Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчет лабораторной работы №1
по дисциплине "**Интервальный анализ**"

Выполнил студент группы 5030102/20202

Соколов А.Н.

Проверил Преподаватель

Баженов А.Н.

Санкт-Петербург
2025

1. Постановка задачи

Дана ИСЛАУ:

$Ax = b,\ x = (x_1, x_2, x_3)$

с матрицей:

$mid\,A =$

0.95	1.00
1.05	1.00
1.10	1.00

Пусть матрица радиусов для A имеет вид:

$rad\,A = \delta\ *$

1.00	1.00
1.00	1.00
1.00	1.00

или

$rad\,A = \delta\ *$

1.00	0.00
1.00	0.00
1.00	0.00

1. Найти диапазон значений δ, при который $0 \in det\,A$
2. Для минимального значения радиуса матричных элементов $min\,\delta$ найти точечную матрицу A': $det\,A' = 0$
3. Обсудить факт $det\,A' = 0$ для случая задачи 2-ракурсной томографии и линейной регрессии

2. Теория

Интервальной матрицей A размера $m \times n$ называется матрица, элементами которой являются интервалы вещественных чисел:

$$A = (\,...,[a_{ij}, b_{ij}],\, ...\,),\ i = 1...m,\ j = 1...n$$

Матрицей средних значений $mid\ A$ интервальной матрицы A называется точечная матрица того же размера, элементы которой вычисляются как средние арифметические соответствующих интервалов:

$$mid\ A = (...,\ \frac{a_{ij} + b_{il}}{2},\ ...\ ),\ i = 1...m,\ j = 1...n$$

Матрицей радиусов $rad\ A$ интервальной матрицы A называется точечная матрица того же размера, элементы которой вычисляются как полуширины соответствующих интервалов:

$$rad\ A = (...,\ \frac{b_{ij} - a_{il}}{2},\ ...\ ),\ i = 1...m,\ j = 1...n$$

Матрица A называется особенной (сингулярной), если её определитель равен нулю:

$$det(A) = 0$$

Для квадратной матрицы это означает, что строки или столбцы линейно зависимы. Для прямоугольной матрицы особенность определяется линейной зависимостью столбцов:

$$c_1,\ c_2 \text{ коллинеарны } \Leftrightarrow \exists\, \lambda : c_1 = \lambda c_2$$

Матрица A′ считается вырожденной, если ее две колонки линейно зависимы, то есть существует коэффициент λ такой, что:

$$a_i \approx \lambda b_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$$

где a_i и b_i — элементы первой и второй колонок соответственно. Этот коэффициент λ определяется как для каждого ряда через интервалы:

$$\lambda_i \in \left[\frac{a_{min}^{(i)}}{b_{max}^{(i)}}, \frac{a_{max}^{(i)}}{b_{min}^{(i)}}\right]$$

Пересечение этих интервалов для всех строк дает общий диапазон λ, в котором колонки могут быть коллинеарны.

3. Программная реализация

Интерпретатор: Python 3.13.8
Зависимости: requirements.txt (пакетный менеджер pip)

4. Результаты

1. ТОМО (2-ракурсная томография): оба элемента строки варьируются $\pm\ \delta$
$\delta_{min} = 0.037 : 0 \in det(A)$
$A' =$

0.987	0.963
1.038	1.013
1.063	1.037

```
delta=0.037042, _lambda=1.024990
[[0.98703208 0.96296767]
 [1.03795776 1.01265175]
 [1.06295776 1.03704224]]
```

Рис. 1 результаты функции **delta_star** для входных данных и параметра *is_tomo=True*

2. Регрессия (линейная): второй элемент строки фиксирован
$\delta_{min} = 0.075 : 0 \in det(A)$
$A' =$

1.025	1.000
1.025	1.000
1.025	1.000

```
delta=0.075006, _lambda=1.024994
[[1.0249939 1.        ]
 [1.0249939 1.        ]
 [1.0249939 1.        ]]
```

Рис. 2 результаты функции **delta_star** для входных данных и параметра *is_tomo=False*

5. Анализ

$det(A') = 0$ для обеих задач указывает на критический уровень неопределенности δ, при котором система становится вырожденной.

В томографии это значит, что система может иметь бесконечное множество решений, что приводит к нестабильной реконструкции.

В линейной регрессии вырожденность матрицы делает невозможным использование метода наименьших квадратов без регуляризации.

Таким образом $det(A') = 0$ - индикатор, показывающий корректность и устойчивость решения задачи.

6. Исходное приложение

[interval_analysis/lab1 at main · azya0/interval_analysis](https://github.com/azya0/interval_analysis/tree/main/lab1)

или

https://github.com/azya0/interval_analysis/tree/main/lab1