Aproximación Numérica
Curso 2023/24
Grado de Matemáticas

Examen Final 30/01/2024

Nombre y apellidos:

Mucha suerte chicos. Recordad, ¡no estoy en vuestras cabezas! Todos los pasos deben estar correctamente explicados y razonados. Confiad en vosotros mismos y pensad dos veces lo que hacéis ¡A por ello!

1. **(2 puntos)** Sea la función $f(x) = 3x^3 - \frac{3}{5}x + \frac{A}{2}$, con $A \in \mathbb{R}$. Demuestra la existencia de al menos una raíz para la función $f(x)$ y determina para que valores de A esta raíz es única.
2. **(1,5 puntos)** Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 10x - 20$. Supón demostrada la existencia de una única raíz en el intervalo $[1, 2]$. Obtén una ecuación de la forma $x = g(x)$ tal que $g(x)$ sea una función que inicia un método iterativo convergente en el intervalo $[1, 2]$ para hallar la raíz de $f(x)$. *(Pista: $g(x)$ tiene forma de fracción).* ¿Es cierto que $\forall x \in [1, 2], g(x) \in [1, 2]$? Demuestra que dicho método es convergente y obtén los tres primeros puntos del proceso iterativo para hallar la raíz en dicho intervalo.
3. **(5 puntos) ¡Pánico en el Gran Premio de Mónaco de Fórmula 1!** Los ingenieros de Aston Martin han perdido algunos datos de tiempo por vuelta de Fernando Alonso. Únicamente disponen de los siguientes datos de tiempos por vuelta[1] (y su error de medición) de cada neumático:

Número de vuelta	Tiempo por vuelta	Neumático
7	71.7 ± 0.4s	Intermedio
8	-.-s	Intermedio
9	74.5 ± 0.3s	Intermedio
10	77.4 ± 0.2s	Intermedio
...	...	...
23	77.8 ± 0.05s	Medio
24	75.6 ± 0.1s	Medio
25	-.-s	Medio
26	71.2 ± 0.2s	Medio

   (a) Quedan 4 vueltas para acabar el Gran Premio y Fernando ha entrado a boxes. Halla, usando el método de Interpolación de Lagrange los tiempos de las vueltas que se han perdido y el tipo de neumático que poner de forma que el coche sea más veloz. (*Supón que el tiempo de los neumáticos va a ser igual que el registrado previamente*).

   (b) Max Verstappen, el rival de Fernando Alonso, hace un tiempo por vuelta medio de 74.8 ± 0.5s. Según los datos del simulador del equipo, los tiempos por vuelta de los neumáticos intermedios siguen la función $f(x) = \frac{-(x+3)^3}{4} + (x+3)^2 + 78$ y los tiempos por vuelta de los neumáticos medios siguen la función $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + 70$. Con esta información, decide razonadamente si, con el neumático elegido en el apartado anterior, con toda seguridad, Fernando marcará tiempos por vuelta más rápidos que los de Max y logrará su ansiada victoria número 33.

4. **(1,5 puntos)** Enuncia y demuestra el Teorema de L'Hôpital.
5. **(1 punto)** Encuentra el área entre la curva $f(x) = sen(x)$ y la curva $g(x) = cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

[1]Es importante notar que los tiempos por vuelta de cada neumático son independientes por cada tipo de neumático.

Examen Final 30/01/2024: SOLUCIONES

1. **(2 puntos)** Sea la función $f(x) = 3x^3 - \frac{3}{5}x + \frac{A}{2}$, con $A \in \mathbb{R}$. Demuestra la existencia de al menos una raíz para la función $f(x)$ y determina para que valores de A esta raíz es única.

   Vemos que $f(x)$ se trata de una función continua en todo $\mathbb{R}$ al ser polinómica independientemente del valor de $A \in \mathbb{R}$ y que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, con lo que, por el Teorema de Weierstrass, es claro que existe al menos un punto en el que la función corte al eje OX, y por lo tanto existe una raíz.

   Para determinar los valores para los que es única, debemos abalizar el crecimiento de la función, por lo que, analizando el valor de su derivada $f'(x) = 9x^2 - \frac{3}{5}$, vemos que se trata de una función creciente en $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{15}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{15}}, < \infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{\frac{1}{15}}, \sqrt{\frac{1}{15}})$.

   Por lo tanto, solo hay dos opciones para que la función presente una única raíz, que $f(\sqrt{\frac{1}{15}}) > 0$ y $f(-\sqrt{\frac{1}{15}}) > 0$, lo que implica que la raíz sea menor que $-\sqrt{\frac{1}{15}}$ y que $f(\sqrt{\frac{1}{15}}) < 0$ y $f(-\sqrt{\frac{1}{15}}) < 0$, lo que implica que la raíz sea mayor que $\sqrt{\frac{1}{15}}$. Será en los casos intermedios, es decir, en los que $f(-\sqrt{\frac{1}{15}}) > 0$ y $f(\sqrt{\frac{1}{15}}) < 0$, en los que la función presentará más de una raiz[2].

   Con esto, solo nos queda determinar para qué valores de A, $f(\sqrt{\frac{1}{15}}) < 0$ y para cuales $f(-\sqrt{\frac{1}{15}}) > 0$.
   , por lo que

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{\frac{1}{15}}) &< 0 \\
3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^3 - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} + \frac{A}{2} &< 0 \\
\frac{A}{2} &< \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} \\
A &< \frac{4}{5}\left(\sqrt{\frac{1}{15}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-\sqrt{\frac{1}{15}}) &> 0 \\
3 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^3 - \frac{3}{5} \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{15}}\right) + \frac{A}{2} &> 0 \\
\frac{A}{2} &> \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} \\
A &> -\frac{4}{5}\left(\sqrt{\frac{1}{15}}\right)
\end{aligned}
$$

   O, equivalentemente, se cumple cuando $|A| < \frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{15}}$. Como buscamos los casos en los que existe una única raíz, tomaremos los valores contrarios, es decir, que para que $f(x)$ presente una única raíz, $|A| > \frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{15}}$

[2] Dibujar la forma de la función en caso de que no quede claro.

2. **(1,5 puntos)** Sea la ecuación $x^3 - 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Supón demostrada la existencia de una única raíz en el intervalo $[1, 2]$. Expresa la ecuación de la forma $x = g(x)$ de forma que $g(x)$ sea una función que inicia un método iterativo convergente en el intervalo $[1, 2]$ *(Pista: $g(x)$ tiene forma de fracción)*. ¿Es cierto que $\forall x \in [1, 2], g(x) \in [1, 2]$? Demuestra que dicho método es convergente y obtén los tres primeros puntos del proceso iterativo para hallar la raíz en dicho intervalo.

   Vemos que la ecuación es equivalente a

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 20 = 0 \iff x\big(x^2 + 2x + 10\big) = 20 \iff x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} = g(x)$$

   Para afirmar que esta función puede ser usada para definir un método de iteración de punto fijo convergente, podemos ver que

   (a) $g(x) \in [1, 2]$, para ello observamos que $\forall x \in [1, 2],\ x^2 + 2x + 10 > 0$ y es creciente, por lo que

$$1 < \frac{20}{2^2 + 2 \cdot 2 + 10} = \frac{20}{18} < \frac{20}{13} = \frac{20}{1^2 + 2 \cdot 1 + 10} < 2,$$

   con lo que es claro que el punto fijo $g(x) \in [1, 2]$.

   (b) El módulo de la derivada de $g(x)$ es menor que 1. Nuevamente lo vemos analizando el crecimiento de la fracción que conforma la derivada: $|g'(x)| = \frac{|-40|}{(x^2+2x+10)^2} \leq |g'(1)| \simeq 0.47$

   Con esto ya podemos afirmar que le método iterativo definido por $g(x)$ converge a la única raíz que hay en el intervalo $[1, 2]$ partiendo de cualquier punto x_0 en dicho intervalo. En nuestro caso hemos elegido el punto medio del intervalo como punto de partida:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1,5 \\
x_1 &= \frac{20}{1,5^2 + 2 \cdot 1,5 + 10} = 1.31147\ldots \\
x_2 &= \frac{20}{1.31147^2 + 2 \cdot 1.31147 + 10} = 1.39441\ldots \\
x_3 &= \frac{20}{1.39441^2 + 2 \cdot 1.39441 + 10} = 1.35747\ldots
\end{aligned}$$

3. **¡Pánico en el Gran Premio de Mónaco de Fórmula 1!** Los ingenieros de Aston Martin han perdido algunos datos de tiempo por vuelta de Fernando Alonso. Únicamente disponen de los siguientes datos de tiempos por vuelta[3] (y su error de medición) de cada neumático:

Número de vuelta	Tiempo por vuelta	Neumático
7	71.7 ± 0.4s	Intermedio
8	-.-s	Intermedio
9	74.5 ± 0.3s	Intermedio
10	77.4 ± 0.2s	Intermedio
...	...	...
23	77.8 ± 0.05s	Medio
24	75.6 ± 0.1s	Medio
25	-.-s	Medio
26	71.2 ± 0.2s	Medio

[3] Es importante notar que los tiempos por vuelta de cada neumático son independientes por cada tipo de neumático.

(a) Quedan 4 vueltas para acabar el Gran Premio y Fernando ha entrado a boxes. Halla, usando el método de Interpolación de Lagrange los tiempos de las vueltas que se han perdido y el tipo de neumático que poner de forma que el coche sea más veloz. (*Supón que el tiempo de los neumáticos va a ser igual que el registrado previamente*).

(b) Max Verstappen, el rival de Fernando Alonso, hace un tiempo por vuelta medio de 74.8 ± 0.5s. Según los datos del simulador del equipo, los tiempos por vuelta de los neumáticos intermedios siguen la función $f(x) = \frac{-(x+3)^3}{4} + (x+3)^2 + 78$ y los tiempos por vuelta de los neumáticos medios siguen la función $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + 70$. Con esta información, decide razonadamente si, con el neumático elegido en el apartado anterior, con toda seguridad, Fernando marcará tiempos por vuelta más rápidos que los de Max y logrará su ansiada victoria número 33.

En primer lugar debemos darnos cuenta de que, para poder interpolar los datos, hay que corregir los valores de vueltas al número de vuelta de cada neumático. Para interpolar no tendremos en cuenta el margen de error tampoco. De esta forma los puntos que tenemos serían:

Tabla de neumáticos intermedios:

Número de vuelta (x)	Tiempo por vuelta (y)
$x_0 = 1$	$f(x_0) = 71.7$
$x_1 = 3$	$f(x_1) = 74.5$
$x_2 = 4$	$f(x_2) = 77.4$

Tabla de neumáticos medios:

Número de vuelta (x)	Tiempo por vuelta (y)
$x'_0 = 1$	$g(x'_0) = 77.8$
$x'_1 = 2$	$g(x'_1) = 75.6$
$x'_2 = 4$	$g(x'_2) = 71.2$

Por lo que debemos hallar, para el primer caso (intermedios), el valor de $P(2)$ y para el segundo caso (medios), $P(3)$.

- **Neumático intermedio**

$$l_0 = \prod_{i=0;i\neq 0}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} = \frac{(x-3)(x-4)}{(-2)(-3)} = \frac{(x-3)(x-4)}{6}$$

$$l_1 = \prod_{i=0;i\neq 1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(2)(-1)} = \frac{(x-1)(x-4)}{-2}$$

$$l_2 = \prod_{i=0;i\neq 2}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(3)(1)} = \frac{(x-1)(x-3)}{3}$$

$$\begin{aligned}
P(2) =& f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\
=& 71.7 \cdot \frac{(2-3)(2-4)}{6} + 74.5 \cdot \frac{(2-1)(2-4)}{-2} + 77.4 \cdot \frac{(2-1)(2-3)}{3} \\
=& 71.7 \cdot \frac{1}{3} + 74.5 + 77.4 \cdot \frac{-1}{3} \\
=& 72.6s
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo medio en las 4 vueltas del neumático intermedio será

$$71.7 + 74.5 + 77.4 + 72.6 = 296.2s$$

- **Neumático medio**

$$l'_0 = \prod_{i=0;i\neq 0}^{2} \frac{x - x'_j}{x'_i - x'_j} = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}$$
$$l'_1 = \prod_{i=0;i\neq 1}^{2} \frac{x - x'_j}{x'_i - x'_j} = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(1)(-2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{-2}$$
$$l'_2 = \prod_{i=0;i\neq 2}^{2} \frac{x - x'_j}{x'_i - x'_j} = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3)(2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

$$\begin{aligned}
P(3) =& g(x'_0)l_0(x) + g(x'_1)l_1(x) + g(x'_2)l_2(x)\\
=& 77.8 \cdot \frac{(3-2)(3-4)}{3} + 75.8 \cdot \frac{(3-1)(3-4)}{-2} + 71.2 \cdot \frac{(3-1)(3-2)}{6}\\
=& 77.8 \cdot \frac{-1}{3} + 75.8 + 71.2 \cdot \frac{1}{3}\\
=& 73.6s
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo medio en las 4 vueltas del neumático medio será

$$77.8 + 75.6 + 71.2 + 73.6 = 298.2s$$

Por lo que el neumático que minimiza el tiempo en realizar las cuatro vueltas, y por lo tanto el más veloz, es el **neumático intermedio**.

Lo siguiente que debemos hacer es calcular la cota de la interpolación para el caso del neumático más veloz, el intermedio en este caso. Como tenemos $N = 2$, debemos calcular para cada caso la tercera derivada de la función:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-(x+3)^3}{4} + (x+3)^2 + 78\\
f'(x) &= \frac{-3(x+3)^2}{4} + 2(x+3)\\
f''(x) &= \frac{-6(x+3)}{4} + 2\\
f'''(x) &= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Con esto podemos calcular ya la cota del punto interpolado, K_3. En el intervalo $[1, 4]$ la función $f'''(x) = -\frac{3}{2}$ es siempre constante, por lo que :

$$|f(2) - P(2)| \leq \frac{|2-1| \cdot |2-3| \cdot |2-4|}{3!} \cdot |-1,5| = 0.5$$

Por lo que podemos concluir que el tiempo de la vuelta restante es de 72.6 ± 1.

Para calcular ahora el tiempo por vuelta medio de las 4 vueltas hay que tener en cuenta que estamos operando con cifras con diferente valor absoluto. El tiempo por vuelta medio será, por lo tanto

$$\frac{71.7 + 72.6 + 74.5 + 77.4}{4} = 74.05s \sim 74.1s$$

Mientras que para calcular el error absoluto, vamos a sumar los errores absolutos de cada una de las vueltas

$$E_A = \frac{0.4 + 0.5 + 0.3 + 0.2}{4} = 0.35 \sim 0.4s$$

Con lo que, redondeando a décimas de segundo, el tiempo promedio de Fernando con neumáticos intermedios será 74.1 ± 0.4s, con lo que **no es posible garantizar, con toda seguridad, que su tiempo por vuelta medio de las 4 vueltas restantes será más rápido que el de su oponente**, Max Verstappen (74.8 ± 0.5s), pues debido a los errores podría ser que el tiempo de Fernando fuera de 74.5s mientras que el de Max, 74.3s.

4. **(1,5 puntos)** Enuncia y demuestra el Teorema de L'Hôpital.

   Teorema de L'Hôpital.
   Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto $x = x_0$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y este es:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

   Esta equivalencia es conocida como la **Regla de L'Hôpital** y también puede usarse en los casos en los que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

   Demostración del Teorema de L'Hôpital.
   Sean dos funciones $f(x), g(x)$ como las que necesita el teorema tales que $f(a) = 0 = g(a)$, si dividimos por lo tanto una entre la otra:

$$\frac{f(x)}{g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

   Lo cual podemos hacer ya que tanto $f(a) = 0$ como $g(a) = 0$, por lo que no inducen cambios en la fracción. Ahora, tomando el límite y aplicando la definición de derivada:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5. **(1 punto)** Encuentra el área entre la curva $f(x) = sen(x)$ y la curva $g(x) = cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Lo primero es calcular las funciones en los extremos del intervalo

$$f(0) = cos(0) = 1 \quad g(0) = sen(0) = 0$$

$$f(\frac{\pi}{2} = cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad g(\frac{\pi}{2} = sen(\frac{\pi}{2}) = 1$$

   . Vemos también si existen puntos en común:

$$f(x) = sin(x) = cos(x) = g(x),$$

que se cumple en $x = \frac{\pi}{4}$.
Por lo tanto, el área entre las curvas es

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos(x) - sen(x))\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) - cos(x))\, dx =$$

$$\big((sen(\frac{\pi}{4}) + cos(\frac{\pi}{4})) - (sen(0) - cos(0)\big) + \big((-sen(\frac{\pi}{2}) - cos(\frac{\pi}{2})) - (-sen(\frac{\pi}{4}) - cos(\frac{\pi}{4}))\big) =$$

$$\sqrt{2} - 1 + (-1)\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - 1)$$