

数学工具作业

lin

2024 年 3 月 24 日

1 第一题

显然有:

$$\vec{I} = \delta_{ij} I_{ij} \partial_j \varphi = \delta_{ij} (\partial_j \varphi) = \nabla \varphi = \delta_{ij} (I_{ij} \partial_j \varphi) = \nabla(\vec{I} \varphi) \quad (1)$$

2 第二题

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{ijk} (B_k \partial_i A_j + A_j \partial_i B_k) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (2)$$

3 第三题

3.1 (a)

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = \vec{\omega}(\vec{x} \cdot \nabla) + \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{x}) - \vec{x}(\vec{\omega} \cdot \nabla) - \vec{x}(\nabla \cdot \vec{\omega}) = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega} \quad (3)$$

注意到 $\nabla \cdot \vec{x} = 3$ 且 $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$.

3.2 (b)

由 (a) 显然有:

$$\int_S 2\vec{\omega} \cdot d\vec{a} = \int_S [\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{x})] \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial V} (\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot d\vec{l} = \oint_{\partial V} (\vec{x} \times d\vec{l}) \cdot \vec{\omega} \quad (4)$$

等式两边同时消去 ω 即得到所求等式.



图 1: 似乎是碧蓝档案的角色