Aproximación Numérica
Curso 2022/23

unie Universidad

Examen Final 25/01/2023

Nombre y apellidos del alumno:

El examen cuenta con 5 ejercicios, que suman 10 puntos. **La nota máxima será un 9.** Recordad que no estoy en vuestras cabezas. Todos los pasos que realicéis deben estar correctamente explicados y/o razonados. Mucha suerte, y... ¡A la faena!.

1. **(2,5 puntos)**

   (a) Obtén una aproximación numérica $P(x)$ mediante el método de interpolación de Newton visto en clase, de la función $f(x)$ conocidos cuatro puntos: $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(8, 10)$. *Consejo: usa el método de las diferencias divididas para simplificar la operatoria.* 1,5

   (b) Calcula el error absoluto y relativo máximos con respecto del valor real en el que podemos incurrir al usar la aproximación $P(x)$ para calcular el valor de $f(5)$. 0,25

   es lo mismo que calcular una cota para Eabs Erel

2. **(2,5 puntos)** Sea la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$:

   (a) Demuestra la existencia y la unicidad de una única raíz de f en todo $\mathbb{R}$. 1

   (b) Obtén una aproximación numérica del valor de los primeros cuatro decimales de dicha raíz empleando el método de Newton en caso de que sea posible. En caso contrario justifica el motivo. 0,75

   (c) Obtén una aproximación numérica del valor de los primeros cuatro decimales de dicha raíz empleando el método de iteración de punto fijo en caso de que sea posible. En caso contrario justifica el motivo. 0,75

   Pista: recuerda que para que un método de solución de ecuaciones no lineales pueda aplicarse correctamente, este debe converger.

3. **(1 puntos)** Decide, de manera justificada, si las siguientes funciones son funciones de Lipschitz (con respecto de su segunda variable) para $x \in [1, \infty)$:

   (a) $f(x, y) = 2yx^{-4}$. 0,5

   (b) $f(x, y) = e^{-x^2} arctan(y)$. 0,5

4. **(1,25 puntos)** Sea el PVI

$$\begin{cases} y' = x + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   fórmula Euler 0,5
   $x_0 = 0,25$
   $x_0 = 0,25$
   Resolución 0,25

   con un paso de longitud $h = 0,1$, obtén una aproximación del valor de $y(0.3)$). *Usa, como mínimo, 5 decimales en tus operaciones*

5. **(1,25 punto)** Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{a}{x} & si \quad x < -1 \\ -bx^2 + 2x & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

   Cont: 0,5
   deriv: 0,5
   resto: 0,25

6. **(1,5 puntos)** Enuncia el Teorema del Valor Medio tal y como lo hemos visto en clase y demuéstralo. 0,5 Enuncia también el corolario del TVM que hemos estado utilizando a lo largo de la asignatura y la forma de llegar hasta él a partir del TVM. *Recuerda, se pide el TVM, no el TVM aplicado a integrales definidas.* 0,25

RESPUESTAS EXAMEN FINAL

① Método de interpolación de Newton.

a) ptos: $(1,2)$; $(3,3)$; $(4,2)$; $(8,10)$

CONSTRUIMOS TABLA DIFERENCIAS DIVIDIDAS

x_k	$f[x_k]=y_k$	$f[x_k,x_{k+1}]=\dfrac{f[x_{k+1}]-f[x_k]}{x_{k+1}-x_k}$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]=\dfrac{f[x_{k+1},x_{k+2}]-f[x_k,x_{k+1}]}{x_{k+2}-x_k}$
1	$f[1]=2$	$f[1,3]=\dfrac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$	$f[1,3,4]=\dfrac{-1-\frac{1}{2}}{4-1}=-\frac{1}{2}$
3	$f[3]=3$	$f[3,4]=\dfrac{2-3}{4-3}=-1$	$f[3,4,8]=\dfrac{2+1}{8-3}=\frac{3}{5}$
4	$f[4]=2$	$f[4,8]=\dfrac{10-2}{8-4}=2$	
8	$f[8]=10$		

$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]=\dfrac{f[x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]-f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]}{x_{k+3}-x_k}$
$f[1,3,4,8]=\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}}{8-1}=\frac{11}{70}$

$\Rightarrow$ O bien

$$P_3(x)=2+\tfrac{1}{2}(x-1)-\tfrac{1}{2}(x-1)(x-3)+\tfrac{11}{70}(x-1)(x-3)(x-4)=\boxed{\tfrac{11}{70}x^3-\tfrac{123}{70}x^2+\tfrac{192}{35}x-\tfrac{66}{55}}$$

ó

$$P_3(x)=10+2(x-8)-\tfrac{3}{5}(x-8)(x-4)+\tfrac{11}{70}(x-8)(x-4)(x-3)$$

b) ¿$f(5)$?

$$=P_3(5)=\tfrac{11}{70}\cdot 5^3-\tfrac{123}{70}\cdot 5^2+\tfrac{192}{35}\cdot 5-\tfrac{66}{55}=\boxed{\tfrac{68}{35}}$$

¿Error absoluto/relativo?

Sabemos que, para 4 ptos $\Rightarrow |f(x)-P(x)|\leq \dfrac{|x-x_0|\cdots|x-x_3|\,K_4}{4!}$,

con $K_4\geq |f^{4)}(t)|\ \forall t\in[1,8]\Rightarrow$

$\Rightarrow E_{abs} = |f(5) - P(5)| \le \dfrac{|5-1|\,|5-3|\,|5-4|\,|5-8| \cdot K_4}{24} = K_4$

$\Rightarrow E_{abs} \le K_4 \;/\; K_4 \ge |f^{4)}(t)| \;\forall t \in (1,8)$

¿E_{rel}? $\Rightarrow E_{rel} = \dfrac{|f(5) - P(5)|}{|f(5)|} \cdot 100\% \approx \dfrac{|f(5) - P(5)|}{|P(5)|} \cdot 100\% = \dfrac{E_{abs}}{\frac{68}{35}} \cdot 100$

$\Rightarrow$ Como $E_{abs} \le K_4 \Rightarrow E_{rel} \le K_4 \cdot \dfrac{875}{17} = \max\limits_{t \in (1,8)} |f^{4)}(t)| \cdot \dfrac{875}{17}$

② $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$

a) Existencia y unicidad

• Existencia → Buscamos dos puntos dentro del dominio, uno cuya imagen sea <0 y otro cuya imagen >0

$f(0) = -2 < 0$
$f(6) = 70 > 0$

Como $f(x)$ es una función continua al ser un polinomio $\Rightarrow \exists\, c \in (0,6) \;/\; f(c) = 0 \Rightarrow$ ∃ la raíz (Bolzano)

• Unicidad

• Estudiamos el comportamiento de la función:

¿Dónde $f'(x) = 0$?

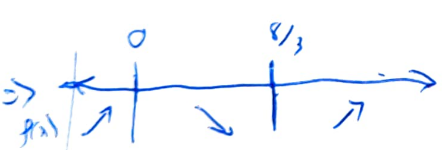
$f'(x) = 3x^2 - 8x = (3x-8)x \rightarrow x_0 = 0,\; x_1 = \frac{8}{3} \approx 2{,}66$

Vemos el comportamiento de $f'(x)$

$\Rightarrow \forall x < 0 = x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ [creciente]

$\forall x \,;\, x_0 < x < x_1 = 8/3 \Rightarrow f'(x) < 0$ [decrec.]

$\forall x > x_1 = 8/3 \Rightarrow f'(x) > 0$ [creciente]



$\Rightarrow$ como el máx relativo en $x=0$: $f(0) < 0 \Rightarrow \forall x \le 8/3,\; f(x) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ pto $c > 8/3 \;/\; f(c) = 0$

b) Newton

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)} \;/\; f'(x_n) \ne 0 \Rightarrow$ Buscamos en los ptos en los que $f'(x) \ne 0 \Rightarrow x_0 > 8/3 \Rightarrow$ Sea $x_0 = 4 \Rightarrow f(4) = -2$, $f'(4) = 16$ $\;/\; x_1 = 4 - \dfrac{-2}{16} = 4{,}125$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4{,}125 - \dfrac{0{,}127}{18{,}0469} = 4{,}118 \Rightarrow x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 4{,}118 - \dfrac{0{,}0010}{17{,}9198} = 4{,}1179$

$\Rightarrow E_{abs} = |f(5) - P(5)| \le \dfrac{|5-1|\,|5-3|\,|5-4|\,|5-8| \cdot K_4}{24} = K_4$

$\Rightarrow E_{abs} \le K_4$ ‖ $K_4 \ge |f^{4)}(t)| \ \forall t \in (1,8)$

¿E_{rel}? $\Rightarrow E_{rel} = \dfrac{|f(5) - P(5)|}{|f(5)|} \cdot 100\% \approx \dfrac{|f(5) - P(5)|}{|P(5)|} \cdot 100 = \dfrac{E_{abs}}{\frac{68}{35}} \cdot 100$

$\Rightarrow$ Como $E_{abs} \le K_4 \Rightarrow E_{rel} \le K_4 \cdot \dfrac{875}{17} = \max\limits_{t \in (1,8)} |f^{4)}(t)| \cdot \dfrac{875}{17}$

2) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$

a) Existencia y unicidad

- Existencia $\rightarrow$ Buscamos dos puntos dentro del dominio, uno cuya imagen sea < 0 y otro cuya imagen > 0

$f(0) = -2 < 0$
$f(6) = 70 > 0$

Como $f(x)$ es una función continua al ser un polinom.
$\Rightarrow \exists c \in [0,6)$ ‖ $f(c) = 0 \underset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow} \exists$ la raíz

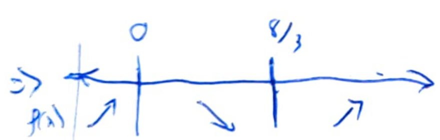
- Unicidad

- Estudiamos el comportamiento de la función:

¿Dónde $f'(x) = 0$?

$f'(x) = 3x^2 - 8x = (3x-8)x$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \frac{8}{3} \approx 2,66 \end{cases}$

Vemos el comportamiento de $f'(x)$
$\Rightarrow \forall x < 0 = x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ [creciente]
$\forall x ;\ x_0 < x < x_1 = 8/3 \Rightarrow f'(x) < 0$ [decrec.]
$\forall x > x_1 = 8/3 \Rightarrow f'(x) > 0$ [creciente]



$\Rightarrow$ como el máx relativo en $x=0$: $f(0) < 0 \Rightarrow \forall x \le 8/3,\ f(x) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ pto $c > 8/3$ ‖ $f(c) = 0$

b) Newton

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x)}{f'(x_n)}$ ‖ $f'(x_n) \neq 0 \Rightarrow$ Buscamos en los ptos en los que $f'(x) \neq 0 \Rightarrow x_0 > 8/3 \Rightarrow$ Sea $x_0 = 4 \Rightarrow$ $f(4) = -2$, $f'(4) = 16$; $x_1 = 4 - \dfrac{-2}{16} = 4,125$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 4,125 - \dfrac{0,127}{18,0469} = 4,118 \Rightarrow x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 4,118 - \dfrac{0,0010}{17,9148} = 4,1179$

$$\underline{x_4} = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 4,1179 - \frac{0,008}{17,9281} = \underline{4,1179}$$

$\Rightarrow x_4 = x_3 \Rightarrow$ la raiz está en $\boxed{x = 4,1179}$

c) $x^3 - 4x^2 - 2 = 0$

Para hallar la $g(x)$, podríamos ~~hacer~~ estar tentados de aislar la "x" y veríamos que tendríamos 4 alternativas

$$g_0(x) = 4 + \frac{2}{x^2}$$

$$g_1(x) = \sqrt[3]{4x^2+2}$$

$$g_2(x) = \pm\sqrt{\frac{x^3-2}{4}}$$

$$g_3(x) = \frac{x^2}{4} - 1/2x$$

Ahora, para que el método de iteración de pto fijo converja, debemos ver que la derivada de la función $g(x)$ en el entorno de la raiz sea < 1.

$\Rightarrow g_0'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow |g_0'(x)| < 1 \ \forall x > 1 \Rightarrow$ <u>Se puede utilizar</u>

$g_1'(x) = \frac{8x}{3(2+4x^2)^{2/3}} \Rightarrow |g_1'(x)| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ <u>Se puede utilizar</u>

$g_2'(x) = \pm \frac{3x^2}{4\cdot\sqrt{-2+x^3}}$ = solo definida para $x \geq \sqrt[3]{2} \Rightarrow$ mínimo en $x = 2$ y $g_2'(2) = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22 > 1$

$\Rightarrow$ <u>No se puede utilizar</u>

$g_3'(x) = \frac{x-1}{2} \Rightarrow |g_3'(x)| < 1 \ \forall x \in (-1, 3) \Rightarrow$ Nosotros sabemos que la solución está a la derecha de $8/3 \approx 2,66$ ¿Estará a la derecha de 3? $\Rightarrow f(3) = -11 < 0 \Rightarrow$ La raiz está a la derecha de 3 $\Rightarrow$ <u>No se puede utilizar</u>

$\Rightarrow$ Eligiendo como $g(x)$ a $g_0(x)$ ó $g_1(x) \Rightarrow$ Podemos elegir un punto x_0 cualquiera [próximo a ξ]:

$x_0 = 4 \Rightarrow \quad x_1 = g_0(x_0) = 4 + 2/4^2 = 4,125 \Rightarrow x_2 = g(x_1) = 4 + 2/4,125^2 = 4,1175\ldots$

$g_1(x_0) = \sqrt[3]{4\cdot 4^2+2} = 4,0412 \Rightarrow x_2 = g(x_1) = \sqrt{4\cdot 4,0412^2+2} = 4,0681$

Y continuamos hasta que los 4 primeros decimales coincidan entre x_k y x_{k+1}

③ a) $f(x,y) = 2y x^{-4}$

b) $e^{-x^2} \arctan(y)$

a) $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = 2|x|^{-4} |y - \hat{y}|$. Puesto que $|x|^{-4} \leq 1 \ \forall x \in [1,\infty)$

$\Rightarrow |f(x,y) - f(x,\hat{y})| \leq 2|y - \hat{y}| \Rightarrow$ se cumple Lipschitz

b) $|f(x,y) - f(x,\hat{y})| = e^{-x^2} |\arctan(y) - \arctan(\hat{y})| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Por el Teorema del Valor Medio, $|\arctan(y) - \arctan(\hat{y})| = \frac{1}{1+c^2}|y-\hat{y}|$

donde $c \in (y, \hat{y}) \Rightarrow$ como $e^{-x^2} \leq 1 \ \forall x \in [1,\infty)$ y $\frac{1}{1+c^2} < 1$

$\forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x,y) - f(x,\hat{y})| \leq |y - \hat{y}|$

④ PVI
$h = 0,1$
¿$y(0,3)$?

$\begin{cases} y' = x + y^2 = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{matrix}$

Usando el método de Euler

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot (x_0 + y_0^2) = 0 + 0,1(0 + 0^2) = \underline{0} = y_1 = y(x_1) = y(0,1)$

$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 + y_1^2) = 0 + 0,1(0,1 + 0^2) = 0,01 = y_2 = y(x_2) = y(0,2)$

$y_3 = y_2 + h f(x_1, y_2) = y_2 + h(x_2 + y_2^2) = 0,01 + 0,1(0,2 + 0,01^2) = 0,03001 = y_3 = y(x_3) = y(0,3)$

⑤ ¿a y b?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{a}{x} & \text{si } x < -1 \\ -bx^2 + 2x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Para que sea derivable hay que analizar la continuidad y la derivabilidad.

• Continuidad

- En $x \neq -1$ $f(x)$ es cta, formada por funcs ctas.

- En $x = -1$
$$\begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(x^2 + \frac{a}{x}\right) = 1 - a \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-bx^2 + 2x) = -b - 2 \\ f(-1) = -b - 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Para que $f(x)$ cta $\Rightarrow$ $1 - a = -b - 2$

• Derivabilidad

- Si $x \neq -1 \Rightarrow f(x)$ derivable y $f'(x) = \begin{cases} 2x - \frac{a}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ -2bx + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- Si $x = -1 \Rightarrow$ como $f'(-1^-) = -2 - a$ $\wedge$ $f'(-1^+) = 2b + 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para que $f(x)$ derivable $\Rightarrow$ $-2 - a = 2b + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - a = -b - 2 \\ -2 - a = 2b + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2/3 \\ b = -7/3 \end{cases}$$

⑥ TVM

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ " $(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$.

Dem]

Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$; $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$, vamos a ver si la función h es derivable y calcular su derivada. Para ello necesitamos que sea continua y derivable:

• ¿h cta? $\boxed{\text{Sí}}$ en $[a,b]$ pues es suma de funciones continuas

• ¿h derivable? $\boxed{\text{Sí}}$ pues es suma de funciones derivables

Ahora calculamos el valor de h en los extremos de $[a,b]$:

$h(a) = (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))\, f(a) = f(b)\,g(a) - g(b)\,f(a)$ $\Big|$ $h(a) \overset{\shortparallel}{} h(b)$

$h(b) = (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))\, f(b) = -g(b)\,f(a) + f(b)\,g(a)$

$\Rightarrow$ Si $h(a) = h(b) \Rightarrow$ Por el T^{a} de Rolle $\exists\, c \in (a,b) \;\shortparallel\; h'(c) = 0$

$h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x)) - (g(b) - g(a))\, f(x) \Rightarrow h'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$

$\Rightarrow 0 = h'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(c)$ ~~cqd~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$ cqd.

Corolario

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una func. cta en $[a,b] \wedge$ derivable en (a,b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;\shortparallel\; f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dem)

Basta con, en el TVM elegir una $g(x) = x$ [que es cta $[a,b]$ y derivable en (a,b)] $\Rightarrow$ sustituyendo ...

$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(c) = f(b) - f(a) - (b - a) \cdot f'(c) \Rightarrow$

$g(x) = x \Downarrow g'(x) = 1$

$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ cqd