\end{aligned}
$$

Por tanto $(1) + (2) = \infty$.

4. Halla una función polinómica de tercer grado $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

   - $f'(x) = x^2 - 3x$,
   - El valor del máximo relativo es el doble del valor del mínimo relativo.

   Utilizando el teorema fundamental del cálculo sabemos que

$$
f(x) + k = \int f'(x)dx = \int (x^2 - 3x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + k.
$$

   Calculamos su máximo y mínimo relativo:

$$
f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow f(3) = 9 - \frac{27}{2} + k = \frac{-9}{2} + k, \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = k. \end{cases}
$$

Para saber cuál es el máximo y cual es el mínimo, utilizamos la segunda derivada $f''(x) = 2x - 3$. Como $f''(3) > 0$, entonces en $x = 3$ hay un mínimo relativo. Además, como $f''(0) < 0$, entonces en $x = 0$ hay un máximo relativo.
Imponemos la segunda condición, resultando:

$$f(0) = 2f(3) \Rightarrow k = 2\left(\frac{-9}{2} + k\right) \Rightarrow k = 9.$$

Por tanto, la función buscada es $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9$.

5. Calcular la diferencia de $a = a_1 - a_2$ de los números aproximados de a_1 y a_2 y evaluar los errores absoluto y relativo del resultado, si $A_1 = 17.5 \pm 0.02$ y $A_2 = 45.6 \pm 0.03$.

   Se tiene

$$a = 17.5 - 45.6 = -28.1, \quad \Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} = 0.02 + 0.03 = 0.05.$$

   Luego, $A = -28.1 \pm 0.05$. Determinemos el error relativo:

$$\delta_a = \frac{0.05}{|-28.1|} = 1.7794 \cdot 10^{-3} \approx 0.002 = 0.2\%.$$

6. Calcular el número de cifras exactas de $a = a_1 \cdot a_2$ donde $a_1 = 3.1416$ y $a_2 = 2.72$ son aproximaciones con todas sus cifras exactas de π y e, respectivamente.

   Tenemos:

$$a = a_1 \cdot a_2 = 8.545152,$$
$$\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \frac{0.5}{3 \cdot 10^4} + \frac{0.5}{2 \cdot 10^2} \approx 2.52 \cdot 10^{-3}.$$

   Entonces

$$\Delta_a = |a|\delta_a = 8.545152 \cdot 0.00252 \approx 0.02154 \leq 0.05 = 0.5 \cdot 10^{-1},$$

   lo que garantiza sólo dos cifras exactas en a.

7. El peso específico p del agua a diversas temperaturas centígradas t es como sigue

t	p
0	0.999871
1	0.999928
2	0.999969
3	0.999991

   Aproxime el valor en $t = 4$ utilizando la forma de Lagrange para:

   (a) Interpolación lineal en las abscisas 2,3.

   (b) Interpolación cuadrática en las abscisas 1,2,3.

   (c) Interpolación cúbica en las abscisas 0,1,2,3.

¿Qué interpolación de las anteriores aproxima mejor el valor teniendo en cuenta que su verdadero valor es 1.000000?

(a)

$$l_0(x) = \frac{x-3}{-1} = 3-x$$
$$l_1(x) = \frac{x-2}{1} = x-2.$$

El polinomio queda $P_a(x) = f(2)L_0(x) + f(3)l_1(x) = 0.999925 + 0.000022x$. La aproximación buscada es $P_a(4) = 1.000013$.

(b)

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{1(-1)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}$$

El polinomio queda $P_b(x) = f(1)L_0(x) + f(2)l_1(x) + f(3)l_2(x) = 0.999868 + 0.0000695x - 0.0000095x^2$. La aproximación buscada es $P_b(4) = 0.999994$.

(c)

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)}$$
$$l_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{1(-1)(-2)}$$
$$l_2(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{1\cdot 2(-1)}$$
$$l_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

El polinomio queda $P_c(x) = f(0)L_0(x) + f(1)l_1(x) + f(2)l_2(x) + f(3)l_3(x) = 0.999871 + 0.000064x - 0.0000065x^2 - 0.0000005x^3$. La aproximación buscada es $P_c(4) = 0.999991$.

De las tres interpolaciones para $x = 4$, la que más se acerca al valor real es la obtenida mediante el polinomio P_b. Es decir, hay veces que añadiendo más términos al polinomio se pierde precisión, como es el caso.

8. Calcula el polinomio de interpolación de Newton de la siguiente tabla de valores

x_i	-2	-1	0	1
y_i	6	2	1	0

Para ello:

(a) Calcúlalo primero sin usar el método de diferencias divididas.

- $P_0(x) = f(x_0) = 6$.
- $P_1(x) = P_0(x) + Q_1(x) = 6 + c_1(x - x_0)$ tal que $P_1(x_1) = f(x_1) \Rightarrow 2 = 6 + c_1(-1+2) \Rightarrow c_1 = -4$. Por tanto $P_1 = -2 - 4x$.
- $P_2(x) = P_1(x) + Q_2(x) = -2 - 4x + c_2(x - x_0)(x - x_1)$ tal que $P_2(x_2) = f(x_2) \Rightarrow 1 = -2 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = 3/2$. Por tanto $P_2(x) = 3/2x^2 + 1/2x + 1$.
- Finalmente $P_3(x) = P_2(x) + Q_3(x) = 3/2x^2 + 1/2x + 1 + c_2(x+2)(x+1)x$ tal que $P_3(x_3) = f(x_3) \Rightarrow 0 = 3 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow c_3 = -1/2$. Por tanto, $P_3(x) = -x^3/2 - x/2 + 1$.

El polinomio buscado entonces es:

$$P(x) = P_3(x) = -x^3/2 - x/2 + 1.$$

(b) Calcúlalo ahora utilizando el método de diferencias divididas ¿Tiene sentido que se obtenga el mismo polinomio?

x_k	$f[x_k] = y_k$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+3}]$
-2	$f[x_0] = 6$			
-1	$f[x_1] = 2$	$f[x_0, x_1] = -4$		
0	$f[x_2] = 1$	$f[x_1, x_2] = -1$	$f[x_0, x_1, x_2] = 3/2$	
1	$f[x_3] = 0$	$f[x_2, x_3] = -1$	$f[x_1, x_2, x_3] = 0$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1/2$

Por tanto, el polinomio de interpolación de Newton resultante de aplicar diferencias divididas es

$$p(x) = 6 - 4(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)(x+1) - \frac{1}{2}x(x+2)(x+1) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + 1.$$

Tiene sentido que el polinomio por ambos métodos sea el mismo, ya que hemos demostrado en clase que ambos procedimientos son equivalentes.

9. Calcula el error teórico que se comete al aproximar el valor de la función $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ en el punto de abscisas $x = -0.5$ si se interpola en el intervalo $[-1, 1]$ mediante tres puntos equidistantes. Calcula explícitamente el error real cometido.

Al ser $f(x)$ una función infinitamente derivable y estar interpolando con $N = 2$ puntos, podemos aplicar la cota del error cometido que viene expresada como:

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|}{3!} K_3,$$

donde al ser los puntos equidistantes tenemos que $x_0 = -1, x_1 = 0, x_1 = 1$ y $|f(x)^{(3)}| \leq K_3$. Calculemos la cota K_3. Para ello observamos:

$$f^{(1)} = 2x\mathrm{e}^{x^2}, \quad f^{(2)} = (2 + 4x^2)\mathrm{e}^{x^2}, \quad f^{(3)} = (12x + 8x^3)\mathrm{e}^{x^2}.$$

Como $f^{(3)}$ es una función creciente y simétrica impar, el valor absoluto de $f^{(3)}$ alcanza el máximo en el intervalo $[-1, 1]$ en $x = \pm 1$ tomando el valor de aproximadamente 54.46 Por ello, $K_3 = 54.36$. Entonces, para $x = 0.5$:

$$|f(0.5) - P(0.5)| = \frac{|(0.5 + 1)(0.5 - 0)(0.5 - 1)|}{3!} \cdot 54.56 \approx 3.41.$$

Para calcular el error real, debemos calcular el polinomio interpolador (no nos dicen por qué método, así podemos calcularlo como queramos). El polinomio interpolador debe quedar:

$$P(x) = 1 + (\mathrm{e} - 1)\,x^2.$$

Efectivamente el error real es mucho menor que la cota del error teórico:

$$|f(0.5) - P(0.5)| = |e^{0.5^2} - 1.4295| \approx 0.1455$$

.

10. Programa una función en MATLAB llamada *diferenciasdivididas* que reciba un vector de puntos x, otro vector de puntos $y = f(x)$ y un vector *index* que contenga los índices de las x para calcular la diferencia dividida en dichos puntos. Por ejemplo, si $index = [2, 3, 4]$ entonces querremos calcular $f[x_2, x_3, x_4]$. Programa esta función de manera recursiva.

```
>function [res] = diferenciasdivididas(x, y, index):
>   n = length(index);
>   if n == 1
>      res = y(index(1));
>   else
>      res = (diferenciasdivididas(x,y,index(2:n)) - diferenciasdivididas(x,y,index(1:n-
1)))/(x(index(n))-x(index(1)));
>   end
```

11. A partir de la función anterior, programa una función en MATLAB que implemente el polinomio interpolador de Newton mediante diferencias divididas. Esta nueva función, deberá llamar a la anterior cada vez que se quiera calcular una diferencia dividida. De argumentos recibirá los puntos de abscisas x y los valores de la función $f(x)$ en dichos puntos a partir de los cuales se quiere interpolar, y devolverá una función que será el polinomio interpolador de Newton.

```
>   function [res] = interpolacionNewton2(xvalues,yvalues)
>       newtonBasis = [1];
>       n = length(xvalues);
>       for i=1:n-1
>          prevpol = newtonBasis(i);
>          syms x, nextpol = prevpol.*(x-xvalues(i));
>          newtonBasis = [newtonBasis,nextpol];
>       end
>       coefs = [];
>       res = 0 ;
>       for i=1:n
>          coefs = [coefs, diferenciasdivididas(xvalues,yvalues,[1:i])];
>          basis = newtonBasis(i);
>          syms x, res = res + coefs(i).*basis;
>       end
>    end
```

12. A partir de los ejercicios anteriores, prueba a graficar en MATLAB en dos colores distintos la función original y su polinomio interpolador del ejercicio 9. También marca los puntos que se han utilizado para la interpolación.

```
>   x = linspace(-1,1,3);
>   y = @(x) exp(x.^2);
>   xreal = linspace(-1,1,100);
>   yaprox =interpolacionNewton(x, y(x));
>   plot(x,y(x), 'xr'), hold on
>   plot(xreal, yreal, 'b',xreal, subs(yaprox, 'x', xreal), 'g'), hold off;
>   legend('puntos interpolacion', 'funcion real', 'polinomio interpolador');
```

Alternativamente, la solución utilizando la función "interp1":

```
>   x = linspace(-1,1,3);
>   y = @(x) exp(x.^2);
>   xreal = linspace(-1,1,100);
>   yaprox =interp1(x, y(x), xreal, 'Spline');
>   plot(x,y(x), 'xr'), hold on
>   plot(xreal, yreal, 'b',xreal, yaprox, 'g'), hold off;
>   legend('puntos interpolacion', 'funcion real', 'polinomio interpolador');
```