Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и информатики

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

**Лабораторная работа №2 по дисциплине**

**Дискретная математика**

Тема: «Графы»

Вариант 5 – Алгоритм Дейкстры

Выполнил студент гр. 5030102/20202 Соколов А.Н.

Руководитель Новиков Ф. А.

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 202\_\_ г.

Санкт-Петербург

2024

[**1. Формулировка задачи и ее формализация 3**](#_vqhghplsiin6)

[**2. Использованные технологии 4**](#_3r4er2ug7k4a)

[**Исходные файлы программы: 4**](#_glx8wuwr1qno)

[**3. Описание алгоритма кодировки 5**](#_e5v1ckgsrcxy)

[**4. Практическая реализация 10**](#_m4a4sppzz34e)

[**6. Формат входных и выходных данных 13**](#_ab3k6bdh4p0t)

[**7. Сравнение работы алгоритма на различных допустимых входных данных 14**](#_sebran1fxyek)

[**8. Вывод 16**](#_ncbthyhj6bu9)

# **1. Формулировка задачи и ее формализация**

**Формулировка задачи**

1. Необходимо разработать консольное приложение, реализующее функции поиска выгоднейшего пути по графам.
2. Поддержать возможность вывода числа оценки пути и визуализацию пути.
3. Указать сложность алгоритма и доказать, что она именно такая.
4. Сравнение работы алгоритма на различных допустимых входных данных: на каких графах алгоритм работает лучше, на каких – хуже, на каких – вообще не работает
5. Объяснить почему был выбран тот или иной способ представления графов в программе.

# **2. Использованные технологии**

**Язык программирования**

* C++ 23

**Система сборки**

* CMake 3.27
* Ninja 1.12.1

# **Исходные файлы программы:**

https://github.com/azya0/dm2025/tree/master/lab2

# **3. Описание алгоритма кодировки**

**Алгоритм Дейкстры** — это известный алгоритм для поиска кратчайшего пути в взвешенном орграфе с **неотрицательными весами** ребер. Он назван в честь нидерландского математика Эдсгера Дейкстры, который предложил его в 1956 году. Рассмотрим, как работает этот алгоритм, а также его сложность.

**Принцип работы алгоритма**

**Инициализация**:

У нас есть граф с вершинами и весами ребер.

Мы выбираем начальную вершину и устанавливаем для нее расстояние до самой себя равным 0. Для всех остальных вершин расстояния устанавливаем "бесконечностью"**\***.

Создаем множество, которое будет хранить все вершины, для которых мы уже нашли кратчайшие пути. Изначально оно содержит одну вершину (исходную).

**Обработка вершин:**

Пока есть необработанные вершины, выбираем вершину с минимальным расстоянием из начальной. Если расстояние до выбранной вершины "бесконечно"**\***, значит, все доступные вершины были обработаны, и алгоритм завершает свою работу.

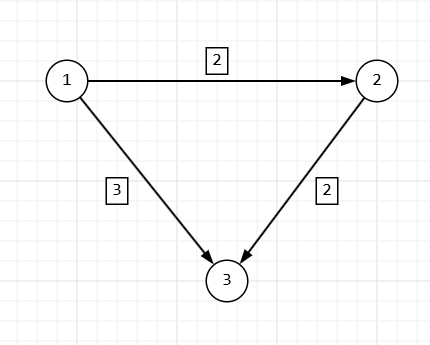
Для каждой соседней вершины (то есть вершины, которая связана с текущей) проверяем, можно ли улучшить найденное расстояние к ней.

**Алгоритм Дейкстры рационально применять в задачах оптимизации маршрутов и логистики задачах**. Например: Навигационные системы, Игры (стратегии), Планировка и логистика, Веб-приложениях, Сетей доставок и т.д.

*\* “бесконечность” - условное обозначение в оригинальном описании алгоритма. В рамках моей работы на практике никакая “бесконечность” или предельные значения типов данных не используются.*

**Пример:**

Предположим, у нас есть взвешенный орграф:



**Пусть мы рассматриваем маршруты от вершины “1”**

1. Мы сопоставляем вершине “1” число 0, т.к. мы итак изначально находимся в ней, а всем остальным “бесконечность”
2. **Рассматриваем все ребра из “1”**: “1 -> 2”, “1 -> 3”
3. **Т.к. алгоритм Дейкстры - жадный алгоритм**, то мы выбираем кратчайшее ребро, а именно ребро “1 -> 2” с весом 2
4. **Пройдя по ребру,** мы рассчитываем ценность маршрута: 0 + 2 = 2
5. **Теперь мы сравниваем вес ребра “1 - > 2” с бесконечностью.** Очевидно, что 2 меньше бесконечности, поэтому теперь вершина “2” сопоставлена с числом 2
6. **Теперь рассмотрим ребро “1 -> 3”.**
7. **Пройдя по ребру,** мы рассчитываем ценность маршрута: 0 + 3 = 3
8. **Сравним.** Очевидно, что 3 меньше бесконечности. Поэтому оценку пути из “1” в “3” устанавливаем на 3.
9. **Выбираем наименьшее ребро: “2 -> 3”** с весом 2
10. **Пройдя по ребру,** мы рассчитываем ценность маршрута: 2 + 2 = 4
11. **Оценим.** 4 > 3, поэтому обновлять цену маршрута из “1” в “3” не будем
12. **Рассмотрим ребра из “3”**. Их нет.
13. **Алгоритм завершен.**

**Таким образом из вершины “1” мы можем добраться кратчайшим маршрутом до вершины “2” за 2 и до “3” за 3**

**Сложность алгоритма**

Сложность алгоритма Дейкстры зависит от использования различных структур данных:

**В классической реализации** с использованием списка смежности и простого массива:

𝑂(N), где N — количество вершин.

Обновление расстояний для всех соседей занимает

𝑂(𝐸), где 𝐸 — количество ребер.

Общая сложность:

**В моей реализации** предполагается, что вершин будет больше, чем ребер (), поэтому используются односвязные списки, стек и хеш-таблица:

В алгоритме используется цикл, который продолжает выполняться, пока есть не обработанные узлы.

На практике, в исходной версии алгоритма добавление в конец динамического массива происходит за , а поиск минимального элемента происходит за . В моей реализации поиск минимального элемента упорядоченного односвязного списка происходит за , а добавление элемента за

*Стоит отметить, что изначально поиск минимального элемента гарантированно проверит все элементов массива, а добавление элемента в упорядоченную очередь будет искать элемент больше себя, который может быть не последним*

**Таким образом сложность моего алгоритма составляет:**

**Вывод: на густых графах он неэффективен.**

**Почему такая сложность?**

Основная причина такой сложности заключается в том, что алгоритм обходит каждую вершину и каждое ребро графа, чтобы гарантировать, что все кратчайшие пути найдены.

возникает из-за необходимости искать минимальную вершину среди всех непроверенных, что делает его неэффективным для больших графов.

С переходом на более эффективные структуры данных (например приоритетные очереди) значительно улучшается время работы, так как выбор минимального расстояния и обновление расстояний происходит быстрее.

# **4. Практическая реализация**

**В программе граф представлен как хеш-таблица, в которой ключи - имена графов, а значения - умные указатели на объекты класса Node:**

class Node {

public:

using Rib = std::pair<std::shared\_ptr<Node>, int>;

Node(std::string const & name);

Node(std::shared\_ptr<std::vector<Rib>> nodes, std::string const & name);

std::shared\_ptr<std::vector<Rib>> Nodes();

void addRib(std::shared\_ptr<Node> rib, int weight);

std::vector<Node::Rib> getRibs();

std::string const & getName();

private:

std::vector<Node::Rib> ribs;

std::string name;

};

**Такое представление было выбрано**, т.к. с ним удобно работать и оно подразумевает использование всей выделенной под него памяти. Например, если бы я представлял граф как матрицу, то часть значений были бы однотипной записью по типу “-1”, которое расходует память в пустую и требует сложность вывода в консоль.

Отличием от стандартного алгоритма Дейкстры заключается в его частичной оптимизации:

* Использование хеш-таблиц
* Использование односвязных списков (очередей)

// OWL вместо стека для удобной

// сортировки для нахождения

// минимального элемента

// для оптимизации жадного

// алгоритма

typedef struct OWL {

std::shared\_ptr<OWL> next;

std::shared\_ptr<Pair> value;

} OneWayList;

std::unordered\_map<

std::shared\_ptr<Node>,

std::shared\_ptr<Pair>

> ways;

**Необработанные вершины**

Программа предполагает, что вместе с исполняемым файлом пользователь будет хранить файл произвольного расширения, описывающий граф в формате:

A 2 B 5 C 9

B 3 A 2 C 3 D 1

C 1 A 9

D 1 C 1

E 0

Где каждая строка - это имя вершины, количество ребер. Для каждого ребра - имя вершины, в которую ведет ребро, а также вес (цену) этого ребра.

**После запуска исполняемого файла необходимо указать путь до файла.**

**5. Область применения**

**Файл с графом**

* Неверный формат файла:
  + В файле содержится неправильный формат
* Отрицательные веса в файле:
  + Алгоритм Дейкстра не работает с отрицательными весами

**Ввод названия исходной вершины**:

* Ввод несуществующей вершины

**Работа программы**

* Оценка маршрута превышает размер типа данных **unsigned int:** больше, чем 4 294 967 294

Во всех остальных случаях программа будет работать корректно

# **6. Формат входных и выходных данных**

На вход программа получает:

1. Название файла с графом в определенном формате:

“Название вершины” количество ребер “Название вершины” “Вес ребра”...

Пример:

A 2 B 5 C 9

B 3 A 2 C 3 D 1

C 1 A 9

D 1 C 1

E 0

1. Исходную вершину

В качестве вывода программа выведет все возможные маршруты с оценкой или сообщит, что такой маршрут невозможен:

Пример:

no way A -> E

A -> B : 5 A -> B

A -> D : 6 A -> B -> D

A -> C : 7 A -> B -> D -> C

A -> A : 0 A

# 

# **7. Сравнение работы алгоритма на различных допустимых входных данных**

# Алгоритм Дейкстры оптимален в определенных ситуациях, но его производительность и корректность зависят от типа графа, с которым он работает. Давайте рассмотрим различные типы графов и как алгоритм Дейкстры себя ведет на каждом из них:

# 

# **Графы с неотрицательными весами**

# Как работают: На графах с неотрицательными весами алгоритм Дейкстры работает очень эффективно и корректно. Он способен находить кратчайшие пути от одной стартовой вершины ко всем остальным.

# **Графы с отрицательными весами**

# Как работают: На графах с отрицательными весами алгоритм Дейкстры не может гарантировать правильность. Он может завершить работу, не найдя реальный кратчайший путь или не завершить работу вовсе.

# **Сложные графы (редкие и густые)**

# **Редкие графы**: Для графов с маленьким количеством ребер по сравнению с количеством вершин (например, с графами с предельной связностью, такими как деревья), алгоритм Дейкстры будет эффективным, поскольку количество операций по обновлению расстояний будет меньше.

# **Густые графы**: В графах с большим количеством ребер (вдобавок к количеству вершин) эффективность уменьшается из-за увеличения времени, затрачиваемого на обработку ребер. Но алгоритм все равно будет работать корректно, его производительность просто будет ниже.

# **Ациклические графы (DAGs)**

# Как работают: На ациклических направленных графах алгоритм Дейкстры будет работать корректно и эффективно. Поскольку в DAG нет циклов, алгоритм будет проходить по каждой вершине только один раз, что делает его эффективным.

# **Полные графы**

# Как работают: В полных графах каждая пара вершин соединена ребром. Алгоритм Дейкстра будет работать достаточно эффективно, хотя при большом количестве вершин общее количество ребер будет расти, что влияет на оперативность выполнения.

# **Разреженные графы**

# Как работают: В разреженных графах количество ребер много меньше, чем количество вершин в квадрате. Алгоритм Дейкстра будет работать с лучшей скоростью. (Причины описаны в обосновании времени работы алгоритма)

# 

# **8. Вывод**

В рамках данной лабораторной работы был реализован алгоритм поиска оптимального пути по графу Дейкстра.