矩阵理论

第二章　范数理论

2.1 向量范数

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

向量的范数

范数的定义

若对任意 $x \in C^n$ 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应，且满足：

(1) 正定性 $\forall x \in \mathrm{C}^n$, $\|x\| \geq 0$ 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) 齐次性 $\forall \lambda \in \mathrm{C}$, $x \in \mathrm{C}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(3) 三角不等式 $\forall x, y \in \mathrm{C}^n$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称 $\|x\|$ 为 C^n 上向量 x 的范数

向量范数的性质

定理2.1

对任意$x, y \in C^n$, 有:

(1) $\|-x\| = \|x\|$

(2) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$

证明(2)

$\because \|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|,$

$\|y\| = \|y - x + x\| \le \|y - x\| + \|x\|$

故(2)成立

常用的向量范数

常用的向量范数

设 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in\mathrm{C}^n$

(1)1范数: $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

(2)2范数: $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(3)p范数: $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1\le p<+\infty$

(4)∞范数: $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

1范数

1范数验证满足三角不等式

设 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T, y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^T\in\mathrm{C}^n$，

则 $x+y=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n\right)^T$

$$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i+y_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left(\left|x_i\right|+\left|y_i\right|\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|=\|x\|_1+\|y\|_1$$

2范数

2范数满足酉不变性（ 旋转不变性 ）

对任意 $x \in C^n$ 和任意的 n 阶酉矩阵 U，有:

$$\|Ux\|_2 = \sqrt{x^H U^H U x} = \|x\|_2$$

p范数

引理2.1（Young不等式）

$$\forall \alpha,\beta \geq 0 \text{ 都有 } \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

$$\text{其中 } 1 \leq p,q < \infty \text{ 且 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

定理2.2（Hölder不等式）

$$\forall x_i, y_i \in \mathrm{C}^n,\ i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{其中 } 1 \leq p,q < \infty \text{ 且 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

p范数

p范数验证三角不等式（Minkowski不等式）

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

向量形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

p范数

定理2.3: $\forall x \in \mathrm{C}^n$, $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$

定理2.4:

设 $A \in C_n^{m\times n}$(列满秩), $\|\cdot\|_a$ 是C^m上的一种向量范数. 对任意$x \in C^n$, 规定

$$\|x\|_b = \|Ax\|_a$$

则$\|\cdot\|_b$ 是C^n 上的向量范数

例题2.1:

如果A 是n 阶Hermite正定矩阵，规定

$$\|x\|_A = \sqrt{x^H Ax},\ x \in \mathrm{C}^n$$

则$\|x\|_A$ 是C^n 上的向量范数(椭圆范数)。

向量范数的等价性

向量范数等价性的定义

设$\|\cdot\|_a$和$\|\cdot\|_b$是C^n上的两种向量范数。如果存在正数α和β，使对任意$x\in C^n$都有

$$\alpha\|x\|_b \le \|x\|_a \le \beta\|x\|_b$$

则称向量范数$\|\cdot\|_a$和$\|\cdot\|_b$等价

定理2.5：

C^n上所有的向量范数都等价

向量范数等价性的应用

向量序列收敛性的定义

给定C^n中的向量序列$\{x^{(k)}\}$，其中

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)^T \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

如果 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_j^{(k)} = x_j \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

则称向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

记作 $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$

定理2.6：

C^n中向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于x的充要条件是：

对于C^n上任一种向量范数$\|\cdot\|$ $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|=0$

矩阵理论

第二章　范数理论

2.1 向量范数习题

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

向量范数习题

2.1.1 求向量 $x=(1+\mathrm{i},-2,4\mathrm{i},1,0)^{\mathrm{T}}$ 的1，2，∞ 范数

2.1.2 计算向量 $x=(1,2,-3)^{\top}$ 向量范数，$\|x\|_1$ 、$\|x\|_2$ 和$\|x\|_\infty$

向量范数习题

2.1.1 **求向量** $x = (1+\mathrm{i}, -2, 4\mathrm{i}, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ **的1，2，∞ 范数**

$$\|x\|_1 = |1+\mathrm{i}| + |-2| + |4i| + 1 + 0 = 7 + \sqrt{2},$$

$$\|x_2\| = \sqrt{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (-2)^2 + 4\mathrm{i}(-4\mathrm{i}) + 1} = \sqrt{23},$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{1+\mathrm{i}|, \quad |-2|, \quad |4\mathrm{i}\,|, \quad 1\} = 4.$$

向量范数习题

2.1.2 **计算向量** $x = (1, 2, -3)^\top$ **向量范数，** $\|x\|_1$ 、$\|x\|_2$ **和** $\|x\|_\infty$

$$\|x\|_1 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|x\|_\infty = 3$$

矩阵理论

第二章　范数理论

2.2 矩阵范数

矩阵范数

定理2.4

设$\|\cdot\|$是$\mathrm{C}^{n\times n}$上的一个泛函，满足:

(1)正定性 $\forall A\in \mathrm{C}^{n\times n}$, $\|A\|\geq 0$ 且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$

(2)齐次性 $\forall \lambda\in \mathrm{C}$, $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$, $\|\lambda A\|=|\lambda|\cdot\|A\|$

(3)三角不等式 $\forall A,B\in \mathrm{C}^{n\times n}$, $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

(4)乘积不等式 $\forall A,B\in \mathrm{C}^{n\times n}$, $\|AB\|\leq\|A\|\cdot\|B\|$

则称$\|\cdot\|$是$\mathrm{C}^{n\times n}$上的一个矩阵范数

常用的矩阵范数

常用的矩阵范数

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{C}^{n\times n}$

(1) m_1范数: $\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$

(2)F范数: $\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{tr\left(A^H A\right)}$

(3)m_∞范数: $\|A\|_{m_\infty}=n\cdot \max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|$

验证矩阵范数

验证矩阵范数

(1)正定性和(2)齐次性容易验证，现使用F范数

验证(3)三角不等式和(4)乘积不等式：

$$\forall A=\left(a_{ij}\right),\ B=\left(b_{ij}\right)\in \mathrm{C}^{n\times n}$$

验证(3)三角不等式

$$\left\|A+B\right\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}+b_{ij}\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|a_{ij}\right|^2+2\left|a_{ij}\right|\left|b_{ij}\right|+\left|b_{ij}\right|^2\right)}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\left|b_{ij}\right|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}$$

验证矩阵范数

验证矩阵范数

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2\right)^{1/2}=\|A\|_F+\|B\|_F.$$

验证(4)乘积不等式

$$\|AB\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\left|b_{lj}\right|^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|b_{jk}\right|^2\right)}=\|A\|_F\cdot\|B\|_F$$

F 范数的酉不变性

定理2.7 F 范数的酉不变性

设$A \in C^{n\times n}$，则对任意n 阶酉矩阵U 和V，恒有：

$$\|UA\|_F = \|AV\|_F = \|UAV\|_F = \|A\|_F$$

$$\|AV\|_F^2 = tr(V^H A^H AV) = tr(A^H AVV^H) = tr(A^H A) = \|A\|_F^2$$

矩阵范数与向量范数的相容性

矩阵范数与向量范数的相容性

设$\|\cdot\|_m$是$\mathbb{C}^{n\times n}$上的矩阵范数，$\|\cdot\|_v$是$\mathbb{C}^n$上的向量范数，如果$\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $x\in\mathbb{C}^n$, $\|Ax\|_v\le\|A\|_m\cdot\|x\|_v$
则称矩阵范数$\|\cdot\|_m$与向量范数$\|\cdot\|_v$相容。

注:

(1)矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$, $\|\cdot\|_F$ 分别与向量范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 相容

(2)矩阵范数$\|\cdot\|_{m_\infty}$ 与向量范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_\infty$相容

矩阵范数与向量范数的相容性

矩阵范数与向量范数的相容性

证明(以矩阵范数$\|\cdot\|_{m_1}$和向量范数$\|\cdot\|_1$为例):

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in C^{n\times n}$, $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T\in C^n$, 则有:

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\left|x_j\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|\right)=\|A\|_{m_1}\cdot\|x\|_1$$

定理2.8

设$\|\cdot\|_m$是$C^{n\times n}$上的一种矩阵范数,则在C^n上必存在与它相容的向量范数.

从属范数

定理2.9 从属范数

设$\|\cdot\|_v$是C^n上一个的向量范数。定义:

$$\|A\|_m = \sup_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},\ A\in C^{n\times n}$$

则$\|\cdot\|_m$是$C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称为由向量范数$\|\cdot\|_v$ 所诱导的矩阵范数，且矩阵范数$\|\cdot\|_m$与向量范数$\|\cdot\|_v$相容。

从属范数的计算公式

定理2.10

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{C}^{n\times n}$ 将向量范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$诱导的矩阵范数分别记为$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_\infty$，则有：

(1)1-范数(列模和范数): $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$; 最大列模和

(2)2-范数(谱范数): $\|A\|_2=\sigma_1=\sqrt{A^H A\text{的最大特征值}}$; A的最大奇异值

(3)∞-范数(行模和范数): $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$; 最大行模和范数

矩阵2范数(F 范数)的性质

定理2.11 矩阵2范数(F范数)的性质

设 $A \in C^{n\times n}$, U和V为n阶酉矩阵，则:

(1) $\|A^H\|_2 = \|A\|_2$

(2) $\|UA\|_2 = \|AV\|_2 = \|UAV\|_2 = \|A\|_2$ (酉不变性)

(3)若A是正规矩阵, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的n个特征值,则

$$\|A\|_2 = \max_k |\lambda_k|$$

$$A = U\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}U^H, A^H A = U\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}U^H$$

长方阵的范数

长方阵的范数

前面方阵范数的定义稍作修改可推广到$m\times n$矩阵的情形

(1)矩阵范数的相容性修改为: $\forall A\in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in \mathbb{C}^{n\times l}$

$\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$(同类范数，如F范数)

(2)矩阵范数与向量范数的相容性修改为:

$\forall A\in \mathbb{C}^{m\times n}$，$x\in \mathbb{C}^{n}$，有 $\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

(3)从属范数定义修改为

$$\|A\|=\sup_{\|x\|_v=1}\|Ax\|_v=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v},\quad A\in \mathbb{C}^{m\times n}$$

长方阵的范数

长方阵的范数

常用的长方阵范数有:

(1)m_1范数: $\|A\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

(2)F范数: $\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{tr\left(A^H A\right)}$

(3) M范数(最大范数): $\|A\|_M=\max\{m,n\}\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$

(4) G范数(几何平均范数): $\|A\|_G=\sqrt{mn}\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$

2.2 矩阵范数

长方阵范数

常用的长方阵范数有:

(5)1范数(列和范数): $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

(6)2范数(谱范数): $\|A\|_2 = \sqrt{A^H A\text{的最大特征值}}$

(7) ∞范数(行和范数): $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

范数性质小结

范数性质小结

(1) F范数, 2范数：酉不变

(2) m_1范数与向量1范数相容;

F范数，G范数与向量2范数相容;

M范数与向量1, 2, ∞范数相容;

(3)矩阵1, 2, ∞范数分别由向量1, 2, ∞范数导出，从而相容

(4) $\mathbb{C}^{m\times n}$上所有矩阵范数等价

矩阵理论

第二章　范数理论

2.2 矩阵范数习题

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

矩阵范数习题

2.2.1 给定矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

，计算 A 的 m_1 范数，1 范数，F 范数和 ∞ 范数

2.2.2 已知 $A=\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 & -3 \\ 5 & 4\mathrm{i} & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的 m_1，$\mathrm{F}, 1, \infty$ 范数.

矩阵范数习题

2.2.1　给定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

，计算 A 的 m_1 范数，1 范数，F 范数和 ∞ 范数

$$\|A\|_{m_1} = |2| + |-1| + |1| + |3| = 7$$

$$\|A\|_1 = max(2+1, |-1|+3) = 4$$

$$\|A\|_F = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|A\|_\infty = max(2+|-1|, 1+3) = 4$$

矩阵范数习题

2.2.2 已知 $A=\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 & -3 \\ 5 & 4\mathrm{i} & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 的m_1, $\mathrm{F}, 1, \infty$ 范数.

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_1} = |1+\mathrm{i}| + 3 + 5 + |4\mathrm{i}| + 2 + 3 + 1 = 18 + \sqrt{2};$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{|1+\mathrm{i}|^2 + 3^2 + 5^2 + |4\mathrm{i}|^2 + 2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{66};$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = max(|1+i| + 5 + |-2|, 0 + |4i| + 3, |-3| + 0 + 1) = 7 + \sqrt{2};$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = max(|1+i| + 0 + |-3|, 5 + |4i| + 0, |-2| + 3 + 1) = 9;$$

矩阵理论

第二章　范数理论

2.3 范数应用举例

中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

范数应用举例

矩阵的谱半径

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的特征值，则称

$\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ 为矩阵A的谱半径

定理2.12

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则:

(1) $\rho\left(A^k\right) = \left[\rho(A)\right]^k$

(2) $\rho\left(A^H A\right) = \rho\left(AA^H\right) = \|A\|_2^2$

(3)当A是正规矩阵时 $\rho(A) = \|A\|_2$

谱半径与范数的关系

定理2.13

对矩阵A有: $\rho(A) \le \|A\|$, $\|A\|$为矩阵A的任一范数。

证明:

设 $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, λ是A的一个特征值, x是A属于λ的特征向量, 则$Ax=\lambda x$

对$\mathrm{C}^{n\times n}$中任一矩阵范数$\|\cdot\|$以及与它相容的向量范数$\|\cdot\|_v$有:

$$|\lambda|\cdot\|x\|_v = \|\lambda x\|_v = \|Ax\|_v \le \|A\|\cdot\|x\|_v$$

$$|\lambda| \le \|A\|, \text{即} \rho(A) \le \|A\|$$

注: 正规矩阵的谱范数$\|\cdot\|_2$是最小的矩阵范数

谱半径与范数的关系

例 2.11　已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}$，试估计 A 的谱半径.

解　可求得 $\|A\|_1=\|A\|_\infty=0.4$，$\|A\|_{m_1}=1$，$\|A\|_{m_\infty}=0.6$，$\|A\|_F=\sqrt{0.18}\approx0.4243$. 于是 $\rho(A)\leqslant0.4$.

实际计算可知 A 的特征值为 $0,-0.3i,0.3i$，从而 $\rho(A)=0.3$. 可见对此矩阵谱半径的估计较精确. 但对多数矩阵来说，估计的结果偏保守.

谱半径与范数的关系

定理2.14

设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$则 $\forall \varepsilon > 0$, 必存在$\mathbb{C}^{n\times n}$上矩阵范数$\|\cdot\|_m$使得
$\|A\|_m \le \rho(A) + \varepsilon$

证明:

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的特征值. 由Jordan分解定理,

存在可逆矩阵使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & & \\ & \lambda_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} & \\ & & & \lambda_n & \end{pmatrix}, \text{其中}\delta_i\text{=0 or 1}$$

谱半径与范数的关系

定理2.14

$\forall \varepsilon > 0$，令

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^n \end{pmatrix},$$

$$D^{-1}P^{-1}APD = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & & & \\ & \varepsilon^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^n \end{pmatrix}$$

谱半径与范数的关系

定理2.14

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon\delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon\delta_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}，可得 \left\| D^{-1}P^{-1}APD \right\|_\infty \le \rho(A)+\varepsilon$$

定义$\|A\|_m = \left\| D^{-1}P^{-1}APD \right\|_\infty$，可以验证$\|\cdot\|_m$是$\mathrm{C}^{n\times n}$上一个矩阵范数，满足$\|A\|_m \le \rho(A)+\varepsilon$

矩阵的条件数

引理

设$P \in C^{n\times n}$，若对$C^{n\times n}$上的某一矩阵范数$\|\cdot\|$有$\|P\|<1$，则$I-P$可逆

定理2.15

设$A \in C_n^{n\times n}$, $\delta A \in C^{n\times n}$.若对$C^{n\times n}$上的某一矩阵范数$\|\cdot\|$有$\|A^{-1}\delta A\|<1$, 则

(1) $A+\delta A$可逆

(2) $\left\|(A+\delta A)^{-1}\right\| \le \dfrac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|}$

(3) $\dfrac{\left\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|} \le \dfrac{\left\|A^{-1}\delta A\right\|}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|}$

矩阵的条件数

推论

推论：设 $A \in C_n^{n\times n}$, $\delta A \in C^{n\times n}$，若对 $C^{n\times n}$ 上的某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$, 则:

$$\frac{\left\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|} \le \frac{\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

矩阵的条件数

定理2.16

设$A \in C_n^{n\times n}, \delta A \in C^{n\times n}, b, \delta b \in C^n$，若对$C^{n\times n}$上的某一矩阵范数$\|\cdot\|$有$\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$，则非齐次线性方程组

$$Ax = b \text{ 和 } (A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$$

的解满足：

$$\frac{\|\delta x\|_v}{\|x\|_v} \le \frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|_v}{\|b\|_v}\right)$$

其中$\|\cdot\|_v$是C^n上与矩阵范数$\|\cdot\|$相容的向量范数

矩阵的条件数

推论

由前面的推论和定理2.16可知：数据的误差对逆矩阵和线性方程组解的影响与数$\|A\|\|A^{-1}\|$的大小有关

矩阵的条件数的定义

设$A\in C_n^{n\times n}$，$\|\cdot\|$是$C^{n\times n}$上的矩阵范数，称

$$cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$$

为矩阵A(关于求逆或求解线性方程组)的条件数

矩阵的条件数

一般地，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数大就称 $\boldsymbol{A}$ 对于求逆矩阵或求解线性方程组是病态的，或坏条件的；否则，则称为良态或好条件的.

由定义知，条件数的值与所取范数有关. 常用的条件数有

$$\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty,$$

$$\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_n}},$$

其中 μ_1, μ_n 分别为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值. 当 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵时，有

$$\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}) = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|,$$

其中 λ_1, λ_n 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的按模最大和最小的特征值.