Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа №2 по дисциплине

Дискретная математика

Тема: «Графы»

Вариант 5 – Алгоритм Дейкстры

Выполнил студент гр. 5030102/20202 Соколов А.Н.

Руководитель Новиков Ф. А.

«___» _____ 202__ г.

Санкт-Петербург

2024

1. Формулировка задачи и ее формализация

Формулировка задачи

1. Необходимо разработать консольное приложение, реализующее функции поиска выгоднейшего пути по графам.
2. Поддержать возможность вывода числа оценки пути и визуализацию пути.
3. Указать сложность алгоритма и доказать, что она именно такая.
4. Сравнение работы алгоритма на различных допустимых входных данных: на каких графах алгоритм работает лучше, на каких – хуже, на каких – вообще не работает
5. Объяснить почему был выбран тот или иной способ представления графов в программе.

2. Использованные технологии

Язык программирования

- C++ 23

Система сборки

- CMake 3.27
- Ninja 1.12.1

Исходные файлы программы:

https://github.com/azya0/dm2025/tree/master/lab2

3. Описание алгоритма кодировки

Алгоритм Дейкстры — это известный алгоритм для поиска кратчайшего пути в взвешенном орграфе с **неотрицательными весами** ребер. Он назван в честь нидерландского математика Эдсгера Дейкстры, который предложил его в 1956 году. Рассмотрим, как работает этот алгоритм, а также его сложность.

Принцип работы алгоритма

Инициализация:

У нас есть граф с вершинами и весами ребер.
Мы выбираем начальную вершину и устанавливаем для нее расстояние до самой себя равным 0. Для всех остальных вершин расстояния устанавливаем "бесконечностью"*****.
Создаем множество, которое будет хранить все вершины, для которых мы уже нашли кратчайшие пути. Изначально оно пустое.

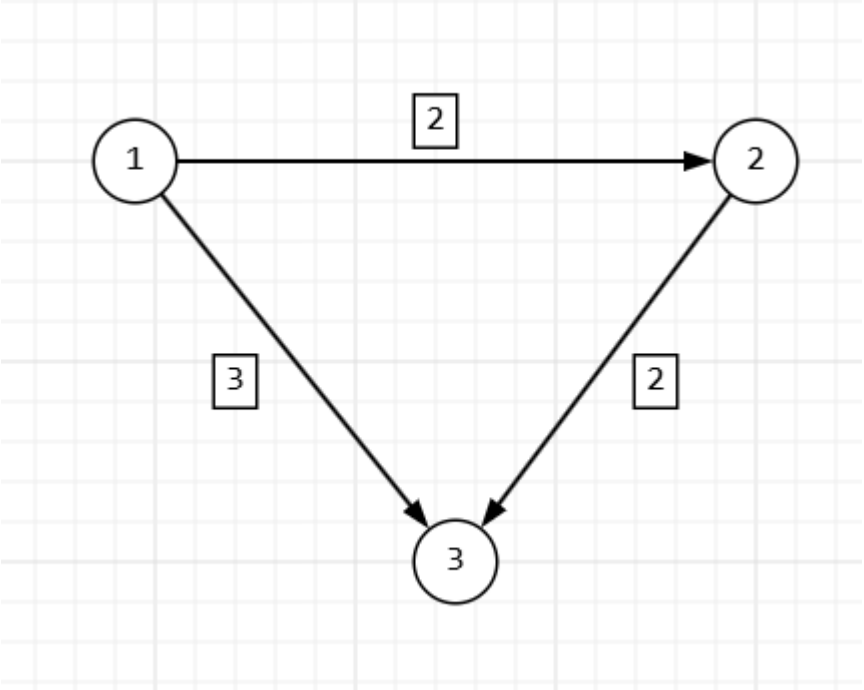
Обработка вершин:

Пока есть не обработанные вершины, выбираем вершину с минимальным расстоянием из начальной. Если расстояние до выбранной вершины "бесконечно"*****, значит, все доступные вершины были обработаны, и алгоритм завершает свою работу.
Для каждой соседней вершины (то есть вершины, которая связана с текущей) проверяем, можно ли улучшить найденное расстояние к ней.

** “бесконечность” - условное обозначение в оригинальном описании алгоритма. В рамках моей работы на практике никакая “бесконечность” или предельные значения типов данных не используются*

Пример:

Предположим, у нас есть взвешенный орграф:



Пусть мы рассматриваем маршруты от вершины “1”

1. Мы сопоставляем вершине “1” число 0, т.к. мы итак изначально находимся в ней, а всем остальным “бесконечность”
2. **Т.к. алгоритм Дейкстры - жадный алгоритм**, то мы выбираем кратчайшее ребро, а именно ребро “1 -> 2” с весом 2
3. **Пройдя по ребру,** мы рассчитываем ценность маршрута: 0 + 2 = 2
4. **Теперь мы сравниваем оценку маршрута “2” с бесконечностью.** Очевидно, что 2 меньше бесконечности, поэтому теперь вершина “2” сопоставлена с числом 2
5. **Снова выбираем наименьшее ребро: “2 -> 3”** с весом 2
6. **Пройдя по ребру,** мы рассчитываем ценность маршрута: 2 + 2 = 4

7. **Теперь мы сравниваем оценку маршрута “2” с бесконечностью (сопоставленную с вершиной “3” в пункте 1).** Очевидно, что 4 меньше бесконечности, поэтому теперь вершина “3” сопоставлена с числом 4
8. **Снова выбираем наименьшее ребро: “1 -> 3”** с весом 3 (последнее)
9. **Пройдя по ребру,** мы рассчитываем ценность маршрута: 0 + 3 = 3
10. **Теперь мы сравниваем оценку маршрута “3” с “4 ”.** Т.к. 3 < 4, то вершине “3” мы сопоставляем число “3”

Таким образом из вершины “1” мы можем добраться кратчайшим маршрутом до вершины “2” за 2 и до “3” за 3

Сложность алгоритма

Сложность алгоритма Дейкстры зависит от использования различных структур данных:

В классической реализации с использованием списка смежности и простого массива:

O(N), где N — количество вершин.

Обновление расстояний для всех соседей занимает

$O(E)$, где E — количество ребер.

Общая сложность:

$O(E * N) \sim O(N^2)$

В моей реализации с использованием односвязного списка-приоритетной очереди и хеш-таблиц:

Если использовать очереди, то выбор минимальной вершины будет занимать

O(1), а если обновлять расстояния —

в среднем: $O(log\ V)$

$O(E\ log\ V) \sim O(n\ log\ n)$

Почему такая сложность?

Основная причина такой сложности заключается в том, что алгоритм обходит каждую вершину и каждое ребро графа, чтобы гарантировать, что все кратчайшие пути найдены.

возникает из-за необходимости искать минимальную вершину среди всех непроверенных, что делает его неэффективным для больших графов.

С переходом на более эффективные структуры данных (например, кучи или приоритетные очереди) значительно улучшается время работы, так как выбор минимального расстояния и обновление расстояний происходит быстрее.

Заключение

Алгоритм Дейкстры — один из основных алгоритмов теории графов, который иллюстрирует принципы жадных алгоритмов и хорошо подходит для решения задач минимизации.

4. Практическая реализация

В программе граф представлен как хеш-таблица, в которой ключи - имена графов, а значения - умные указатели на объекты класса Node:

```
class Node {
public:
    using Rib = std::pair<std::shared_ptr<Node>, int>;

    Node(std::string const & name);
    Node(std::shared_ptr<std::vector<Rib>> nodes, std::string const &
name);

    std::shared_ptr<std::vector<Rib>> Nodes();

    void addRib(std::shared_ptr<Node> rib, int weight);

    std::vector<Node::Rib> getRibs();

    std::string const & getName();
private:
    std::vector<Node::Rib> ribs;
    std::string name;
};
```

Такое представление было выбрано, т.к. с ним удобно работать и оно подразумевает использование всей выделенной под него памяти. Например, если бы я представлял граф как матрицу, то часть значений были бы однотипной записью по типу “-1”, которое расходует память в пустую. Также алгоритм визуализации матричного представления не подразумевает использования матричного вывода, т.к. пользователю (или разработчику при отладке) пришлось бы тратить дополнительное время и дополнительные силы на расшифровку.

Отличием от стандартного алгоритма Дейкстры заключается в его частичной оптимизации:

- Использование хеш-таблиц
- Использование односвязных списков (очередей)

```
// OWL вместо стека для удобной
// сортировки для нахождения
// минимального элемента
// для оптимизации жадного
// алгоритма
typedef struct OWL {
    std::shared_ptr<OWL> next;
    std::shared_ptr<Pair> value;
} OneWayList;

std::unordered_map<
    std::shared_ptr<Node>,
    std::shared_ptr<Pair>
> ways;
```

После запуска программы необходимо указать название файла, содержащего граф в формате:

A 2 B 5 C 9
B 3 A 2 C 3 D 1
C 1 A 9
D 1 C 1
E 0

И ввести в консоль название вершины, из которой мы будем искать оптимальные маршруты

5. Область применения

Файл с графом

- Неверный формат файла:
    - В файле содержится неправильный формат
- Отрицательные веса в файле:
    - Алгоритм Дейкстра не работает с отрицательными весами

Ввод названия исходной вершины:

- Ввод несуществующей вершины

Работа программы

- Оценка маршрута превышает размер типа данных **unsigned int:** больше, чем 4 294 967 294

Во всех остальных случаях программа будет работать корректно

6. Формат входных и выходных данных

На вход программа получает:

1. Название файла с графом в определенном формате:
   “Название вершины” количество ребер “Название вершины” “Вес ребра”...

Пример:

A 2 B 5 C 9
B 3 A 2 C 3 D 1
C 1 A 9
D 1 C 1
E 0

2. Исходную вершину

В качестве вывода программа выведет все возможные маршруты с оценкой или сообщит, что такой маршрут невозможен:

Пример:

no way A -> E
A -> B : 5 A -> B
A -> D : 6 A -> B -> D
A -> C : 7 A -> B -> D -> C
A -> A : 0 A

7. Сравнение работы алгоритма на различных допустимых входных данных

Алгоритм Дейкстры оптимален в определенных ситуациях, но его производительность и корректность зависят от типа графа, с которым он работает. Давайте рассмотрим различные типы графов и как алгоритм Дейкстры себя ведет на каждом из них:

Графы с неотрицательными весами

Как работают: На графах с неотрицательными весами алгоритм Дейкстры работает очень эффективно и корректно. Он способен находить кратчайшие пути от одной стартовой вершины ко всем остальным.

Графы с отрицательными весами

Как работают: На графах с отрицательными весами алгоритм Дейкстры не может гарантировать правильность. Он может завершить работу, не найдя реальный кратчайший путь или не завершить работу вовсе.

Сложные графы (редкие и густые)

Редкие графы: Для графов с маленьким количеством ребер по сравнению с количеством вершин (например, с графами с предельной связностью, такими как деревья), алгоритм Дейкстры будет эффективным, поскольку количество операций по обновлению расстояний будет меньше.

Густые графы: В графах с большим количеством ребер (вдобавок к количеству вершин) эффективность уменьшается из-за увеличения времени, затрачиваемого на обработку ребер. Но алгоритм все равно будет работать корректно, его производительность просто будет ниже.

Ациклические графы (DAGs)

Как работают: На ациклических направленных графах алгоритм Дейкстры будет работать корректно и эффективно. Поскольку в DAG нет циклов, алгоритм будет проходить по каждой вершине только один раз, что делает его эффективным.

Полные графы

Как работают: В полных графах каждая пара вершин соединена ребром. Дейкстра будет работать достаточно эффективно, хотя при большом количестве вершин общее количество ребер будет расти, что влияет на оперативность выполнения.

8. Вывод

В рамках данной лабораторной работы был реализован алгоритм поиска оптимального пути по графу Дейкстра.