

Captura de dinámica no lineal de un sistema de dos tanques acoplados: Evaluación comparativa entre linealización, NLARX y PINN

Vanegas Cárdenas, Amir Zoleyt.

Proyecto Curricular de Ingeniería de Sistemas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá D.C., Colombia

azvanegasc@udistrital.edu.co

Abstract—La identificación y predicción de sistemas dinámicos no lineales es esencial en la Ingeniería de Control. Los sistemas de tanques acoplados son utilizados debido a que exhiben una dinámica no lineal dictada por la ley de Torricelli. El objetivo del presente trabajo consiste en evaluar comparativamente la capacidad de tres modelos: Linealización en espacio de estados, NLARX y PINN, capturando la dinámica no lineal del sistema de dos tanques acoplados. Se generaron datos de simulación del sistema con una señal de entrada PRBS y posteriormente se realizó el entrenamiento u derivación para comparar los resultados obtenidos con los generados en la simulación. Se encontró que el modelo PINN obtuvo los mejores resultados globalmente, y el modelo NLARX supera al PINN únicamente en la captura de la salida del primer tanque. Esto evidencia la capacidad de generalizar del modelo PINN, sugiriendo que provee mejores resultados frente a otros modelos a medida que la complejidad del sistema crece.

Index Terms—Sistemas dinámicos no lineales, Redes neuronales, Linealización, Tanques acoplados, Identificación de sistemas

I. INTRODUCCIÓN

La ingeniería de control hace uso de múltiples técnicas u modelos orientados a la capacidad de identificar, predecir o aproximar con precisión la respuesta de un sistema dinámico, especialmente en casos de no linealidad [1], [2]. Obtener un modelo preciso facilita el diseño de controladores óptimos, el diagnóstico de fallas y la optimización de los procesos [3]. Muchos sistemas complejos en la vida real exhiben no linealidad, lo cual demanda el desarrollo de modelos fieles a la dinámica real que a su vez sean computacionalmente manejables [4].

El sistema de dos tanques acoplados es uno de los sistemas no lineales más explorados en la literatura de la Ingeniería de Control, gracias a la dinámica no lineal presente por la relación cuadrática entre el nivel del fluido y el caudal de salida, descrito por la ley de Torricelli [5]. Esta relación lo convierte en un excelente caso de estudio en la comparación de la efectividad de diferentes técnicas de modelado no lineal.

La comunidad científica ha desarrollado distintas estrategias que buscan abordar la identificación de sistemas dinámicos no lineales, las cuales pueden agruparse en enfoques de caja blanca (Basados en física) [6], caja negra (Basados en datos) [7] y caja gris (híbridos) [8]. El trabajo está centrado en evaluar comparativamente tres técnicas representativas: Linealización en espacio de estados, Autorregresores exógenos no lineales (NLARX) y Redes neuronales informadas por la física (PINN).

A. Linealización

La linealización de sistemas dinámicos consiste en la aproximación de la dinámica no lineal mediante un modelo lineal en un punto de operación definido. Esto provee un modelo fácil de analizar, y para el cual se pueden aplicar múltiples controladores. En la actualidad, la linealización sigue siendo una herramienta fundamental del control utilizada en combinación con otras técnicas para la identificación y control de sistemas dinámicos [9].

B. NLARX

La técnica de Autoregresores exógenos no lineales (NLARX - *Nonlinear AutoRegressive eXogenous*) es un modelo de caja gris perteneciente a la familia de modelos de identificación de sistemas dinámicos no lineales. Consisten en la representación de una salida actual como una función no lineal de las salidas anteriores y de las entradas anteriores. A hoy en día, es utilizada en complemento con otros enfoques de identificación como autocodificadores [10] o enfoques dirigidos por datos [11] en sistemas gracias a su naturaleza híbrida,

C. PINN

Las Redes neuronales informadas por la física (PINN - *Physics-Informed Neural Networks*) son una arquitectura de red neuronal que incorpora las leyes físicas del sistema en la función de pérdida, a diferencia de las redes neuronales estándar que minimizan únicamente el error entre la predicción y los datos [12]. Actualmente, son uno de los modelos de Redes Neuronales Profundas (DNN) más utilizados en la actualidad, contando con múltiples aplicaciones en la identificación, predicción y control de sistemas dinámicos no lineales [13], [14], [15].

II. PROBLEMA

El sistema de dos tanques acoplados visualizado en la Fig. 1 y descrito en el sistema de ecuaciones (2) está dictado por el balance de masas y la Ley de Torricelli (1), con lo cual se establece un sistema dinámico no lineal con las alturas en los tanques como salidas $h_1(t)$ y $h_2(t)$ respectivamente, y donde $u(t)$ es la entrada de control, la cual consiste en el voltaje de la bomba.

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

La no linealidad intrínseca por el término cuadrático representa una limitación importante frente a metodologías de identificación lineal clásicas.

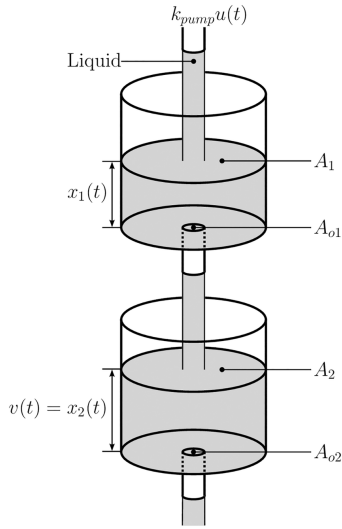


Fig. 1: Sistema de dos tanques acoplados [16].

$$\begin{cases} \frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{a_1}{A} \sqrt{2gh_1(t)} + \eta u(t), \\ \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{a_1}{A} \sqrt{2gh_1(t)} - \frac{a_2}{A} \sqrt{2gh_2(t)}. \end{cases} \quad (2)$$

El problema central del sistema dinámico gira entorno a la identificación de la respuesta de las dos salidas $h_1(t)$ y $h_2(t)$, capturando su no linealidad con total precisión. De igual forma, se requiere de establecer una señal de entrada $u(t)$ que logre simular un comportamiento no lineal exigente para evaluar con rigurosidad los tres modelos planteados, abriendo una brecha de conocimiento y necesidad práctica con respecto a la determinación y medición de los modelos de identificación para capturar la dinámica del sistema de dos tanques acoplados. El objetivo reside en definir qué modelo ofrece la mejor precisión global y mayor consistencia física en la captura de la dinámica no lineal de las salidas $h_1(t)$ y $h_2(t)$.

III. METODOLOGÍA

Ese trabajo consiste en un proceso de simulación, entrenamiento o derivación y posterior evaluación comparativa. Para lo mismo, este proceso se aplica a los tres modelos: Linealización en espacio de estados, NLARX y PINN.

En primera instancia, se simulará el sistema de dos tanques acoplados con una duración total de $T = 600s$ y un intervalo de muestreo $T_s = 0.5$. Los parámetros de simulación del sistema correspondiente a las constantes físicas se anexan en la siguiente tabla:

TABLE I: Parámetros físicos del sistema de tanques

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
A	Área del tanque	28×10^{-4}	m^2
a_1	Área del orificio del tanque 1	0.071×10^{-4}	m^2
a_2	Área del orificio del tanque 2	a_1	m^2
g	Aceleración gravitacional	9.81	m/s^2
η	Ganancia de la bomba	0.5×10^{-5}	m^3/s

Para la simulación de la entrada de control $u(t)$ se opta por la generación de una señal de secuencia binaria pseudoaleatoria (PRBS) multivalor que se rige en un intervalo de voltaje $[V_{min}, V_{max}] = [0, 2]$, y que cambia aleatoriamente de escalón de voltaje cada $T_{cambio} = 20s$.

La simulación del sistema de ecuaciones diferenciales (2) se resolverá mediante el algoritmo de Runge-Kutta de orden 4 y 5, con tolerancias de error relativa (10^{-6}) y absoluta (10^{-8}), y condiciones iniciales del sistema en $\mathbf{h}_0 = [0, 0]$

A. Linealización

Para la linealización del sistema de ecuaciones diferenciales (2) como modelo no lineal $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{f}(\mathbf{h}, u)$ se linealiza alrededor de un punto de operación de equilibrio $(\mathbf{h}_{op}, u_{op})$ con el fin de obtener el modelo lineal de espacio de estados descrito en la ecuación (3):

$$\Delta \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{h} + \mathbf{B} \Delta u. \quad (3)$$

Para lo mismo, la matriz \mathbf{A} es la matriz Jacobiana (4) del vector de funciones de estado \mathbf{f} con respecto al vector de estados $\mathbf{h} = [h_1, h_2]^T$, evaluado en el punto de operación:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right|_{(\mathbf{h}_{op}, u_{op})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{bmatrix}_{(\mathbf{h}_{op}, u_{op})}. \quad (4)$$

Y matriz \mathbf{B} es la matriz Jacobiana (5) del vector de funciones de estado \mathbf{f} con respecto a la entrada u , evaluada en el punto de operación:

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{(\mathbf{h}_{op}, u_{op})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{(\mathbf{h}_{op}, u_{op})}. \quad (5)$$

Y el punto de operación $\mathbf{h}_{op} = [h_1, h_2]^T$ se calcula cuando la dinámica del sistema es cero ($\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$).

El modelo linealizado en espacio de estados es simulado mediante el algoritmo de Runge-Kutta de orden 4 y 5, con tolerancias de error relativa (10^{-6}) y absoluta (10^{-8}), y condiciones iniciales del sistema en $\mathbf{h}_0 = [0, 0]$.

B. NLARX

Los autorregresores exógenos no lineales se aplican utilizando la herramienta System Identification Toolbox de MATLAB, utilizando los datos obtenidos de la simulación de las salidas $h_1(t)$ y $h_2(t)$ como datos de entrenamiento, donde cada salida se entrena respectivamente con las siguientes configuraciones:

- $h_1(t)$: Red Wavelet con autorregresor lineal, polinómico y periódico.
- $h_2(t)$: Red Wavelet con autorregresor lineal y periódico.

Esta configuración garantiza máxima precisión posible para la captura de la dinámica no lineal usando NLARX.

C. PINN

Las redes neuronales informadas por físicas requieren de la construcción de múltiples elementos requeridos para su entrenamiento con los datos de la simulación de las salidas $h_1(t)$ y $h_2(t)$. En primer lugar, la arquitectura neuronal establecida contiene los siguientes parámetros:

TABLE II: Configuración del modelo

Parámetro	Valor	Descripción
Entradas dinámicas	1	Tiempo t .
Entradas de control	1	Entrada $u(t)$ (voltaje).
Salidas	2	Niveles de agua \hat{h}_1 y \hat{h}_2 .
Capas ocultas	5	Número de capas en la rama dinámica.
Neuronas ocultas	64	Número de neuronas por capa oculta.
Activación	SiLU	Función de activación <i>Sigmoid Linear Unit</i> .

Es necesaria la normalización de los datos para un entrenamiento eficiente y coherente de la red neuronal informada por físicas, con lo cual se utilizan las siguientes fórmulas de normalización (6) y denormalización (7):

$$d_{\text{norm}} = \frac{d - d_{\min}}{d_{\max} - d_{\min}}. \quad (6)$$

$$d = d_{\text{norm}} (d_{\max} - d_{\min}) + d_{\min}. \quad (7)$$

La definición de la función de pérdida física de la red neuronal informada por físicas es la siguiente:

$$\mathcal{L}_{\text{física}} = \text{MSE}(\mathbf{R}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (R_1^2 + R_2^2). \quad (8)$$

Donde R_1 y R_2 son respectivamente:

$$R_1 = \frac{d\hat{h}_1}{dt} + \frac{a_1}{A} \sqrt{2g\hat{h}_1} - \frac{\eta u}{A} \quad (9)$$

$$R_2 = \frac{d\hat{h}_2}{dt} - \frac{a_1}{A} \sqrt{2g\hat{h}_1} + \frac{a_2}{A} \sqrt{2g\hat{h}_2} \quad (10)$$

La función de pérdida total en la red neuronal informada por físicas se define como:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = w_{\text{data}} \mathcal{L}_{\text{data}} + w_{\text{res}} \mathcal{L}_{\text{res}} + w_{\text{IC}} \mathcal{L}_{\text{IC}}. \quad (11)$$

Con los siguientes parámetros: Donde la pérdida residual y de

TABLE III: Componentes de la función de pérdida

Componente	Sigla	Ponderación típica
Pérdida de datos	$\mathcal{L}_{\text{data}}$	$w_{\text{data}} = 1.0$
Pérdida residual	\mathcal{L}_{res}	$w_{\text{res}} = 200.0$
Pérdida de CI	\mathcal{L}_{IC}	$w_{\text{IC}} = 10.0$

condiciones iniciales son respectivamente:

$$\mathcal{L}_{\text{res}} = \text{MSE}(R_1) + \text{MSE}(R_2) \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_{\text{IC}} = \text{MSE}(\hat{\mathbf{h}}(t=0) - \mathbf{h}_0) \quad (13)$$

La configuración de las etapas de entrenamiento de las redes neuronales informadas por físicas se realizan en dos fases:

- **Fase 1:** Optimizador Adam para un descenso rápido hacia el gradiente.
- **Fase 2:** Optimizador L-BFGS-B para un ajuste fino de la pérdida de la red neuronal.

Para realizar un entrenamiento eficiente y veloz, se hace uso de una GPU NVIDIA GeForce GTX 1050, la cual posee núcleos CUDA que permite la ejecución paralela de operaciones, y es integrable con la biblioteca de Python PyTorch.

La simulación y evaluación de los modelos de Linealización y Redes neuronales informadas por físicas se lleva a cabo con el lenguaje de programación Python. El modelo NLARX es simulado y evaluado en MatLAB.

La comparación de los modelos se realizará con la graficación del error durante el tiempo entre la predicción y la dinámica no lineal real. Así mismo, se hará uso de las siguientes métricas para la evaluación de los modelos:

TABLE IV: Métricas globales

Métrica	Sigla	Fórmula
Error Cuadrático Medio	MSE	$\text{MSE} = \frac{1}{2N} \sum e^2$
Raíz del Error Cuadrático Medio	RMSE	$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}$
Error Absoluto Medio	MAE	$\text{MAE} = \frac{1}{2N} \sum e $
Suma del Error Cuadrático	SSE	$\text{SSE}_{\text{global}} = \sum e^2$
RMSE Normalizado	NRMSE	$\text{NRMSE} = \frac{\text{RMSE}}{\text{Rango}(\mathbf{h}_{\text{full}})}$

Estas métricas garantizan una forma de medir cada uno de los modelos de manera acorde, centrándose en cómo se comporta cada una de las formas de error dentro de la simulación de los modelos.

IV. RESULTADOS

Simulando los tres modelos utilizando Python y MatLAB como herramientas, se obtienen los siguientes resultados:

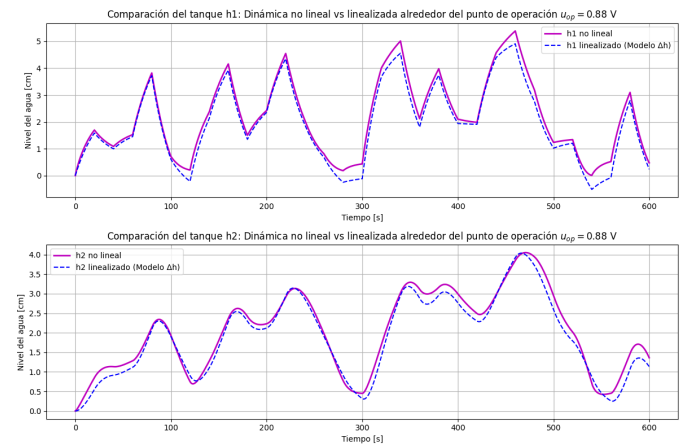


Fig. 2: Resultados de simulación con linealización en espacios de estado.

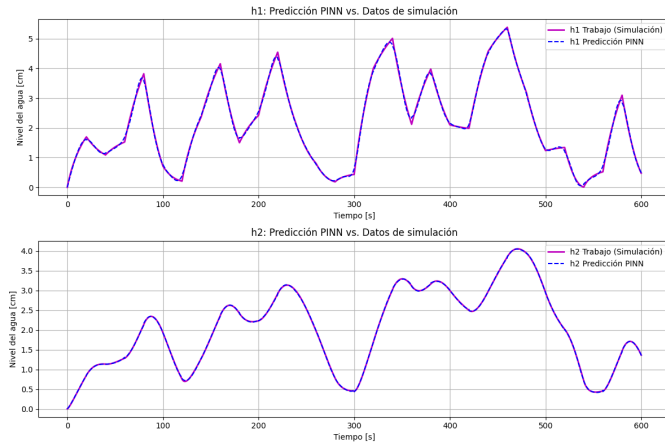


Fig. 3: Resultados de simulación con PINNs.

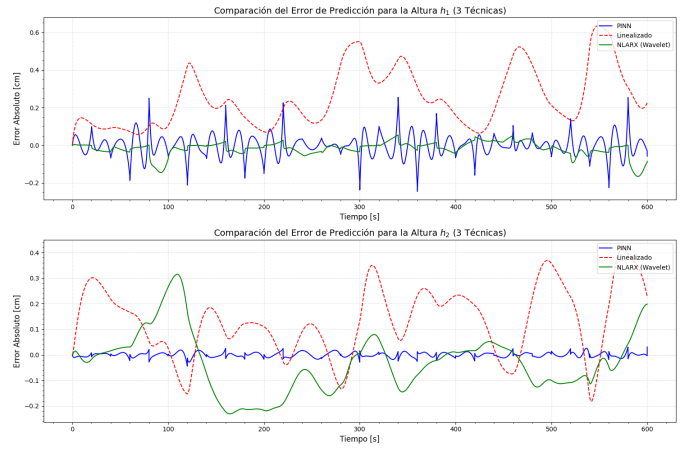


Fig. 6: Comparación de errores obtenidos para cada uno de los modelos.

TABLE V: Comparación de métricas (en cm) para los modelos

Métrica	Linealización	NLARX	PINN
MSE	0.00061180	0.00008115	0.00001562
RMSE	0.24734599	0.09008200	0.03952758
MAE	0.20491036	0.06029500	0.02434103
SSE	14.68443318	1.94770400	0.37501428
NRMSE	0.04593532	0.01672900	0.00734078

Los resultados de simulación, el software usado y los archivos generados se pueden consultar mediante el repositorio: https://github.com/azvcud/Grupo-Investigacion-II_DosTanques-Acoplados

V. CONCLUSIONES

- El modelo que obtuvo el mejor rendimiento a nivel global fue las Redes Neuronales Informadas por físicas, logrando capturar de la mejor forma la dinámica no lineal, y garantizando una robustez con diferencia de los otros modelos. Esto es evidenciable gracias a que registró los valores más bajos de entre los tres modelos.
- El modelo de Autorregresores exógenos no lineales (NLARX) solo logró superar al modelo PINN en la captura de la salida del primer tanque (h_1).
- El modelo de linealización en espacio de estados fue el que presentó el mayor error y las peores métricas de desempeño para ambas salidas del sistema.

REFERENCIAS

- [1] G. Pilonetto et al., “Deep networks for system identification: A survey,” *Automatica*, vol. 171, pp. 111907, 2025.
- [2] O. Nelles, *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks, Fuzzy Models, and Gaussian Processes*, 2nd ed. Springer Cham, 2020.
- [3] P. Yu et al., “Review on System Identification, Control, and Optimization Based on Artificial Intelligence,” *Mathematics*, vol. 13, no. 6, p. 952, 2025.
- [4] N. E. Selin, A. Giang, and W. C. Clark, “Progress in modeling dynamic systems for sustainable development,” *Proc Natl Acad Sci U S A*, vol. 120, no. 40, 2023, Art. no. e2216656120.

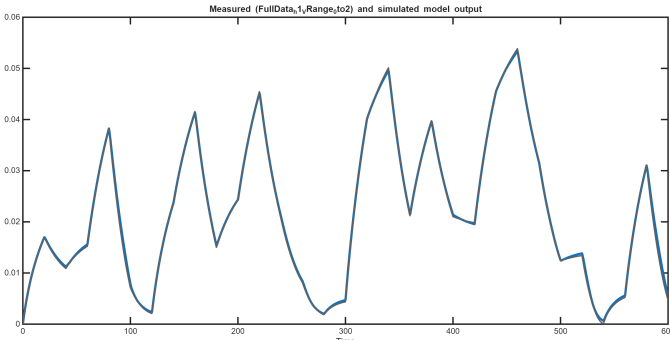


Fig. 4: Resultado de simulación de h_1 con NLARX.

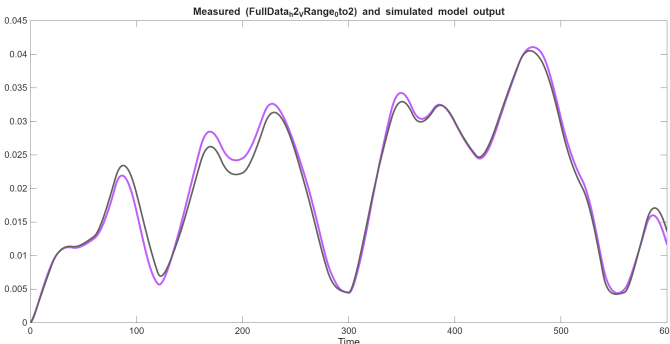


Fig. 5: Resultado de simulación de h_2 con NLARX.

- [5] R. Bieda, M. Blachuta, and R. Grygiel, "A New Look at Water Tanks Systems as Control Teaching Tools," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 13480–13485, 2017.
- [6] S. Sivaranjani et al., "Control-Oriented System Identification: Classical, Learning, and Physics-Informed Approaches," arXiv:2512.06315 [eess.SY], 2025.
- [7] Y. A. Becerra-Mora and J. Á. Acosta, "Data-driven learning and control of nonlinear system dynamics," *Nonlinear Dyn*, vol. 113, pp. 6605–6625, 2025.
- [8] A. Moradvandi, R. E. F. Lindeboom, E. Abraham, and B. De Schutter, "Models and methods for hybrid system identification: A systematic survey," in *Proceedings of the 22nd IFAC World Congress*, Yokohama, Japan, 2023, pp. 95–107.
- [9] B. Yesil and S. Sahin, "Real-Time Implementation of a Microcontroller-Based Coupled-Tank Water Level Control System with Feedback Linearization and Fuzzy Logic Controller Algorithms," *Sensors*, vol. 25, no. 5, p. 1279, 2025.
- [10] J. L. Paniagua and J. A. López, "Nonlinear system identification using modified variational autoencoders," *Intelligent Systems with Applications*, vol. 22, p. 200344, 2024.
- [11] M. A. Khan et al., "Dynamic Modeling of a Nonlinear Two-Wheeled Robot Using Data-Driven Approach," *Processes*, vol. 10, no. 3, Art. no. 524, 2022.
- [12] M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis, *Physics-Informed Machine Learning: A New Paradigm for Scientific Computing*, Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020.
- [13] S. Zhao, C. Cheng, M. Lin, and Z. Peng, "Physics-informed deep sparse regression network for nonlinear dynamical system identification," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 595, p. 118796, 2025.
- [14] M. Haywood-Alexander et al., "Response estimation and system identification of dynamical systems via physics-informed neural networks," *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.*, vol. 12, Art. no. 8, 2025.
- [15] E. A. Antonelo et al., "Physics-informed neural nets for control of dynamical systems," *Neurocomputing*, vol. 579, p. 127419, 2024.
- [16] J. Günther, E. Reichensdörfer, P. Pilarski, and K. Dieopold, "Interpretable PID parameter tuning for control engineering using general dynamic neural networks: An extensive comparison," *PLOS ONE*, vol. 15, 12 2020.