ch II : Séries Entièrs

14/10
2024

I - Généralités :

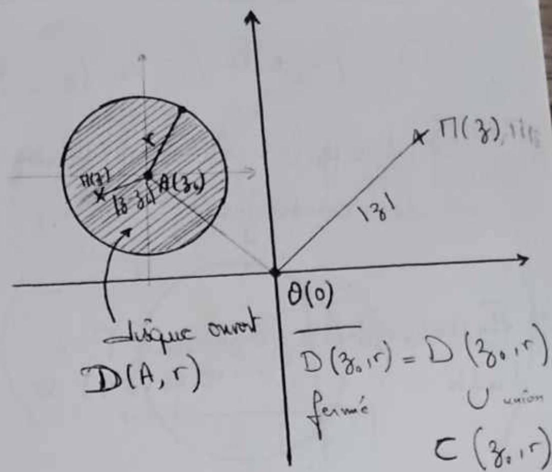
Soit $z, z_0 \in \mathbb{C}$

si $z = a + ib$

alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ← module

$|z|$ est la distance entre l'origine $O(0)$ et $M(z)$.

→ $|z - z_0|$ ← module ; désigne la distance entre $M(z)$ et $A(z_0)$.



Soit l'ensemble

$$D(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r \}$$

↳ le disque ouvert de centre $A(z_0)$ et de rayon r.

$$\overline{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| \leq r \}$$

↳ le disque fermé de centre $A(z_0)$ et de rayon r.

et

$$C(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| = r \}$$

↳ le cercle de centre $A(z_0)$ et de rayon r.

Df : (Série entière)

$\sum f_n(x)$: séries de fonctions

- x fixée cte $\Rightarrow f_n(x) = U_n$ (chp1 : séries numériques)
- $f_n(x) = a_n \cos nwx + b_n \sin nwx$ (séries de Fourier)
- $f_n(x) = a_n x^n ; n \in \mathbb{C}$ (chp : séries entières)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

Une série entière centrée en z_0 est une série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, notée $\sum a_n (z - z_0)^n$

$$\sum a_n (z - z_0) : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C} \quad f(z)$$

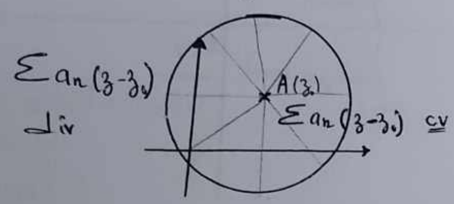
(a_n) est appelé l'ensemble des coefficients de la série entière et $a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ But du chapitre :

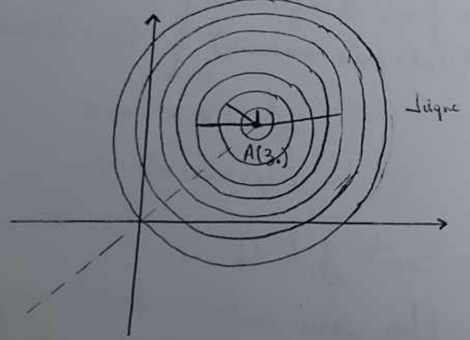
Déterminer le domaine

$D = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \sum a_n (z-z_0)^n \text{ converge} \}$

D est appelé plus tard ; disque de convergence.



Rq : les séries numériques étaient des cas particuliers des séries entières (z = cte).



Exp :

1) $\sum \frac{x^n}{n!}$ a_n

* vérifier la convergence.

$\longrightarrow$ D'Alembert

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| |x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1,$$

$\longrightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente

et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$D = \mathbb{R}$

2) $\sum \frac{x^n}{n^2}$

$a_n = \frac{x^n}{n^2}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right|$$

$$= \left| \frac{x \cdot n^2}{(n+1)^2} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |x|$$

* Si $|x| < 1$: $\sum \frac{x^n}{n^2}$ convergente
* Si $|x| > 1$: $\sum \frac{x^n}{n^2}$ divergente
* Si $|x| = 1$: ~~$\sum$~~ pas de conclusion

• Pour $x = 1$:

$\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha > 1$)

• Pour $x = -1$:

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente d'après le critère des séries alternées.

$D = [-1, 1]$: domaine de convergence.

$\left(= D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \,,\, |z| \leq 1 \right)$

3) $\sum n!\, x^n$; $x \in \mathbb{R}$

* Si $x \neq 0$

$$\left|\frac{(n+1)!\cdot x^{n+1}}{n!\; x^n}\right| = |n+1|\cdot|x| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$$

module

Divergente $\forall x \in \mathbb{R}^*$

* Si $x = 0$

elle converge ssi $x = 0$

$D = \{0\} \; (= D(0,0))$

4) $\sum \frac{x^n}{n} \longrightarrow f(x)$ fonction

D'Alembert

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{1}}\right| = \left|\frac{x^n\cdot x}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \left|\frac{x\,n}{n+1}\right| \xrightarrow[+\infty]{} |x|$$

* Si $|x| < 1 \longrightarrow$ conv
* si $|x| > 1 \longrightarrow$ div
* Si $|x| = 1 \longrightarrow \{x = 1 \text{ ou } x = -1\}$

• Pour $x = 1$

$\sum \frac{1}{n}$ (harmonique) $\rightarrow$ div

• Pour $x = -1$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (critère de séries alternées) $\underline{\underline{cv}}$

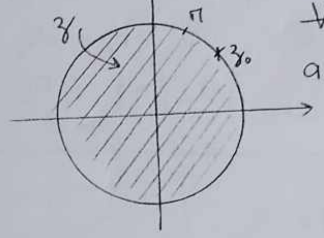
$D = [-1, 1[$

* Lemme d'Abel:

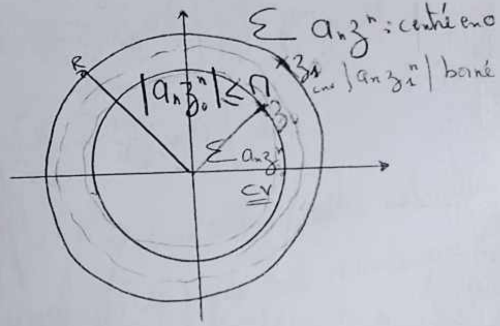
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière

On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tq la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée

(c-à-d: $\exists M > 0$ tq $\forall z \in D(0, |z_0|)$ $|a_n z_0^n| \leq M$).



$\forall z \in D$ $a_n z_0^n$ bornée



$|x| = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$

alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z| < |z_0|$

Rq: le disque de convergence est alors:

$R = \sup\{|z_0| ; z_0 \in \mathbb{C} / a_n z_0^n \text{ est bornée}\}$

Lemme d'Abel ([illegible])

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

S'il existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $|a_n z_0^n|$ est Borné à partir d'un certain rang

alors: $\sum a_n z^n$ converge.

$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$

Demonstration: on suppose que $(a_n z_0^n)$ est borné.
c-à-d : $\exists M > 0$ tq :
$$|a_n z_0^n| < M$$

alors:
$$|a_n z^n| = \left|a_n z^n \cdot \frac{z_0^n}{z_0^n}\right|$$
$$= \left|a_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n}\right|$$
$$\leq M \cdot \left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right|.$$

$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$; $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

La série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est géométrique de raison $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1 \Rightarrow$ convergente,

d'où $\sum a_n z^n$ est convergente.
$\forall z \,/\, |z| < |z_0|$

II - Rayon de conve

Soit $\sum a_n z^n$ une série ent

alors [redacted]

$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ $R = \frac{1}{\ }$

telque :

1) $\sum a_n z^n$ converge $\forall z \in D(0,R)$

2) $\sum a_n z^n$ diverge à l'extérieur de $D(0,R)$ $(|z| > R)$

$\longrightarrow$ R est défini par :

$$R = \sup\{\underset{\overline{\mathbb{R}}}{r} \overset{=|z_0|}{\in} \overline{\mathbb{R}}_+, \sum |a_n| r^n \text{ converg}$$

R est appelé, rayon de convergence d'

$\sum a_n z^n$.

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

* Théorème (D'Alembert/Hadamard ion

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que :
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \in [-\infty, +\infty].$$

alors $R = \frac{1}{L}$

$\Rightarrow \sum a_n z^n$ converge sur $D(0,R)$.

Hadamard:
Si $\sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow L$
alors $R = \frac{1}{\ }$

Exemples :

$z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ | $z = a$, $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

• $\sum \frac{x^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{1}{n!}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L = 0^+$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{L} = +\infty$$

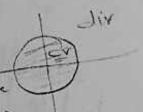
$$\Longrightarrow \sum \frac{x^n}{n!} \text{ converge sur } D(0,+\infty) = \mathbb{C}.$$

• $\sum \frac{x^n}{n^2}$ $\quad a_n = \frac{1}{n^2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|$$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{1} = 1$$



* barre

$$\Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ conv sur } \overline{D(0,1)}.$$

↳ Disque fermé
* كان بلاش بارة
↳ disque ouvert

Kn tekhdmlha comme série num

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| \xrightarrow[+\infty]{} L \cdot |x| \quad \underline{cv}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x| \xrightarrow[+\infty]{} 0 < 1$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{C} ; \sum a_n z^n \ \underline{cv}$$

• $\sum \frac{x^n}{n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$

تخدم كيف الأولى.

• $\sum \frac{x^n}{2^n}$ $\quad a^n = \frac{1}{2^n}$

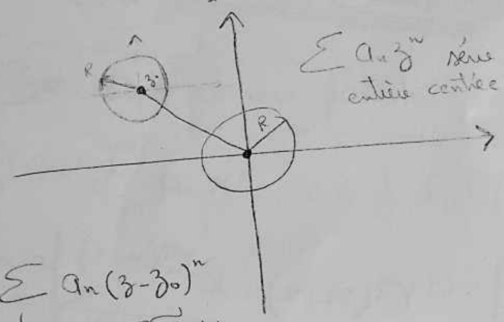
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1/2^n}\right| = \left|\frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2^n\right| = \frac{1}{2}$$

alors $R = 2$: $\underline{cv}$ sur $D(0,2)$.

• $\sum \frac{z^n}{n}$ est convergente sur $D(0$

pour $z = 1$, $\sum \frac{1}{n}$ est $\underline{div}$.

* علاش ال centre ديما o ؟؟؟



$\sum a_n z^n$ série entière centrée en 0

$\underbrace{\sum a_n (z - z_0)^n}_{\text{série entière centrée en } z_0}$

*Rq :

Rappel

Sous suites / suites extraites

(a_n) une suite numérique $\ W_n = a_{2n+3}$

$\overset{V_n}{a_{2n}}$, $\overset{U_n}{a_{3n}}$, a_{2n+3}, $a_{n!}$, $\overset{H_n}{a_{n^2}}$: ceux sont des suites extraites (sous suites) de (a_n)

$V_1 = a_2$
$V_2 = a_4$
$V_3 = a_6$
$V_4 = a_8$

$U_1 = a_3$	$H_1 = a_1$
$U_2 = a_6$	$H_2 = a_4$
$U_3 = a_9$	$H_3 = a_9$
$U_4 = a_{12}$	$H_4 = a_{16}$

$n = 2 \longrightarrow$
$a_n = a_2$
$a_{2n} = a_4$
$a_{3n} = a_6$
$a_{2n+3} = a_7$
$a_{n!} = a_2 \quad a_{n^2} = a_4$

Une suite extraite est de la forme $a_{\varphi(n)}$

avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto \varphi(n)$ $\boxed{\text{croissante}}$

$V_n\left(\varphi(n) = 2n\right)$

$U_n\left(\varphi(n) = 3n\right)$

$W_n\left(\varphi(n) = 2n+1\right)$

$H_n\left(\varphi(n) = n^2\right)$

* Etude de $\sum a_{\varphi(n)} x^{\varphi(n)}$

a_n

extraite de "$\underbrace{a_n x^n}_{U_n}$" $= U_{\varphi(n)}$

- $$\left|\frac{a_{\varphi(n+1)} \cdot x^{\varphi(n+1)}}{a_{\varphi(n)} \cdot x^{\varphi(n)}}\right| =$$

$$\left|\frac{a_{\varphi(n+1)}}{a_{\varphi(n)}}\right| \cdot \left|\frac{x^{\varphi(n+1)}}{x^{\varphi(n)}}\right|$$

Pour $\sum a_n \cdot x^{\varphi(n)}$

$$\left|\frac{a_{n+1} \cdot x^{\varphi(n+1)}}{a_n \cdot x^{\varphi(n)}}\right| = \underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{\downarrow +\infty \; L} \cdot \left|\frac{x^{\varphi(n+1)}}{x^{\varphi(n)}}\right|$$

série géo

$$\xrightarrow[+\infty]{} L \cdot \lim_{+\infty} \left|\frac{x^{\varphi(n+1)}}{x^{\varphi(n)}}\right|$$

$$= L \cdot \lim \left|x^{\varphi(n+1) - \varphi(n)}\right| = l$$

$l < 1$: cv

$l > 1$: div

$l = 1$: [illegible]

puis on cherche : les $x \in \mathbb{C}$ tq

$$\lim_{+\infty} L \cdot |x|^{\varphi(n+1) - \varphi(n)} < 1$$

* Exp :

- $\sum 3^n \cdot x^{3n+1}$

$$\left|\frac{3^{n+1} \cdot x^{\overbrace{3(n+1)+1}^{3n+4}}}{3^n \cdot x^{3n}}\right|$$

$$= \left|3 \cdot x^3\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3 \cdot |x|^3$$

La série $\sum 3^n \cdot x^{3n+1}$ est convergente

ssi $3|x|^3 < 1 \iff |x|^3 < 1/3$.

$$|x| < \sqrt[3]{1/3}$$

$\sum 3^n \cdot x^{3n+1}$ est convergente ssi $x \in D\left(0, \sqrt[3]{1/3}\right)$.

- $\sum n^3 \cdot x^{2n+5}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^3 \cdot x^{2(n+1)+5}}{n^3 \cdot x^{2n+5}}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)^3 \cdot x^{2n+7-2n-5}}{n^3}\right|$$

$$= \left|\frac{(n+1)^3 \cdot x^2}{n^3}\right|$$

suite (P.9)

$$= \left|\frac{(n+1)}{n^3}\right| |x|^2 \xrightarrow[+\infty]{} 1 \underset{+\infty}{\text{l}} \cdot |x|^2$$

$$\frac{(n+1)^3}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

La série est $\underline{\underline{CV}}$ ssi $|x|^2 < 1$

$|x| < 1$

$\sum n^3 \cdot x^{2n+5}$ est $\underline{\underline{CV}}$ ssi

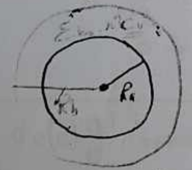
$x \in D(0,1)$.

Propriétés :

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b, alors :

$\sum a_n \cdot x^n + b_n x^n$ de rayon :

- $R_{ab} = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$
- R_{ab} est de rayon $R_a = R_b$ si $R_a = R_b$.



III - Propriétés fonctionnelles des séries entières :

$\underline{\underline{Rq}}$: une série converge sur son disque de convergence vers une fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z) \quad \forall z \in D(0,R)$$

1/ Continuité :

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R \neq 0$

alors $f : D(0,R) \longmapsto \mathbb{C}$

$z \longmapsto \sum a_n z^n$ est continue

et $D(0,R) \subset D_f \subset \overline{D(0,R)}$

2/ Intégration

$\hookrightarrow$ On traite les séries entières réelles. $\sum a_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ une série entière réelle de rayon de conv $R \neq 0$

$(D(0,R) =]-R, R[)$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ et $]a,b[\subset]-R,R]$

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$

$\underline{Rq}$: si f est une primitive de $f(x)$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; $x \in]-R, R[$

On a :

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

égal à $\left(= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot x^n \right)$

En effet :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n \cdot t^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$= \sum^{+\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{}$$

On pose $k = n+1 \Longrightarrow n = k-1$

$n=0 \longrightarrow k=1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} \cdot x^k$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot x^n$$

③ Dérivation :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de conv $R \neq 0$

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$$

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \; x^n$$

est indéfinitive dérivable et pour $p \in \mathbb{N}$

$$f^{(p)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \right)^{p}$$

$$= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-p-1) a_n \cdot x^{n-1}$$

En particulier : si $p = 1$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$= \sum_{p=2}^{+\infty} p+1 \cdot a_{p+1} \cdot x^p$$

* Exercice 3 :

Trouver $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$ solution de $f'(x) = f(x)$.

$p = n+1 \Longrightarrow n = 1$

$$f'(x) = \sum_{1}^{+\infty} n \cdot a_n \, x^{n-1}$$

$$= \sum_{p=2}^{+\infty} p+1 \cdot a_{p+1} \cdot x^p$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} \cdot x^n = \sum_{n=0} a_n \cdot x^n$$

$$= a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{2}^{+\infty} a_n \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n+1) a_{n+1} - a_n \right) x^n - \underbrace{a_0 x^0}_{0} + \underbrace{a_1}_{0}$$

$$= 0$$

On donne $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$; $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$; $f(0) = a_0 = 0$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$f'(0) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}} \quad n \geq 2$$

$a_2 = \frac{a_1}{2}$; $a_3 = \frac{a_2}{3}$

$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_2}{3 \times 4} = \frac{a_1}{2 \times 3 \times 4}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{a_1}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$\boxed{a_n = \frac{a_1}{n!}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+2}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)\, a_{n+1} - a_n \big)\, x^n = 0$$

Si $n=0$ alors $a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = a_0$

Si $n>0$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2\times 3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{a_0}{2\times 3\times 4\times \dots \times n} = \frac{a_0}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} . x^n$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

IV - fonctions développables en SE :

1 - Développement usuels :

$\forall x \in \mathbb{R}$; $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\forall x \in]-1, 1[$; $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$
- $\text{Arctg}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
- $\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n^{p-1} x^{n-(p-1)}$

avec : $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

- $\forall x \in]-1, 1[$;

$$(1+x)^\alpha = \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)}{n!} x^n$$

Exercice : Trouver le dév en séries entière de :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1} ;$$

pôles de f : $x' = 1$; $x'' = \frac{1}{2}$

$$= \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$$

- $\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
- $\frac{1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2x-1} = 2 \cdot \frac{1}{2x-1}$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2-3x+1} = -2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)$$

$$= -2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + 2(2^n) \cdot x^n\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2-3x+1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(1+2^{n+1}) \cdot x^n$$

$$\lim_{+\infty} \left|\frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+1}}\right| = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}.$$

Fonctions développables en série entières en 0 :

Déf :

[1] Soit f une fct définie sur un intervalle I contenant 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\longrightarrow$ f est développable en série entière **ssi** il existe une suite (a_n) et $R_a > 0$ tq $\forall x \in]-R_a, R_a[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . x^n$$

Proposition :

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ développables en série entière sur D ;

$$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)$$

alors $\forall x \in D$, on a :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Ainsi f est développable en série entière et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

[2] f est développable en série entière au voisinage de 0 **ssi** f est de classe C^∞ sur tout voisinage de 0.

Rappel :

- f est classe C^1 sur $[a, b]$,
  $\begin{cases} \cdot f \text{ est dérivable } (f' \text{ existe}) \text{ sur } [a, \\ \cdot f' \text{ est continue sur } [a,b] \end{cases}$

- $f \in C^2([a,b])$:
  $\begin{cases} \cdot f \text{ est déri deux fois sur } [a,b] \\ \quad (f' \cdot f'' \text{ existant}) \\ \cdot \text{et } \begin{cases} * f'' \text{ existe sur } [a,b] \\ * f'' \text{ est continue sur } [a,b] \end{cases} \end{cases}$

- $f \in C^0([a,b])$: f est continue sur $[a,b]$

- $f \in C^\infty([a,b])$: f est indéfiniment dérivable sur $[a,b]$.

exemple :

$$f(x) = e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f(x) = \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f(x) = \sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f(x) = \ln x \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$