



第4章 图像的正交变换

主讲教师 张涛

电子信息与电气工程学院



第4章 图像的正交变换

问题的提出:

人类视觉所感受到的是在空间域和时间域的信号。但是，往往许多问题在频域中讨论时，有其非常方便分析的一面。



主要内容

4. 1 离散傅里叶变换

4. 2 离散余弦变换

4. 3 K-L变换

4. 4 Radon变换

4. 5 小波变换



4.1 离散傅里叶变换

4.1.1 一维离散傅里叶变换

4.1.2 一维快速傅里叶变换

4.1.3 二维离散傅里叶变换

4.1.4 二维离散傅里叶变换的性质

4.1.5 离散傅里叶变换在图像处理中的应用

离散傅里叶变换 (**Discrete Fourier Transform, DFT**)



4.1.1 一维DFT

离散傅里叶变换

定义

对于有限长数字序列 $f(x)$, $x = 0, 1, \dots, N-1$

■ 一维DFT定义

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi ux}{N}} \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

■ 一维IDFT定义 $f(x) \Leftrightarrow F(u)$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j \frac{2\pi ux}{N}} \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



4.1.1 一维DFT

离散傅里叶变换

定义

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W^{ux} \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1$$
$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) W^{-ux} \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$
$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

W因子具有周期性和对称性

$$W^{u \pm rN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(u \pm rN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}u} \times e^{\mp j2\pi r} = e^{-j\frac{2\pi}{N}u} = W^u$$
$$W^{u \pm \frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(u \pm \frac{N}{2}\right)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}u} \times e^{\mp j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}u} = -W^u$$

合理安排重复出现的相乘运算，减少计算工作量



4.1.2 一维FFT

离散傅里叶变换

原理

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-\frac{j2\pi ux}{N}} = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux} \\ &= \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x) W_N^{2ux} + \sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1) W_N^{u(2x+1)} \\ \underline{\underline{M}} &\triangleq \frac{N}{2} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_M^{ux} + \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_M^{ux} W_N^u \\ &= F_e(u) + W_N^u F_o(u) \quad 0 \leq u \leq M \end{aligned}$$

$W_{2N}^k = W_N^{k/2}$

(分成奇数项和偶数项之和)



4.1.2一维FFT

离散傅里叶变换

原理

$$F(u+M) = F_e(u+M) + W_N^{u+M} F_o(u+M)$$

$$= F_e(u) + W_N^{u+M} F_o(u)$$

周期性

$$F(u+M) = F_e(u+M) + W_N^{u+M} F_o(u+M)$$

$$= F_e(u) + W_N^{u+M} F_o(u)$$

$$M \triangleq \frac{N}{2}$$

$$\therefore F(u+M) = F_e(u) - W_N^u F_o(u)$$



4.1.2 一维FFT

离散傅里叶变换

原理

- 将原函数分为奇数项和偶数项，通过不断的一个奇数一个偶数的相加（减），最终得到需要的结果
- FFT是将复杂的运算变成两个数相加（减）的简单运算的重复。

$$F(u) = F_e(u) + W_N^{u+M} F_o(u)$$

$$F(u+M) = F_e(u) - W_N^u F_o(u)$$



4.1.3 二维DFT

离散傅里叶变换

定义

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right)}$$

$$x, u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{xu}{M} + \frac{yv}{N} \right)}$$

$$y, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v)$$

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$



4.1.3 二维DFT

离散傅里叶变换

定义

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v) = |F(u, v)| e^{j\phi(u, v)}$$

- 傅里叶谱 $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$
- 相位谱 $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$
- 功率谱 $E(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$



4.1.3 二维DFT

离散傅里叶变换

(2) 例程

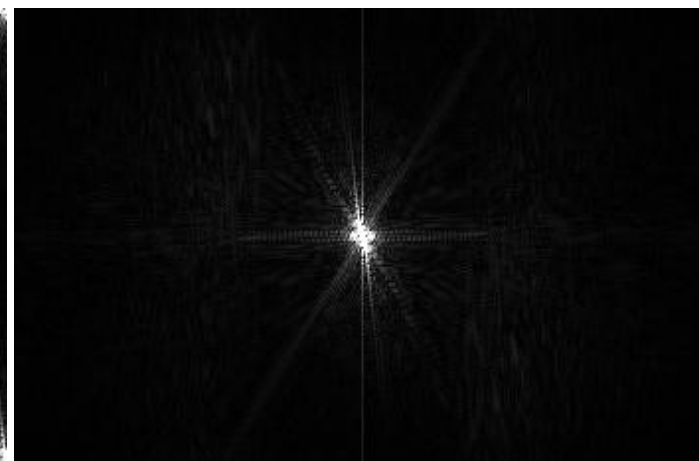
```
ADFTI2=fftshift(ADFTI1);  
subplot(131),imshow(Image),title('原图');  
subplot(132),imshow(ADFTI1),title('原频谱图');  
subplot(133),imshow(ADFTI2),title('移位频谱图');
```



原图



规格化频谱图



频谱搬移

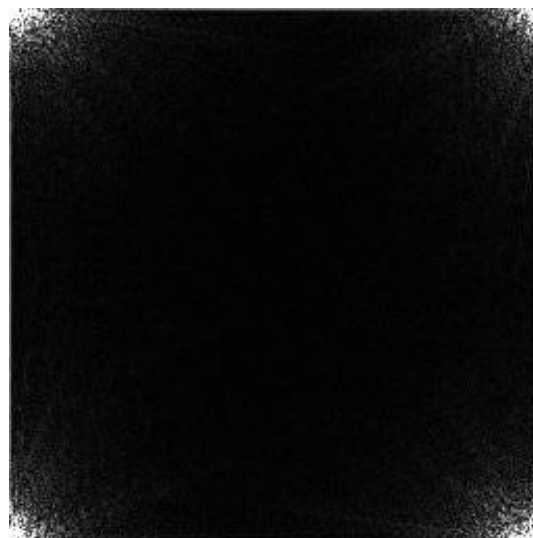
4.1.3 二维DFT

离散傅里叶变换

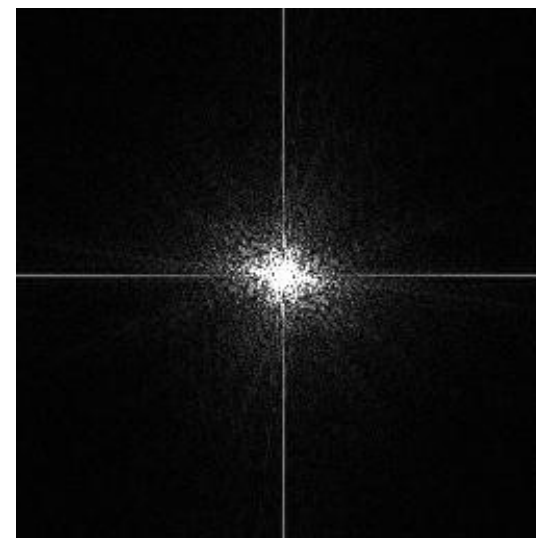
(2) 例程



原图



规格化频谱图



频谱搬移

频谱搬移图中间部分为低频部分，越靠外边频率越高。图像中的能量主要集中在低频区，高频能量很少或为零。



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

主要内容：

- (1) 可分性
- (2) 线性和周期性
- (3) 几何变换性
 - 共轭对称性
 - 旋转性
- (4) Parseval定理
- (5) 卷积定理

平移特性

比例变换特性



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(1) 可分性

■ 原理

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{xu}{M}} e^{-j2\pi \frac{yv}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{yv}{N}} \right] e^{-j2\pi \frac{xu}{M}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \left\{ \mathcal{F}_y[f(x, y)] \right\} e^{-j2\pi \frac{xu}{M}} \\ &= \mathcal{F}_x \left\{ \mathcal{F}_y[f(x, y)] \right\} \end{aligned}$$

二维DFT可用一维DFT来实现：先对每一列进行FFT，再对每一行进行FFT；或相反顺序



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(2) 线性和周期性

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] = a_1 \mathcal{F}[f_1(x, y)] + a_2 \mathcal{F}[f_2(x, y)]$$

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) \quad 0 \leq x, u < M, 0 \leq y, v < N$$

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$$



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(3) 几何变换性

■ 共轭对称性

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) \quad \mathcal{F}[f(-x, -y)] = F(-u, -v)$$

$$\text{则 } F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

■ 平移特性

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi\left(\frac{x_0 u}{M} + \frac{y_0 v}{N}\right)}$$

$$f(x, y) e^{j2\pi\left(\frac{x u_0}{M} + \frac{y v_0}{N}\right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

频谱搬移的原理



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(3) 几何变换性

■ 旋转性

空间域函数 $f(x, y)$ 旋转某一角度，变换域此函数的DFT也旋转同样的角度。反之，也成立

$$\text{若 } f(\gamma, \theta) \Leftrightarrow F(k, \phi) \quad \text{则 } f(\gamma, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(k, \phi + \theta_0)$$

■ 比例变换特性

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) \quad \text{则 } f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(3) 几何变换性

■ 例程

对一幅图像进行几何变换，再进行DFT，验证性质

```
Image=rgb2gray(imread('block.bmp'));  
scale=imresize(Image,0.5,'bilinear');  
rotate=imrotate(Image,30,'bilinear','crop');  
tform=maketform('affine',[1 0 0;0 1 0;20 20 1]);  
trans=imtransform(Image,tform,'XData',  
                  [1 size(Image,2)],'YData',[1,size(Image,1)]);  
Originaldft=abs(fftshift(fft2(Image)));  
Scaledft=abs(fftshift(fft2(scale)));  
Rotatedft=abs(fftshift(fft2(rotate)));  
Transdft=abs(fftshift(fft2(trans)));  
figure,imshow(Image),title('原图');
```

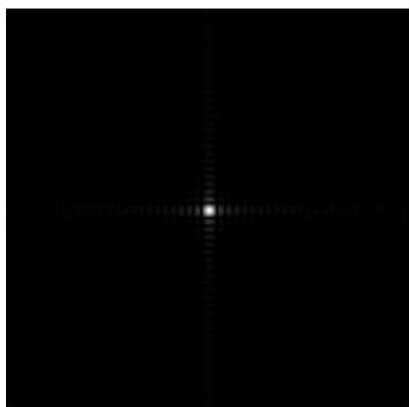
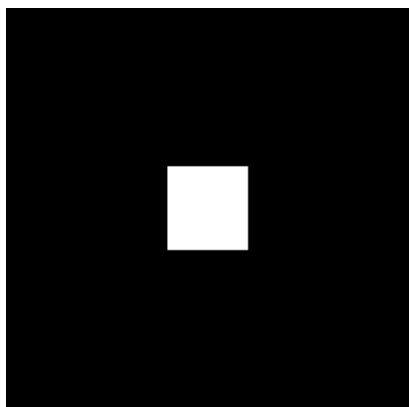
...

4.1.4 二维DFT的性质

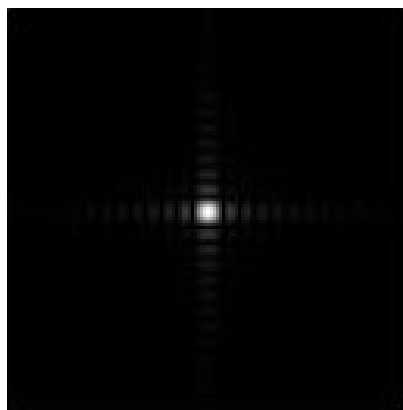
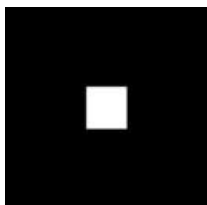
离散傅里叶变换

(3) 几何变换性

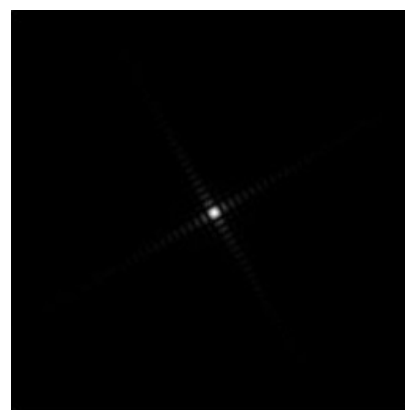
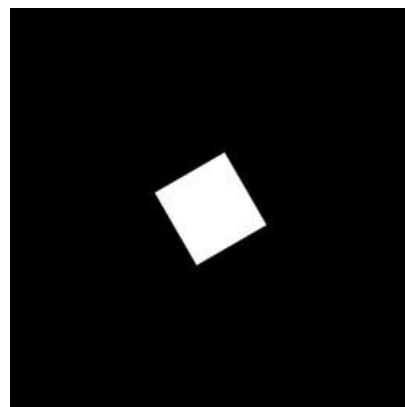
■ 例程



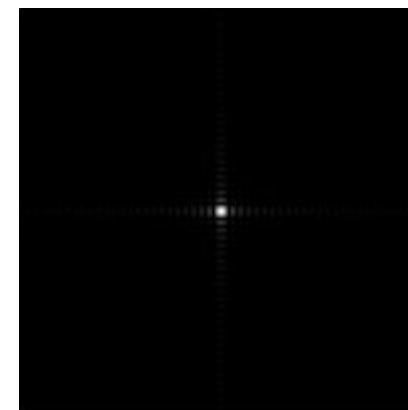
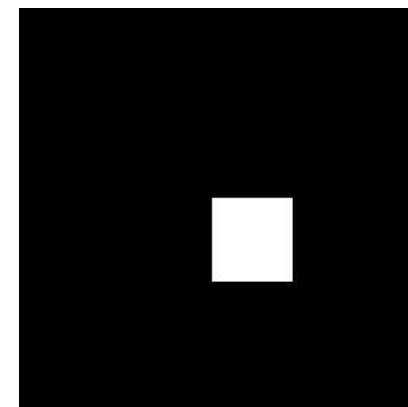
原图及频谱



缩小及频谱



旋转及频谱



平移及频谱



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(4) Parseval定理

若 $\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v)$

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} |f(x, y)|^2 = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2$$

变换前后不损失能量，仅改变信号的表现形式，变换编码的基本条件。



4.1.4 二维DFT的性质

离散傅里叶变换

(5) 卷积定理

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) \quad \mathcal{F}[g(x, y)] = G(u, v)$$

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$



4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

(1) 描述图像信息

■ 傅立叶描绘子

- 描绘子：表征图像特征的一系列符号，
- 描绘子的几何变换不变性：图像内容不变，仅产生几何变换，描绘子唯一。
- 闭合区域边界上的点列用复数序列表示：

$$z(n) = x(n) + iy(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$z(n)$ 的DFT系数 $Z(k)$ 称为傅立叶描绘子。

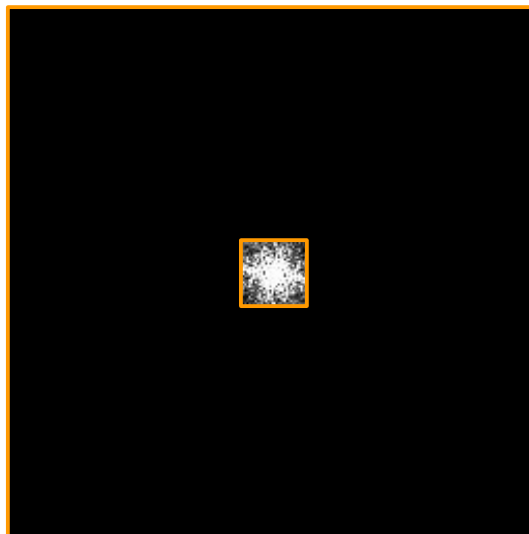
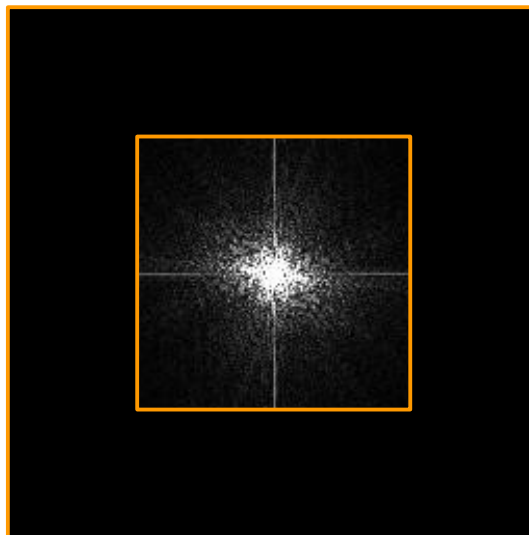
- $Z(k)$ 系数幅值具有旋转不变性和平移不变性，相位信息具有缩放不变性。

4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

(2) 在图像滤波中的应用

- 能量聚集在中间：低频部分
- 低通滤波

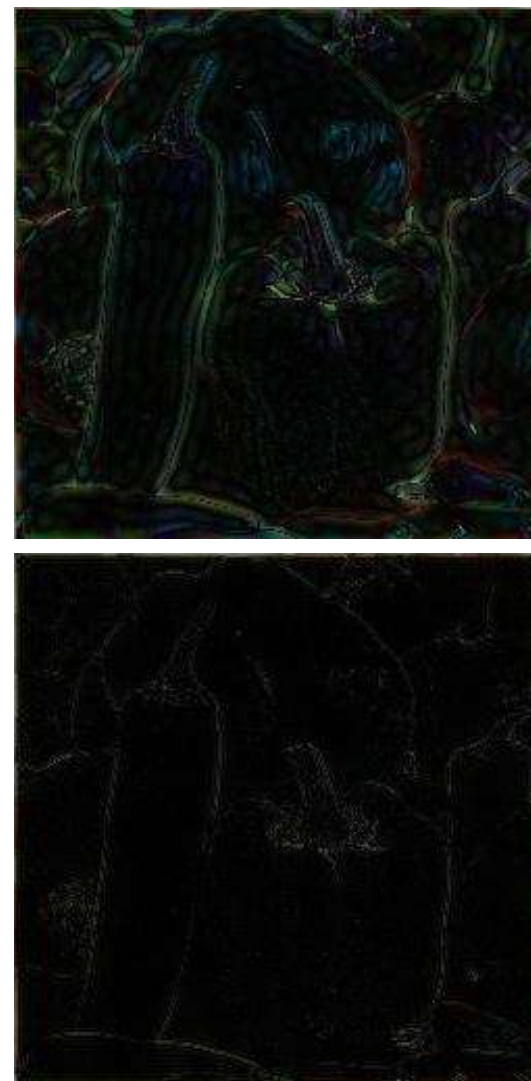
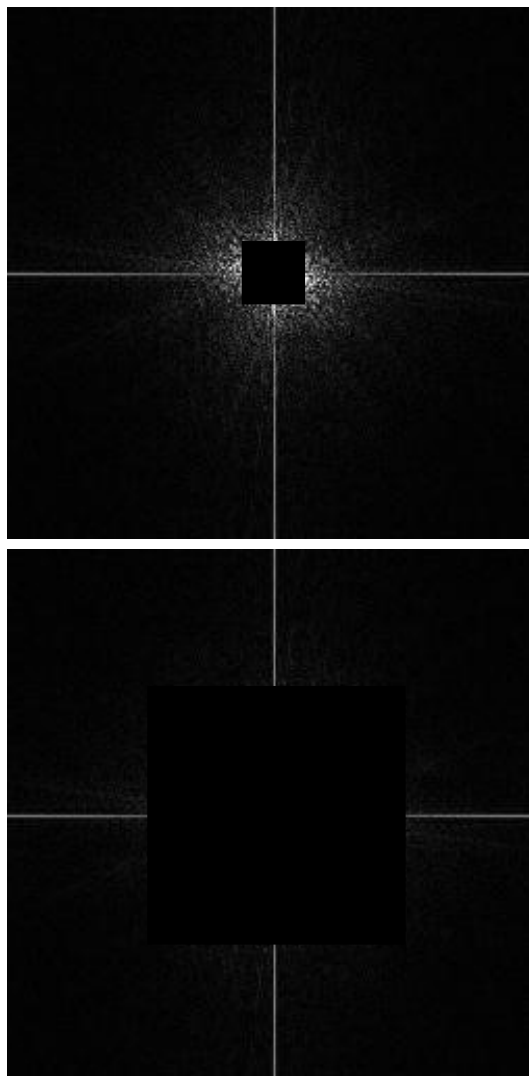


4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

(2) 在图像滤波中的应用

- 能量聚集在中间：低频部分
- 高通滤波





4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

(3) 在图像压缩中的应用

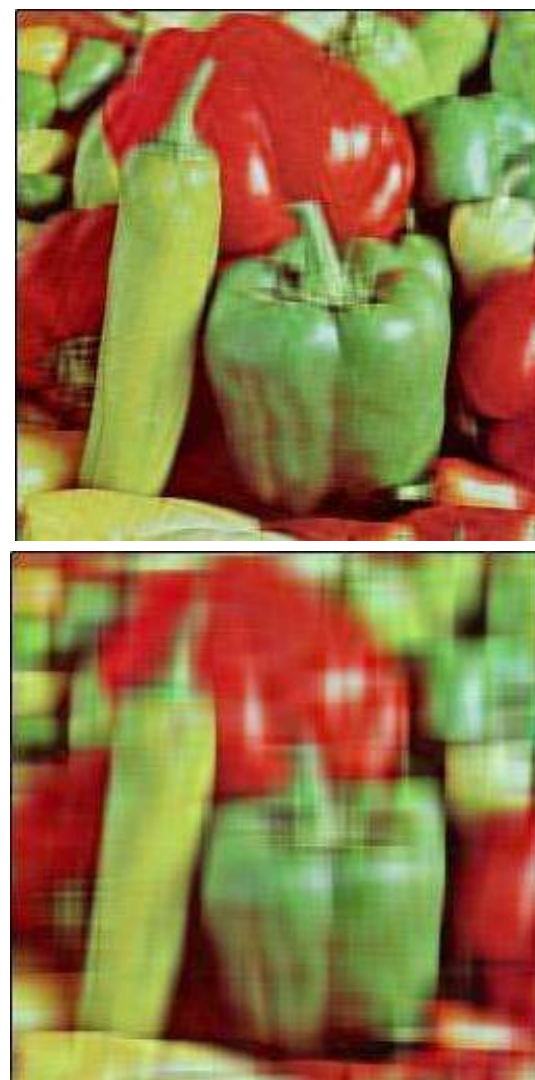
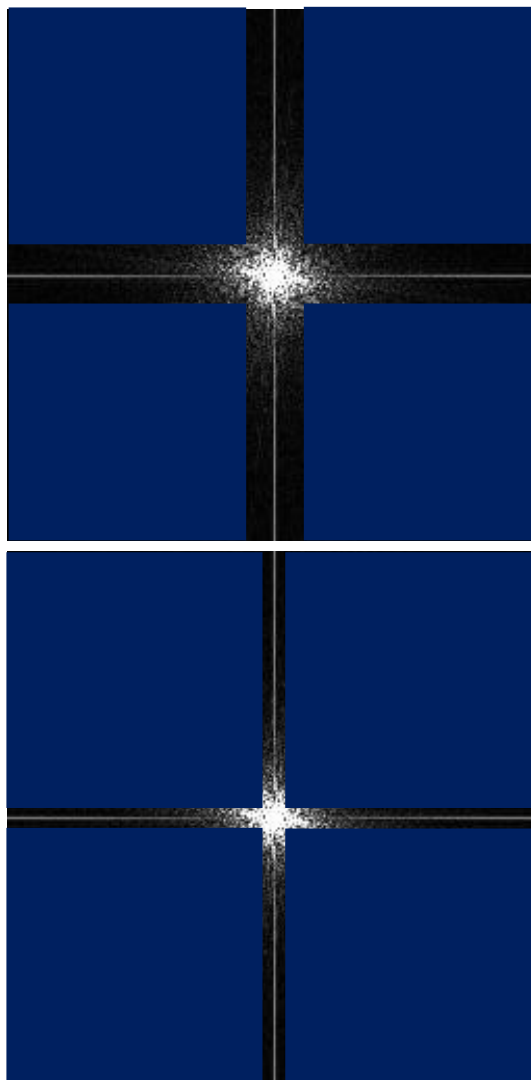
- 由Parseval定理知，变换前后能量不发生损失，只是改变了信号的表现形式，DFT变换系数表现的是各个频率点上的幅值；
- 高频反映细节、低频反映景物概貌，往往认为可将高频系数置为0，降低数据量；
- 同时由于人眼的惰性，合理地设置高频系数为0，图像质量一定范围内的降低不会被人眼察觉到。

4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

(3) 在图像压缩中的应用

- 能量聚集在中间：低频部分





4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

(4) 卷积性质的应用

- 抽象来看，图像处理算法可以认为是图像信息经过了滤波器的滤波（如：平滑滤波、锐化滤波等）。
- 如果滤波器的结构比较复杂时，直接进行时域中的卷积运算是不可思议的。

$$f_g = g * f$$

$$F_g(u, v) = G(u, v) \cdot F(u, v)$$

$$f_g = IDFT(F_g)$$



4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

■ 例程

打开一幅图像，对其进行DFT变换及频域滤波

```
Image=imread('desert.jpg');  
grayIn=rgb2gray(Image);  
[h,w]=size(grayIn);  
DFTI=fftshift(fft2(grayIn));  
cf=30;  
HDFTI=DFTI;  
HDFTI(h/2-cf:h/2+cf,w/2-cf:w/2+cf)=0;  
grayOut1=uint8(abs(ifft2(ifftshift(HDFTI))));  
subplot(131),imshow(Image),title('原图');  
subplot(132),imshow(grayOut1),title('高通滤波');
```


4.1.5 DFT在图像处理中的应用

离散傅里叶变换

■ 例程

```
LDFTI=zeros(h,w);  
LDFTI(h/2-cf:h/2+cf,w/2-cf:w/2+cf)=  
    DFTI(h/2-cf:h/2+cf,w/2-cf:w/2+cf);  
grayOut2=uint8(abs(ifft2(ifftshift(LDFTI))));  
subplot(133),imshow(grayOut2),title('低通滤波');
```



原图



高通滤波



低通滤波



4.2 离散余弦变换

4. 2. 1 一维离散余弦变换

4. 2. 2 二维离散余弦变换

4. 2. 3 离散余弦变换在图像处理中的应用

离散余弦变换 (**Discrete Cosine Transform, DCT**)



4.2.1 一维DCT

离散余弦变换

定义

对于有限长数字序列 $f(x), x=0,1,\dots,N-1$

■ 一维DCT变换定义

$$F(u) = C(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

■ 一维IDCT变换定义

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} C(u) F(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{其中 } C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



4.2.2 二维DCT

离散余弦变换

定义

$$F(u, v) = \frac{2}{\sqrt{MN}} C(u)C(v) \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2M} \right] \cos \left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N} \right]$$
$$f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u)C(v) F(u, v) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2M} \right] \cos \left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N} \right]$$

$$x, u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$y, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$C(u), C(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u, v = 0 \\ 1 & u, v = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



4.2.2 二维DCT

离散余弦变换

(1) 定义

- 二维DCT变换的矩阵形式表示

$$F = AfA^T \quad f = A^T FA$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{1}{2N} \pi & \cos \frac{3}{2N} \pi & \cdots & \cos \frac{(2N-1)}{2N} \pi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \frac{N-1}{2N} \pi & \cos \frac{3(N-1)}{2N} \pi & \cdots & \cos \frac{(2N-1)(N-1)}{2N} \pi \end{pmatrix}$$





4.2.2 二维DCT

离散余弦变换

(2) 例程

■ 函数

$Y = \text{dct}(X)$ $Y = \text{idct}(X)$

$Y = \text{dct2}(X)$ $Y = \text{idct2}(X)$

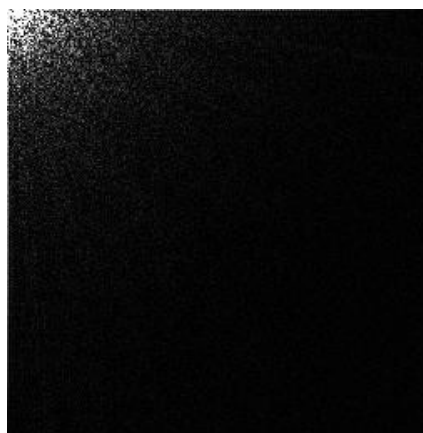
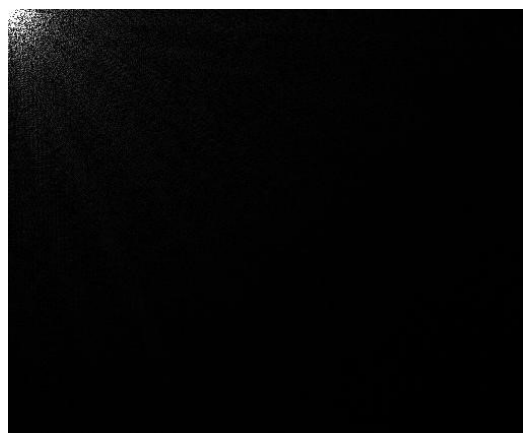
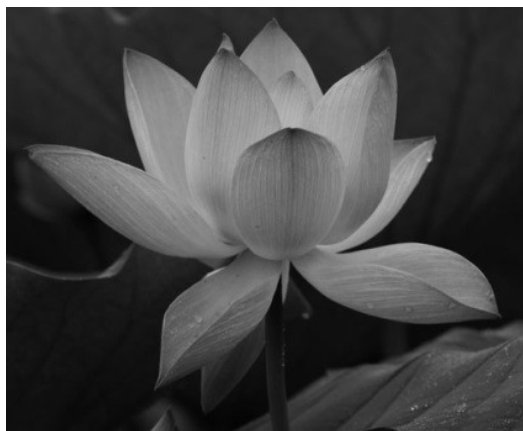
■ 程序

```
Image=imread('cameraman.jpg');  
grayI=rgb2gray(Image);  
DCTI=dct2(grayI);  
ADCTI=abs(DCTI);  
top=max(ADCTI(:));  
bottom=min(ADCTI(:));  
ADCTI=(ADCTI-bottom)/(top-bottom)*100;  
figure,imshow(ADCTI);
```

4.2.2 二维DCT

离散余弦变换

(3) 例程



能量主要集中在左上角低频分量处



4.2.3 DCT在图像处理中的应用

离散余弦变换

- DCT具有很强的“**能量集中**”特性：大多数的能量集中在离散余弦变换后的低频部分。
- DCT在图像处理中主要用于对图像（包括静止图像和运动图像）进行有损**数据压缩**。如静止图像编码标准JPEG、运动图像编码标准MPEG中都使用了离散余弦变换。

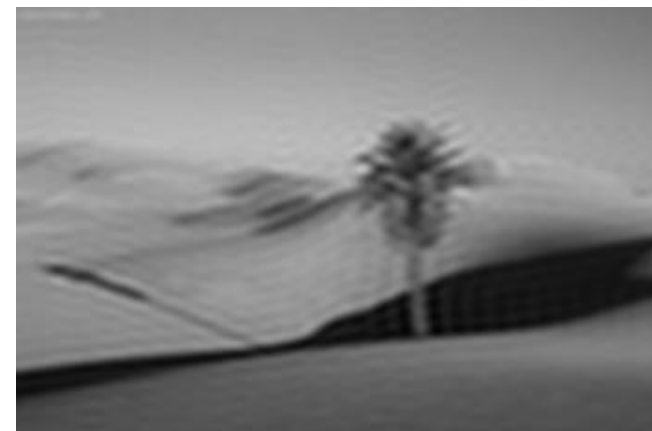
4.2.3 DCT在图像处理中的应用

离散余弦变换

■ 例程

打开一幅图像，对其进行DCT变换，将高频置零并进行反变换

```
Image=imread('desert.jpg');  
grayIn=rgb2gray(Image);  
DCTI=dct2(grayIn);  
cf=60;  
FDCTI=zeros(h,w);  
FDCTI(1:cf,1:cf)=DCTI(1:cf,1:cf);  
grayOut=uint8(abs(idct2(FDCTI)));  
subplot(121),imshow(Image),title('原图');  
subplot(122),imshow(grayOut),title('压缩重建');
```





4.3 K-L变换

- K-L变换（Karhunen-Loeve Transform）是建立在统计特性基础上的一种变换，又称为霍特林（Hotelling）变换或主成分分析。
- K-L变换的突出优点是相关性好，是均方误差（MSE, Mean Square Error）意义下的最佳变换，它在数据压缩技术中占有重要地位。



4.3 K-L变换

4.3.1 K-L变换原理

4.3.2 图像K-L变换



4.3.1 K-L变换原理

(1) K-L展开式

■ 展开

设一连续的随机函数 $x(t)$, $T_1 \leq t \leq T_2$, 可用已知的正交函数集 $\{\varphi_j(t), j=1,2,\dots\}$ 的线性组合展开

$$x(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \dots + a_j\varphi_j(t) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j(t)$$

$T_1 \leq t \leq T_2$, a_j 为展开式系数

$$\varphi_j(t): \text{连续正交函数}, \int_{T_1}^{T_2} \varphi_n(t) \cdot \bar{\varphi}_m(t) dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$



4.3.1 K-L变换原理

(1) K-L展开式

■ 采样

将 $x(t)$ 和 $\varphi_j(t)$ 在 $[T_1, T_2]$ 内等间隔采样 n 个离散点:

$$x(t) \rightarrow \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}, \quad \varphi_j(t) \rightarrow \{\varphi_j(1), \varphi_j(2), \dots, \varphi_j(n)\},$$

表示成向量:

$$X = (x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(n))^T$$

$$\Phi = (\varphi_j(1) \quad \varphi_j(2) \quad \dots \quad \varphi_j(n))^T \quad j = 1, 2, \dots, n$$



4.3.1 K-L变换原理

(1) K-L展开式

■ 近似

$$X = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j = \Phi A$$

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^T$$

$$\Phi = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n) = \begin{pmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_n(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \cdots & \varphi_n(n) \end{pmatrix}$$



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

■ 原理

□ K-L展开: $X = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j$

u_j 为确定的完备正交归一向量系

□ 用有限的 m 项来估计 X , 即: $\hat{X} = \sum_{j=1}^m a_j u_j$

□ 计算均方误差

$$\overline{\varepsilon^2} = E \left[(X - \hat{X})^T (X - \hat{X}) \right] = E \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j u_j \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j u_j \right]$$

$$u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad a_j = u_j^T X$$



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

$$\overline{\varepsilon^2} = E \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j^2 \right] = E \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} u_j^T X X^T u_j \right] = \sum_{j=m+1}^{\infty} u_j^T E[X X^T] u_j = \sum_{j=m+1}^{\infty} u_j^T \psi u_j$$

□ 利用Lagrange乘数法求均方误差取极值时的 u

$$h(u_j) = \sum_{j=m+1}^{\infty} u_j^T \psi u_j - \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda [u_j^T u_j - 1]$$

对 u_j 求导数, 得 $(\psi - \lambda_j I) u_j = 0, j = m+1, \dots, \infty$

λ_j 为 ψ 的特征值, u_j 为 λ_j 对应的特征向量, 此时: $\overline{\varepsilon^2} = \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j$



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

- 选取矩阵 ψ 的 m 个最大特征值对应的特征向量来逼近 X 时，均方误差最小
- 这 m 个特征向量所组成的正交坐标系称作 X 所在的 n 维空间的 m 维K-L变换坐标系。
- X 在K-L坐标系上的展开系数向量 A 称作 X 的K-L变换



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

■ 性质

$$\psi u_j = \lambda_j u_j$$

$$\psi U = U D_\lambda$$

$$D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$U \text{ 为正交矩阵} \quad \psi = U D_\lambda U^T$$

$$X = UA$$

$$\psi = E[XX^T] = E[UA A^T U^T] = U E[AA^T] U^T = U D_\lambda U^T$$

$$E[AA^T] = D_\lambda$$



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

■ 性质

- 变换后的向量 A 的自相关矩阵,是**对角矩阵**,且对角元素就是 X 的自相关矩阵的特征值
- 显然,通过**K-L变换**,消除了原有向量 X 的**各分量之间的相关性**,即变换后的数据 A 的各分量之间的信息是相互独立的。



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

■ 产生矩阵

- 由于总体均值向量常常没有什么意义，常把数据的**协方差矩阵**作为K-L坐标系的产生矩阵

$$\Sigma = E \left[(X - \mu)(X - \mu)^T \right]$$



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

■ 例程

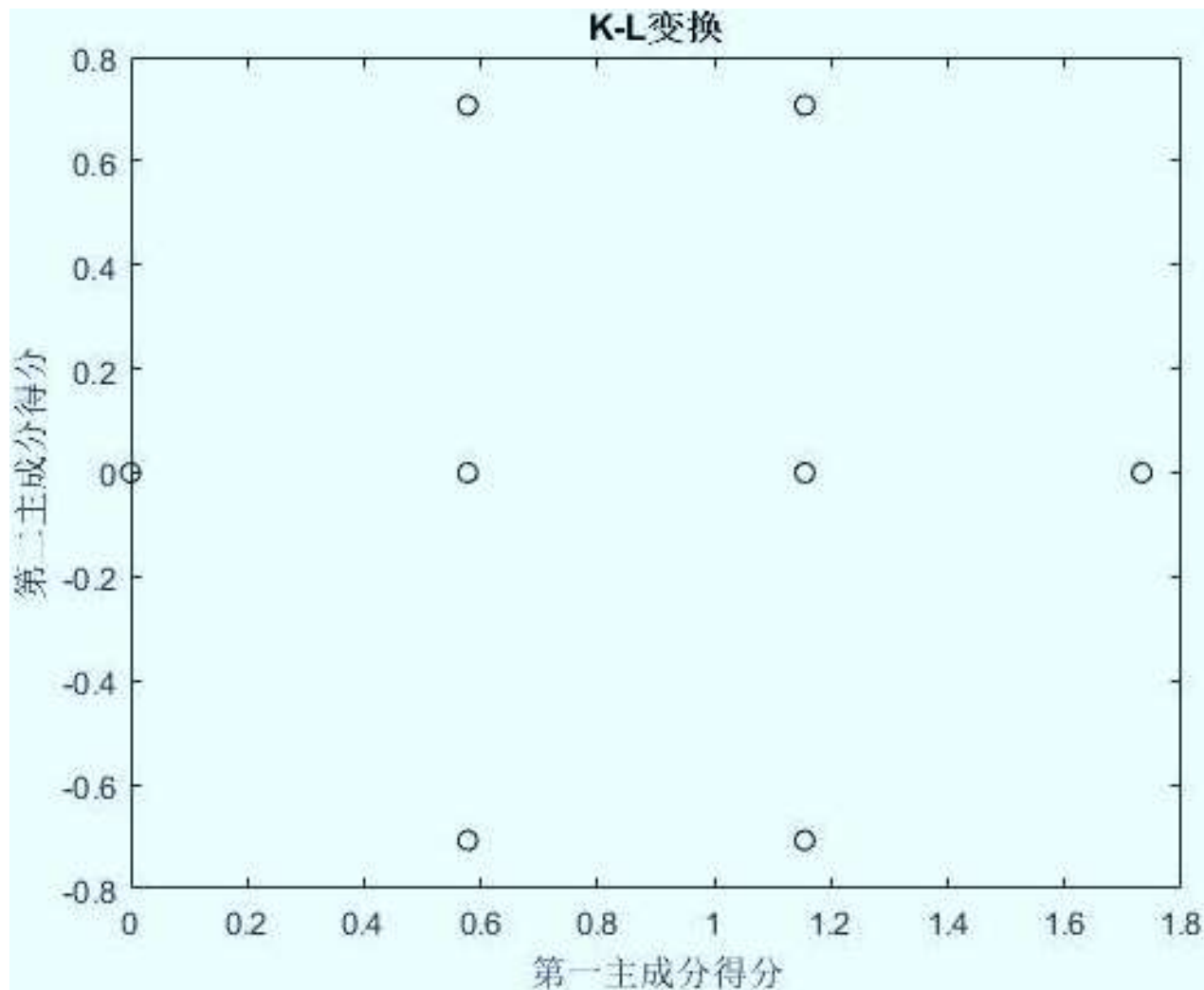
```
X=[0 0 0;1 0 1;1 0 0;1 1 0;0 0 1;0 1 1;0 1 0;1 1 1]';  
[n, N]=size(X);  
V=X*X'/N;  
[coeff, D]=eigs(V);  
[D_sort,index] = sort(diag(D),'descend');  
D=D(index,index);  
coeff = coeff(:,index);  
score=coeff'*X;  
figure; plot(score(1,:),score(2,:),'ko'),title('K-L变换');  
xlabel('第一主成分得分');ylabel('第二主成分得分');
```



4.3.1 K-L变换原理

(2) 离散K-L变换

■ 例程





4.3.2 图像K-L变换

(1) 原理

- 将二维图像采用行堆叠或列堆叠转换为一维处理
- 设一幅大小为 $M \times N$ 的图像 $f(x,y)$ ，在某个传输通道上传输了 L 次，由于受到各种因素的随机干扰，接收的图像是一个图像集合：

$$\{f_1(x,y), f_2(x,y), \dots, f_L(x,y)\}$$

- 采用行堆叠将每一幅 $M \times N$ 的图像表示为 MN 维的向量：
$$f_i = \begin{bmatrix} f_i(0,0) \\ f_i(0,1) \\ \vdots \\ f_i(M-1, N-1) \end{bmatrix}$$



4.3.2 图像K-L变换

(1) 原理

- 定义 f 向量的协方差矩阵和相应变换核矩阵

$$\Sigma_f = E\left[(f - \mu_f)(f - \mu_f)^T\right] \approx \frac{1}{L} \left[\sum_{i=1}^L f_i f_i^T \right] - \mu_f \mu_f^T$$

设 λ_i 和 u_i 为 Σ_f 的特征值和特征向量且降序排列

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \dots > \lambda_{M \times N}$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_{M \times N}) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{MN1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{MN2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1MN} & u_{2Mn} & \cdots & u_{MNMN} \end{pmatrix}$$

- 二维K-L变换 $F = U^T (f - \mu_f)$

4.3.2 图像K-L变换

K-L变换

(2) 实现

由于图像维数 MN 一般很高，直接求解特征值和特征向量不现实，一般采用奇异值分解的方法



原图



第一主成分重建



4.4 Radon变换

4. 4. 1 Radon变换的原理

4. 4. 2 Radon变换的实现

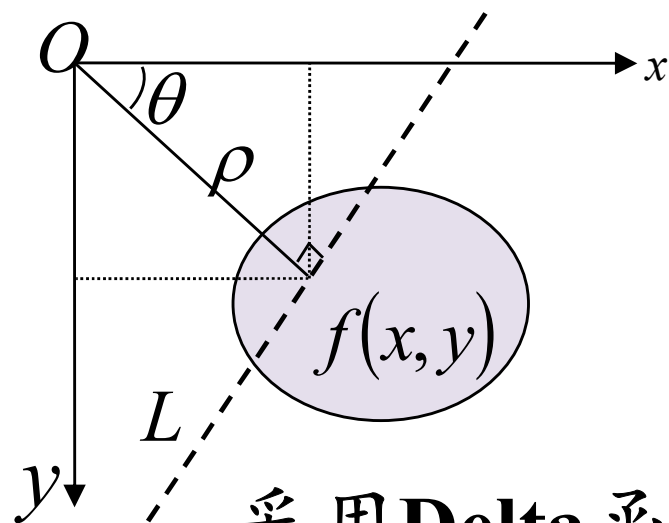
4. 4. 3 Radon变换的性质

4. 4. 4 Radon变换的应用



4.4.1 Radon变换的原理

Radon变换



直线 $L: \rho = x \cos \theta + y \sin \theta$

将函数 $f(x, y)$ 沿直线 L 做线积分

$$R(\rho, \theta) = \int_L f(x, y) ds$$

采用 **Delta** 函数表示直线 L

$$\delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) = \begin{cases} 0, & x \cos \theta + y \sin \theta - \rho \neq 0 \\ 1, & x \cos \theta + y \sin \theta - \rho = 0 \end{cases}$$

■ Radon变换对

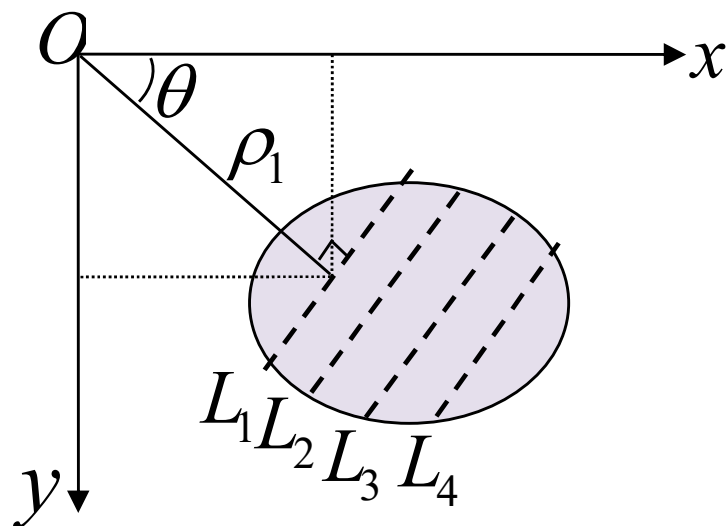
$$R(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R / \partial \rho}{x \cos \theta + y \sin \theta - \rho} d\rho$$



4.4.1 Radon变换的原理

Radon变换



对一幅图像，在某一特定角度下的**Radon**变换会产生 n 个线积分值，构成一个 n 维的向量，称为 $f(x,y)$ 在角度 θ 下的投影

Radon变换即 xy 空间向 $\rho\theta$ 空间的投影， $\rho\theta$ 空间每一点对应 xy 空间一条线

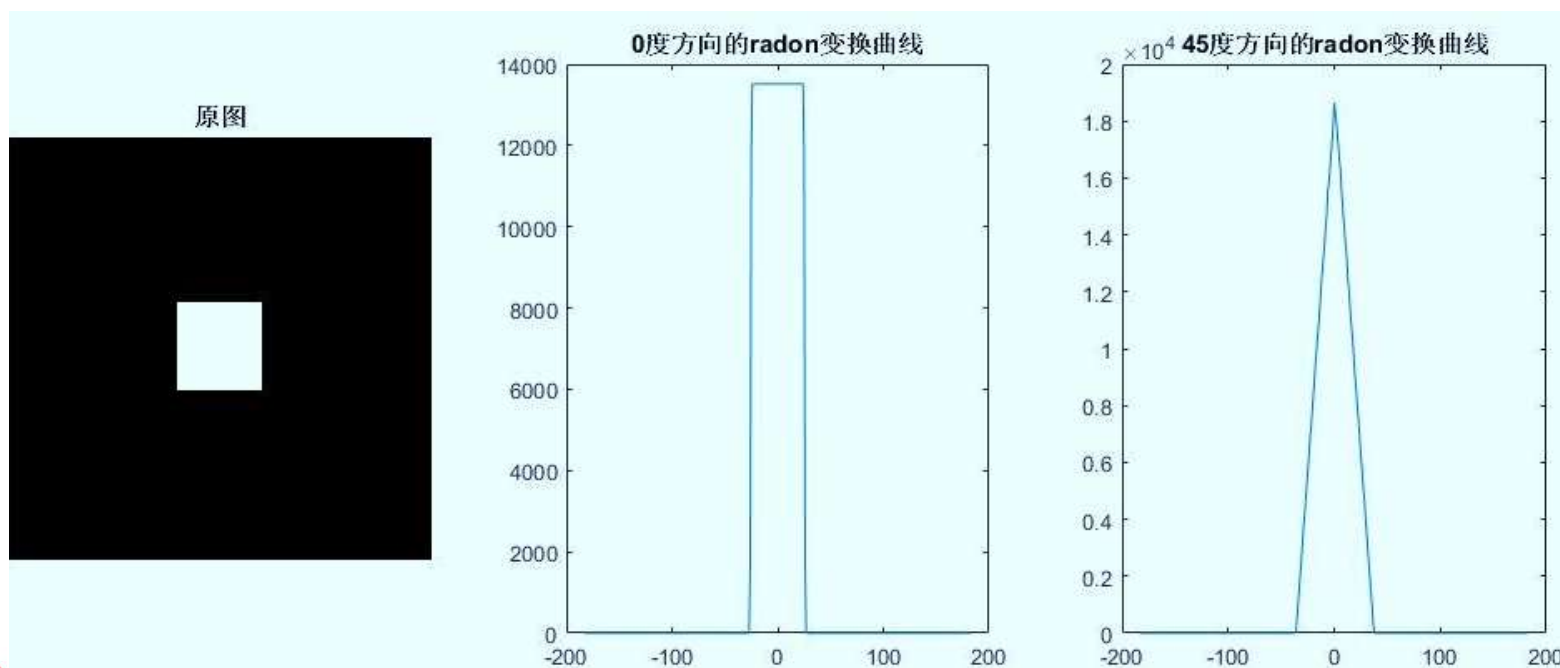


4.4.2 Radon变换的实现

Radon变换

- 例程1：对图像进行指定方向上的Radon变换

```
Image=rgb2gray(imread('block.bmp'));  
[R1,X1]=radon(Image,0);    [R2,X2]=radon(Image,45);  
subplot(131),imshow(Image),title('原图');  
subplot(132),plot(X1,R1),title('0° 方向上的Radon变换');  
subplot(133),plot(X2,R2),title('45° 方向上的Radon变换');
```

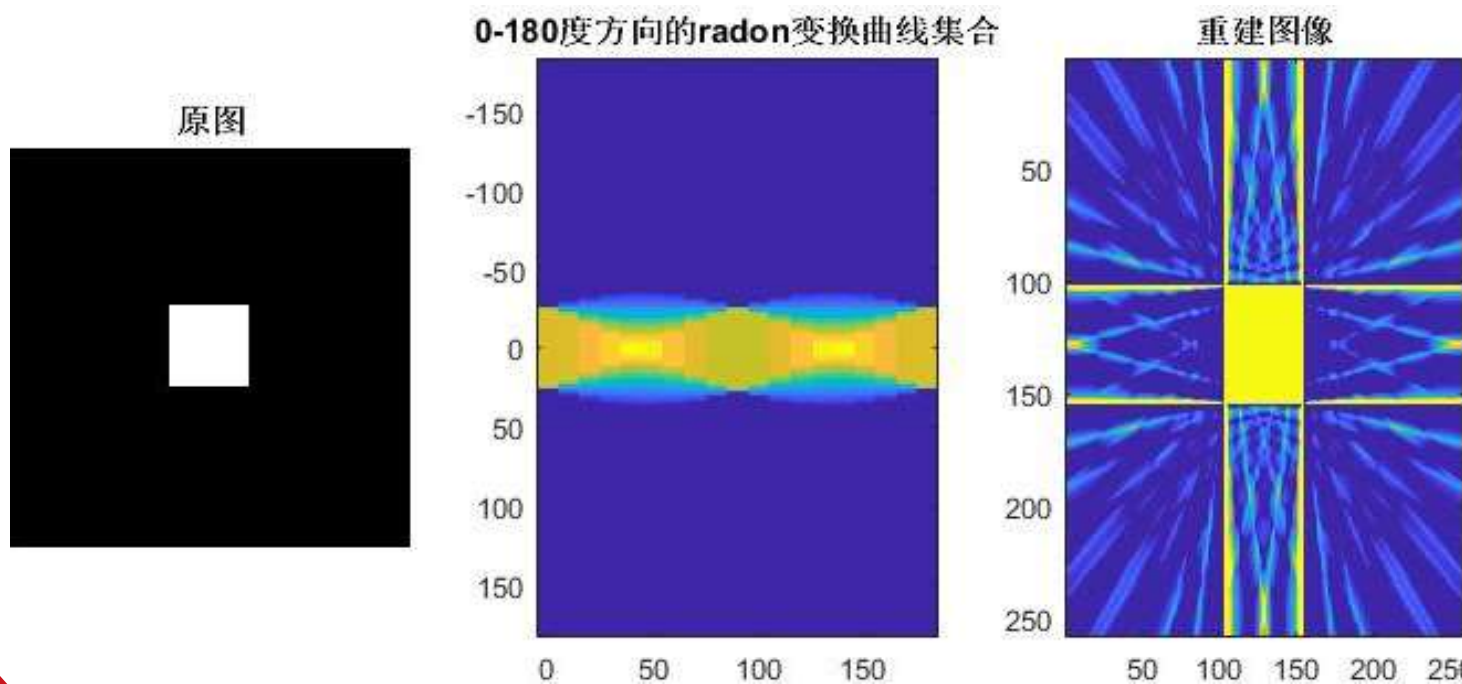


4.4.2 Radon变换的实现

Radon变换

■ 例程2：对图像进行Radon变换和反变换

```
Image=rgb2gray(imread('block.bmp'));
theta=0:10:180;[R,X]=radon(Image,theta); result=iradon(R,theta);
subplot(131),imshow(Image),title('原图');
subplot(132),imagesc(theta,X,R),title('radon变换曲线集合');
subplot(133),image(result),title('重建图像');
```





4.4.3 Radon变换的性质

Radon变换

■ 线性

$$\mathcal{R}[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 \mathcal{R}[f_1] + a_2 \mathcal{R}[f_2]$$

■ 平移性

$$\mathcal{R}[f(x - \Delta x, y - \Delta y)] = R(\rho - \Delta\rho, \theta) \quad \Delta\rho = \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta$$

■ 相似性

$$\text{若 } \mathcal{R}[f(x, y)] = R(\rho, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$\mathcal{R}[f(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} R_f\left(\rho, \frac{\cos \theta}{a}, \frac{\sin \theta}{b}\right)$$

$(\cos \theta, \sin \theta)$ 为 θ 方向上的单位矢量



4.4.3 Radon变换的性质

Radon变换

■ 微分

原函数求偏微分

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x / \cos \theta, y) - f(x, y)}{\Delta x / \cos \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y / \sin \theta) - f(x, y)}{\Delta y / \sin \theta} \end{cases}$$

进行Radon变换

$$\begin{cases} \mathcal{R} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \cos \theta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\rho + \Delta x, \theta) - R(\rho, \theta)}{\Delta x} \\ \mathcal{R} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] = \sin \theta \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{R(\rho + \Delta y, \theta) - R(\rho, \theta)}{\Delta y} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \mathcal{R} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \cos \theta \frac{\partial R(\rho, \theta)}{\partial \rho} \\ \mathcal{R} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] = \sin \theta \frac{\partial R(\rho, \theta)}{\partial \rho} \end{cases}$$



4.4.4 Radon变换的应用

Radon变换

- 可用来检测图像中的线段

图像中高灰度值的线段在 $\rho\theta$ 空间形成亮点，低灰度值的线段形成暗点，对图像中线段的检测可转化为在 $\rho\theta$ 空间对亮点、暗点的检测

- 计算出原图中各方向上的投影值，可以作为方向特征用于目标检测和识别
- 改变图像的表现形式，为相关处理提供便利



4.5 小波变换

4.5.1 小波

4.5.2 一维小波变换

4.5.3 二维小波变换

4.5.4 小波变换在图像处理中的应用



4.5.1 小波

(1) 定义

设函数 $\psi(t)$ 满足： $\int_R \psi(t) dt = 0$ ，对其进行平移和伸缩产生函数族： $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ $a, b \in R, a \neq 0$

$\psi(t)$ 称为基小波或母小波， a 为伸缩因子（尺度因子）， b 为平移因子， $\psi_{a,b}(t)$ 为 $\psi(t)$ 生成的连续小波

4.5.1小波

(2) 特点

- 紧支撑性

小波函数在小范围内波动，能量有限，超出一定范围时，波动幅度迅速衰减，具有速降性。

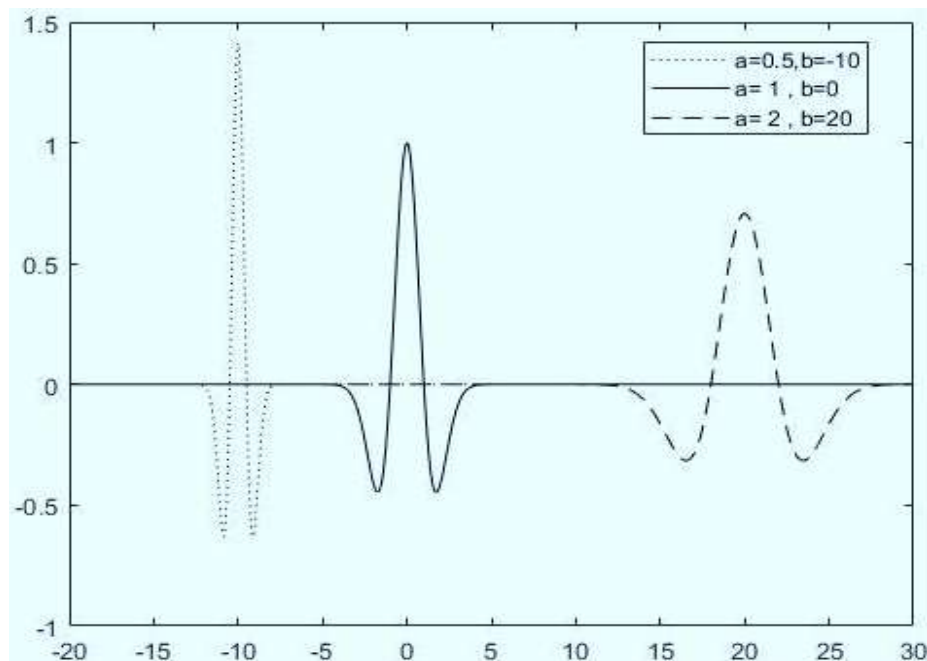
- 变化性

小波函数随尺度因子的变化而变化

- K 阶消失矩

$$\int_R t^k \psi(t) dt = 0$$

$$k = 0, 1, \dots, K-1$$



Marr小波参数取不同值的波形

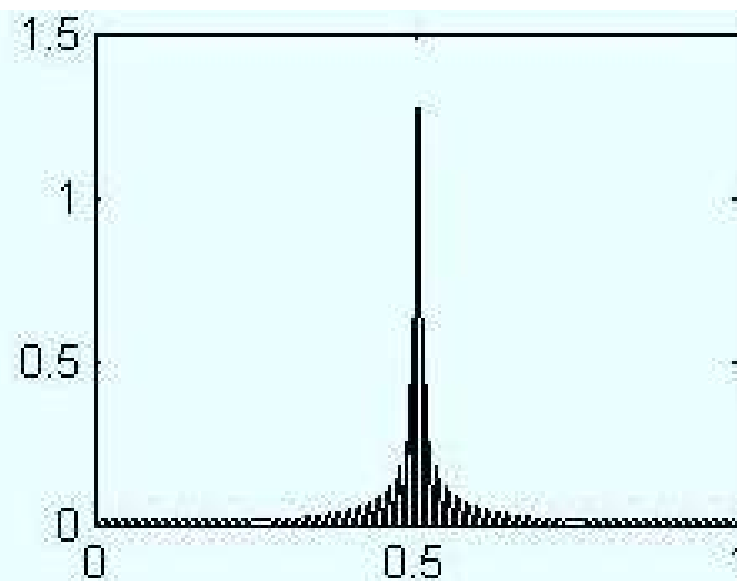
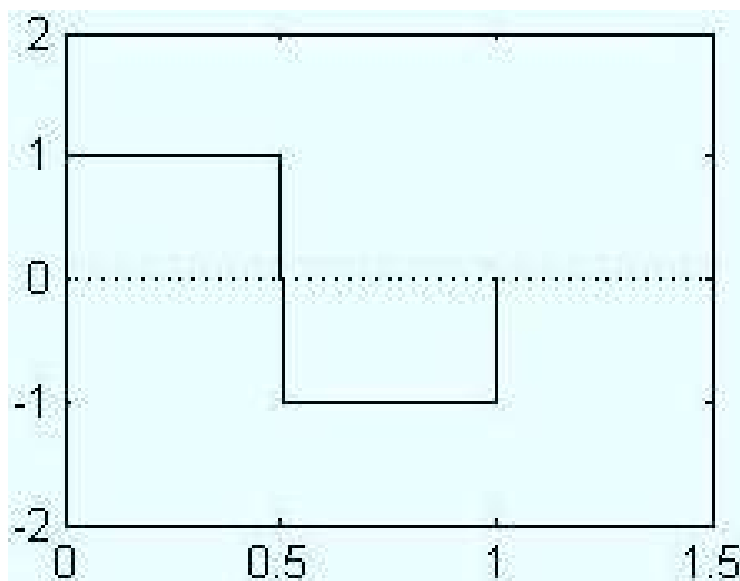


4.5.1小波

(3) 实例

■ Haar小波

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_H(t) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ \Psi_H(\omega) &= \frac{1 - 2e^{-\frac{i\omega}{2}} + e^{-i\omega}}{\omega i} \end{aligned} \right.$$



Harr小波及其频谱



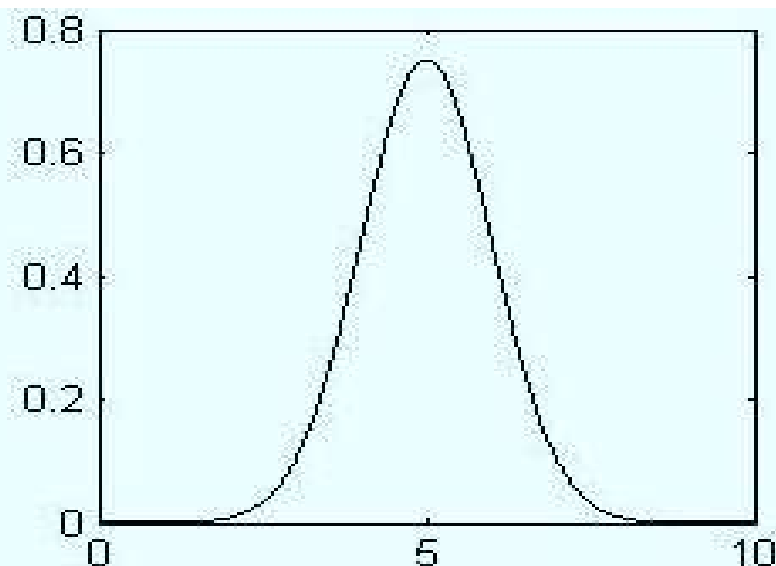
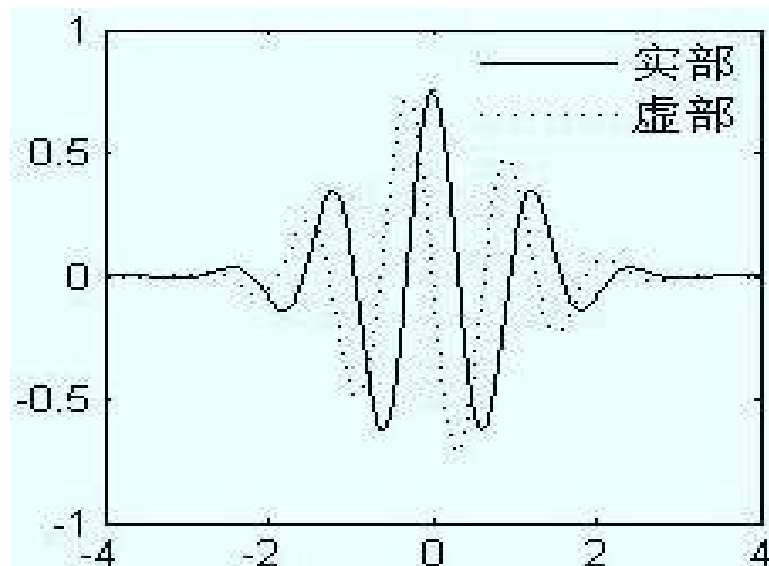
4.5.1小波

小波变换

(3) 实例

■ Morlet小波

$$\begin{cases} \psi(t) = \pi^{-1/4} \left(e^{-i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2/2} \right) e^{-t^2/2} \\ \Psi(\omega) = \pi^{-1/4} \left[e^{-(\omega-\omega_0)^2/2} - e^{-\omega_0^2/2} e^{-\omega^2/2} \right] \end{cases}$$



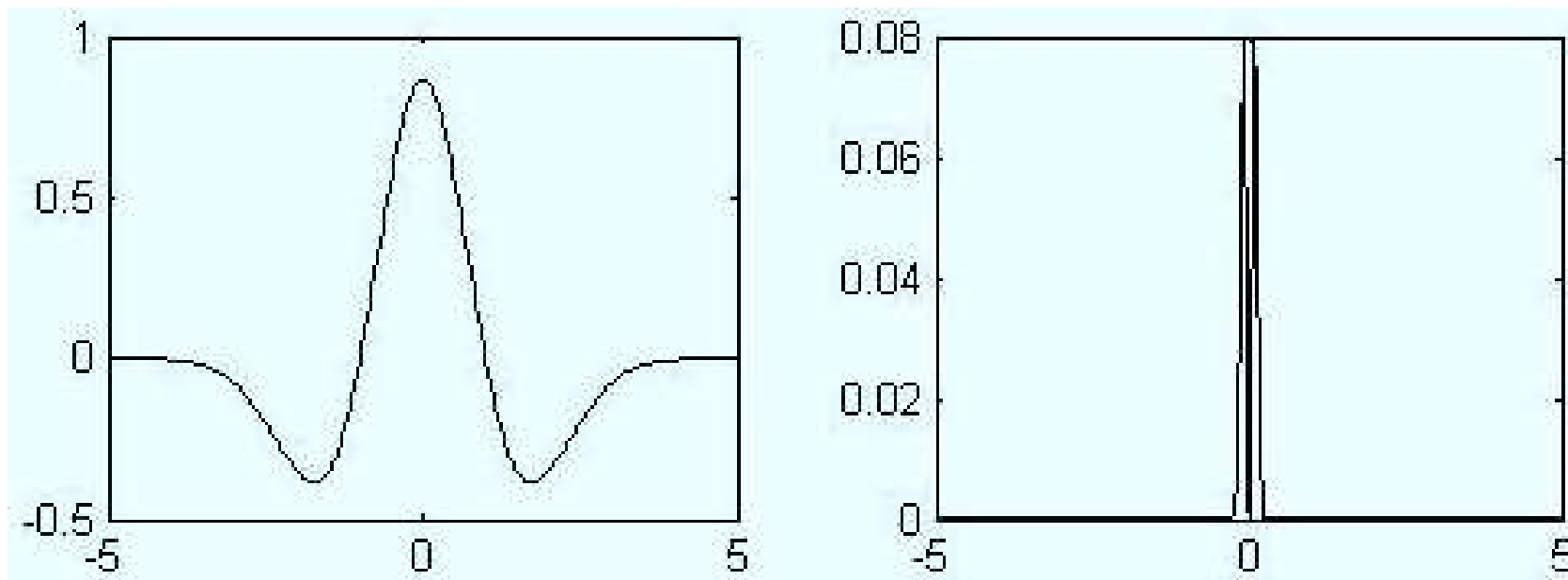


4.5.1小波

(3) 实例

■ Mexico草帽小波

$$\psi(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \right) (1 - t^2) e^{-t^2/2}$$



Mexico草帽小波小波及其频谱



4.5.2 一维小波变换

小波变换

(1) 连续小波变换

设 $f(t)$ 、 $\psi(t)$ 是平方可积函数，且 $\psi(t)$ 满足允许性条件

称 $W_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$ 为 $f(t)$ 的连续小波变换

$\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的共轭函数



4.5.2 一维小波变换

(1) 连续小波变换

设 $\psi_a(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$, 令 $\tilde{\psi}_a(t) = \psi_a(-t)$

小波变换定义改写为:

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= |a|^{-1/2} \int_R f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = |a|^{-1/2} \int_R f(t) \psi^*\left(-\frac{b-t}{a}\right) dt \\ &= |a|^{-1/2} \int_R f(t) \tilde{\psi}^*\left(\frac{b-t}{a}\right) dt = f(t) * \tilde{\psi}_a(t) \end{aligned}$$

小波变换是原始信号用一组不同尺度的带通滤波器进行滤波, 将信号分解到一系列频带上



4.5.2 一维小波变换

小波变换

(2) 时频特性

分析小波 $\psi_{a,b}(t)$ 时、频窗中心和时、频窗半径，可得：

$$\text{时窗中心: } t^* = at_{\psi}^* + b \quad \text{时窗半径: } \Delta t = a\Delta t_{\psi}$$

$$\text{频窗中心: } \omega^* = \frac{1}{a}\omega_{\psi}^* \quad \text{频窗半径: } \Delta\omega = \frac{1}{a}\Delta\omega_{\psi}$$

$t_{\psi}^*, \Delta t_{\psi}, \omega_{\psi}^*, \Delta\omega_{\psi}$ 是基小波 $\psi(t)$ 的时、频窗中心、半径

$$2\Delta t \cdot 2\Delta\omega = 4a\Delta t_{\psi} \cdot \frac{1}{a}\Delta\omega_{\psi} = 4\Delta t_{\psi} \cdot \Delta\omega_{\psi}$$

对于固定的 b ，当 $a > 1$ 时，随着 a 的增大，时窗增宽，频窗变窄；但窗口面积不变。

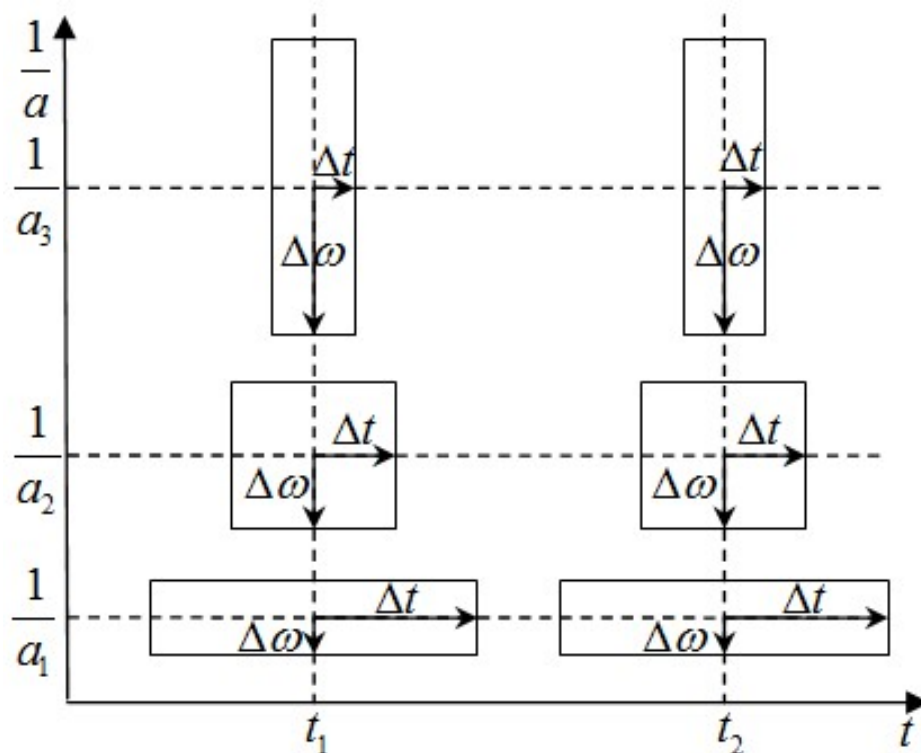


4.5.2 一维小波变换

(2) 时频特性

小波变换分析信号具有自适应的时频窗口：

- 检测高频分量，尺度参数 $a > 0$ 变小，时窗变窄，频窗增高，主频 ω^* 变大；
- 检测低频特性，尺度参数 $a > 0$ 增大，时窗变宽，频窗降低，主频 ω^* 变小；



小波变换的时-频平面



4.5.2 一维小波变换

(3) 离散小波变换

将小波参数 ab 离散化： $\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j}t - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$

$W_f(j, k) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt$ 称为 $f(t)$ 的离散小波变换

离散化参数的选择决定了离散小波变换能否实现



4.5.2 一维小波变换

(4) 正交小波

设 $\psi(t) \in L^2(R)$ 是一个允许小波，取 $a_0 = 2$

$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$, $j, k \in Z$ 构成 $L^2(R)$ 的标准正交基

称 $\psi(t)$ 为正交小波， $\psi_{j,k}(t)$ 是正交小波函数，相应的

离散小波变换 $W_f(j, k) = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$ 为正交小波变换。

可采用多分辨分析方法构造正交小波基



4.5.3 二维小波变换

(1) 定义

设 $f(x, y) \in L^2(R^2)$, $\int_R \int_R \psi(x, y) dx dy = 0$, 称

$$W_f(a, b_1, b_2) = \int_R \int_R f(x, y) \frac{1}{a} \psi^* \left(\frac{x - b_1}{a}, \frac{y - b_2}{a} \right) dx dy$$

为 $f(x, y)$ 的二维连续小波变换, 逆变换为:

$$f(x, y) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \frac{da}{a^3} \iint_{R^2} W_f(a, b_1, b_2) \psi \left(\frac{x - b_1}{a}, \frac{y - b_2}{a} \right) db_1 db_2$$



4.5.3 二维小波变换

(2) 图像小波分解

LL^3	HL^3	HL^2	HL^1
LH^3	HH^3		
LH^2		HH^2	
LH^1		HH^1	

L: 低频分量

H: 高频分量

LH: 垂直方向上的高频信息

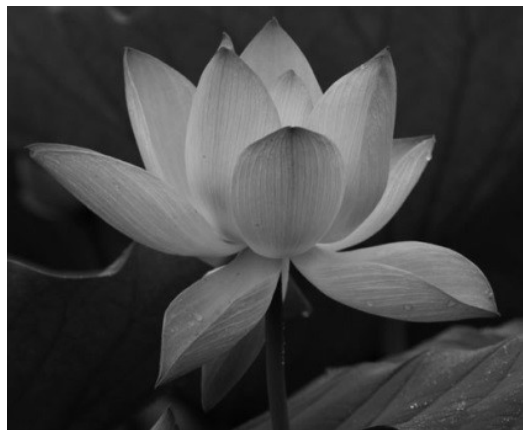
HL: 水平方向上的高频信息

HH: 对角线方向的高频信息

4.5.3 二维小波变换

小波变换

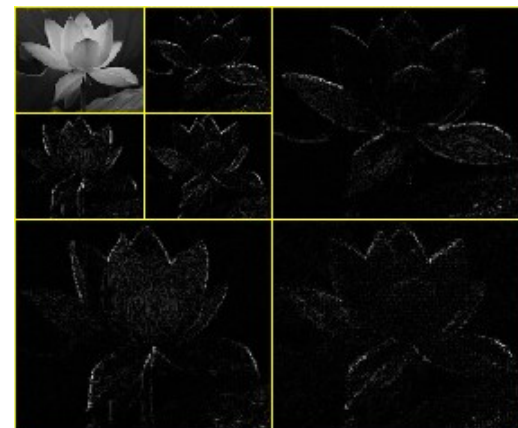
(2) 图像小波分解



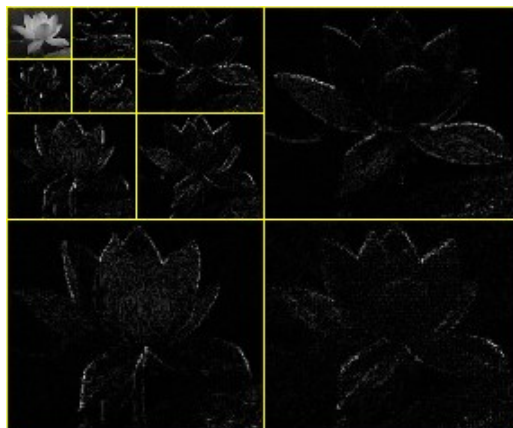
原图



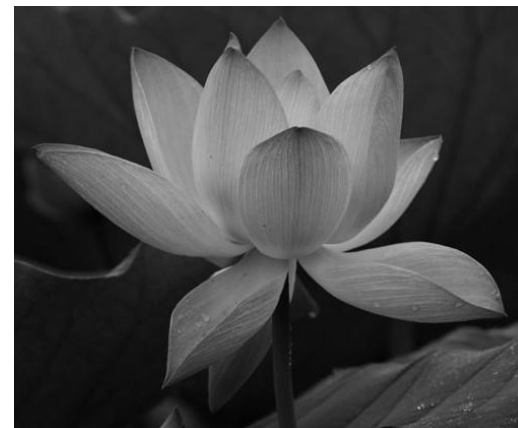
一级小波分解



二级小波分解



三级小波分解



三级分解重构



4.5.3 二维小波变换

(3) 例程

■ 函数

- 一级二维离散小波变换
 $[CA, CH, CV, CD] = \text{dwt2}(X, 'wname')$ 或
 $[CA, CH, CV, CD] = \text{dwt2}(X, Lo_D, Hi_D)$
- 一级二维离散小波逆变换
 $X = \text{idwt2}(CA, CH, CV, CD, 'wname')$ 或
 $X = \text{idwt2}(CA, CH, CV, CD, Lo_D, Hi_D)$
- 多级二维小波分解
 $[C, S] = \text{wavedec2}(X, N, 'wname')$ 或
 $[C, S] = \text{wavedec2}(X, N, Lo_D, Hi_D)$



4.5.3 二维小波变换

(3) 例程

■ 函数

□ 多级二维小波重构

$X = \text{waverec2}(C, S, 'wname')$ 或

$X = \text{waverec2}(C, S, Lo_R, Hi_R)$

□ 提取二维小波分解的低频系数

$A = \text{appcoef2}(C, S, 'wname', N)$ 或

$A = \text{appcoef2}(C, S, Lo_R, Hi_R, N)$

□ 提取二维小波分解的高频系数

$D = \text{detcoef2}(O, C, S, N)$ 或

$[H, V, D] = \text{detcoef2}('all', C, S, N)$



4.5.3 二维小波变换

(3) 例程

■ 一级分解及重构程序

```
Image=imread('cameraman.jpg');  
subplot(1,3,1),imshow(Image),title('原图');  
grayI=rgb2gray(Image);  
[ca1,ch1,cv1,cd1]=dwt2(grayI,'db4');  
DWTI1=[wcodemat(ca1,256),wcodemat(ch1,256);  
        wcodemat(cv1,256),wcodemat(cd1,256)];  
subplot(1,3,2),imshow(DWTI1/256),title('一级分解');  
result=idwt2(ca1,ch1,cv1,cd1,'db4');  
subplot(1,3,3),imshow(result,[]),title('一级重构');
```




4.5.3 二维小波变换

(3) 例程

■ 二级分解及重构程序

```
Image=imread('cameraman.jpg');  
grayI=rgb2gray(Image);  
[c,s]=wavedec2(grayI,2,'db4');  
ca2=appcoef2(c,s,'db4',2);  
[ch2,cv2,cd2] = detcoef2('all',c,s,2);  
[ch1,cv1,cd1] = detcoef2('all',c,s,1);  
ca1=[wcodemat(ca2,256),wcodemat(ch2,256);  
      wcodemat(cv2,256),wcodemat(cd2,256)];
```



4.5.3 二维小波变换

(3) 例程

■ 二级分解及重构程序

```
k=s(2,1)*2-s(3,1);  
ch1=padarray(ch1,[k k],1,'pre');  
cv1=padarray(cv1,[k k],1,'pre');  
cd1=padarray(cd1,[k k],1,'pre');  
    %填充一级小波高频系数数组，使两级系数维数一致  
DWTI2=[ca1,wcodemat(ch1,256);  
        wcodemat(cv1,256),wcodemat(cd1,256)];  
subplot(1,2,1),imshow(DWTI2/256),title('二级分解');  
result= waverec2(c,s,'db4');  
subplot(1,2,2),imshow(result,[]),title('二级重构');
```

4.5.3 二维小波变换

小波变换

(3) 例程



原图



二级小波分解子带图



二级分解重构图

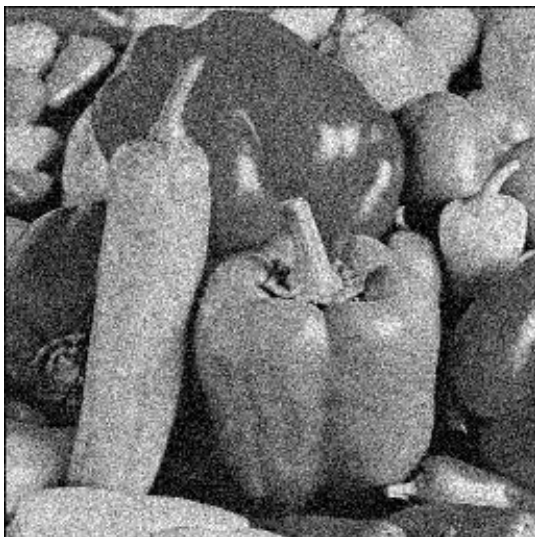


4.5.4小波变换在图像处理中的应用

小波变换

(1) 滤波降噪

高斯噪声图像



硬阈值降噪



wdenomp

函数降噪

软阈值降噪



4.5.4小波变换在图像处理中的应用

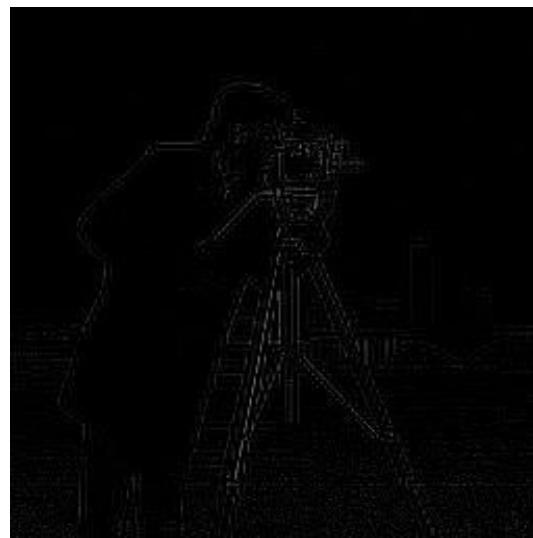
小波变换

(2) 边缘检测

利用边缘突变对应高频信息的特性，通过将低频系数置零、保留高频系数，实现了边缘检测



原图



边缘检测



4.5.4小波变换在图像处理中的应用

小波变换

(3) 压缩编码

小波变换后，图像能量集中在少部分的小波系数上，可以通过简单的量化方法，将较小能量的小波系数省去，保留能量较大的小波系数，从而达到压缩的目的



4.5.4小波变换在图像处理中的应用

小波变换

(4) 图像增强

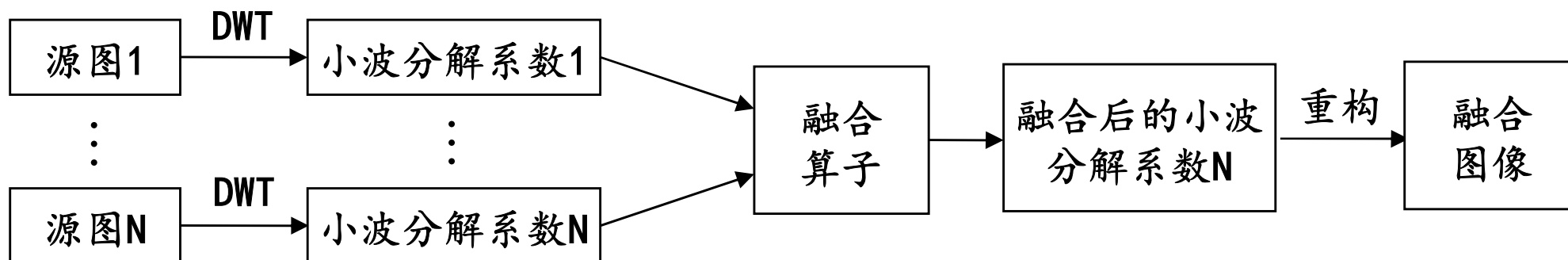
小波变换将图像分解为大小、位置和方向不同的分量，根据需要改变某些分量系数，从而使感兴趣的分量放大，不需要的分量减小，达到图像增强的目的。

4.5.4小波变换在图像处理中的应用

小波变换

(5) 图像融合

将原图像进行小波分解，在小波域通过一定的融合算子融合小波系数，再重构生成融合后的图像



背景图



前景图



融合图