Aproximación Numérica
Curso 2022/23

Hoja de ejercicios - Convocatoria Extraordinaria

---

1. **(1,5 puntos)** Usando $\bar{e} = 2,71828$ como aproximación de e, cuál es el error absoluto y relativo que se comete al calcular e^4, $2e$ y e^e .

2. **(2 puntos)** Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = |x|^\delta, \quad \delta > 0$$
   (a) Comprueba que si $0 < \delta < 1$, entonces la función f no puede ser Lipschitz en ningún intervalo que contenga al origen.
   (b) Comprueba que si $\delta > 1$, entonces la función f es Lipschitz para todo intervalo que sea de la forma $[-M, M]$ pero que, sin embargo, no lo es en todo $\mathbb{R}$.

3. **(2 puntos)** Usando el método de Euler visto en clase con paso $h = \frac{1}{5}$ para el PVI $y' = (x - y)$ con condición inicial $y(0) = 2$, halla una aproximación numérica del valor de $y(1)$. Si conocemos el valor real de la función $y(x) = x - 1 + 3e^{-x}$, calcula el error absoluto y relativo de la aproximación obtenida previamente. ¿Se te ocurre como hemos podido llegar al valor real de $y(x)$, si es así, explícalo.

4. **(1,5 puntos)** Explica razonadamente si podría utilizarse el método de iteración de punto fijo a la función $g(x) = -x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ en el intervalo $[-1, \frac{3}{2}]$. En caso afirmativo, ejecútalo para obtener los puntos fijos de la función. En caso contrario, detalla por qué .

5. **(2 puntos)** Sea la función $f(x) = sen(x) + 3x - e^x$. ¿Sería posible aplicar el método de Newton partiendo de un iterante inicial $x_0 = 0$? ¿Y si $x_0 = \frac{5}{4}$?. En caso afirmativo aplica los cuatro primeros pasos empleando únicamente cinco cifras significativas. En caso negativo explica por qué. Comenta los resultados obtenidos.

6. **(2 puntos)** Sea las funciones:
   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$
   (b) $g(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$
   (c) $h(x) = \frac{1}{x-2}$

   Halla el polinomio interpolador de Lagrange p de grado mínimo aplicando el método de Lagrange en los puntos $x = \{-1, 0, 1\}$. Calcula el valor aproximado de cada una de las funciones en el punto $\frac{1}{2}$. Estima el error máximo absoluto y relativo que podemos estar cometiendo en la interpolación en el intervalo $[-1, 1]$.

7. **(2 puntos)** El pueblo de Valdelasmatas de Arriba ha estado realizando un estudio del histórico de población de a principios del siglo y ha encontrado los siguientes datos

1920	1930	1940	1950	1960	1970
12400	17300	XXXXX	19000	20200	25000

   Como puede verse, los datos relativos al año 1940 se han visto corrompidos. Usando el método de interpolación de diferencias divididas, da un valor aproximado de la población de Valdelasmatas de Arriba en 1940. ¿Qué puedes comentar de la precisión de esta aproximación?

8. **(2,5 puntos)** Calcula las siguientes integrales

   (a) $\int \frac{1}{acos(x)+bsen(x)+c}\ dx$

   (b) $\int sen(ln(x))\ dx$

   (c) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\ dx$

   (d) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}\ dx$

9. **(2 puntos)** Obtén una solución para la siguiente ecuación: $4cos(x) = e^x$ con una exactitud de 10^{-4}, usando el método de la secante y como valor de arranque $x_0 = 1$. ¿Como converge la sucesión $\{x_k\}$ generada al aplicar este método?.

10. **(1 punto)** Halla los siguiente límites:

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)-x}{x^3}$

    (b) $\lim_{x\to 0}(1 - sen(x))^{\frac{1}{x}}$

11. **(1,5 puntos)** Sea f una función continua. Obtén el valor de $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) + t^2 + t^3\right)\ dt.$$

Sea el valor de $f(1) = 1$, y además $\int_0^1 f(t)\ dt = 1$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica definida por $F(x)$ en el punto $\left(1, F(1)\right)$.

Hoja de MATLAB - Convocatoria Extraordinaria

---

1. **(3 puntos)** Sea $P(x)$ el polinomio:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x-2)^9 = \\
&= x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512 = \\
&= -512 + x\Bigg(2304 + x\bigg(-4608 + x\Big(5376 + x\big(-4302 + x(2016 + (-672 + x(144 + x(-18+x)))))\big)\Big)\bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

   (a) Realiza una gráfica de los puntos $x = 2000, 2001, 2002, \ldots, 2100$ superponiendo cada una de las tres formas de expresar el polinomio $P(x)$ expresadas anteriormente de forma que cada una tenga un color y una figura distinta para marcar los puntos. Crea una leyenda para explicar a qué forma pertenece cada una de las figuras/puntos

   (b) ¿Que se puede observar? ¿A qué se puede deber este fenómeno? *Responde a esta pregunta en un comentario al final del código entregado*

2. **(3 puntos)** Diseña un programa en MATLAB que pregunte al usuario los valores de

   (a) n

   (b) x_0

   (c) x_n

   y dibuje en una misma gráfica todos los L_j dentro del intervalo $[x_0, x_n]$ asumiendo que todos los nodos están equiespaciados ($x_{j+1} - x_j$ constante).

3. **(3 puntos)** Diseña un programa en MATLAB que calcule y muestre sobre una gráfica los primeros 100 puntos de la sucesión $\{x_j\}$ que se produce al emplear el método de Newton para hallar la raíz de la función $f(x) = e^x - x - 2$ tomando como punto de arranque $x_0 = 15$.