Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Отчет лабораторной работы №2
по дисциплине “**Интервальный анализ**”

Выполнил студент группы 5030102/20202

Соколов А.Н.

Проверил Преподаватель

Баженов А.Н.

Санкт-Петербург
2025

1. Постановка задачи

Для каждой из двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервале X = [a,b] необходимо:

A. Аналитически или численно найти область значений $ran(f,\ X)$, построить график Функции на заданном интервале.
B. Вычислить интервальные оценки области значений, используя:
B.1. Естественное интервальное расширение исходного выражения функции.
B.2. Естественное интервальное расширение эквивалентного выражения функции, полученного с помощью схемы Горнера или иного алгебраического преобразования.
B.3. Дифференциальную центрированную форму с центром в разных точках интервала.
B.4. Наклонную центрированную форму с центром в разных точках интервала.
B.5. Бицентрированную форму.
C. Длякаждойполученнойинтервальнойоценкивычислитьвеличину $dist(F(X),\ ran(f,\ X))$ – расстояние по Хаусдорфу до точной области значений. Проанализировать точность естественного интервального расширения:
C.1. Найти (аналитически или численно) константу Липшица L для функции f на интервале X. Обосновать свой выбор.
C.2. Используя следствие из теоремы о непрерывности по Липшицу, получить теоретическую оценку погрешности:

$$rad(F(X))\ \leq\ L\ *\ rad(X)$$

C.3. Сравнить реальную погрешность (полуширину полученного интервала $rad(F(X))$ с теоретической оценкой из пункта (б). Сделать выводы.
D. Сравнить и проанализировать результаты, объяснив наблюдаемую точность или неточность каждого метода

2. Теория

$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $X_1 = [0, 3]$

$f_2(x) = e^x - 2x - 1$, $X_2 = [-1, 2]$

Обоснование выбора отрезка для $f_1(x)$:

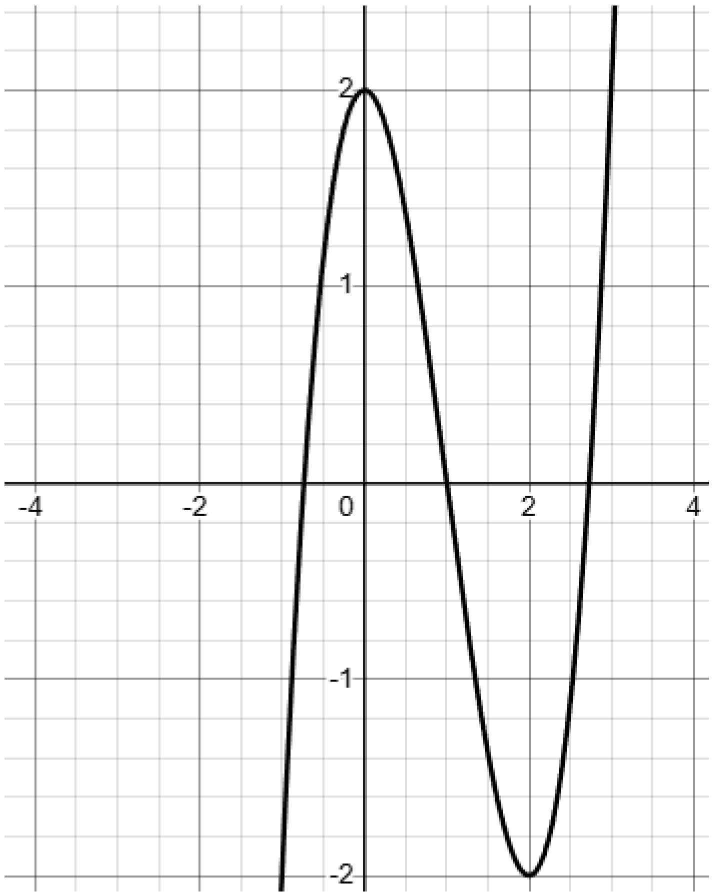

Рис. 1 График функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'_1(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Критические точки $f_1(x)$ - это 0 и 2. Обе принадлежат отрезку $[0, 3]$.

$f''_1(x) = 6x - 6$. Точка перегиба функции $f_1(x)$ - это 1, она принадлежит заданному отрезку [0, 3].

Таким образом $\mathrm{ran}(f_1,\ [0,\ 3]) = [-2,\ 2]$.

Обоснование выбора отрезка для $f_2(x)$:

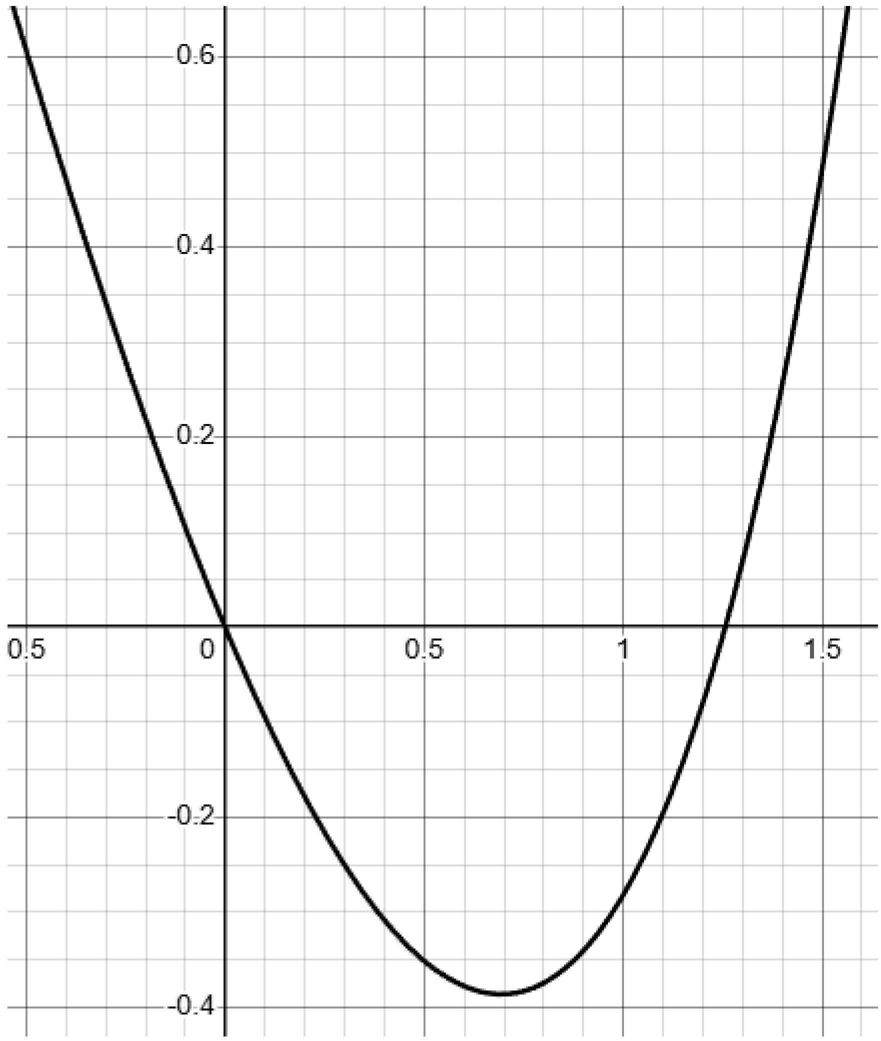

Рис. 2 График функции $y = e^x - 2x - 1$

У функции $f_2(x)$ существует лишь одна критическая точка, которую можно найти путем решения уравнения $f'_2(x) = e^x - 2 = 0$. Этой точкой является $ln2 \approx 0.693$. Решая уравнение $f''_2(x) = e^x = 0$, обнаружим, что у функции нет точек перегиба.

Таким образом $\mathrm{ran}(f_2,\ [-1,\ 2]) = [-0.386,\ 2.389]$.

Естественное интервальное расширение (natural interval extension) - это метод, при котором каждая переменная x в выражении заменяется интервалом $X = [a, b]$, а все арифметические операции выполняются в интервальной арифметике.

Для f_1:

$f_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2 = [0, 3]^3 - 3[0, 3]^2 + 2 = [0, 27] -$
$- 3[0, 9] + 2 = [- 25, 29].$

Полученная оценка: $F_{nat}(X) = $ [-25, 29]

Для f_2:

$f_2(X) = e^x - 2x - 1 = [e^{-1}, e^2] - 2[- 1, 2] - 1 =$
$= [e^{-1} - 5, e^2 + 1]$

Полученная оценка $F_{nat}(X) = [e^{-1} - 5, e^2 + 1]$

Схема Горнера позволяет представить многочлен в виде, который уменьшает количество повторяющихся переменных, тем самым снижая эффект зависимости (dependency effect).

Для $f_1(x) = (x - 3)x^2 + 2 = ([0, 3] - 3)[0, 3]^2 + 2 =$
$= [- 3, 0] * [0, 9] + 2 = [- 25, 2]$

Полученная оценка: $F_{Horner}(X) = [- 25, 2]$

Для f_2:

$f_2(x) = e^x - 2(x - 1/2) = [e^{-1}, e^2] - 2([- 1, 2] - 1/2) =$

$= [e^{-1}, e^{2}] - 2([-1.5, 1.5]) = [e^{-1}, e^{2}] - [-3, 3] =$
$= [e^{-1} - 3, e^{2} + 3]$

Полученная оценка: $F_{Horner}(X) = [e^{-1} - 3, e^{2} + 3]$

Дифференциальная центрированная форма (DCF) использует разложение функции в ряд Тейлора первого порядка.
$f(X) = f(c) + f'(X)(X - c)$, где c - центр интервала X.

Для f_1: Пусть с = 1.5, $f_1(1.5) = -1.375$

$f'_1(x) = 3x^2 - 6x$

На интервале $[0, 3]$ функция $f'(x)$ имеет минимум в точке x = 1 (потому что $f''(x) = 6x - 6$ и $6x - 6 = 0$ при $x = 1$) и максимум в точке x = 3.

$f'_1(1) = 3 * 1^2 - 6 * 1 =- 3$, $f'_1(3) = 3 * 3^2 - 6 * 3 = 9$, откуда $f'_1(X) = [-3, 9]$.

$f_1(X) = -1.375 + [-3, 9] * [1.5, 1.5] =$
$= [-14.875, 12.125]$

Получена оценка $F_{DCF}(X) = [-14.875, 12.125]$

Для f_2: Пусть с = 0.5, $f_2(0.5) = 1.648$

$f'_2(x) = e^x - 2$

$f_2'(-1) = e^{-1} - 2 \approx 0.367879 - 2 = -1.632121$
$f_2'(2) = e^{2} - 2 \approx 7.389056 - 2 = 5.389056$

Следовательно, интервал значений производной:
$f_2'(X) = [-1.632121, 5.389056]$

$X - c = [-1, 2] - 0.5 = [-1.5, 1.5]$

$f_2(X) \approx f_2(c) + f_2'(X) * (X - c)$
$f_2(X) \approx -0.351279 + ([-1.632121, 5.389056] * [-1.5, 1.5])$

Минимум: min(2.4481815, -2.4481815, -8.083584, 8.083584) = -8.083584
Максимум: max(2.4481815, -2.4481815, -8.083584, 8.083584) = 8.083584

$f_2(X) \approx -0.351279 + [-8.083584, 8.083584]$
Нижняя граница: -0.351279 + (-8.083584) = -8.434863
Верхняя граница: -0.351279 + 8.083584 = 7.732305

Получена оценка $F_{DCF}(X) = [-8.434863, 7.732305]$

Наклонная центрированная форма (SCF) использует понятие наклонной функции (slope function) s(x,y), которая представляет собой интервал, содержащий все частные производные в интервале [x,y].

$f(X) = f(c) + S(X, c)(X - c)$, где $S(X, c)$ - интервальная оценка наклонной функции.

$S(X, c) = \frac{f(X) - f(c)}{X - c}$

Для f_1: Пусть c = 1.5, $f_1(1.5) = -1.375$

$S_1(x, c) = x^2 - 1.5x - 2.25$

На интервале [0, 3], $S_1(x)$ имеет точку минимум в точке x = 0.75 и максимум в точке x = 3:

$S_1(0.75) = 0.75^2 - 1.5 * 0.75 - 2.25 = - 2.8125$

$S_1(3) = 3^2 - 1.5 * 3 - 2.25 = 2.25$

$S_1(X, c) = [- 2.8125, 2.25]$

$f_1(X) = - 1.375 + [- 2.8125, 2.25] * [- 1.5, 1.5] = [- 5.594, 2.844]$

Получена оценка: $F_{SCF}(X) = [- 5.594, 2.844]$

Для f_2: выберем c = 0.5

$f_2(c) = f_2(0.5) = e^{0.5} - 2 * 0.5 - 1$

$e^{0.5} \approx 1.648721$

$f_2(0.5) = 1.648721 - 1 - 1 = - 0.351279$

$S(x, c) = [(e^x - 2x - 1) - (e^c - 2c - 1)] / (x - c)$

$= (e^x - e^c)/(x - c) - 2$

$S(x, 0.5) = (e^x - e^{0.5})/(x - 0.5) - 2$

$S(x, 0.5) = e^{0.5} * (e^{x-0.5} - 1)/(x - 0.5) - 2$

$= e^{0.5} * g(x - 0.5) - 2$

$S(- 1, 0.5) = (e^{-1} - e^{0.5})/(- 1 - 0.5) - 2$

$= 0.853895 - 2 = - 1.146105$

$S(2, 0.5) = (e^2 - e^{0.5})/(2 - 0.5) - 2$

$= 3.826890 - 2 = 1.826890$

$S(X, c) = [- 1.146105, 1.826890]$

$X - c = [-1, 2] - 0.5 = [-1.5, 1.5]$
$min(1.7191575, -1.7191575, -2.740335, 2.740335) = -2.740335$
$max(1.7191575, -1.7191575, -2.740335, 2.740335) = 2.740335$

Таким образом, произведение интервалов равно: $[-2.740335, 2.740335]$

$f_2(X) \approx -0.351279 + [-2.740335, 2.740335]$
Нижняя граница: $-0.351279 + (-2.740335) = -3.091614$
Верхняя граница: $-0.351279 + 2.740335 = 2.389056$

$F_{SCF}(X) = [-3.091614, 2.389056]$

Бицентрированная среднезначная форма определяется как пересечение двух дифференциальных (среднезначных) центрированных форм, взятых в специально подобран ных центрах c_* и c^*:

$$f_{bic}(X) = f_{mv}(X, c_*) \cap f_{mv}(X, c^*)$$

$$p_i = cut(\frac{mid\, f'_i(X)}{rad\, f'_i(X)}, [-1, 1])$$

Рассматриваются два варианта бицентрирования:

BCF_{mv} и BCF_{sl} - пересечение двух fmv-форм и двух наклонных форм соответственно.

Для $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $X = [0, 3]$:

- Производная: $f'_1(x) = 3x^2 - 6x$. По отрезку X имеем:

$f'_1(X) = [-3, 9]$, $mid\, f'_1(X) = 3$, $rad\, f'_1(X) = 6$

Поэтому

$p = cut(\frac{3}{6}, [-1, 1]) = 0.5$

Середина и радиус аргумента: $mid\,X = 1.5, radX = 1.5$. Отсюда

$c_* = 1.5 - 0.5 * 1.5 = 0.75$

$c^* = 1.5 + 0.5 * 1.5 = 2.25$

- f_{mv}-оценки ($f_{mv}(X, c) = f(c) + f'(X) * (X - c)$):

$f_{mv}(X, c_*) \approx [-6.01, 20.98]$,

$f_{mv}(X, c^*) \approx [-22.04, 4.95]$

Пересечение даёт

$F^{mv}_{BCF}(X) \approx [-6.01, 4.95]$ полуширина $rad \approx 5.48$

- Наклонные формы в тех же центрах (BCF_{sl}): вычисляя наклоны $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ на X относительно каждого центра, получаем интервалы

$f_{sl}(X, c_*) \approx [-5.91, 2.95]$,

$f_{sl}(X, c^*) \approx [-13.18, 2.31]$

их пересечение

$F^{sl}_{BCF}(X) \approx [-5.91, 2.31]$ полуширина $rad \approx 4.11$

Для $f_2(x)$:

$F^{mv}_{BCF}(X) \approx [-3.41, 3.83]$

$$F^{sl}_{BCF}(X) \approx [-3.03,\ 2.38]$$

Константа Липшица L — максимум модуля производной на интервале:

Для f_1:

$$L_1 = max|f'_1(x)| = 9$$

Для f_2:

$$L_2 = max|f'_2(x)| = 5.38$$

Полуширина интервала:

$$rad(A) = \frac{upper(A) - lower(A)}{2}$$
$$rad(F(X)) \le L * rad(X)$$

Для f_1:

$$rad(F(X)) \le 13.5$$

Для f_2:

$$rad(F(X)) \le 8.08$$

3. Программная реализация

Интерпретатор: Python 3.13.8
Зависимости: requirements.txt (пакетный менеджер pip)

4. Результаты

=== f1(x) = x^3 - 3x^2 + 2 ===

	Метод	Интервал	rad_est	rad_true	Хаусдорф dist	Bound Липшица
0	Естественное	[-25, 29]	27.000000	2.0	27.000000	13.5
1	Горнер (B.2)	[-25, 2]	13.500000	2.0	23.000000	13.5
2	Дифф. центр (best)	[-14.875, 12.125]	13.500000	2.0	12.875000	13.5
3	Наклонная центр (best)	[-5.593749991560812, 2.843749991560812]	4.218750	2.0	3.593750	13.5
4	Бицентрированная MV	[-6.015625, 4.953125]	5.484375	2.0	4.015625	13.5
5	Бицентрированная SCF	[-5.910156221517742, 2.316406246835305]	4.113281	2.0	3.910156	13.5

Рис. 3 Таблица результатов работы программы для f_1

=== f2(x) = x^5 -5x + sin(x) ===

	Метод	Интервал	rad_est	rad_true	Хаусдорф dist	Bound Липшица
0	Естественное	[-11.841470984807897, 37.99999997451707]	24.920735	1.387675	35.610944	8.083584
1	Горнер (B.2)	[-11.841470984807897, 22.999999974517063]	17.420735	1.387675	20.610944	8.083584
2	Дифф. центр (best)	[-8.434862877695846, 7.732305419096103]	8.083584	1.387675	8.048569	8.083584
3	Наклонная центр (best)	[-3.091613557530393, 2.3890560989306495]	2.740335	1.387675	2.705319	8.083584
4	Бицентрированная MV	[-3.4140371377074867, 3.831867631549549]	3.622952	1.387675	3.027743	8.083584
5	Бицентрированная SCF	[-3.0361538692723355, 2.3890560989306495]	2.712605	1.387675	2.649860	8.083584

Рис. 4 Таблица результатов работы программы для f_2

5. Анализ

- Натуральное расширение: простой, но часто сильно переоценивает область значений из-за эффекта зависимости (dependency).
- Схема Горнера: улучшает оценки для полиномов; для функций с тригонометрическими членами эффект зависимости всё ещё заметен.
- Дифференциальная центрированная форма: точность этого метода зависит от ширины интервала производной; если производная сильно колеблется, метод будет давать неточную оценку.
- Наклонная центрированная форма: чаще дает значительное улучшение по сравнению с дифференциальной формой.
- Бицентрированная форма: Это самый точный метод, который использует пересечение интервалов от нескольких оценок, чтобы получить наиболее узкую и точную область значений.

Выводы для $f_2(x) = e^x - 2x - 1$

- Интервал [-1, 2] обоснован - он покрывает найденные критические точки и точки перегиба.

6. Исходное приложение

interval_analysis/lab2 at main · azya0/interval_analysis

https://github.com/azya0/interval_analysis/tree/main/lab2