BP神经网络

1.激活函数

激活函数（Activation Function）是在人工神经网络的神经元上运行的函数，负责将神经元的输入映射到输出端。激活函数对于人工神经网络模型去学习、理解复杂的非线性函数，具有十分重要的作用。

如果不使用激活函数，每一层输出都是上一层输入的线性运算，无论神经网络有多少层，最终的输出只是输入的线性组合，相当于感知机。如果使用了激活函数，将非线性因素引入到网络中，使得神经网络可以任意逼近任何非线性函数，能够应用到更多的非线性模型。

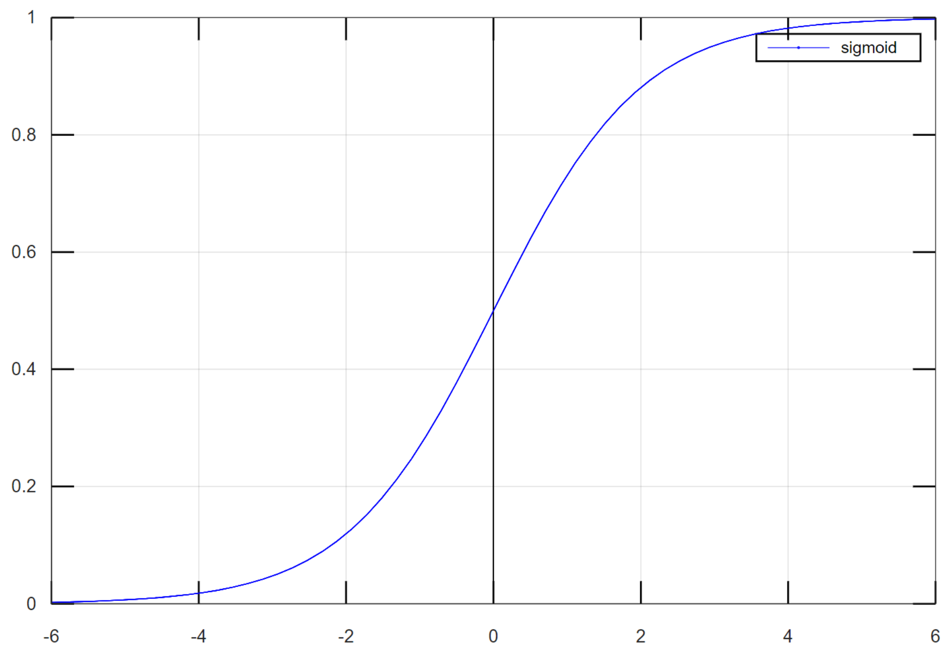
常用的激活函数

$sigmoid$ 函数

$Sigmoid$函数是一个在生物学中常见的S型函数，也称为S型生长曲线。在信息科学中，由于其单增以及反函数单增等性质，Sigmoid函数常被用作神经网络的阈值函数，将变量映射到0,1之间，公式如下：

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{(-x)}}$$

sigmoid函数

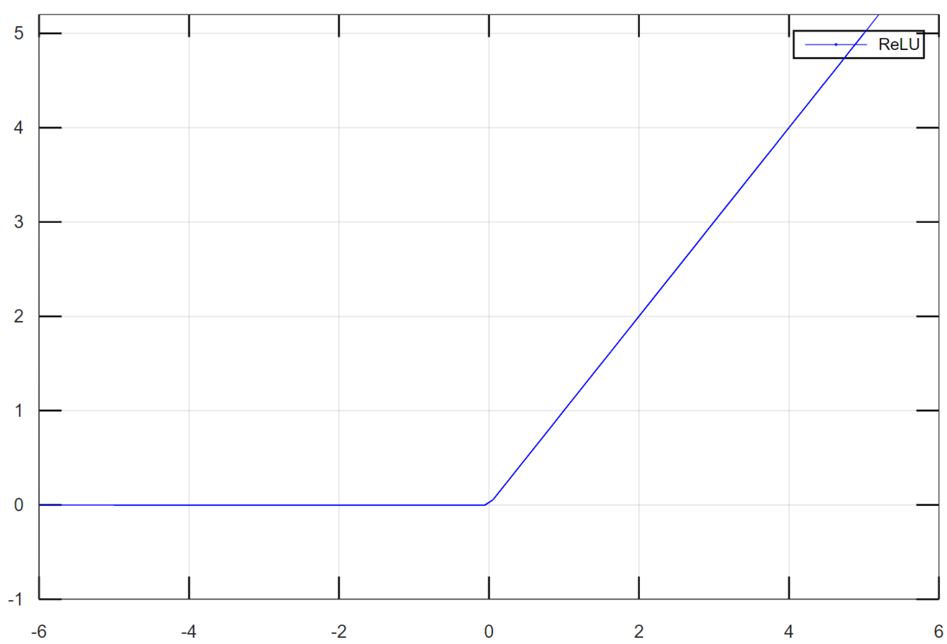


$ReLU$函数

$Relu$激活函数（The Rectified Linear Unit），用于隐藏层的神经元输出。公式如下：

$$f(x) = max(0, x)$$

ReLU函数



$Tanh$ 函数

$Tanh$ 是双曲函数中的一个，$Tanh()$ 为双曲正切。在数学中，双曲正切“$Tanh$”是由基本双曲函数双曲正弦和双曲余弦推导而来。公式如下：

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

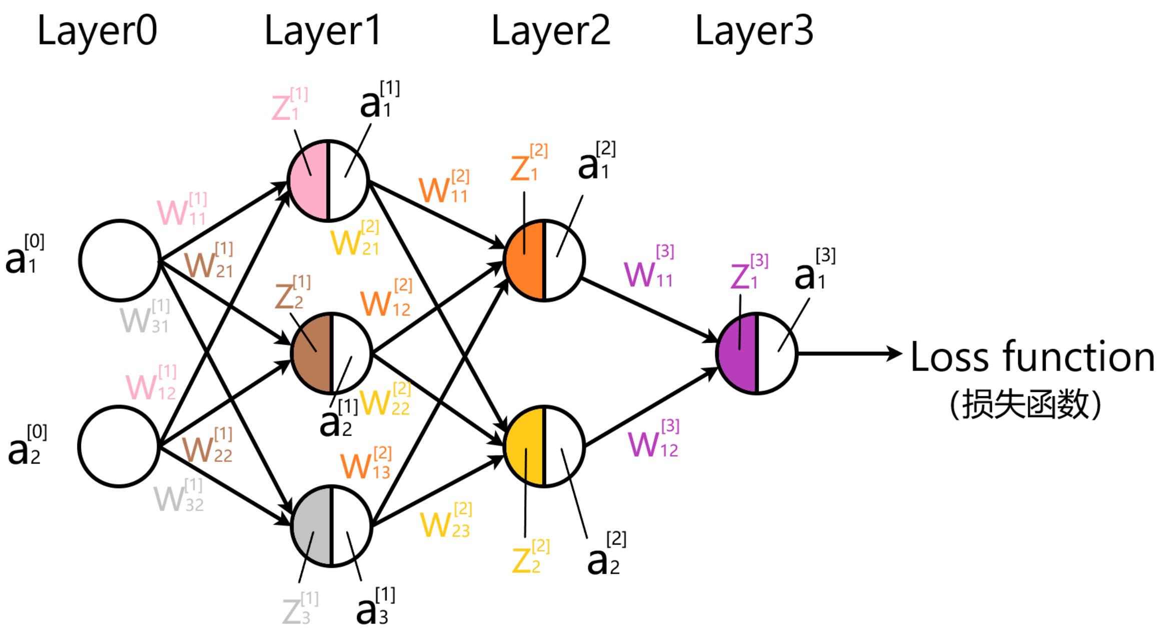
$softmax$ 函数

$softmax$ 函数用于输出层。假设输出层共有 n 个神经元，计算第 k 个神经元的输出 y_k 。$softmax$ 函数的分子是输入信号 a_k 的指数函数，分母是所有输入信号的指数函数的和。$softmax$ 函数公式如下：

$$y_k=\frac{e^{a_k}}{\sum_{i=1}^{n}e^{a_i}}$$

2.神经网络结构

第0层是输入层（2个神经元），第1层是隐含层（3个神经元），第2层是隐含层（2个神经元），第3层是输出层。



符号约定

$w_{jk}^{[l]}$表示从网络第$(l-1)^{th}$ 层第k^{th} 个神经元指向第 l^{th} 层第 j^{th} 个神经元的连接权重，同时也是第 l 层权重矩阵第 j 行第 k 列的元素。例如，上图中 $w_{21}^{[1]}$ ，第0层第1个神经元指向第1层第2个神经元的权重（褐色），也就是第 1 层权重矩阵第 2 行第 1 列的元素。同理，使用 $b_j^{[l]}$ 表示第 l^{th} 层第 j^{th} 个神经元的偏置，同时也是第 l 层偏置向量的第 j 个元素。使用 $z_j^{[l]}$ 表示第 l^{th} 层第 j^{th} 个神经元的线性结果，使用 $a_j^{[l]}$ 来表示第 l^{th} 层第 j^{th} 个神经元的激活函数输出。其中，激活函数使用符号σ表示，第 l^{th} 层中第 j^{th} 个神经元的激活为:

$$a_j^{[l]} = \sigma(z_j^{[l]}) = \sigma\left(\sum_k w_{jk}^{[l]} a_k^{[l-1]} + b_j^{[l]}\right)$$

$w^{[l]}$ 表示第 l 层的权重矩阵，$b^{[l]}$ 表示第 l 层的偏置向量，$a^{[l]}$ 表示第 l 层的神经元向量，结合上图讲述:

$$w^{[1]} = \begin{bmatrix} w_{11}^{[1]} & w_{12}^{[1]} \\ w_{21}^{[1]} & w_{22}^{[1]} \\ w_{31}^{[1]} & w_{32}^{[1]} \end{bmatrix} \qquad w^{[2]} = \begin{bmatrix} w_{11}^{[2]} & w_{12}^{[2]} & w_{13}^{[2]} \\ w_{21}^{[2]} & w_{22}^{[2]} & w_{23}^{[2]} \end{bmatrix}$$

$$b^{[1]} = \begin{bmatrix} b_1^{[1]} \\ b_2^{[1]} \\ b_3^{[1]} \end{bmatrix} \qquad b^{[2]} = \begin{bmatrix} b_1^{[2]} \\ b_2^{[2]} \end{bmatrix}$$

进行线性矩阵运算。

$$z^{[1]} = \begin{bmatrix} w_{11}^{[1]} & w_{12}^{[1]} \\ w_{21}^{[1]} & w_{22}^{[1]} \\ w_{31}^{[1]} & w_{32}^{[1]} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1^{[0]} \\ a_2^{[0]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^{[1]} \\ b_2^{[1]} \\ b_3^{[1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{[1]} a_1^{[0]} + w_{12}^{[1]} a_2^{[0]} + b_1^{[1]} \\ w_{21}^{[1]} a_1^{[0]} + w_{22}^{[1]} a_2^{[0]} + b_2^{[1]} \\ w_{31}^{[1]} a_1^{[0]} + w_{32}^{[1]} a_2^{[0]} + b_3^{[1]} \end{bmatrix}$$

矩阵形状 (3,2) (2,1) (3,1) (3,1)

$$z^{[2]}=\begin{bmatrix}w_{11}^{[2]} & w_{12}^{[2]} & w_{13}^{[2]}\\ w_{21}^{[2]} & w_{22}^{[2]} & w_{23}^{[2]}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1^{[1]}\\ a_2^{[1]}\\ a_3^{[1]}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1^{[2]}\\ b_2^{[2]}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_{11}^{[2]}a_1^{[1]}+w_{12}^{[2]}a_2^{[1]}+w_{13}^{[2]}a_3^{[1]}+b_1^{[2]}\\ w_{21}^{[2]}a_1^{[1]}+w_{22}^{[2]}a_2^{[1]}+w_{23}^{[2]}a_3^{[1]}+b_2^{[2]}\end{bmatrix}$$

矩阵形状　　(2,3)　　　　　　(3,1)　　　(2,1)　　　　　　　　　　(2,1)

那么，前向传播过程可以表示为：

$$a^{[l]}=\sigma\left(w^{[l]}a^{[l-1]}+b^{[l]}\right)$$

上述讲述的前向传播过程，输入层只有1个列向量，也就是只有一个输入样本。对于多个样本，输入不再是1个列向量，而是m个列向量，每1列表示一个输入样本。m个$a^{[l-1]}$列向量组成一个m列的矩阵$A^{[l-1]}$。

$$A^{[l-1]}=\begin{bmatrix}| & | & \ldots & |\\ a^{[l-1](1)} & a^{[l-1](2)} & \ldots & a^{[l-1](m)}\\ | & | & \ldots & |\end{bmatrix}$$

多样本输入的前向传播过程可以表示为：

$$Z^{[l]}=w^{[l]}\cdot A^{[l-1]}+b^{[l]}$$
$$A^{[l]}=\sigma\left(Z^{[l]}\right)$$

与单样本输入相比，多样本$w^{[l]}$和$b^{[l]}$的定义是完全一样的，不同的只是$Z^{[l]}$和$A^{[l]}$从1列变成m列，每1列表示一个样本的计算结果。

3.损失函数

在有监督的机器学习算法中，我们希望在学习过程中最小化每个训练样例的误差。通过梯度下降等优化策略完成的，而这个误差来自损失函数。

损失函数用于单个训练样本，而**成本函数**是多个训练样本的平均损失。优化策略旨在最小化成本函数。下面例举几个常用的损失函数。

回归问题

1. 绝对值损失函数(L_1损失函数)：

$L(\hat{y},y)=|y-\hat{y}|$

y 表示真实值或期望值，$\hat{y}$ 表示预测值

2. 平方损失函数(L_2损失函数)：

$L(\hat{y},y)=(y-\hat{y})^2$

y 表示真实值或期望值，$\hat{y}$ 表示预测值

分类问题

1. 交叉熵损失：

$$L(\hat{y},y)=-y\log\left(\hat{y}\right)-(1-y)\log\left(1-\hat{y}\right)$$

y 表示真实值或期望值，$\hat{y}$ 表示预测值

4.反向传播

反向传播的基本思想：通过计算输出层与期望值之间的误差来调整网络参数，使得误差变小(最小化损失函数或成本函数)。反向传播基于**四个基础等式**，非常简洁优美，但想要理解透彻还是挺烧脑的。

求解梯度矩阵

假设函数 $f:R^{n\times 1}\rightarrow R$ 将输入的列向量（shape: $n\times 1$ ）映射为一个实数。那么，函数 f 的梯度定义为：

$$\nabla_x f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

同理，假设函数 $f:R^{m\times n}\rightarrow R$ 将输入的矩阵（shape: $m\times n$ ）映射为一个实数。函数 f 的梯度定义为：

$$\nabla_A f(A)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(A)}{\partial A_{11}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{12}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{13}}\\ \frac{\partial f(A)}{\partial A_{21}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{22}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{2n}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m1}} & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial A_{mn}}\end{bmatrix}$$

可以简化为：

$$(\nabla_A f(A))_{ij}=\frac{\partial f(A)}{\partial A_{ij}}$$

注意：梯度求解的前提是函数 f 返回的必须是一个实数，如果函数返回的是一个矩阵或者向量，是没有办法求解梯度的。例如，函数$f(A)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}A_{ij}^2$，函数返回一个实数，可以求解梯度矩阵。如果 $f(x)=Ax\ \left(A\in R^{m\times n},x\in R^{n\times 1}\right)$, 函数返回一个m行的列向量，就不能对 f 求解梯度矩阵。

矩阵相乘

矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，矩阵 $B=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1\times -1+2\times -3 & 1\times -2+2\times -4\\ 3\times -1+4\times -3 & 3\times -2+4\times -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -10\\ -15 & -22\end{bmatrix}$$

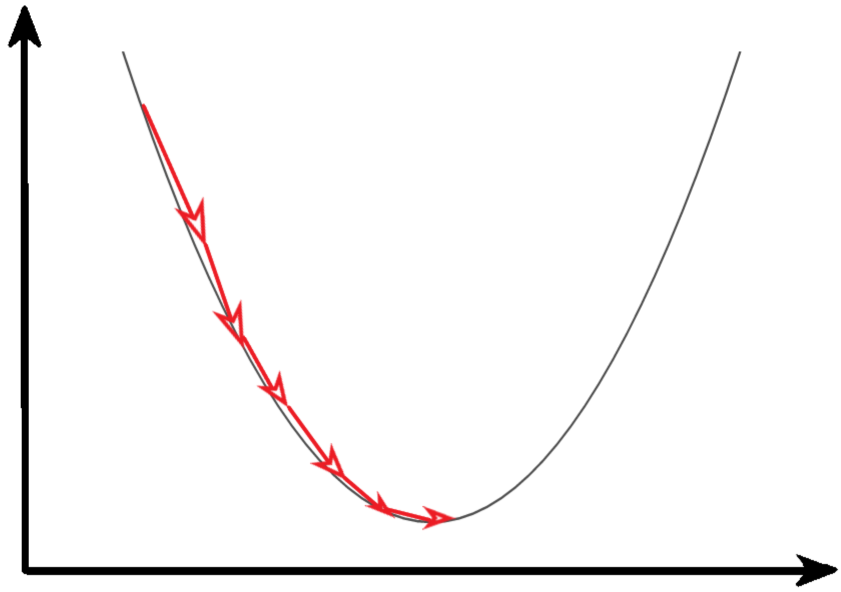
矩阵对应元素相乘

使用符号⊙表示：

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 \times -1 & 2 \times -2 \\ 3 \times -3 & 4 \times -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$$

梯度下降法

从几何意义，梯度矩阵代表了函数增加最快的方向，沿着梯度相反的方向可以更快找到最小值。



反向传播的过程就是利用梯度下降法原理，逐步找到成本函数的最小值，得到最终的模型参数。

反向传播公式推导（四个基础等式）

要想最小化成本函数，需要求解神经网络中的权重 w 和偏置 b 的梯度，再用梯度下降法优化参数。求解梯度也就是计算偏导数 $\frac{\partial L(a^{[l]},y)}{\partial w_{jk}^{[l]}}$ 和 $\frac{\partial L(a^{[l]},y)}{\partial b_j^{[l]}}$ 。为了计算这些偏导数，引入一个中间变量 $\delta_j^{[l]}$，它表示网络中第 l^{th} 层第 j^{th} 个神经元的误差。反向传播能够计算出误差$\delta_j^{[l]}$，再根据链式法则求出 $\frac{\partial L(a^{[l]},y)}{\partial w_{jk}^{[l]}}$ 和 $\frac{\partial L(a^{[l]},y)}{\partial b_j^{l}}$ 。

定义网络中第 l 层第 j 个神经元的误差为 $\delta_j^{[l]}$：

$$\delta_j^{[l]} = \frac{\partial L(a^{[L]},y)}{\partial z_j^{[l]}}$$

其中 $L(a^{[L]},y)$ 表示损失函数，y 表示真实值，$a^{[L]}$ 表示输出层的预测值。

每一层的误差向量可以表示为：

$$\delta^{[l]}=\begin{bmatrix}\delta_1^{[l]}\\ \delta_2^{[l]}\\ \vdots\\ \delta_n^{[l]}\end{bmatrix}$$

等式一　输出层误差

$$\delta_j^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial a_j^{[L]}}\sigma'\left(z_j^{[L]}\right)$$

L表示输出层层数。以下用 ∂L 表示 $\partial L\left(a^{[L]},y\right)$

写成矩阵形式是：

$$\delta^{[L]}=\begin{bmatrix}\frac{\partial L}{\partial a_1^{[L]}}\\ \frac{\partial L}{\partial a_2^{[L]}}\\ \vdots\\ \frac{\partial L}{\partial a_j^{[L]}}\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}\sigma'\left(z_1^{[L]}\right)\\ \sigma'\left(z_2^{[L]}\right)\\ \vdots\\ \sigma'\left(z_j^{[L]}\right)\end{bmatrix}$$

表示成公式：

$$\delta^{[L]}=\nabla_a L\odot\sigma'\left(z^{[L]}\right)$$

推导

计算输出层的误差 $\delta_j^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial z_j^{[L]}}$ ，根据链式法则

$\delta_j^{[L]}=\sum_k\frac{\partial L}{\partial a_k^{[L]}}\frac{\partial a_k^{[L]}}{\partial z_j^{[L]}}$

输出层不一定只有一个神经元，可能有多个神经元。成本函数是每个输出神经元的损失函数之和，每个输出神经元的误差与其它神经元没有关系，所以只有$k=j$的时候值不是0。

当$k\neq j$时，$\frac{\partial L}{\partial z_j^{[L]}}=0$，简化误差 $\delta_j^{[L]}$ ，得到

$\delta_j^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial a_j^{[L]}}\frac{\partial a_j^{[L]}}{\partial z_j^{[L]}}$

σ 表示激活函数，由$a_j^{[L]}=\sigma\left(z_j^{[L]}\right)$，计算出 $\frac{\partial a_j^{[L]}}{\partial z_j^{[L]}}=\sigma'\left(z_j^{[L]}\right)$ ，代入最后得到

$\delta_j^{[L]}=\frac{\partial L}{\partial a_j^{[L]}}\sigma'\left(z_j^{[L]}\right)$

等式二　隐藏层误差

$$\delta_j^{[l]}=\sum_k w_{kj}^{[l+1]}\delta_k^{[l+1]}\sigma'\left(z_j^{[l]}\right)$$

写成矩阵形式：

$$\delta^{[l]}=\left[\begin{bmatrix} w_{11}^{[l]} & w_{12}^{[l]} & \dots & w_{1k}^{[l]} \\ w_{21}^{[l]} & w_{22}^{[l]} & \dots & w_{2k}^{[l]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{j1}^{[l]} & w_{j2}^{[l]} & \dots & w_{jk}^{[l]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^{[l+1]} \\ \delta_2^{[l+1]} \\ \vdots \\ \delta_k^{[l+1]} \end{bmatrix}\right] \odot \begin{bmatrix} \sigma'\left(z_1^{[l]}\right) \\ \sigma'\left(z_2^{[l]}\right) \\ \vdots \\ \sigma'\left(z_j^{[l]}\right) \end{bmatrix}$$

矩阵形状：(j,k) * (k,1) ⊙ (j,1) = (j,1)

权重矩阵的形状从(k,j)转置变成(j,k)。

表示成公式：

$$\delta^{[l]}=\left[w^{[l+1]^T}\delta^{[l+1]}\right]\odot\sigma'\left(z^{[l]}\right)$$

推导

$z_k^{[l+1]}=\sum_j w_{kj}^{[l+1]}a_j^{[l]}+b_k^{[l+1]}=\sum_j w_{kj}^{[l+1]}\sigma\left(z_j^{[l]}\right)+b_k^{[l+1]}$

对 $z_j^{[l]}$ 求偏导

$\frac{\partial z_k^{[l+1]}}{\partial z_j^{[l]}}=w_{kj}^{[l+1]}\sigma'\left(z_j^{[l]}\right)$

根据链式法则

$\delta_j^{[l]}=\frac{\partial L}{\partial z_j^{[l]}}=\frac{\partial L}{\partial z_k^{[l+1]}}\frac{\partial z_k^{[l+1]}}{\partial z_j^{[l]}}=\sum_k w_{kj}^{[l+1]}\delta_k^{[l+1]}\sigma'\left(z_j^{[l]}\right)$

等式三 参数变化率

$$\frac{\partial L}{\partial b_j^{[l]}}=\delta_j^{[l]}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_{jk}^{[l]}}=a_k^{[l-1]}\delta_j^{[l]}$$

写成矩阵形式：

$$\frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}=\begin{bmatrix} \delta_1^{[l]} \\ \delta_2^{[l]} \\ \vdots \\ \delta_j^{[l]} \end{bmatrix}=\delta^{[l]}$$

矩阵形状：(j,1)

$$\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}=\begin{bmatrix} \delta_1^{[l]} \\ \delta_2^{[l]} \\ \vdots \\ \delta_j^{[l]} \end{bmatrix}\left[a_1^{[l]}a_2^{[l]}\dots a_k^{[l]}\right]$$

矩阵形状：(j,1) * (1,k) = (j,k)

注意：$\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}$ 是一个dim $\left(\delta^{[l]}\right)$ 行 $\dim\left(a^{[l-1]}\right)$ 列的矩阵，和 $w^{[l]}$ 的维度一致； $\frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}$ 是一个维度为 $\dim\left(\delta^{[l]}\right)$ 的列向量

表示成公式：

$$\frac{\partial L}{\partial b^{[l]}} = \delta^{[l]}$$
$$\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}} = \delta^{[l]} a^{[l-1]T}$$

推导

$z_j^{[l]} = \sum_k w_{jk}^{[l]} a_k^{[l-1]} + b_k^{[l]}$

L 对 $b_j^{[l]}$ 求偏导，根据链式法则得到

$\frac{\partial L}{\partial b_j^{[l]}} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{[l]}} \frac{\partial z_j^{[l]}}{b_j^{[l]}} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{[l]}} * 1 = \delta_j^{[l]}$

L 对 $w_{jk}^{[l]}$ 求偏导，根据链式法则得到

$\frac{\partial L}{\partial w_{jk}^{[l]}} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{[l]}} \frac{\partial z_j^{[l]}}{w_{jk}^{[l]}} = a_k^{[l-1]} \delta_j^{[l]}$

等式四 参数更新

根据梯度下降法原理，朝着梯度的反方向更新参数

$$b_j^{[l]} \leftarrow b_j^{[l]} - \alpha \frac{\partial L}{\partial b_j^{[l]}}$$
$$w_{jk}^{[l]} \leftarrow w_{jk}^{[l]} - \alpha \frac{\partial L}{\partial w_{jk}^{[l]}}$$

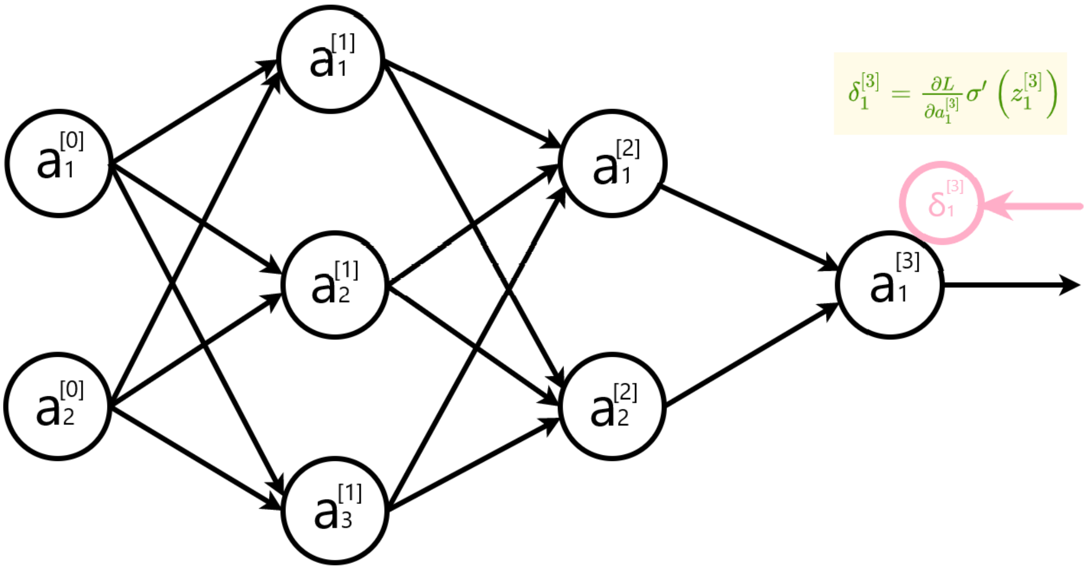
写成矩阵形式：

$$b^{[l]} \leftarrow b^{[l]} - \alpha \frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}$$
$$w^{[l]} \leftarrow w^{[l]} - \alpha \frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}$$

这里的 α 指的是学习率。学习率决定了反向传播过程中梯度下降的步长。

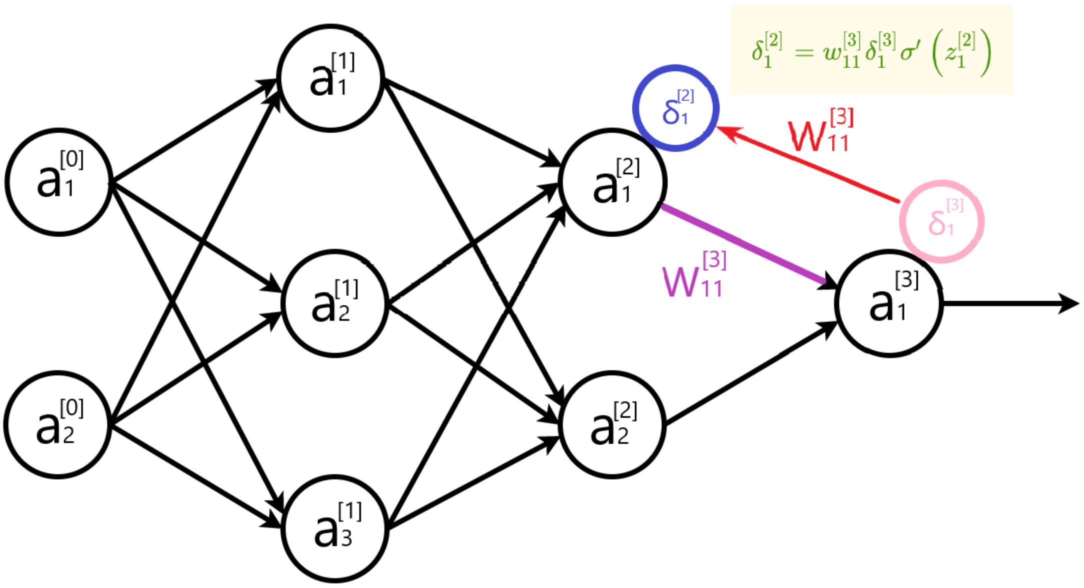
反向传播图解

计算输出层误差

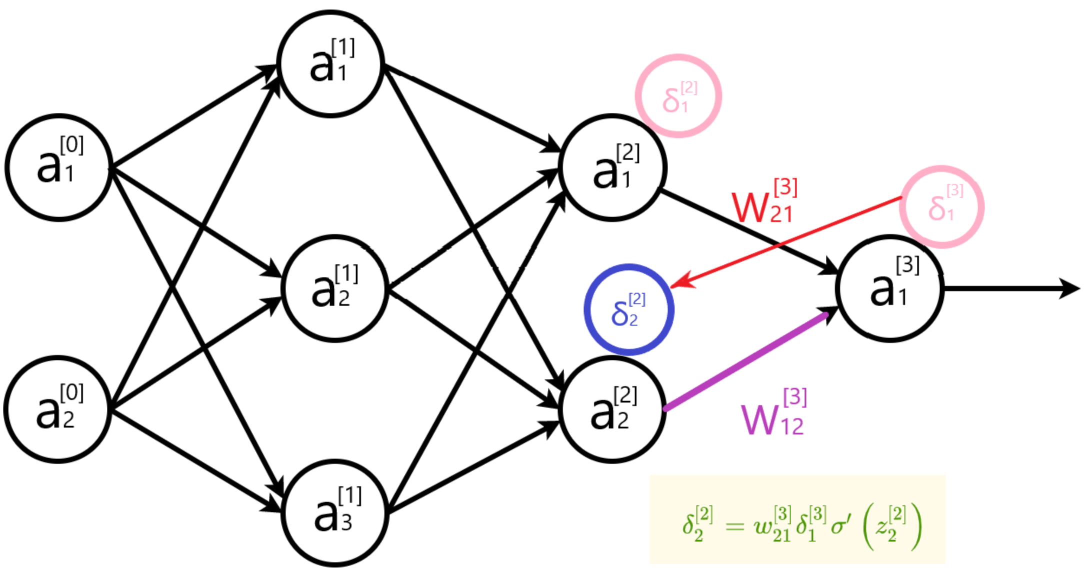


$\delta_1^{[3]} = \frac{\partial L}{\partial a_1^{[3]}} \sigma'\left(z_1^{[3]}\right)$
$\delta_1^{[3]}$

计算隐藏层误差

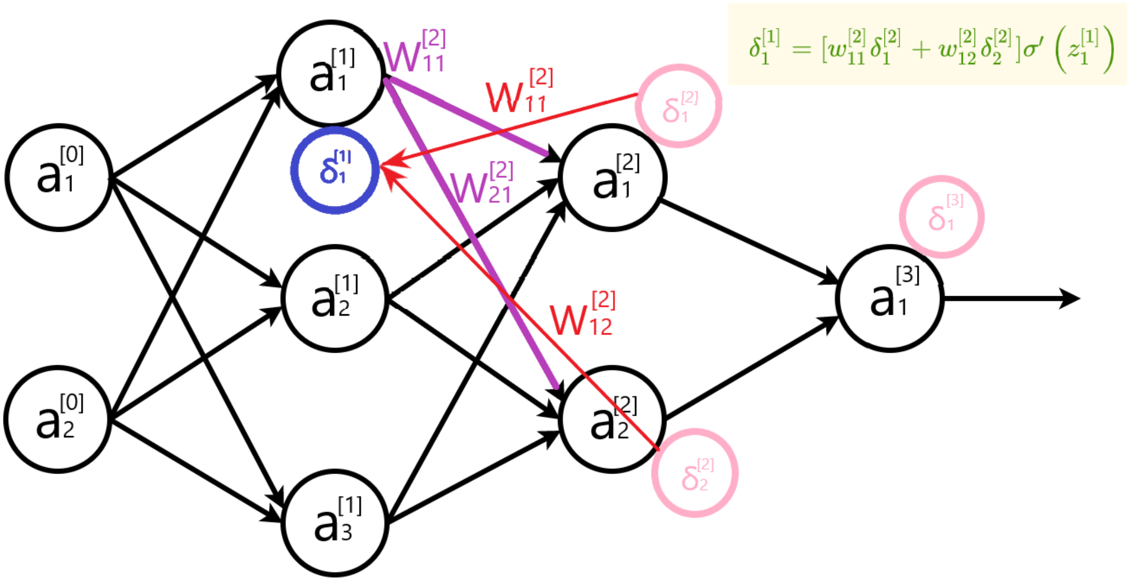


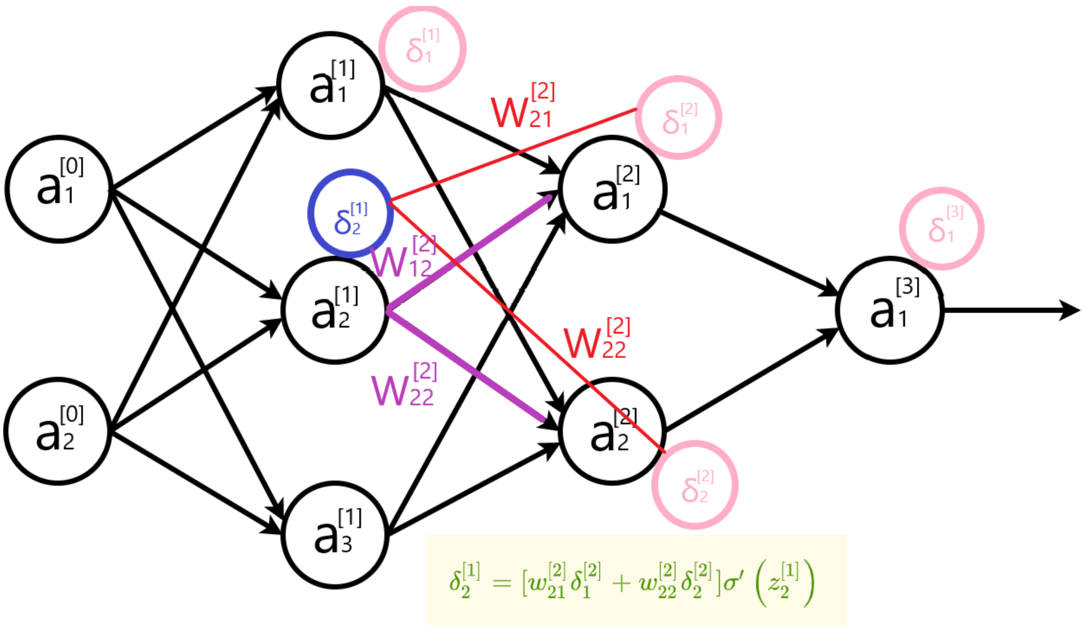
$\delta_1^{[2]} = w_{11}^{[3]} \delta_1^{[3]} \sigma'\left(z_1^{[2]}\right)$
$\delta_1^{[2]}$
$W_{11}^{[3]}$
$\delta_1^{[3]}$
$W_{11}^{[3]}$

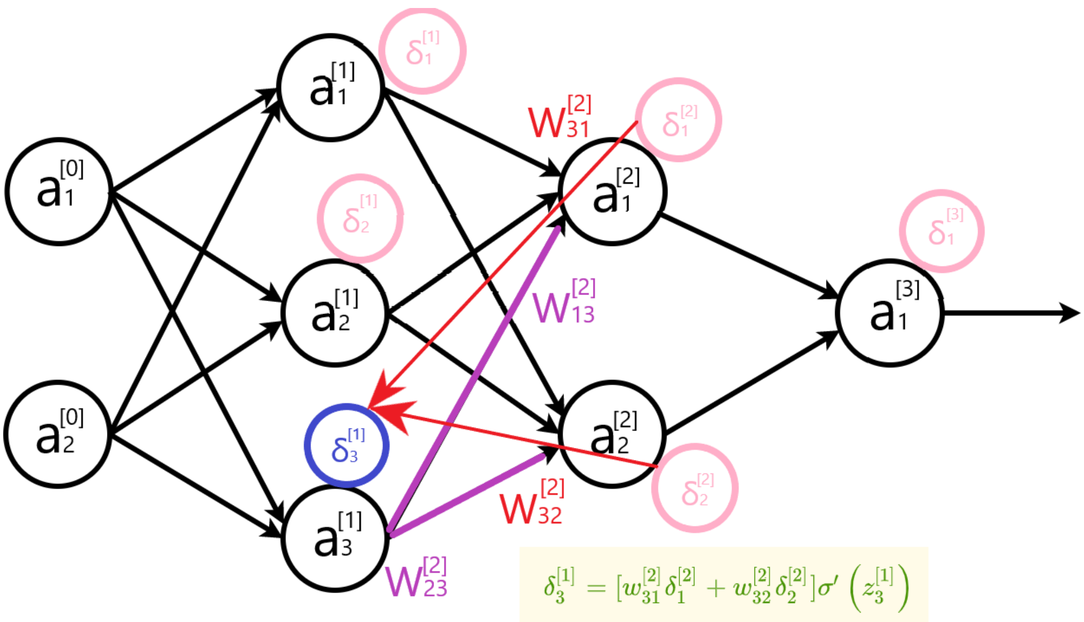


$\delta_1^{[2]}$
$W_{21}^{[3]}$
$\delta_1^{[3]}$
$\delta_2^{[2]}$
$W_{12}^{[3]}$
$\delta_2^{[2]} = w_{21}^{[3]} \delta_1^{[3]} \sigma'\left(z_2^{[2]}\right)$

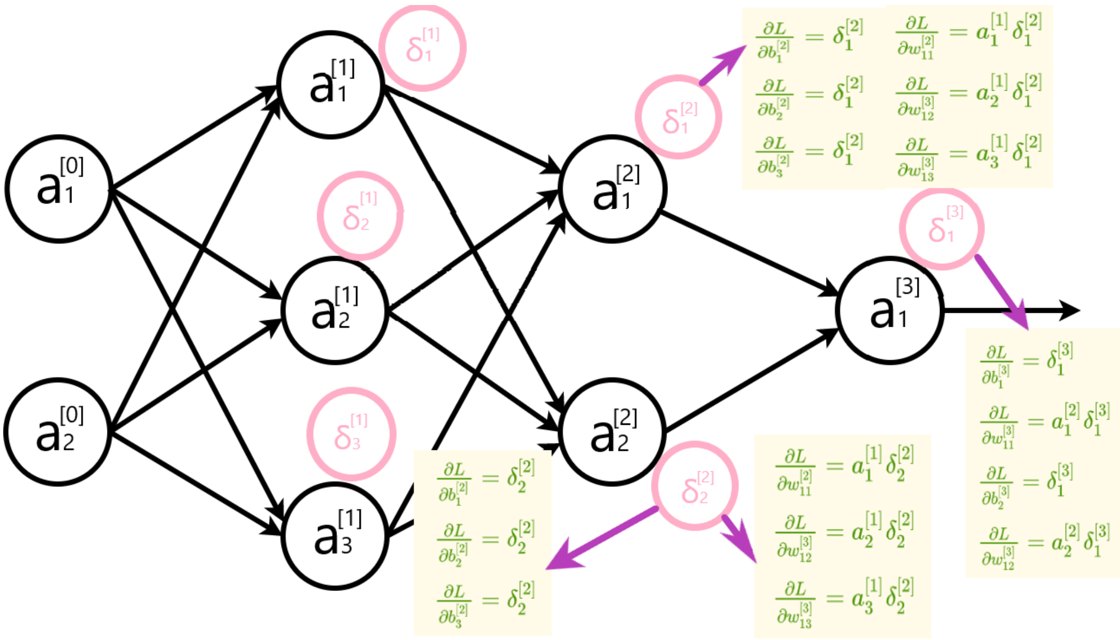
隐藏层误差公式写成矩阵形式 $\delta^{[l]} = \left[w^{[l+1]^T} \delta^{[l+1]} \right] \odot \sigma' \left(z^{[l]} \right)$ 时，权重矩阵需要转置。上面两幅图，直观地解释了转置的原因。







计算参数变化率



最后更新每层的参数。

反向传播公式总结

单样本输入公式表

说明	公式
输出层误差	$\delta^{[L]} = \nabla_a L \odot \sigma'\left(z^{[L]}\right)$
隐含层误差	$\delta^{[l]} = \left[w^{[l+1]^T} \delta^{[l+1]}\right] \odot \sigma'\left(z^{[l]}\right)$
参数变化率	$\frac{\partial L}{\partial b^{[l]}} = \delta^{[l]}$ $\frac{\partial L}{\partial w^{[l]}} = \delta^{[l]} a^{[l-1]T}$
参数更新	$b^{[l]} \leftarrow b^{[l]} - \alpha \frac{\partial L}{\partial b^{[l]}}$ $w^{[l]} \leftarrow w^{[l]} - \alpha \frac{\partial L}{\partial w^{[l]}}$

多样本输入公式表

成本函数

多样本输入使用的成本函数与单样本不同。假设单样本的成本函数是交叉熵损失函数。

$$L(a, y) = -[y \cdot \log(a) + (1 - y) \cdot \log(1 - a)]$$

那么，对于m个样本输入，成本函数是每个样本的成本总和的平均值。

$$C(A, y) = -\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m} \left(y^{(i)} \cdot \log\left(a^{(i)}\right) + \left(1 - y^{(i)}\right) \cdot \log\left(1 - a^{(i)}\right)\right)$$

误差

单样本输入的每一层的误差是一个列向量

$$\delta^{[l]}=\begin{bmatrix}\delta_1^{[l]}\\ \delta_2^{[l]}\\ \vdots\\ \delta_n^{[l]}\end{bmatrix}$$

而多样本输入的每一层的误差不再是一个列向量，变成一个m列的矩阵，每一列对应一个样本的向量。那么多样本的误差定义为：

$$dZ^{[l]}=\left[\delta^{[l](1)}\delta^{[l](2)}\ldots\delta^{[l](m)}\right]=\begin{bmatrix}\delta_1^{[l](1)} & \delta_1^{[l](2)} & \ldots & \delta_1^{[l](m)}\\ \delta_2^{[l](1)} & \delta_2^{[l](2)} & \ldots & \delta_2^{[l](m)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta_n^{[l](1)} & \delta_n^{[l](2)} & \ldots & \delta_n^{[l](m)}\end{bmatrix}$$

$dZ^{[l]}$的维度是 $n\times m$ ，n 表示第 l 层神经元的个数，m 表示样本数量。

参数变换率

因为$dZ^{[l]}$的维度是 $j\times m$ ，更新 $b^{[l]}$ 的时候需要对每行求平均值，使得维度变为 $j\times 1$，再乘以$\frac{1}{m}$。

$dZ^{[l]}$的维度是 $j\times m$ ，$A^{[l-1]T}$ 的维度是 $m\times k$，矩阵相乘得到的维度是 $j\times k$ ，与$w^{[l]}$ 本身的维度相同。因此更新 $w^{[l]}$ 时只需乘以 $\frac{1}{m}$ 求平均值。

说明	公式
输出层误差	$dZ^{[L]}=\nabla_A C\odot\sigma'\left(Z^{[L]}\right)$
隐含层误差	$dZ^{[l]}=\left[w^{[l+1]T}dZ^{[l+1]}\right]\odot\sigma'\left(Z^{[l]}\right]$
参数变化率	$db^{[l]}=\dfrac{\partial C}{\partial b^{[l]}}=\dfrac{1}{m}meanOfEachRow\left(dZ^{[l]}\right)$ $dw^{[l]}=\dfrac{\partial C}{\partial w^{[l]}}=\dfrac{1}{m}dZ^{[l]}A^{[l-1]T}$
参数更新	$b^{[l]}\leftarrow b^{[l]}-\alpha\frac{\partial C}{\partial b^{[l]}}$ $w^{[l]}\leftarrow w^{[l]}-\alpha\frac{\partial C}{\partial w^{[l]}}$