応用数学 II 定理集

1　ベクトル方程式

定理 1. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が垂直のとき，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である．

証明

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} = 0 (\because \cos\frac{\pi}{2} = 0)$$

□

定理 2. a, b, c を定数とし，xy 平面上において $ax + by = c$ と表わされる直線 l の単位法線ベクトルは，$(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ であり，原点からの距離は $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である．

証明　直線 l の単位法線ベクトルを $\vec{n} = (n_x, n_y)$，原点からの距離を ρ，l 上の動点 P の位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y)$ とおくと，$\vec{n} \cdot \vec{r} = \rho$ となる．

これを成分表示すると $n_x x + n_y y = \rho$ であり，これはヘッセの標準形である．

ヘッセの標準形であるならば $||\vec{n}|| = 1$，つまり ${n_x}^2 + {n_y}^2 = 1$ である．これを $ax + by = c$ と比較すると単位法線ベクトルは次の通りである．

$$(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

また，原点からの距離は次の通りである．

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

□

ただし，これではあまりにもわかりづらいので，別の証明も記す．

証明　$ax + by = c$ をヘッセの標準形に変換する．

例えば，$Ax + By = C$ がヘッセの標準形であるとき，$A^2 + B^2 = 1$ である[1)]．$a^2 + b^2 = M$ とするとき，M を 1 にするには，両辺を M で割ればよい．つまり，次のようになる．

---

1)　ヘッセの標準形は $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$ であるが，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ である．

$$a^2 + b^2 = M$$
$$\frac{a^2}{M} + \frac{b^2}{M} = 1$$
$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1 (\because M = a^2 + b^2)$$

すなわち，$ax + by = c$ をヘッセの標準形に直すと次の通りである．

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ヘッセの標準形 $Ax + By = C$ において，A, B はそれぞれ単位法線ベクトルの x 成分 y 成分であるから，単位法線ベクトルは次の通りである．

$$(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

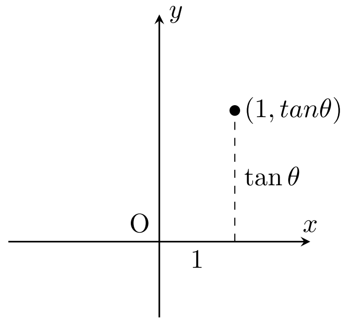
また，ヘッセの標準形 $Ax + By = C$ において，C は原点からの距離にあたるが，距離が 0 未満になることはありえないため，絶対値をつけて次の通りとなる．

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

□

定理 3. $y = \alpha x$ が x 軸となす角は $\arctan\alpha$ である．

証明　$y = \tan\theta x$ を下に図示する．



$\tan\theta = \alpha$ とすると，$y = \alpha x$ が x 軸となす角は $\arctan\alpha$ である．　□

2　二次元座標変換

定理 4. 幾何ベクトル ${}^t(x, y)$ において，x 軸方向に S_x，y 軸方向に S_y だけ拡大，もしくは縮小する幾何変換を行う変換行列は次の通り．

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}$$

3　連立漸化式・最小二乗法

本文.

4　ネットワークの数理

5　数え上げ理論

定理 5. $(\sum_{i=1}^{i=n} x_i)^k$ の展開式の異なる項の数は，${}_nH_k = {}_{n+k-1}C_k$ である．