**a) Mostrar que el espacio columna de la matriz X es un subespacio vectorial de :**

**Col(X) = {b en tales que b = Xβ con β variando en }**

El espacio de columnas de la matriz X es el conjunto Col X de todas las combinaciones lineales de sus columnas porque cumple con las siguientes propiedades que caracterizan a los subespacios:

1. Que el vector cero pertenezca al espacio columna de la matriz X:

El vector cero pertenece a Col X porque es una combinación lineal de los vectores de Col X.

Por lo tanto, si .

1. Para cada vector u y v en Col X, la suma pertenezca a Col X:

Sean u y v dos combinaciones lineales de las columnas X (vectores en Col X), con y . Entonces la suma de u y v a Col X porque también es una combinación lineal de las columnas de X.

1. Para cada vector u en Col X y para cada escalar c, el vector este en Col X:

Sea u una combinación lineal de las columnas de X (vector de Col X), con y c un escalar.

Entonces la multiplicación de es la siguiente:

*(bajo la propiedad conmutativa)*

**b) Supongamos que cuando hablamos de vectores en nos referimos a vectores columna de . Mostrar en ese caso que el producto escalar entre dos vectores u, v en puede calcularse como:**

**donde operación en el lado derecho de la igualdad es el producto de matrices usual.**

Para el lado izquierdo de la igualdad el producto escalar de los vectores es:

Para el lado derecho de la igualdad, dado que el ejercicio presenta a u y v como vectores columna de , pero el producto debe computarse en el modo matricial, los vectores que se multipliquen deben cumplir la siguiente propiedad:

dado a y b, a debe existir en y b en .

En nuestro caso, para que se cumpla la igualdad debemos llegar a un vector en por lo que el producto de matrices debe tener la siguiente forma:

\*

Ahora analicemos que productos podrían dar como resultado lo mismo que :

Por lo que tanto, :

Así, comprobamos que el producto escalar de vectores es igual al producto de una matriz transpuesta por otra matriz, ambas en .

**c) Aplicando el teorema tomando como subespacio S el subespacio del ítem (a), el punto y de como el vector de la variable dependiente, y el vector b como , convertir esta ecuación de optimalidad**

**en la condición de ortogonalidad que corresponde a la equivalencia 2 del teorema.**

Por el teorema sabemos que:

Como sabemos por consigna que

Entonces, usamos la condición derecha y remplazamos el vector b por y el vector s por y llegamos a:

**d) A la ecuación obtenida en el ítem (c), aplicarle la identidad del producto escalar vista en el ítem (b), para llegar a la ecuación:**

Tenemos que (ítem c).

Por consigna sabemos que  y s =X, por lo tanto, podemos remplazar las igualdades:

Asignamos al primer término del producto escalar y al segundo, para mantener la misma estructura de la propiedad (c):

Usando la demostración del ítem (b):

*por propiedad de transpuesta*

Volvemos a reutilizar la propiedad del ítem (b):

Por lo tanto:

Como

**e) Se sabe que el único vector que es ortogonal a todo vector v de es el vector nulo. Es decir, si u es un vector fijo tal que para todo v en , entonces u = 0. Usando esto y la ecuación obtenida en el ítem (d), llegar a la fórmula:**

Utilizando la propiedad :

Entonces alcanza con probar que:

Concluimos que

**f) Finalmente, suponiendo que las columnas de X son linealmente independientes, se tiene que la matriz es invertible. Despejar de la ecuación del ítem (e) para llegar a la fórmula de la solución óptima al problema de regresión.**

Tenemos con invertible.

Multiplicamos a izquierda en ambos lados de la igualdad la inversa de (

*por propiedad de la identidad*