Programação Funcional

(COMP0393)

Leila M. A. Silva

Revisão de Conceitos Matemáticos

Aula 2

Álgebra de Boole

- Álgebra – racionarmos sobre números
- Álgebra Booleana – raciocinarmos sobre *afirmações*

  Ex: ¨*4 é par*¨
- Variáveis uma expressão booleana - V ou F

  Ex: *x* = ¨*4 é par*¨, *y* = ¨*5 é par*¨ - o valor de *x* é *V* e o de *y* é *F*.
- Operações básicas da álgebra booleana:
  - e (and) - ∧ (&&)
  - ou (or) – ∨ (||)
  - não (not) - ¬ (not)
- Outras operações podem ser construídas a partir das operações básicas

Álgebra de Boole

- Tabelas Verdade das operações booleanas: mostra o valor de uma expressão booleana para todos os possíveis valores das variáveis da expressão

x	***y***	***x and y***	***x or y***	***not x***
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Ex: *x* = ¨*4 é par*¨, *y* = ¨*5 é par*¨, *z* = *x and y;* o valor de *z* é *F.*

Álgebra de Boole

- Assim como nas expressões algébricas ordinárias, é possível construir e avaliar expressões que combinam as operações booleanas básicas.

Ex: Seja $x = V$, $y = F$ a expressão

$$x \text{ and } ((\text{not } y) \text{ or } y)$$

Pode ser avaliada como

$$V \text{ and } ((\text{not } F) \text{ ou } F) = V \text{ and } (V \text{ or } F)$$
$$= V \text{ and } V$$
$$= V$$

Álgebra de Boole

- Algumas propriedades algébricas básicas das operações booleanas básicas:
  - Comutatividade:

    x and y = y and x ;

    x or y = y or x
  - Associatividade:

    (x and y) and z = x and (y and z);

    (x or y) or z = x or (y or z)
  - Distributividade:

    x and (y or z) = (x and y) or (x and z);

    x or (y and z) = (x or y) and (x or z)
  - Elementos identidade:

    x and V = x;

    x and F = F

Álgebra de Boole

- Exercício: Construa a tabela verdade para a propriedade da distributividade para verificar que é correta, ou seja as expressões dos lados esquerdo e direito são equivalentes.

$$x \text{ and } (y \text{ or } z) = (x \text{ and } y) \text{ or } (x \text{ and } z)$$

Álgebra de Boole

- Exercício: Construa a tabela verdade para a propriedade da distributividade para verificar que é correta, ou seja as expressões dos lados esquerdo e direito são equivalentes.

$$x \text{ and } (y \text{ or } z) = (x \text{ and } y) \text{ or } (x \text{ and } z)$$

x	***y***	***z***	***y or z***	***x and (y or z)***	***x and y***	***x and z***	***(x and y) or (x and z)***
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Coleções

- Conjuntos
- Listas

Conjuntos

- Uma coleção de objetos sem repetição e não ordenada
- Notação: {}, ℕ(naturais), ℤ (inteiros), ℚ (racionais), ℝ (reais)
- Ex: {1,2,4}
- sem repetição => {1,2,4}={1,1,2,4}
- não ordendada =>{1,2,4} ={2,1,4}

Conjuntos

- Elemento ou Membro de um conjunto ($\in$)
- Ex: $1 \in \{1,2,4\}$, $-2 \in \mathbb{Z}$, $-2 \notin \mathbb{N}$
- Cardinalidade: quantidade de elementos do conjunto ($|\,|$)
- Ex: $|\{1,2,4\}|$ é 3
- Conjunto vazio: $\{\}$ ou $\emptyset$, $|\{\}|$ é zero.

Conjuntos

- Notação para conjuntos com muitos elementos:

  { variável de referência: condição}

  - Ex: $\{x : x>0,\ x \text{ é par}\}$ ➡ $\{2,4,6,\ldots\}$
- Subconjunto: $A \subseteq B$ ➡ todo elemento de A é também elemento de B.
  - Ex: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,4\}$
- Conjunto Potência: conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto
  - Ex: $A = \{1,2,4\}$
  - $P^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$

Conjuntos

- Operações sobre conjuntos
  - União: ∪
  - Interseção: ∩
  - Diferença: -
  - Diferença simétrica: \
  - Produto Cartesiano: ×
  - Ex: $A = \{1,2,4\}$; $B = \{2,3\}$

    $A \cup B = \{1,2,3,4\}$; $A \cap B = \{2\}$; $A - B = \{1,4\}$; $A \setminus B = \{1,4,3\}$

    $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(4,2),(4,3)\}$

Exercício de Fixação

- Sejam os conjuntos $A = \{2,5,7\}$; $B = \{4,8,10\}$. *Determine:*

i. Um subconjunto de A;

ii. O conjunto potência de B;

iii. $A \cup B$;

iv. $A \cap B$;

v. $A - B$;

vi. $A \backslash B$;

vii. $A \times B$.

Listas

- Sequências ordenadas de objetos
- Notação: <1,2,3> ou (1,2,3)
- Ordem e repetição são importantes:

  <1,2,4> ≠ <2,1,4>; <1,2,4> ≠ <1,1,2,4>
- Comprimento ou tamanho da lista: número de elementos da lista.

  Ex: A lista <1,1,2,4> tem tamanho 4;

  A lista vazia, <>, tem tamanho zero.
- Par ordenado: lista com dois elementos. Ex: (1,2)
- Listas iguais: tamanhos iguais e elementos iguais e na mesma ordem. Ex: <1,2,4>=<1,2,4>; <1,2,4> ≠ <1,4,2>

Listas

- Operações sobre listas:
  - Concatenação: ++

    Ex: <1,2> ++<3,4> = <1,2,3,4>

Relações

- Conjunto de pares ordenados, ou seja, conjunto de listas de dois elementos

  Ex: $R = \{(1,3),\ (2,4),(3,5)\}$
- Notação: $x\ R\ y \Leftrightarrow (x,y) \in R$; $1\ R\ 3$ e $1 \not R\ 4$
- Todas as operações de conjunto se aplicam a relações pois relações são conjuntos.
- Relação inversa R^{-1} : inverte-se a ordem de todos os pares ordenados da relação.

  Ex: $R = \{(1,3),\ (2,4),(3,5)\}$; $R^{-1} = \{(3,1),\ (4,2),(5,3)\}$

Relações

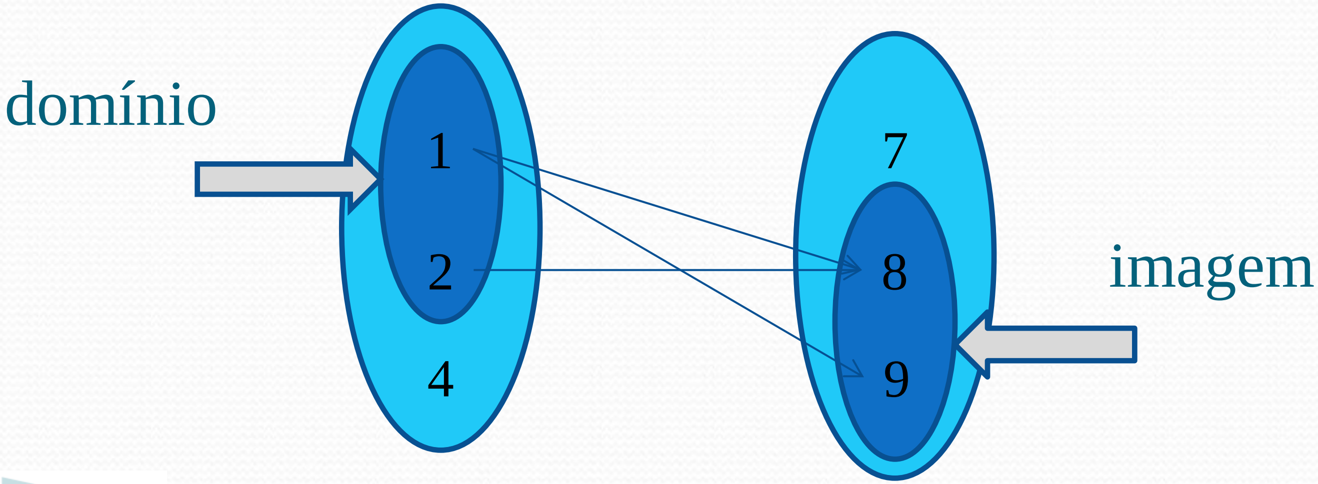
- Sejam A e B dois conjuntos.
  - Relação binária R sobre A: $R \subseteq A \times A$
  - Relação binária R de A em B: $R \subseteq A \times B$
  - *Ex:* $A = \{1,2,4\}$; $B = \{7,8\}$

    $R = \{(1,1), (4,2)\}$ ➡ *relação sobre A*

    $R = \{(1,7), (2,8)\}$ ➡ *relação de A em B*

Relações

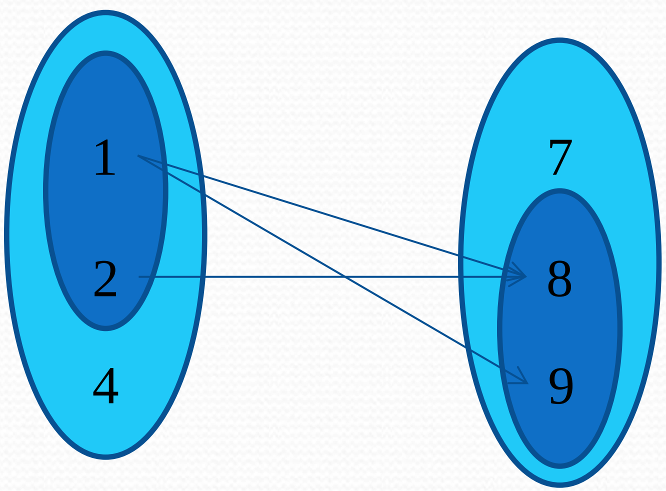
- Sejam *A* e *B* dois conjuntos. Seja *R* uma relação binária de *A* em *B*. Então
  - **domínio** de *R* é subconjunto de *A* – *dom R*;
  - **imagem** de *R* é subconjunto de *B* – *im R*;
- Ex: $A = \{1,2,4\}$; $B = \{7,8,9\}$; $R = \{(1,8),(1,9),(2,8)\}$

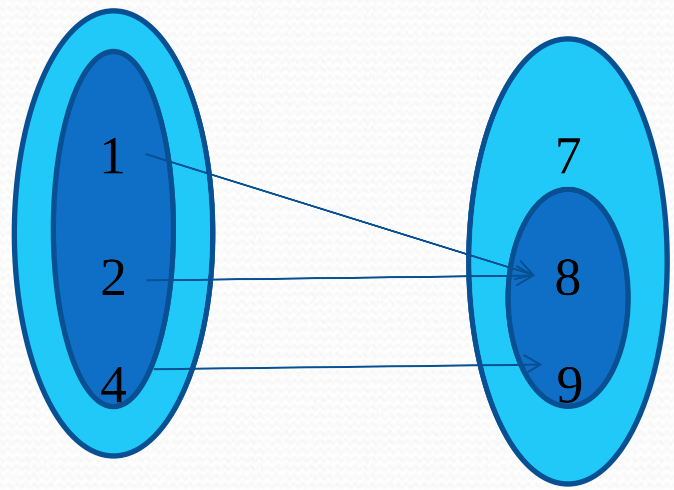


Funções

- Sejam *A* e *B* dois conjuntos. Seja *f* uma relação binária de *A* em *B*. Chamamos *f* de *função* se $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$ impliquem em $b{=}c$. Ex:

$R = \{(1,8),(1,9),(2,8)\}$ $f = \{(1,8),(2,8),(4,9)\}$





Funções

- Notação: $f(x)=y \Leftrightarrow (x,y) \in f$; $f: A \rightarrow B$

  Ex: $f = \{(1,3), (2,4),(3,5)\}$ ➡ $f(1)=3; f(2)=4; f(3)=5$
- Domínio e imagem (idêntico a relações)
- Composição de funções

  Sejam os conjuntos A, B e C e sejam $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$. Então, a função $g \circ f$, chamada de *composição de g e f*, é uma função de A para C definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

  em que $x \in A$.

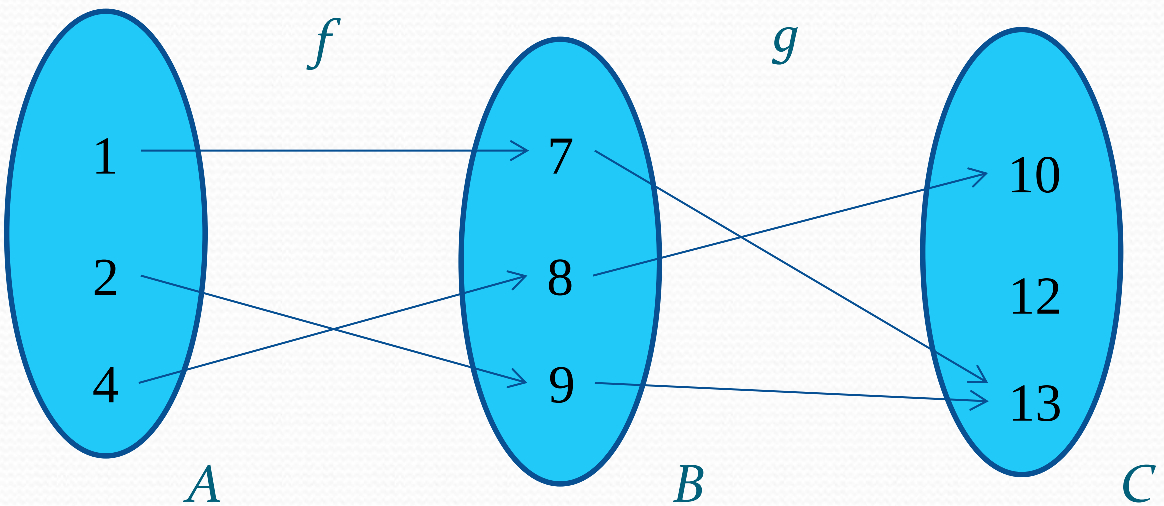
Funções

- Ex: A ={1,2,4}; B={7,8,9};C={10,12, 13}

$$f : A \to B; f = \{(1,7),(2,9),(4,8)\}$$

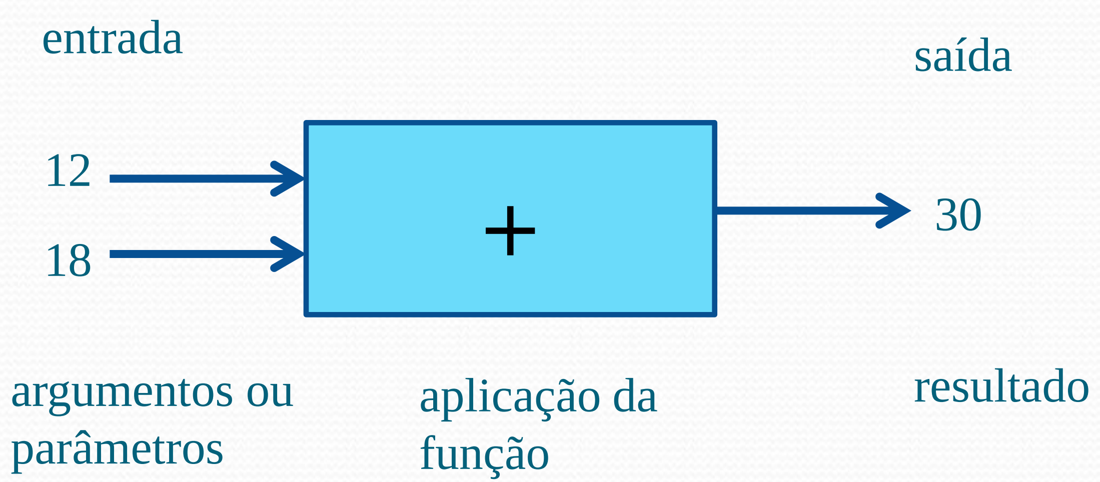
$$g: B \to C; g = \{(7,13),(8,10), (9,13)\}$$

$$(g \circ f) = \{(1,13),(2,13),(4,10)\}$$



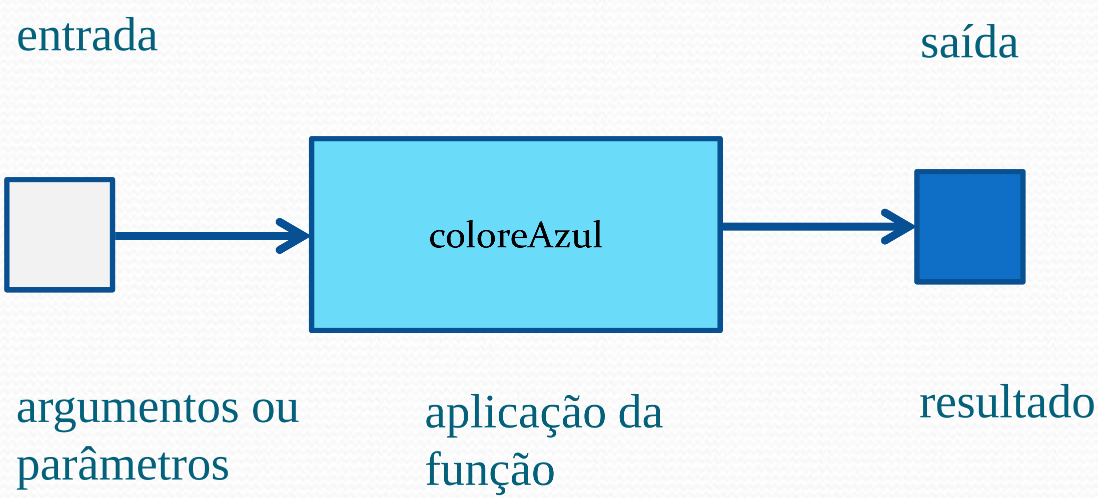
Funções

- Podemos pensar uma função como uma *máquina* com entrada e saída.
  - Introduz-se um número na máquina, aperta-se o botão e obtém-se uma resposta



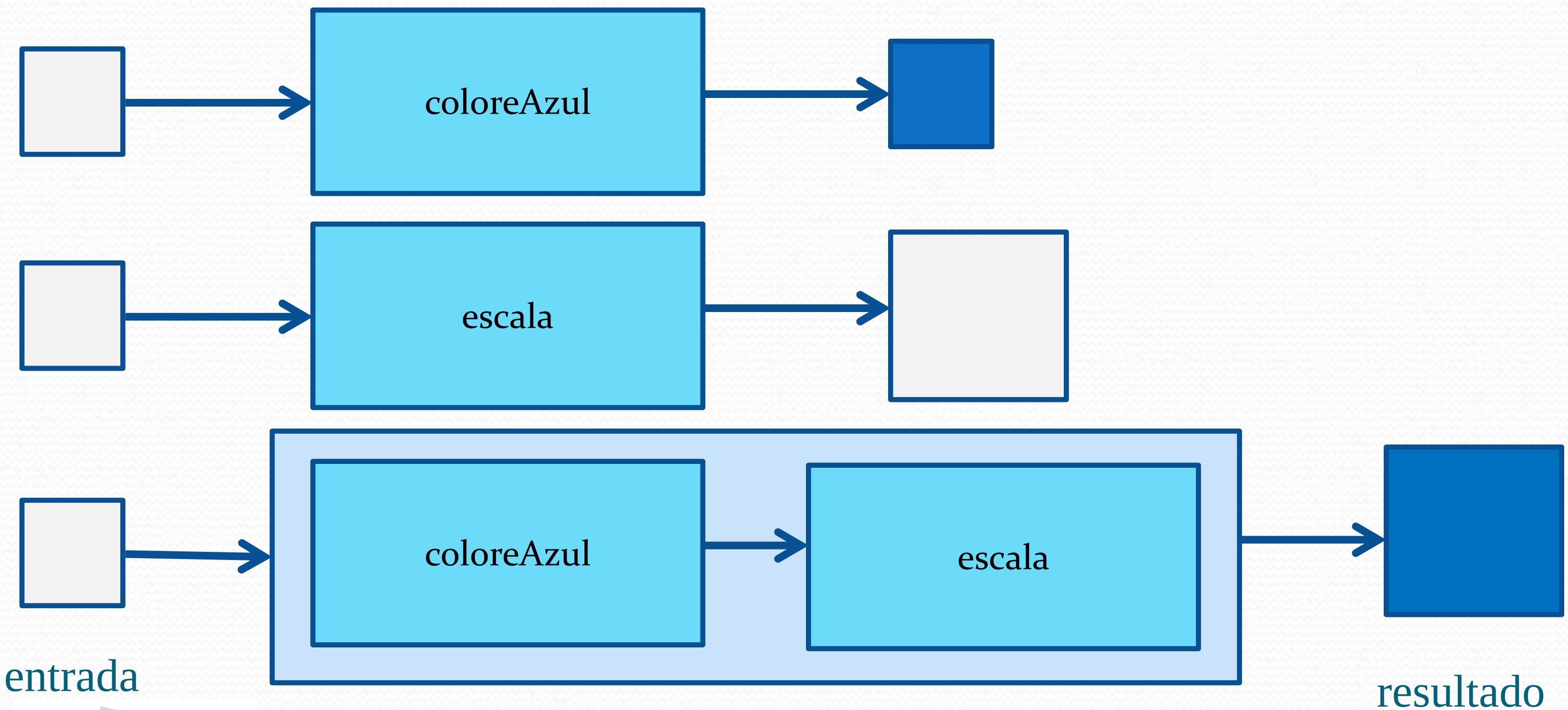
Funções

- Não necessária a função precisa ser uma fórmula algébrica



Funções

- As funções podem ser combinadas para que possamos solucionar problemas maiores



Leila Silva

Exercícios Recomendados

- Realize alguns exercícios sobre os principais conceitos, escolhendo um livro de Matemática Discreta de sua preferência.
- Sugestão:
  - Edward R. Scheinermann, Matemática Discreta: Uma Introdução, Cengage Learning, 2011.