Regresión Lineal Múltiple

Segunda Parte. En esta sección la idea es realizar regresión lineal en $\mathbb{R}^2$ y analizar como se comportan las soluciones obtenidas.

In [ ]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.

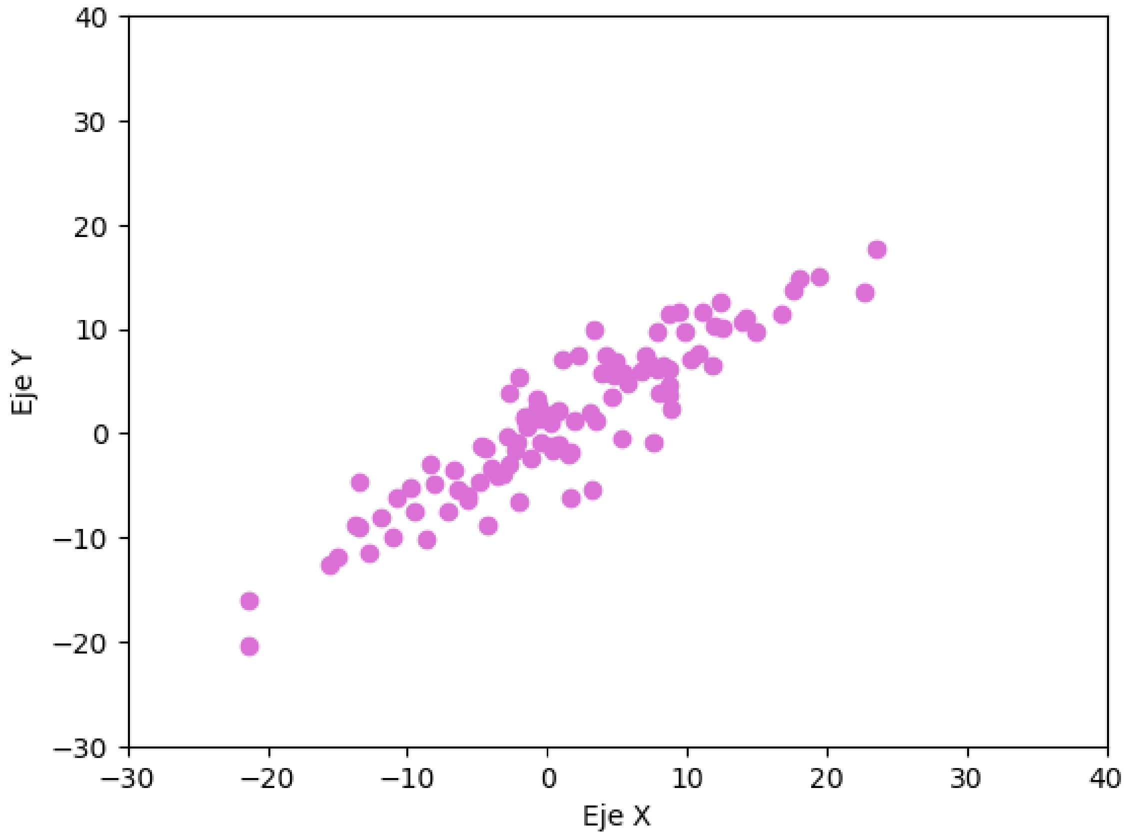
Usando los datos del archivo ejercicio_1.csv:

In [ ]:
```
data = pd.read_csv('ejercicio_1.csv', sep=',', header=0)
```

a) Graficar todos los puntos en el plano xy.

Nota: La primer columna del archivo marca el valor de x y la segunda el valor de y de cada punto. Recomendamos usar la biblioteca pandas para leer los archivos con la función read_csv.

In [ ]:
```
x = data.iloc[:,0]
y = data.iloc[:,1]

fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(x, y, color="orchid")
ax.set_xlabel("Eje X")
ax.set_ylabel("Eje Y")

ax.set_xlim(-30,40)
ax.set_ylim(-30,40)
plt.show()
```



b) Utilizando los conceptos teóricos desarrollados en la primera parte, hallar la recta que mejor aproxima a los datos.

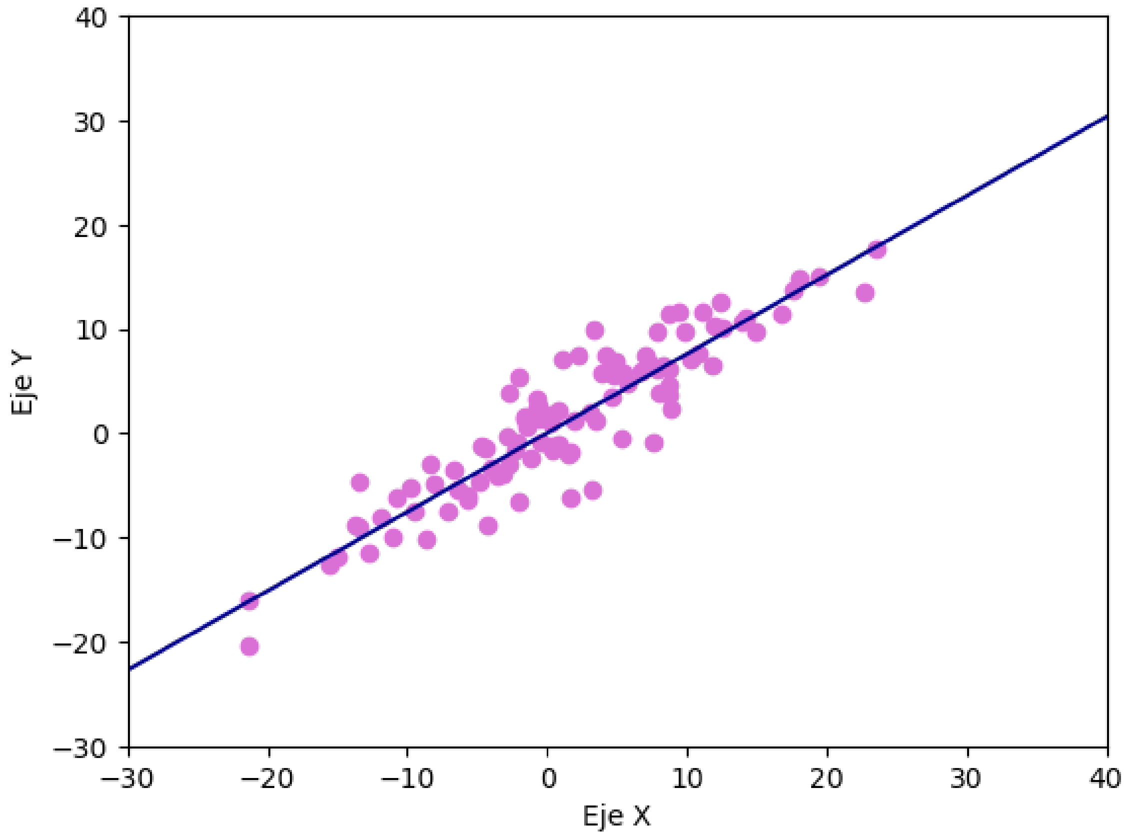
Para obtener la pendiente de la recta de regresión, usamos la formula obtenida en el ejercicio 1.f:

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Luego graficamos la recta de regresión sobre el scatterplot:

In [ ]:
```
b = np.dot(np.dot(1/np.dot(np.transpose(x), x), np.transpose(x)), y)
x_i = np.linspace(-30, 40, 1000)

#recta de regresión
y_i = b*x_i

ax.plot(x_i, y_i, color="darkblue")

plt.show()
fig
```

Out[ ]:



In [ ]:
```
#Pendiente de la recta de regresión
b
```

Out[ ]: 0.7578541396785937

La recta que mejor aproxima los datos es:

$$y = \widehat{\beta} * x$$

$$y = 0.75785 * x$$

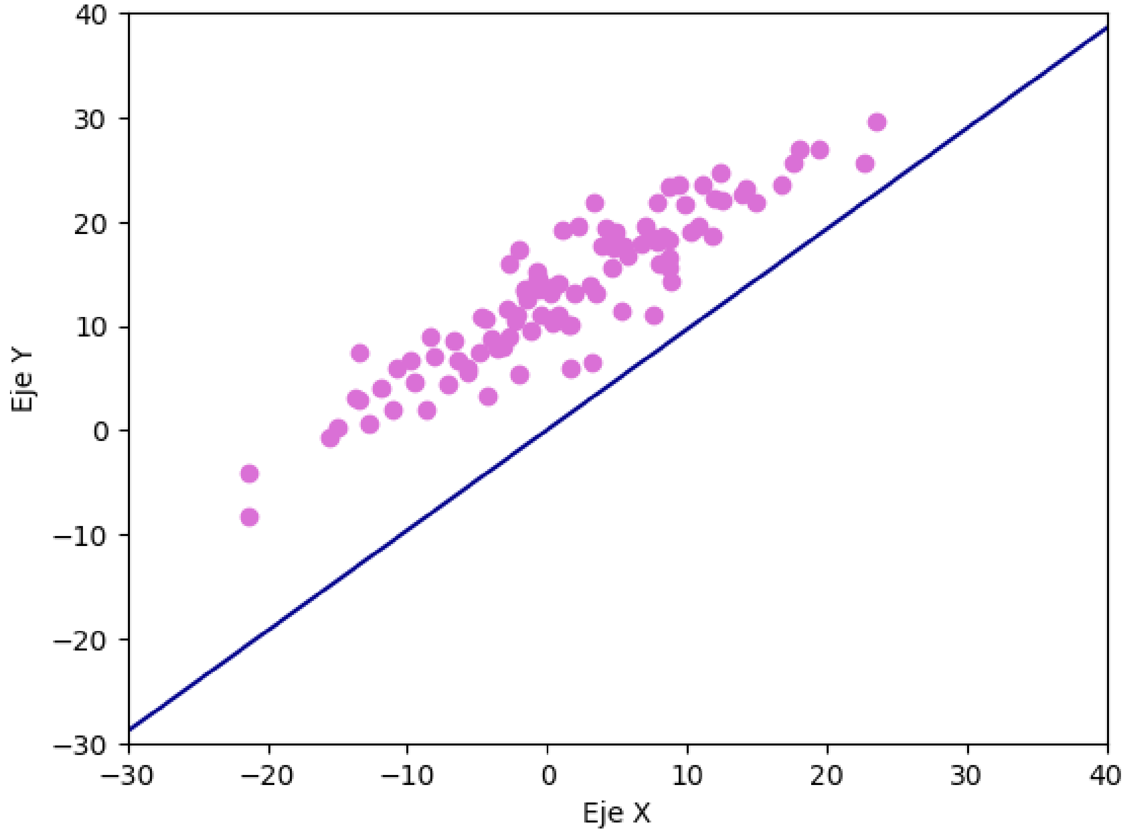
c) Realizar nuevamente los incisos (a) y (b) pero considerando los puntos

$$\{(x_i, y_i + 12) \text{ con } i = 1 \ldots n\}$$

donde (x_i, y_i) eran los puntos originales. ¿Es buena la aproximación realizada?, ¿cuál es el problema?

In [ ]:
```
x = data.iloc[:,0]
y_12 = data.iloc[:,1] + 12

fig2, ax2 = plt.subplots()
ax2.scatter(x, y_12, color="orchid")
ax2.set_xlabel("Eje X")
ax2.set_ylabel("Eje Y")

ax2.set_xlim(-30,40)
ax2.set_ylim(-30,40)

b = np.dot(np.dot(1/np.dot(np.transpose(x), x), np.transpose(x)), y_12)
```

```
x_i = np.linspace(-30, 40, 1000)

#recta de regresión
y_i = b*x_i

ax2.plot(x_i, y_i, color="darkblue")

plt.show()
b
```




```
Out[ ]: 0.9633290275386616
```

No, la aproximación realizada no es buena ya que un modelo lineal de la forma $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ no ajusta datos si se le suma una constante a ellos, porque esta suma de constantes cambia la posición vertical de los datos lo que resulta en un desplazamiento de los puntos en el plano.

Por lo tanto, la relación lineal entre las variables independientes y la variable dependiente se mantiene, pero la ordenada al origen de la recta de regresión cambia, lo que significa que los valores estimados de y estarán más alejados de los datos originales.

d) ¿Cómo se podría extender el modelo para poder aproximar cualquier recta en el plano?

Para extender el modelo para poder aproximar cualquier recta en el plano, se puede agregar una variable adicional al modelo lineal que actúe como un termino constante. Entonces, la ecuación del modelo lineal sería $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ donde β_0 es el coeficiente que representa la ordenada al origen.

Generamos una nueva matriz que vive en $\mathbb{R}^{nx2}$ con la primer columna de unos y la segunda corresponde a las x_i originales.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

Ademas, modificamos β por un vector que vive en $\mathbb{R}^{2x1}$ en donde β_0 corresponde a la ordenada al origen y β_1 es el β anterior.

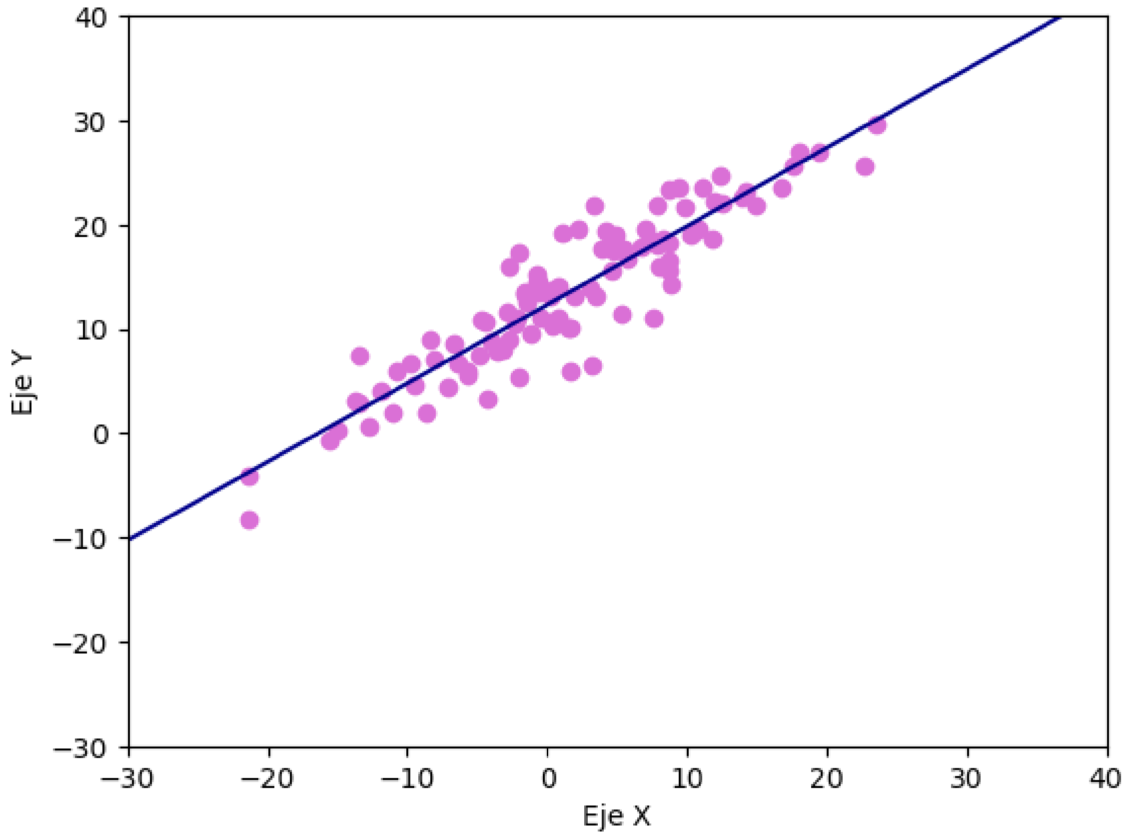
$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que para extender el modelo se necesita resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

In [ ]:

```
x_n = x.to_numpy().reshape((100,1))
y_n = y_12.to_numpy().reshape((100,1))

x_unos = np.ones((100,1),int)
x_new = np.hstack((x_unos, x_n))
x_new_t = np.transpose(x_new)

b_optimo = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(x_new_t, x_new)), np.dot(x_new_t,

x_i = np.linspace(-30, 40, 1000)


plt.plot(x_i, x_i*b_optimo[1] + b_optimo[0], color="darkblue")
plt.scatter(x, y_12, color="orchid")
plt.xlabel("Eje X")
plt.ylabel("Eje Y")
plt.xlim(-30,40)
plt.ylim(-30,40)

plt.show()
b_optimo
```




```
Out[ ]: array([[12.28565184],
               [ 0.75296295]])
```

Ahora, la recta que mejor aproxima los datos es:

$$y = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 * x$$

$$y = 12.28565 + 0.75296295 * x$$

2.

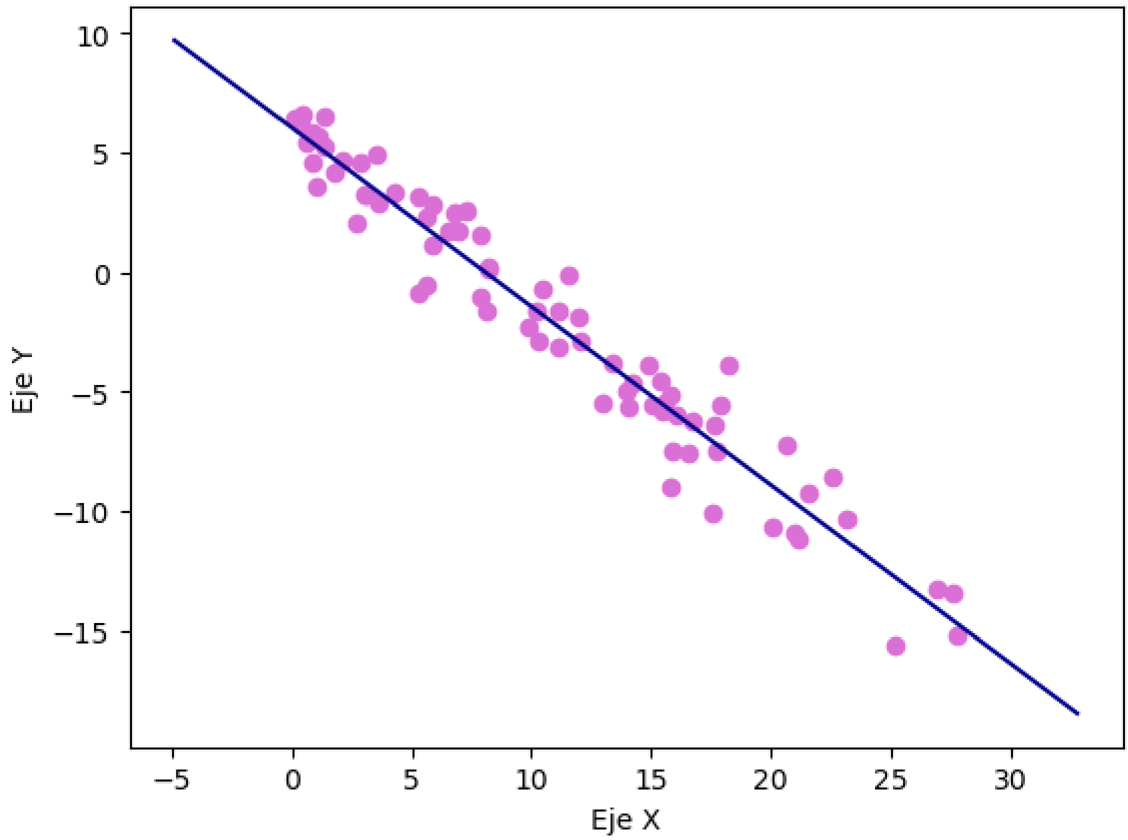
Usando los datos del archivo ejercicio_2.csv:

```
In [ ]: data2 = pd.read_csv('ejercicio_2.csv', sep=',', header=0)
```

a) Graficar y aproximar los puntos con una recta.

```
In [ ]: x_2 = data2.iloc[:,0]
y_2 = data2.iloc[:,1]

x_n2 = x_2.to_numpy().reshape((75,1))
y_n2 = y_2.to_numpy().reshape((75,1))

x_unos = np.ones((75,1),int)
x_new2 = np.hstack((x_unos, x_n2))
x_new2_t = np.transpose(x_new2)

b_optimo2 = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(x_new2_t, x_new2)), np.dot(x_new2

x2_i = np.linspace(np.min(x_2) -5, np.max(x_2) + 5)

fig4, ax4 = plt.subplots()
```

```
ax4.plot(x2_i, x2_i*b_optimo2[1] + b_optimo2[0], color="darkblue")
ax4.scatter(x_2, y_2, color="orchid")
ax4.set_xlabel("Eje X")
ax4.set_ylabel("Eje Y")

plt.show()
```



b) Imaginemos que los datos forman parte de mediciones de algún tipo, como por ejemplo la temperatura de un procesador a lo largo del tiempo), y queremos predecir cuál va a ser la temperatura en el futuro. ¿Es buena la aproximación que realizamos?, ¿cuál fue el problema en este caso?

La aproximación realizada con el modelo lineal puede ser buena o mala, dependiendo de que representen los datos. Si los datos muestran una relación lineal clara, entonces es probable que el modelo lineal proporcione una buena aproximación.

Sin embargo, si la relación entre el eje X y el eje Y no es lineal, el modelo lineal puede ser insuficiente para predecir datos futuros.

Por ejemplo, en el caso de que los datos proporcionados representen la relación entre la temperatura y el tiempo, no podemos asegurar que la temperatura dependa unicamente del tiempo. Probablemente hayan más variables independientes que influyan sobre esta, como por ejemplo, la carga del procesador. Por lo tanto, podrían existir otros modelos que aproximen mejor la variable dependiente a futuro.

Tercera parte. Regresion lineal en datos reales.

En esta sección utilizaremos el conjunto de datos provisto en Machine Learning Repository. Este consiste en datos de ventas de 414 casas en Taiwan. La información provista por casa es (en orden):

i) La fecha en que se realizó la transacción. Expresada en formato

$$\text{año } + \frac{\text{numero}\backslash\text{\_mes}}{12}$$

ii) La edad de la casa en años.

iii) La distancia a la estación de tren o subte más cercana en metros.

iv) La cantidad de almacenes alcanzables a pie.

v) La latitud en grados.

vi) La longitud en grados.

vii) El precio por Ping. La cual es una unidad utilizada en Taiwan que representa 3,3 metros cuadrados.

Vamos a dividir este conjunto de datos en dos:

i) *Datos de entrenamiento*: usamos los datos desde la observación 1 a la 315 inclusive.

ii) *Datos de test*: usamos los datos desde la observación 316 a la 414 inclusive.

1. Teniendo en cuenta la teoría desarrollada en la primer parte del trabajo práctico y usando los datos de entrenamiento:

In [ ]:
```
data_ventas = pd.read_csv('ventas_taiwan.csv', sep=',', header=0)

data_ent = data_ventas.iloc[:315,:]
data_test = data_ventas.iloc[315:,:]
```

a) Estimar los parámetros $\widehat{\beta}$ que minimizan el error cuadrático medio para este problema.

In [ ]:
```
x_ent = (data_ent.iloc[:,1:7]).to_numpy().reshape((315,6))
y_ent = (data_ent.iloc[:,[7]]).to_numpy().reshape((315,1))

m_unos = np.ones((315,1),int)

x_new3 = np.hstack((m_unos, x_ent))
x_new3_t = np.transpose(x_new3)

b_ent = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(x_new3_t, x_new3)), np.dot(x_new3_t,

b_ent
```

Out[ ]:
```
array([[-1.48729480e+04],
       [ 4.96257468e+00],
       [-2.79853534e-01],
       [-4.29360382e-03],
       [ 1.11451659e+00],
       [ 2.63780784e+02],
       [-1.36639291e+01]])
```

b) Encontrar $\hat{y}$ la estimación de la variable de respuesta.

Se necesita resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & x_{n5} & x_{n6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \widehat{\beta}_6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

In [ ]:
```
y_pred = np.dot(x_new3,b_ent)

y_pred.shape
```

Out[ ]: `(315, 1)`

c) ¿Cuánto vale el error cuadrático medio?

Definimos error cuadrático medio como:

$$ECM(\hat{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

donde y_i son observaciones de una variable y $\hat{y}_i$ estimaciones de las mismas.

In [ ]:
```
ecm = np.sum((y_ent - y_pred)**2) * 1/len(data_ent)

ecm
```

Out[ ]: `83.16551901820323`

2. Utilizando los datos de test, analizar cuál es el error cuadrático medio al utilizar los parámetros $\widehat{\beta}$ estimados en el punto anterior.

a) ¿Es la estimación mejor que sobre los datos originales?, ¿A que se debe la discrepancia?

In [ ]:
```
x_test = (data_test.iloc[:,1:7]).to_numpy().reshape((99,6))
y_test = (data_test.iloc[:,[7]]).to_numpy().reshape((99,1))

m_unos2 = np.ones((99,1),int)

x_new4 = np.hstack((m_unos2, x_test))
x_new4_t = np.transpose(x_new4)

y_pred2 = np.dot(x_new4,b_ent)
```

```
ecm_test = np.sum((y_test - y_pred2)**2) * 1/99


ecm_test
```

Out[ ]: 58.66453832312004

Sabemos que la diferencia entre la predicción y el valor real es el error, es decir, cuanto menor sea esta diferencia, mejor va a ser el ajuste. Por lo tanto, podemos asegurar que la estimación sobre los datos de test es mejor que sobre los datos de entrenamiento porque el ECM es menor. En otra palabras, los datos de entrenamiento están más alejados de la aproximación que los datos de test.

b) ¿Qué sucede con el ECM del segundo conjunto de casas si se realiza la regresión sobre todos los datos al mismo tiempo (es decir, las 414 casas)?

In [ ]:
```
x_ventas = (data_ventas.iloc[:,1:7]).to_numpy().reshape((414,6))
y_ventas = (data_ventas.iloc[:,[7]]).to_numpy().reshape((414,1))

m_unos3 = np.ones((414,1),int)

x_new5 = np.hstack((m_unos3, x_ventas))
x_new5_t = np.transpose(x_new5)

b_ventas = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(x_new5_t, x_new5)), np.dot(x_new5_
y_pred_ventas = np.dot(x_new4,b_ventas)
ecm_ventas = np.sum((y_test - y_pred_ventas)**2) * 1/99

ecm_ventas
```

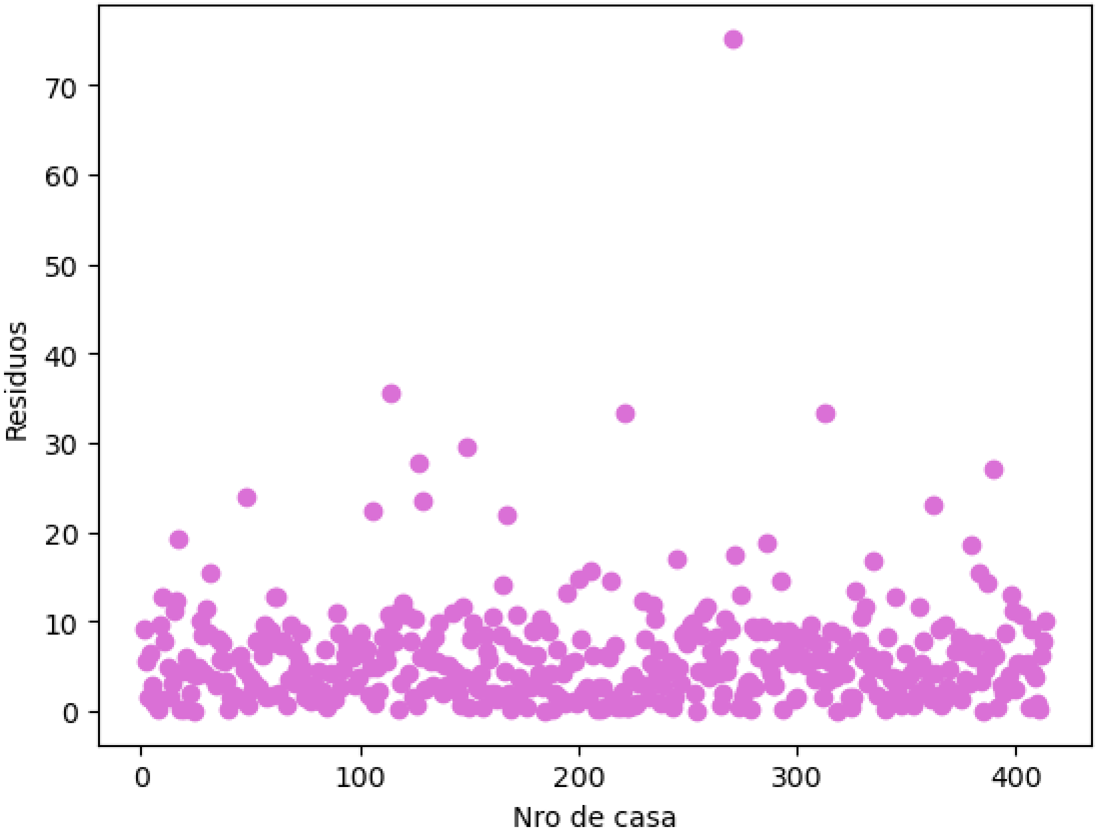
Out[ ]: 57.391900095859356

Si se realiza la regresión sobre todos los datos al mismo tiempo , es razonable que el ECM del segundo conjunto de casas sea menor en comparación al ECM de los datos de test al utilizar los parametros $\hat{\beta}$ estimados de los datos de entrenamiento. Esto se debe a que al ajustar datos para todo los puntos (incluyendo los de test) tiene sentido que el error sea menor que al ajustarlo sobre menos datos que no son semejantes a los de test.

Además, podemos deducir que existirá un menor ECM del segundo conjunto de casas si se realiza la regresión sobre solo los datos de test.

3. Graficar el error cometido por cada casa. Es decir el valor absoluto de la diferencia entre el precio por Ping real y el estimado.

In [ ]:
```
b_total = np.dot(np.linalg.inv(np.dot(x_new5_t, x_new5)), np.dot(x_new5_t
y_pred_total = np.dot(x_new5,b_total)


plt.scatter(np.arange(1,415),abs(y_ventas - y_pred_total), color = 'orchi
plt.ylabel("Residuos")
plt.xlabel("Nro de casa")

plt.show()
```



A partir del gráfico, notamos que el modelo ajusta bien los datos ya que los residuos se encuentran cercanos al eje X.

4. Imaginemos que se agrega una nueva columna a los datos que informa el año en que la misma fue construida. ¿Disminuiría esto el ECM?

Si realizamos una regresion lineal simple con el año de construcción y el precio de venta, notaremos que entre estas dos variables la relación es debil, es decir, el precio de venta esta debilmente relacionado con el año de construcción de la casa. Sin embargo, el año de construcción está correlacionada con la antigüedad de la casa. Por lo tanto, al realizar la regresión múltiple con la nueva variable notaremos que el ECM aumenta respecto de el ECM original, ya que estaríamos agregando una variable independiente poco relacionada con el precio, lo que generaría que más puntos esten más dispersos y más alejados de la aproximación.