Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа №4 по дисциплине

Дискретная математика

Тема: «Циклы и раскраска»

Вариант 1 – Эйлеров цикл

Выполнил студент гр. 5030102/20202 Соколов А.Н.

Руководитель Новиков Ф. А.

«___» __________ 202__ г.

Санкт-Петербург

2024

1. Формулировка задачи и ее формализация

Формулировка задачи

1. Необходимо разработать консольное приложение, реализующее функции поиска в графе и вывода любого эйлеров цикл, если таковой имеется. В противном случае указать, что цикл не был найден.
2. Указать сложность алгоритма и доказать, что она именно такая.
3. Объяснить почему был выбран тот или иной способ представления графов в программе.

2. Использованные технологии

Язык программирования

- C++ 23

Система сборки

- CMake 3.27
- Ninja 1.12.1

Исходные файлы программы:

https://github.com/azya0/dm2025/tree/master/lab2

3. Описание алгоритма

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и кончающаяся вершиной.
Если **начальная** вершина маршрута является **конечной**, то **маршрут замкнут**, иначе — открыт.
Если все ребра различны, то маршрут называется **цепью**.
Если все вершины *(а значит, и ребра!)* различны, то маршрут называется **простой цепью**.
Замкнутая цепь называется циклом. Замкнутая простая цепь называется **простым циклом**.

Таким образом: **цикл - замкнутый маршрут, в котором все ребра различны**

Если связный граф имеет цикл *(не обязательно простой)*, содержащий **все ребра графа**, то такой цикл называется эйлеровым циклом, а граф называется эйлеровым графом.

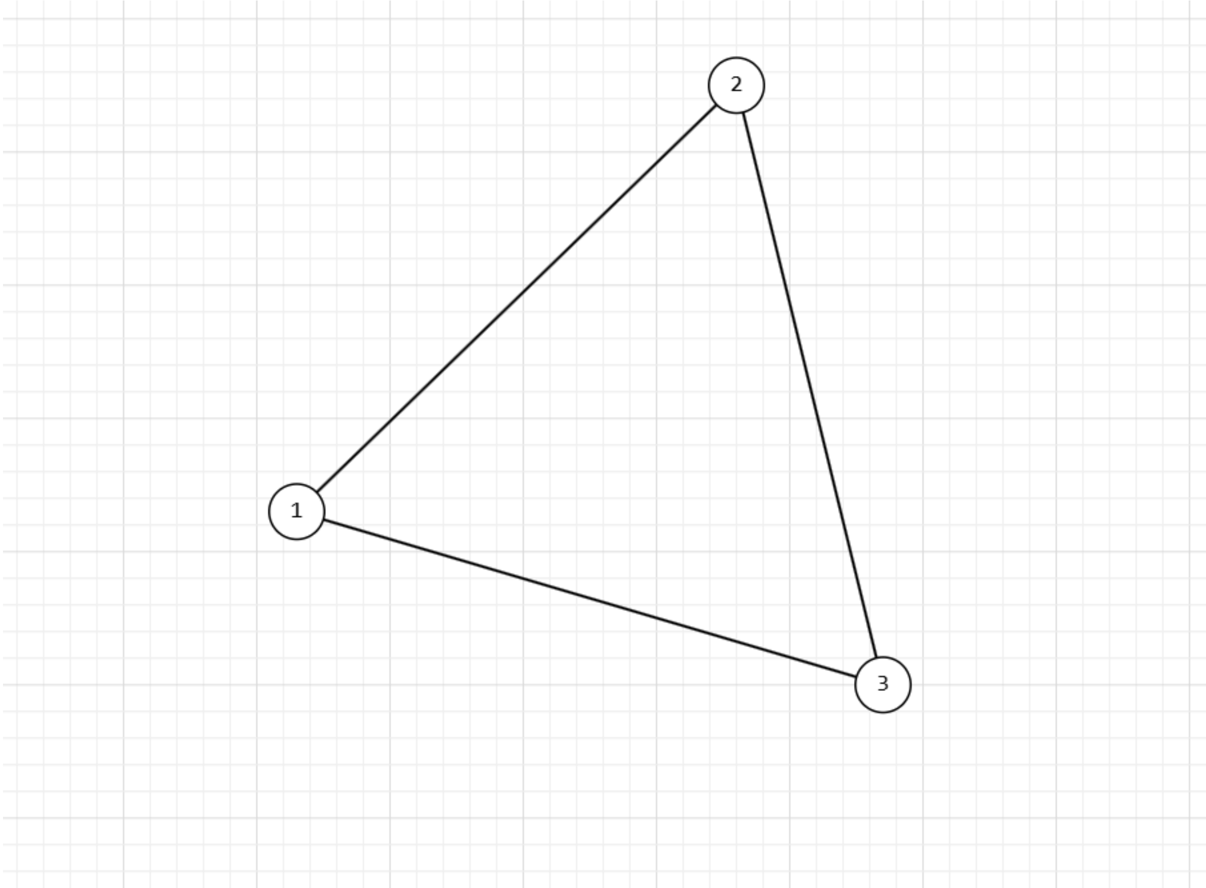
Важно обратить внимание, что граф **СВЯЗНЫЙ**.

Алгоритм будет следующим:

1. Проверим, все ли вершины имеют четную степень
2. Инициализируем стек с вершинами и добавим туда произвольную
3. Пока стек не пуст, берем “верхнюю” вершину. Если у неё нет связей, удаляем её из стека и добавляем в итоговый цикл. Если связи есть, то берем первую смежную вершину, добавляем её в стек и удаляем связь между ней и предыдущей
4. После необходимо проверить, является ли число вершин в получившимся цикле на 1 больше, чем количество вершин в графе

Пример:

Предположим, у нас есть взвешенный орграф:



Пусть первая произвольная вершина будет вершина 2.

1. Проверим степени всех вершин. Среди них все **четные и положительные**. Продолжаем.
2. Добавим вершину “2” в стек.
3. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
4. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “2”.
5. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Да. Первая произвольная смежная вершина “3”. Добавим её в стек и удалим связи между неё и вершиной “2”.
6. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
7. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “3”.
8. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Да. Первая произвольная смежная вершина “1”. Добавим её в стек и удалим связи между неё и вершиной “3”.

9. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
10. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “1”.
11. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Да. Первая произвольная смежная вершина “2”. Добавим её в стек и удалим связи между неё и вершиной “1”.
12. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
13. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “2”.
14. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Нет. Удаляем из стека и записывает в итоговый цикл.
15. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
16. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “1”.
17. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Нет. Удаляем из стека и записывает в итоговый цикл.
18. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
19. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “3”.
20. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Нет. Удаляем из стека и записывает в итоговый цикл.
21. **Проверим стек.** Он не пуст. Продолжаем.
22. **Возьмем верхнюю вершину из стека.** Это вершина “2”.
23. **Проверим, есть ли у неё смежные вершины.** Нет. Удаляем из стека и записывает в итоговый цикл.
24. Проверим, **больше ли на 1 количество элементов цикла и количество вершин в графе**. Да.
25. **Алгоритм завершен.**

Таким образом, получившийся цикл:
2 -> 1 -> 3 -> 2

Сложность алгоритма

N – количество вершин. V – количество ребер.

1. Проверка
   a. Получение степени произвольной вершины занимает $O(1)$
   b. Проверка степеней всех вершин будет требовать N итераций, поэтому сложность $O(N * 1) \sim O(N)$
2. Алгоритм
   a. Стек не будет пуст, пока между вершинами есть связи, т.е. V итераций.
   b. При этом нужно потратить дополнительно N итераций, на проверку вершины, когда связей у неё не осталось.
   c. При этом необходима ещё 1 операция, оценивающая *(уже на тот момент изолированную)* первую, добавленную в стек, вершину.

Таким образом, сложность алгоритма: $O(2N + V + 1)$
Линейная сложность, что является достойным результатом.

4. Практическая реализация

В программе граф представлен как хеш-таблица, в которой ключи - имена графов, а значения - умные указатели на объекты класса Node:

```
class Node {
public:
    using Rib = std::pair<std::shared_ptr<Node>, int>;
    using RibContainer = std::unordered_map<std::shared_ptr<Node>,
int>;

    Node(std::string const & name);
    Node(std::shared_ptr<std::vector<Rib>> nodes, std::string const &
name);

    std::shared_ptr<RibContainer> Nodes();

    void addRib(std::shared_ptr<Node> rib, int weight);

    void rmRib(std::shared_ptr<Node> rib);

    std::string const & getName();

    int ribNumber() const;
private:
    std::shared_ptr<RibContainer> ribs;
    std::string name;
};
```

Такое представление было выбрано, т.к. с ним удобно работать и оно подразумевает использование всей выделенной под него памяти.

Так же, в отличае от прошлых реализаций, в этой объект класса $Node$ хранит смежные вершины в хеш-таблице, для улучшения скорости алгоритма.

Необработанные вершины

Программа предполагает, что вместе с исполняемым файлом пользователь будет хранить файл произвольного расширения, описывающий граф в формате:

A 2 B 1 D 1
B 2 C 1 A 1
C 2 D 1 B 1
D 2 A 1 C 1

Где каждая строка - это имя вершины, количество ребер. Для каждого ребра - имя вершины, в которую ведет ребро, а также вес (цену) этого ребра (не влияет на алгоритм. Можно указать “0”).

После запуска исполняемого файла необходимо указать путь до файла.

5. Область применения

Файл с графом

- Неверный формат файла:
    - В файле содержится неправильный формат
- Количество смежных вершин у произвольной превышает размер типа данных **unsigned int:** больше, чем 4 294 967 294

Во всех остальных случаях программа будет работать корректно

6. Формат входных и выходных данных

На вход программа получает:

1. Название файла с графом в определенном формате:
   “Название вершины” количество ребер “Название вершины”
“Вес ребра”...

Пример:

A 2 B 5 C 9
B 3 A 2 C 3 D 1
C 1 A 9
D 1 C 1
E 0

На выход программа выведет:

1. Эйлеров цикл, если такой существует.
2. Уведомление об отсутствии эйлеровского цикла, если такого не существует.

7. Вывод

В рамках данной лабораторной работы был реализован алгоритм поиска Эйлерова цикла.