2-as lab. darbas

9-as variantas

Ąžuolas Majauskas

December 22, 2025

Problema 1. Ar duotieji trys vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3-i \\ -5-i \\ -4-2i \\ 2-3i \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ -5-5i \\ 3-4i \\ 4+i \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3-3i \\ -3+4i \\ -4-5i \\ 3+3i \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. Vektoriai $v_1, v_2, \ldots, v_k$ yra tiesiškai priklausomi jei egzistuoja realūs (šiuo atveju kompleksiniai) skaičiai $c_1, c_2, \ldots, c_k$, kurie nėra visi nuliai, tokie kad:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

Taigi, turime lygčių sistemą:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0} \iff \begin{cases} (-3-i)c_1 + (3-3i)c_2 + (-3-3i)c_3 = 0, \\ (-5-i)c_1 + (-5-5i)c_2 + (-3+4i)c_3 = 0, \\ (-4-2i)c_1 + (3-4i)c_2 + (-4-5i)c_3 = 0, \\ (2-3i)c_1 + (4+i)c_2 + (3+3i)c_3 = 0. \end{cases}$$

Lygčių sistemą paverčiam į Gauso eliminacijos matricą:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3-i & 3-3i & -3-3i & 0 \\ -5-i & -5-5i & -3+4i & 0 \\ -4-2i & 3-4i & -4-5i & 0 \\ 2-3i & 4+i & 3+3i & 0 \end{array}\right]$$

Pirmiausia panaikinam c_1 koeficientus 2-oje, 3-ioje ir 4-oje eilutėse, iš i-tosios $i \in \{2,3,4\}$ eilutės atėmę 1-ą eilutę padaugintą iš m_i, kur:

$$m_2 = \frac{-5-i}{-3-i} = \frac{8-i}{5}, \qquad m_3 = \frac{-4-2i}{-3-i} = \frac{7+i}{5}, \qquad m_4 = \frac{2-3i}{-3-i} = \frac{-3+11i}{10}.$$

Gauname:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3-i & 3-3i & -3-3i & 0 \\ 0 & -\frac{46}{5}+\frac{2}{5}i & \frac{12}{5}+\frac{41}{5}i & 0 \\ 0 & -\frac{9}{5}-\frac{2}{5}i & -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i & 0 \\ 0 & \frac{8}{5}-\frac{16}{5}i & -\frac{6}{5}+\frac{27}{5}i & 0 \end{array}\right].$$

Toliau taip pat panaikinam c_2 koeficientus 3-ioje ir 4-oje eilutėse:

$$n_3 = \frac{-\frac{9}{5} - \frac{2}{5}i}{-\frac{46}{5} + \frac{2}{5}i} = \frac{41 + 11i}{212}, \qquad n_4 = \frac{\frac{8}{5} - \frac{16}{5}i}{-\frac{46}{5} + \frac{2}{5}i} = \frac{-10 + 18i}{53}.$$

Gaunam:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 - i & 3 - 3i & -3 - 3i & 0 \\ 0 & -\frac{46}{5} + \frac{2}{5}i & \frac{12}{5} + \frac{41}{5}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{93}{212} - \frac{405}{212}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{108}{53} + \frac{325}{53}i & 0 \end{array}\right].$$

Matosi, kad vienintelis sistemos sprendinys yra $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$, todėl vektoriai v_1, v_2, v_3 yra tiesiškai nepriklausomi. $\square$

Problema 2. Raskite $B^2 + 3A^\dagger C^{-2} + (A^{-1})^\dagger$, jeigu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 + i & 3 - 6i \\ 4 + i & -9 + 6i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 + i & -6 - 4i \\ -4 - 2i & 3 + i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 + 4i & -1 - 6i \\ -8 + 4i & 5 - 4i \end{pmatrix}.$$

Sprendimas. **1) Apskaičiuojame B^2.**

$$B^2 = BB, \text{ todėl:}$$

$$(B^2)_{11} = (-2 + i)^2 + (-6 - 4i)(-4 - 2i) = (3 - 4i) + (16 + 28i) = 19 + 24i,$$

$$(B^2)_{12} = (-2 + i)(-6 - 4i) + (-6 - 4i)(3 + i) = (16 + 2i) + (-14 - 18i) = 2 - 16i,$$

$$(B^2)_{21} = (-4 - 2i)(-2 + i) + (3 + i)(-4 - 2i) = (10 + 0i) + (-10i) = -10i,$$

$$(B^2)_{22} = (-4 - 2i)(-6 - 4i) + (3 + i)^2 = (16 + 28i) + (8 + 6i) = 24 + 34i.$$

Taigi

$$B^2 = \begin{pmatrix} 19 + 24i & 2 - 16i \\ -10i & 24 + 34i \end{pmatrix}.$$

2) Apskaičiuojame $A^\dagger$.

Transponuojam matricą ir pakeičiam visus elementus jungtiniais:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 4 - i & 4 - i \\ 3 + 6i & -9 - 6i \end{pmatrix}.$$

3) Apskaičiuojame C^{-1} ir C^{-2}.

Tikrinam ar atvirkštinė gali egzistuoti:

$$\det(C) = (-1 + 4i)(5 - 4i) - (-1 - 6i)(-8 + 4i) = (11 + 24i) - (32 + 44i) = -21 - 20i \neq 0.$$

Panaudosim formulę 2×2 matricos atvirkštinei rasti:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} 5 - 4i & 1 + 6i \\ 8 - 4i & -1 + 4i \end{pmatrix}.$$

"Racionalizuojam" trupmenos apačią:

$$\frac{1}{-21-20i} = \frac{-21+20i}{(-21)^2+20^2} = \frac{-21+20i}{841}.$$

Todėl atvirkštinė yra:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25+184i}{841} & \frac{-141-106i}{841} \\ \frac{-88+244i}{841} & \frac{-59-104i}{841} \end{pmatrix}.$$

Jau labai nusibodo skaičiuot ranka, panaudojau (https://matrix.reshish.com/matrix-multiplication/).

$$C^{-2} = (C^{-1})^2 = \begin{pmatrix} \frac{5041-34276i}{707281} & \frac{20324-2376i}{707281} \\ \frac{-12128-27536i}{707281} & \frac{30937-12804i}{707281} \end{pmatrix},$$

4) Apskaičiuojame $(A^{-1})^\dagger$.

$$\det(A) = (4+i)(-9+6i) - (3-6i)(4+i) = (-42+15i) - (18-21i) = -60+36i \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -9+6i & -(3-6i) \\ -(4+i) & 4+i \end{pmatrix} = \frac{1}{-60+36i} \begin{pmatrix} -9+6i & -3+6i \\ -4-i & 4+i \end{pmatrix}.$$

Kadangi

$$\frac{1}{-60+36i} = \frac{-60-36i}{60^2+36^2} = \frac{-5-3i}{408},$$

gaunam:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{21-i}{136} & \frac{11-7i}{136} \\ \frac{1+i}{24} & -\frac{1+i}{24} \end{pmatrix}.$$

Tada

$$(A^{-1})^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{21+i}{136} & \frac{1-i}{24} \\ \frac{11+7i}{136} & -\frac{1-i}{24} \end{pmatrix}.$$

5) Apskaičiuojame $3A^\dagger C^{-2}$.

Vėl naudojam (https://matrix.reshish.com/matrix-multiplication/).

$$3A^\dagger C^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{-270480-720483i}{707281} & \frac{569592-335943i}{707281} \\ \frac{494145+744030i}{707281} & \frac{-840087+133290i}{707281} \end{pmatrix}.$$

6) Sudedam viską į vieną.

Nežinau ar čia teisingai, bet atrodo labai keistai :D

$$B^2 + 3A^\dagger C^{-2} + (A^{-1})^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1805681725+2211286777i}{96190216} & \frac{48326977-280365817i}{16974744} \\ \frac{74983811-855763113i}{96190216} & \frac{386524487+581047537i}{16974744} \end{pmatrix}.$$

$\square$