1-as lab. darbas

9-as variantas

Ąžuolas Majauskas

December 22, 2025

Problema 1. Apskaičiuokite $\sum_{k=10}^{30} \frac{i^k}{1+i}$

Sprendimas.

$$\sum_{k=10}^{30} \frac{i^k}{1+i} = \frac{i^{10} + i^{11} + \cdots + i^{28} + i^{29} + i^{30}}{1+i} \tag{1}$$

Žinome, kad:

$$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 1 + i + (-1) + (-i) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Pritaikom $\pmod 4$ redukciją visiem laipsniam:

$$\frac{i^{10} + i^{11} + \cdots + i^{28} + i^{29} + i^{30}}{1+i} = \frac{i^2 + i^3 + i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^0 + i^1 + i^2}{1+i} \tag{3}$$

Iš (3) ir (2) išplaukia:

$$\frac{i^2 + i^3 + 0 + \cdots + i^0 + i^1 + i^2}{1+i} = \frac{i^2 + i^3 + i^0 + i^1 + i^2}{1+i} = \frac{i^2}{1+i}$$

$$= \frac{-1}{1+i} = \frac{-1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

□

Problema 2. Tarkime $u = 3 + 3i, w = 2 - 2i, z = 4 + 2i$, apskaičiuokite $|z| + \bar{u} + \frac{w^2}{|w|}$

Sprendimas.

$$|z| + \bar{u} + \frac{w^2}{|w|} = \sqrt{4^2 + 2^2} + 3 - 3i + \frac{(2-2i)^2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \sqrt{20} + 3 - 3i + \frac{-8i}{\sqrt{8}}$$

$$= 2\sqrt{5} + 3 - 3i + \frac{-8i}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{5} + 3 - 3i - 2\sqrt{2}\,i$$

$$= (2\sqrt{5} + 3) + (-3 - 2\sqrt{2})i$$

□

Problema 3. Užrašykite $z = -\frac{80}{3} - \frac{80}{3}i$ trigonometrinėje formoje $re^{i\theta}$

Sprendimas.

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{80}{3}\right)^2 + \left(-\frac{80}{3}\right)^2} = \frac{80\sqrt{2}}{3}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-\frac{80}{3}}{-\frac{80}{3}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Kadangi $a = -\frac{80}{3}, b = -\frac{80}{3}$ t.y. $a < 0$ ir $b < 0$, z yra 3-iame ketvirtyje, o $\frac{\pi}{4}$ mums duoda 1-ą ketvirtį, todėl pridedame π, kad pataisyti:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

Taigi turime:

$$z = -\frac{80}{3} - \frac{80}{3}i = \frac{80\sqrt{2}}{3}e^{i(\frac{5\pi}{4}+2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$$

□

Problema 4. Išspręskite lygtį $3x^2 + 2x + 10 = 0$

Sprendimas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Čia $a = 3,\ b = 2,\ c = 10.$ Todėl:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 120}}{6}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-116}}{6} = \frac{-2 \pm i\sqrt{116}}{6}$$

$$= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{29}}{6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{29}}{3}$$

Taigi sprendiniai yra:

$$x_1 = \frac{-1}{3} + \frac{\sqrt{29}}{3}i, \quad x_2 = \frac{-1}{3} - \frac{\sqrt{29}}{3}i$$

□

Problema 5. Raskite skaičiaus $z = -1 - i$ visas 8-tąsias šaknis.

Sprendimas.

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{4}.$$

Todėl:

$$z = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}.$$

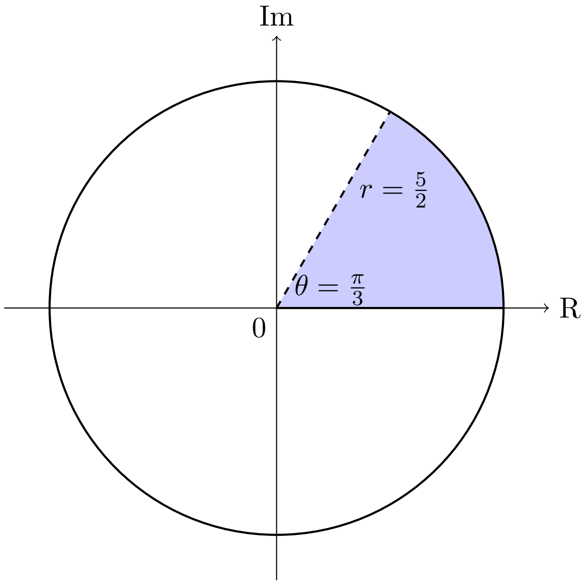
Taigi:

$$z_k = 2^{\frac{1}{16}} e^{i\left(\frac{5\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, 7.$$

□

Problema 6. Nubraižykite sritį kompleksinėje plokštumoje, kurią atitinka visi skaičiai z, kurie tenkina sąlygas: $|2z| \leq 5, \quad \arg(z) < \frac{\pi}{3}$

Sprendimas. Kadangi $|2z| \leq 5$, tai $|z| \leq \frac{5}{2}$ ir spindulys $r = \frac{5}{2}$.



□