Programação Funcional

(COMP0393)

Leila M. A. Silva

dcomp
departamento de computação

Indução Matemática

(COMP0393)

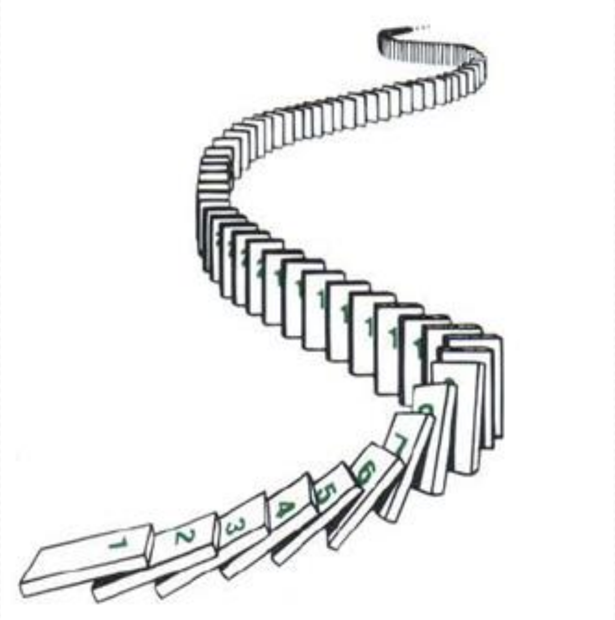
Aula 6

Indução Matemática

- A técnica da indução matemática, usada largamente no desenvolvimento de provas, é também bastante útil para a construção de algoritmos, como iremos explorar no curso.
- Indução Fraca (esta aula)
- Indução Forte (veremos mais adiante)

Indução Matemática (Fraca)

- Seja $P(n)$ um predicado definido para os inteiros n e seja n_o um inteiro fixo
- Suponha que as seguintes afirmações sejam verdadeiras:
  - $P(n_0)$ é V.
  - Para todos inteiros $k \geq n_0$,
    se $P(k)$ é V então $P(k+1)$ é V.
- Logo, a afirmação para todos inteiros $n \geq n_0$, $P(n)$ é V.



Indução Matemática (Fraca)

- Princípio da indução (fraca)
  - *Se a asserção P, com parâmetro n, é verdade para n_0, e se, $\forall\, k \geq n_0$, a verdade de P para k implica na verdade de P para k+1, então P é verdade para todos os inteiros.*

- Resolver o problema maior a partir de soluções para problemas menores.

Base n_0

passo Indutivo $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Indução Matemática (Fraca)

- Provas usando Indução Matemática
  - Prove o *caso base*
    - Prove que $P(n_o)$ é V para um dado n_o específico.
  - Suponha que $P(k)$ é V, onde k é um elemento específico tal que $k \geq n_0$,
    - Hipótese de indução (HI)
  - Passo indutivo ou Caso geral:
    - Prove que $\forall\ k \geq n_0,\ k \in \mathbb{Z}$; se $P(k)$ é V então $P(k+1)$ é V

Indução Matemática

- Numa prova por indução matemática **não é** assumido que *P(k)* é verdadeiro para todos os inteiros! É mostrado que se **for assumido** que *P(k)* é verdadeiro, então *P(k +1)* também é verdadeiro.
- Assim, na prova por indução matemática devemos usar obrigatoriamente o predicado *P(k)* (hipótese que estamos supondo ser verdadeira).

Aplicando o Princípio de Indução

Vamos iniciar com um problema conhecido de vocês, a soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA) de razão 1.

Prove que $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ para todos inteiros $n \geq 1$.

Mas como provar que isto é verdade? A prova se dá usando o princípio da indução!!

Vamos chamar $S_n = 1+2+\ldots+n$

Aplicando o Princípio de Indução

- Primeiro passo: escolher a variável na qual aplicaremos o princípio da indução. Para o exemplo da PA só temos uma variável, *n*, último natural na sequência de termos de razão 1.
- Segundo passo: estabelecer o *caso base*. O caso base é o mais elementar para o que se deseja provar, neste caso é o caso onde a sequência de termos só tem o elemento um a se considerar,

  $n_0 = 1$ e $S_1 = 1$.
- Terceiro passo: Provar o caso base. Para provar que a fórmula vale para este caso, substitui-se o valor de *n* da fórmula para este caso ($n = n_0$) e verifica se é igual à soma, que neste caso é um.

  $1(1+1)/2 = 1$ que é igual a S_1

  Logo, a fórmula vale para $n_0=1$.

Aplicando o Princípio de Indução

- Quarto passo: estabelece a Hipótese de Indução, ou seja supõe que a fórmula é verdadeira para algum valor de *n* igual a *k*. Ao assumir isto você está supondo que a soma

  $S_k = 1+2+3+\ldots+k$, é dada por $k(k+1)/2$.

- Quinto passo: prova o *passo indutivo*. Para provar o passo, você tenta estender a veracidade da hipótese de indução para o caso seguinte, para $k+1$. Se $P(k)$ é *V* então $P(k+1)$ é *V*. Se isto for possível, então o teorema vale para qualquer número inteiro. No exemplo, temos:

  $S_{k+1} = 1+2+3+\ldots+k+(k+1)$ *(associatividade da soma)*

  $= (1+2+\ldots+k) + (k+1)$ *(Hipótese de Indução)*

  $= [k(k+1)/2] + (k+1)$ *(álgebra)*

  $= [k(k+1) + 2(k+1)]/2 = [(k+1)(k+2)]/2$ $\blacksquare$

Aplicando o Princípio de Indução

- Observe que dado um *k* e o predicado associado, temos duas possibilidades:

  (a) *P(k)* é *V*

  (b) *P(k)* é *F*

- A hipótese indutiva **não afirma** que *P(k)* seja verdadeiro. O que afirma é que **caso** *P(k)* seja *V* então *P(k+1)* também será *V*. Isto é, se *k* faz com que *P(k)* seja verdadeiro e, assim, esteja na categoria (a) acima, então *k + 1* também fará com que *P(k +1)* seja *V* e, assim, também esteja em (a).
- Assim, se você supõe um predicado falso, você não conseguirá realizar a prova como veremos no próximo exemplo.

Aplicando o Princípio de Indução

- Prove que $0+1+2+\ldots+n = n(n+2)/2$, para todos inteiros $n \geq 0$.
- Esta asserção é ERRADA! $P(n)$ é F!!! Vamos tentar provar??
- Caso base : $n_0 = 0$. Neste caso $S_0 = 0$. Substituindo n_0 na fórmula temos $0(0+2)/2 = 0$. Para o caso base a fórmula vale!!! Ok!
- Hipótese de Indução. Supõe que para $n=k$ a asserção vale, ou seja, $0+1+2+\ldots+k = k(k+2)/2$.
- Passo indutivo ou Caso geral: Se a asserção vale para $n=k$ então vale para $n=k+1$, ou seja $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Assim desejamos provar que $0+1+2+\ldots+k + (k+1) = (k+1)(k+3)/2 = (k^2+4k+3)/2$

Aplicando o Princípio de Indução

- Passo indutivo ou Caso geral: Se a asserção vale para $n=k$ então vale para $n=k+1$, ou seja $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Assim desejamos provar que $0+1+2+\ldots+k + (k+1) = (k+1)(k+3)/2 = (k^2+4k+3)/2$

$$
\begin{aligned}
S_{k+1} &= 0+1+2+3+\ldots+ k+(k+1) && \textit{(associatividade da soma)} \\
&= (0+1+2+\ldots+k) + (k+1) && \textit{(Hipótese de Indução)} \\
&= [k(k+2)/2] + (k+1) && \textit{(álgebra)} \\
&= [k(k+2) + 2(k+1)]/2 = [k^2+4k+2]/2 \neq (k^2+4k+3)/2
\end{aligned}
$$

- Veja que não consegue chegar no resultado!!! O predicado original é falso!!!
- Uma variante da prova é supor *se P(k-1) então P(k)*. Veremos um exemplo a seguir.

Aplicando o Princípio de Indução

Desejamos provar que $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = [(2n+1)(n+1)n]/6$

- Variável indutiva: *n*, último valor natural na soma.
- Caso base: $n_0 = 0$
- Prova do caso base:
  - No lado esquerdo da equação, soma só terá um elemento $0^2 = 0$.
  - No lado direito da equação, quando $n = n_0 = 0$, substituindo temos $(0+1)(0+1)0/6 = 0$
  - Logo, como o lado esquerdo é igual ao direito, a fórmula vale para $n_0 = 0$.

Aplicando o Princípio de Indução

Desejamos provar que $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2 = [(2n+1)(n+1)n]/6$

- Hipótese de Indução: Supomos que a fórmula vale para $n=k-1$, ou seja $0^2+1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2 = [(2(k-1)+1)((k-1)+1)(k-1)]/6$
- Prova do passo indutivo: estender a veracidade da HI para $n=k$.

$$
\begin{aligned}
0^2+1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2+k^2 &= [0^2+1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2]+k^2 && \textit{(associatividade da soma)}\\
&= \{[(2(k-1)+1)k(k-1)]/6\}+k^2 && \textit{(HI)}\\
&= \{k[2(k-1)^2+(k-1)+6k]\}/6 && \textit{(álgebra)}\\
&= \{k[2k^2+3k+1]\}/6 && \textit{(álgebra)}\\
&= [(2k+1)(k+1)k]/6 && \blacksquare
\end{aligned}
$$

Aplicando o Princípio de Indução

Desejamos provar que

Seja n inteiro, $n \geq 1$. A soma dos primeiros n números ímpares naturais é igual a n^2.

- Entendendo melhor o problema... Por exemplo, $1+3+5=3^2$
- Poderíamos enxergar esta soma como

  $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2$, onde o $a_n = 2n-1$.
- Variável indutiva: n, quantidade de números ímpares
- Caso base: $n_0=1$
- Prova do caso base:
  - No lado esquerdo da equação, a soma só terá um elemento, 1.
  - No lado direito da equação, quando $n_0=1$, substituindo temos 1^2
- Logo, como o lado esquerdo é igual ao direito, a fórmula vale para $n_0=1$.

Aplicando o Princípio de Indução

Desejamos provar que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2$, onde o $a_n = 2n-1$

- Hipótese de Indução: Supomos que a fórmula vale para $n=k$, ou seja $1+3+5+\ldots+(2k-1)= k^2$
- Prova do passo indutivo: estender a veracidade da HI para $n=k+1$.

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$	$= (1+3+5+\ldots+(2k-1))+(2k+1)$	(associatividade da soma)
	$= k^2+(2k+1)$	(HI)
	$= (k+1)^2$	(álgebra) ■

Exercício de Fixação

Seja n inteiro, n≥1. Então

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2^n - 1, \text{ onde o } a_n = 2^{n-1}.$$

- Entendendo melhor o problema, se $n=3$, $1+2+4 = 2^3-1=7$
- Em geral, deseja-se provar que $2^0 + 2^1 + .. + 2^{n-1} = 2^n - 1$
- Prove por indução o que se pede.

Mais exemplos...

Para todo x e n naturais, $x>1$, $n\geq1$, $x^n - 1$ é divisível por x-1

- Caso Base: $n_0=1$

  x-1 é divisível por x-1

Trivialmente verdadeiro. Todo número natural > 0 é divisível por si mesmo.

- Hipótese de indução. Supõe que

  $x^{k-1} - 1$ é divisível por x-1

Supõe que a asserção é verdadeira para $n=k$-1

- Passo Indutivo: Prova para $n=k$, ou seja prova que $x^k - 1$ é divisível por x-1

$$x^k - 1 = x\left(x^{k-1} - 1\right) + x - 1$$

Na prova, é preciso usar a hipótese de indução. Manipule algebricamente o termo geral para aparecer um termo similar ao da hipótese da indução.

Por H.I, $x^{k-1} - 1$ é divisível por x-1, portanto $x\left(x^{k-1} - 1\right)$ é divisível por x-1. Além disso, x-1 é trivialmente divisível por x-1, como no caso base.

Se um número a é divisível por b, todo múltiplo de a também o é.

A soma de dois números divisíveis por x-1, também é divisível por x-1, concluindo a prova.

Mais exemplos...

Provar que:

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}<1$$

- Caso Base: $n_0=1$

$$\frac{1}{2}<1$$

- Hipótese de indução. Supõe que vale para $n=k$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}<1$$

- Passo Indutivo: Prova que se vale para $n=k$ então vale para $n=k+1$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right]$$

Manipule algebricamente para fazer aparecer o termo da hipótese de indução

H.I → <1

<1/2

<1

■

Mais exemplos...

- Prove que para todos os inteiros $n \geq 1$, $n^3 - n$ é divisível por 3.
- Prova:
  - Caso base: $n_0 = 1$
    - Neste caso $1^3 - 1 = 0$ que é divisível por 3.
  - Hipótese de indução: Suponho que para $n = k$, a fórmula vale, ou seja $k^3 - k$ é divisível por 3, $k \geq 1$.
  - Passo indutivo ou Caso geral: Estender a asserção para $n = k+1$, ou seja, desejo provar que $(k+1)^3 - (k+1)$ é também divisível por 3.

dcomp departamento de computação

Mais exemplos...

- Prove que para todos os inteiros $n \geq 1$, $n^3 - n$ é divisível por 3.
- Prova:
  - Passo indutivo ou Caso geral: Estender a asserção para $n=k+1$, ou seja, desejo provar que $(k+1)^3-(k+1)$ é também divisível por 3.

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \qquad (\textit{álgebra})$$

$$= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \qquad (\textit{álgebra})$$

$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$$

HI

Todo múltiplo de 3 é divisível por 3

Soma de parcelas divisíveis por 3 é também divisível por 3!

Exercícios Recomendados

- Seja n um inteiro positivo. Mostre, por indução, que
  $2.1 + 2.2 + \ldots + 2.n = n^2 + n$
- Seja n um inteiro positivo. Mostre, por indução, que
  $1.1! + 2.2! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$
- Seja n um número natural. Mostre, por indução, que
  $10^0 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^n < 10^{n+1}$
- Suponha que, dados três naturais a, b e c, $(ab)^c = a^c b^c$. Mostre, por indução, que este resultado pode ser generalizado para $(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)^c = a_1^c a_2^c a_3^c \ldots a_n^c$.

Exercícios Recomendados

- Seja n um inteiro tal que $n \geq 5$. Mostre, por indução, que $n^2 < 2^n$.
- Seja n um número natural. Mostre, por indução, que $4^n - 1$ é divisível por 3.

Bibliografia

- Para estudar Indução Matemática você pode usar qualquer livro da biblioteca de Matemática Discreta que tenha o assunto.