Basic Lessons on High School Math Olympiad Part 3

AZZAM L. H.

February 16, 2024

Daftar Isi

1 Aljabar **2**

1.1 Logaritma 2

1.2 Latihan Soal Logaritma 2

1.3 Ketaksamaan 3

1.3.1 QM-AM-GM-HM 3

1.3.2 Cauchy-Schwarz 3

1.3.3 Ketaksamaan Bernoulli 3

1.4 Ketaksamaan Kuadrat 3

1.5 Latihan Soal Ketaksamaan 3

1.6 Floor and Ceiling 4

1.6.1 Hermite's Identity 5

1.7 Latihan Soal Floor dan Ceiling 5

2 Teori Bilangan **5**

2.1 Inverse Modulo 5

2.2 Basis Bilangan 5

2.3 Latihan Soal Basis Bilangan 6

2.4 Bilangan Prima Serta Trik-trik Modulo Umum 6

2.5 Latihan Soal Trik Bilangan Prima dan Modulo 7

3 Kombinatorika **7**

3.1 Identitas Kombinatorika 7

3.2 Latihan Soal Identitas Kombinatorika . . . 7
3.3 Binomial Newton . . . 8
3.4 Latihan Soal Ekspansi Binomial Newton . . . 8
3.5 Relasi Rekurensi . . . 8
3.5.1 Persamaan Karakteristik untuk Relasi Rekurensi Linear . . . 9
3.6 Latihan Soal Relasi Rekurensi . . . 9

4 Geometri **10**
4.1 Teorema Garis Bagi . . . 10
4.2 Latihan Soal Teorema Garis Bagi . . . 10
4.3 Dalil Sinus dan Dalil Cosinus . . . 11
4.3.1 Dalil Sinus . . . 11
4.3.2 Dalil Cosinus . . . 11
4.4 Latihan Soal Dalil Sinus dan Cosinus . . . 11
4.5 Dalil Stewart . . . 12
4.6 Latihan Soal Dalil Stewart . . . 12
4.7 Dalil Ceva . . . 12
4.8 Latihan Soal Dalil Ceva . . . 13
4.9 Dalil Menelaus . . . 13
4.10 Latihan Soal Dalil Menelaus . . . 13
4.11 Dalil Ptolemy . . . 13
4.12 Latihan Soal Dalil Ptolemy . . . 14

5 Referensi **14**

§1 Aljabar

§1.1 Logaritma

Definisi: $a^x = y \iff x = ^a\log y = \log_a y$ untuk $a > 0$, $a \neq 1$, dan $y > 0$. Sekarang, untuk $a, b, c > 0$ dan $a, b, c \neq 1$

1. $^a\log b = \dfrac{^p\log b}{^p\log a}$ untuk suatu $p > 0, p \neq 1$
2. $^a\log a = 1$.
3. $^a\log b = \dfrac{1}{^b\log a}$.
4. $^a\log b + ^a\log c = ^a\log(bc)$.
5. $^a\log b - ^a\log c = ^a\log\left(\dfrac{b}{c}\right)$.
6. $^a\log b^n = n \cdot ^a\log b$.
7. $^{a^n}\log b^m = ^a\log b^{\frac{m}{n}} = \dfrac{m}{n} \cdot ^a\log b$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{R}$ dan $n \neq 0$.
8. $^a\log b \cdot ^b\log c = ^a\log c$.

§1.2 Latihan Soal Logaritma

1. (OSK 2012) Jumlah semua bilangan bulat x sehingga $^2\log(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah ...
2. (OSK 2014) Misalkan $x, y, z > 1$ dan $w > 0$. Jika $\log_x w = 4$, $\log_y w = 5$, dan $\log_{xyz} w = 2$, maka nilai $\log_z w$ adalah ...
3. (OSK 2016) Misalkan x, y, z adalah bilangan real positif yang memenuhi

$$3\log_x(3y) = 3\log_{3x}(27z) = \log_{3x^4}(81yz) \neq 0.$$

Nilai dari x^5y^4z adalah ...

§1.3 Ketaksamaan

§1.3.1 QM-AM-GM-HM

Untuk bilangan real positif $a_1, a_2, \dots, a_n$ dengan $n \geq 2$,definisikan

$$\begin{aligned}
QM \text{ (Quadratic Mean)} &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \\
AM \text{ (Arithmetic Mean)} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\
GM \text{ (Geometric Mean)} &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\
HM \text{ (Harmonic Mean)} &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}
\end{aligned}$$

Maka berlaku $QM \geq AM \geq GM \geq HM$ atau

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

§1.3.2 Cauchy-Schwarz

Untuk bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n$ berlaku

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

dengan kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

§1.3.3 Ketaksamaan Bernoulli

Untuk $x > -1$ berlaku $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

§1.4 Ketaksamaan Kuadrat

Untuk $x \in \mathbb{R}$, berlaku kuadrat sempurnanya selalu nonnegatif atau $x^2 \geq 0$. Hal ini menyebabkan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ untuk $a \neq 0$ selalu mempunyai nilai minimum atau maksimum saat $x = -\frac{b}{2a}$. (why?)

§1.5 Latihan Soal Ketaksamaan

1. (Nesbitt's Inequality) Untuk bilangan real positif a, b, c tentukan nilai minimum dari

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

2. Tentukan nilai minimum dari $8x^4 + y^2$ untuk bilangan real positif x dan y yang memenuhi $x^4 y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Nilai minimum dari
$$\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$
untuk bilangan real positif w, x, y, z yang memenuhi $w + x + y + z = 32$ adalah $\ldots$

4. Jika $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, nilai maksimum dari $x + 2y + 3z$ adalah $\ldots$

5. Diberikan $a + b + c = 1$ dan $a, b, c > 0$, carilah nilai minimum dari $a^2 + 2b^2 + c^2$.

6. (OSK 2014) Untuk $0 < x < \pi$, nilai minimum dari $\dfrac{16\sin^2 x + 9}{\sin x}$ adalah $\ldots$

7. (OSK 2017) Misalkan a, b, c bilangan real positif yang memenuhi $a + b + c = 1$. Nilai minimum dari $\dfrac{a+b}{abc}$ adalah $\ldots$

8. (OSK 2017) Pada segitiga ABC titik K dan L berturut-turut adalah titik tengah AB dan AC. Jika CK dan BL saling tegak lurus, maka nilai minimum dari $\cot B + \cot C$ adalah $\ldots$

§1.6 Floor and Ceiling

Definisikan $\lfloor x \rfloor$ (floor x) sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari sama dengan x. Simpelnya, $\lfloor x \rfloor$ dapat dikatakan sebagai "pembulatan ke bawah". Contoh: $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 10,51 \rfloor = 10$, $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$.

Definisikan $\lceil x \rceil$ (ceiling x) sebagai bilangan bulat terkecil yang lebih dari sama dengan x. Simpelnya, $\lceil x \rceil$ dapat dikatakan sebagai "pembulatan ke atas". Contoh: $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil 10,51 \rceil = 11$, $\lceil -1,5 \rceil = -1$.

Beberapa properti:

1. $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ untuk $x \in \mathbb{Z}$.

2. $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$ untuk $x \notin \mathbb{Z}$.

3. $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

4. $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

5. $\lfloor a + x \rfloor = a + \lfloor x \rfloor$ dan $\lceil a + x \rceil = a + \lceil x \rceil$ untuk $a \in \mathbb{Z}$ dan $x \in \mathbb{R}$.

§1.6.1 Hermite's Identity

Untuk sembarang bilangan real x dan bilangan bulat positif n,

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor .$$

§1.7 Latihan Soal Floor dan Ceiling

1. (Modifikasi JBMO 2021) Carilah seluruh penyelesaian dari persamaan $2 \cdot \lfloor \frac{1}{2x} \rfloor - 7 = 9(1 - 8x)$.

2. (OSK 2013) Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Tentukan semua x yang memenuhi $\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 5$.

3. Banyaknya bilangan asli $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ sehingga terdapat bilangan real positif x yang memenuhi $x^2 + \lfloor x \rfloor^2 = n$ adalah ...

§2 Teori Bilangan

§2.1 Inverse Modulo

Misalkan bilangan bulat a, x dan bilangan bulat positif m. Kita sebut x adalah inverse dari $a \mod m$ jika dan hanya jika $gcd(a, m) = 1$ dan $ax \equiv 1 \mod m$.

§2.2 Basis Bilangan

Basis bilangan adalah sistem bilangan yang menyatakan banyaknya digit atau kombinasi dari digit-digit yang menyatakan sebuah bilangan. Secara matematis, bilangan a dalam basis $n > 0$ yaitu $(a)_n$ mempunyai bentuk (yang setara dengan nilai basis 10):

$$(c_k c_{k-1} \ldots_1 c_0)_n = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n^1 + c_0 n^0$$

Secara umum bahkan kita telah memakai sistem basis tersebut untuk basis 10. Misalkan 123 dapat dinyatakan sebagai $123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Lalu, berikut merupakan contoh untuk bilangan basis selain 10 misalnya:

- Bilangan basis 2 atau bilangan biner yang digit-digitnya terdiri dari $\{0, 1\}$. Misalkan 1001_2 dalam biner yang setara dengan 9 atau $1001_2 = 9$ karena $1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$.

- Bilangan basis 3 yang digit-digitnya terdiri dari $\{0, 1, 2\}$. Misalkan $211_3 = 22$ karena $211_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 22$.

- Bilangan basis 16 atau heksadesimal yang digit-digitnya terdiri dari $\{0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, \ldots, F\}$. Misalkan $5F_{16} = 95$ karena $5F_{16} = 5 \cdot 16^1 + (15) \cdot 16^0 = 95$.

§2.3 Latihan Soal Basis Bilangan

1. (AIME I 2003) Let N be the number of positive integers that are less than or equal to 2003 and whose base-2 representation has more 1's than 0's. Find the remainder when N is divided by 1000.

2. (Canadian MO 1977) N is an integer whose representation in base b is 777. Find the smallest positive integer b for which N is the fourth power of an integer.

§2.4 Bilangan Prima Serta Trik-trik Modulo Umum

1. Bilangan prima adalah bilangan asli yang hanya dapat dibagi dirinya sendiri dan angka 1.

2. Bilangan bukan prima dan bukan 1 disebut bilangan komposit.

3. 1 bukan bilangan prima dan bukan pula bilangan komposit.

Untuk bilangan prima p dan bilangan bulat n.

1. Bilangan prima genap hanya ada satu buah, yaitu 2.

2. Dari definisi bilangan prima p, karena p tak terbagi oleh 2 dan 5, maka tak ada bilangan prima yang berakhiran 0.

3. Untuk sembarang bilangan prima p berlaku $p \mid n$ atau $gcd(p, n) = 1$.

4. $p \mid n^2$ jika dan hanya jika $p \mid n$.

5. $p \mid ab \iff p \mid a$ atau $p \mid b$.

6. Untuk $p > 3$, kita punya bentuk $p = 6k \pm 1$ untuk suatu bilangan asli k.

7. (Sieve of Erastosthenes) Faktor prima terkecil t dari bilangan komposit n selalu $t \leq \sqrt{n}$.

Lalu, beberapa trik-trik modulo umum:

1. Pada sistem persamaan bulat, tinjau modulo 3, 4, 5, 7, atau modulo 11 nya.

2. Untuk bilangan bulat n selalu terjadi $n^2 \equiv 1 \mod 4$, $n^2 \equiv 1 \mod 3$. Peninjauan terhadap modulo lain juga bisa, namun tidak terlalu umum.

§2.5 Latihan Soal Trik Bilangan Prima dan Modulo

1. (OSK 2013) Diketahui x_1, x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + px + q + 1 = 0$. Jika p dan $p^2 + q^2$ adalah bilangan-bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2013} + x_2^{2013}$ adalah ...
2. (OSK 2014) Diberikan tiga bilangan bulat positif berurutan. Jika bilangan pertama tetap, bilangan kedua ditambah 10 dan bilangan ketiga ditambah bilangan prima, maka ketiga bilangan ini membentuk deret ukur. Bilangan ketiga dari bilangan bulat berurutan adalah ...
3. (OSK 2014) Semua pasangan bilangan prima (p, q) yang memenuhi persamaan
$$(7p - q)^2 = 2(p-1)q^2$$
adalah ...
4. (OSK 2014) Semua bilangan bulat n sehingga $n^4 - 51n^2 + 225$ merupakan bilangan prima adalah ...
5. (OSK 2015) Banyaknya bilangan asli $n \leq 2015$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk $n = a + b$ dengan a, b bilangan asli yang memenuhi $a - b$ bilangan prima dan ab bilangan kuadrat sempurna adalah ...

§3 Kombinatorika

§3.1 Identitas Kombinatorika

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ dengan $k, n \in \mathbb{N}_0$ dan $k \leq n$.
2. (Identitas Pascal) Untuk $n, k \in \mathbb{N}_0$ berlaku $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
3. (Hockey Stick Identity) Untuk $n, r \in \mathbb{N}, n > r, \sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.
4. Untuk $n, k \in \mathbb{N}_0$ berlaku $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.
5. Untuk $n, k \in \mathbb{N}_0$ berlaku $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{n-1}$.
6. (Vandermonde's Identity) $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

§3.2 Latihan Soal Identitas Kombinatorika

1. (AIME II 2000) Given that $\frac{1}{2!17!} + \frac{1}{3!16!} + \frac{1}{4!15!} + \frac{1}{5!14!} + \frac{1}{6!13!} + \frac{1}{7!12!} + \frac{1}{8!11!} + \frac{1}{9!10!} = \frac{N}{1!18!}$ find the greatest integer that is less than $\frac{N}{100}$.

2. (AIME 1986) The polynomial $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17}$ may be written in the form $a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_{16}y^{16} + a_{17}y^{17}$, where $y = x + 1$ and the a_i's are constants. Find the value of a_2.

3. (AMC 10A 2016) For some particular value of N, when $(a + b + c + d + 1)^N$ is expanded and like terms are combined, the resulting expression contains exactly 1001 terms that include all four variables a, b, c, and d, each to some positive power. What is N?

§3.3 Binomial Newton

Binomial Newton atau ekspansi/penjabaran binomial berfokus pada nilai koefisien setiap suku hasil penjabaran $(a + b)^n$.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

§3.4 Latihan Soal Ekspansi Binomial Newton

1. Carilah koefisien x^4 dari penjabaran $(x + 1)^9$

2. (OSK 2013) Koefisien x^{2013} pada ekspansi

$$(1+x)^{4026} + x(1+x)^{4025} + x^2(1+x)^{4024} + \ldots x^{2013}(1+x)^{2013}$$

adalah ...

3. Jika $S = (\sqrt{71} + 1)^{71} - (\sqrt{71} - 1)^{71}$ adalah bilangan bulat, carilah digit terakhir dari S

§3.5 Relasi Rekurensi

Sering disebut dengan rekursif. Intinya adalah sebuah persamaan yang melibatkan barisan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dimana untuk mendapatkan nilai a_k membutuhkan suku-suku sebelumnya $a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots,$ atau a_1. Contoh paling terkenal dari persamaan rekursif adalah bilangan Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ yang secara matematis didefinisikan sebagai berikut.

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2$$

atau yang lebih terkenal di ranah *Computer Science* adalah permasalahan *Tower of Hanoi* dengan persamaan rekursifnya didefinisikan sebagai berikut.

$$T_1 = 1$$
$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

Untuk menyelesaikan soal relasi rekurensi, butuh manipulasi aljabar yang mumpuni sehingga tidak ada pendekatan eksplisit selain menggunakan persamaan karakteristik atau fungsi pembangkit (tidak dibahas disini) yang dijamin berhasil.

§3.5.1 Persamaan Karakteristik untuk Relasi Rekurensi Linear

Persamaan karakteristik berikut berlaku untuk persamaan rekursif yang linear. Persamaan karakteristik berikut berguna untuk mengubah relasi rekurensi menjadi iteratif, atau persamaan berbentuk implisit. (Jadi, untuk persamaan yang bukan linear, sebagai contoh $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ tidak bisa dijamin selesai dengan persamaan karakteristik yang disajikan berikut). Untuk persamaan rekursif

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d}$$

mempunyai persamaan karakteristik

$$x^d - c_1 x^{d-1} - c_2 x^{d-2} - \cdots - c_d x^0 = 0$$

Sebagai contoh, rumus rekursif dari barisan Fibonacci di atas dapat diselesaikan menjadi

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0 \implies x^2 - x - 1 = 0$$

yang mempunyai dua akar, yaitu $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ dan $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi$ dimana ϕ adalah *Golden Ratio*. Sadari bahwa setiap suku di barisan Fibonacci tersebut berbentuk $F_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$ (buktikan). Dengan substitusi x_1 dan x_2 serta pemilihan suku dari barisan Fibonacci (misal suku pertama dan kedua) maka akan ditemukan nilai c_1 dan c_2 sehingga pada akhirnya kita punya

$$F_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

§3.6 Latihan Soal Relasi Rekurensi

1. (British) Isaac is planning a nine-day holiday. Every day he will go surfing, or water skiing, or he will rest. On any given day he does just one of these three things. He never does different water-sports on consecutive days. How many schedules are possible for the holiday?

2. (AIME I 2006) A collection of 8 cubes consists of one cube with edge-length k for each integer $k, 1 \leq k \leq 8$. A tower is to be built using all 8 cubes according to the rules:

   - Any cube may be the bottom cube in the tower.

- The cube immediately on top of a cube with edge-length k must have edge-length at most $k+2$.

Let T be the number of different towers than can be constructed. What is the remainder when T is divided by 1000?

3. (AIME I 2006) For each even positive integer x, let $g(x)$ denote the greatest power of 2 that divides x. For example, $g(20) = 4$ and $g(16) = 16$. For each positive integer n, let $S_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} g(2k)$. Find the greatest integer n less than 1000 such that S_n is a perfect square.

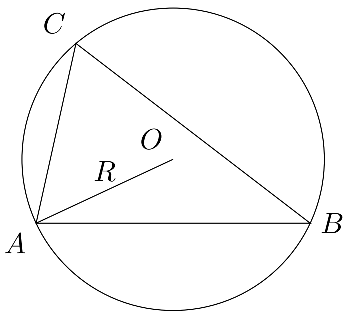
4. (AIME I 2001) A mail carrier delivers mail to the nineteen houses on the east side of Elm Street. The carrier notices that no two adjacent houses ever get mail on the same day, but that there are never more than two houses in a row that get no mail on the same day. How many different patterns of mail delivery are possible?

§4 Geometri

§4.1 Teorema Garis Bagi

Misalkan garis bagi sudut $\angle A$ (bisa garis bagi dalam atau garis bagi luar) memotong garis BC di K, maka

$$\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC}.$$



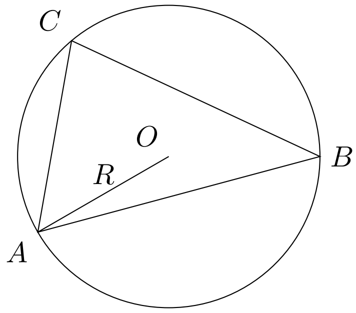
§4.2 Latihan Soal Teorema Garis Bagi

1. (OSK 2014) Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 360, BC = 240$, dan $AC = 180$. Garis bagi dalam dan garis bagi luar dari $\angle CAB$ memotong BC dan perpanjangan BC berturut-turut di P dan Q. Jari-jari lingkaran yang melalui titik-titik A, P, dan Q adalah ...

2. (OSK 2015) Pada segitiga ABC, garis tinggi AD, garis bagi BE dan garis berat CF berpotongan di satu titik. Jika panjang $AB = 4$ dan $BC = 5$, dan $CD = \frac{m^2}{n^2}$ dengan m dan n relatif prima, maka nilai dari $m - n$ adalah ...

§4.3 Dalil Sinus dan Dalil Cosinus

Misalkan ABC adalah suatu segitiga dengan R adalah panjang jari-jari lingkaran luarnya.



§4.3.1 Dalil Sinus

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{CA}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$$

§4.3.2 Dalil Cosinus

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cdot \cos\angle C$$
$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos\angle A$$
$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$$

§4.4 Latihan Soal Dalil Sinus dan Cosinus

1. (OSK 2016) Pada segitiga ABC, titik M terletak pada BC sehingga $AB = 7, AM = 3, BM = 5$, dan $MC = 6$. Panjang AC adalah $\ldots$

2. (OSK 2013) Misalkan P adalah titik interior dalam daerah segitiga ABC sehingga besar $\angle PAB = 10°, \angle PBA = 20°, \angle PCA = 30°, \angle PAC = 40°$. Besar $\angle ABC = \ldots$

3. (LMNAS SMP 33 Penyisihan) Diberikan segitiga tumpul ABC dengan $AB = BC$. Titik D berada di dalam segitiga tersebut sedemikian sehingga $AD = BD$, $\angle ADB = 140°$, dan $\angle ADC = 150°$. Besar sudut ACD dalam satuan $°$ (derajat) adalah $\ldots$

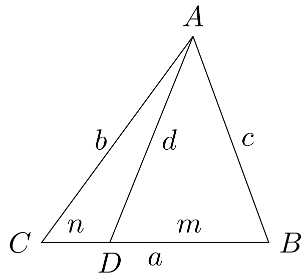
4. (Modifikasi OSK 2017) Pada sebuah lingkaran dengan pusat O, talibusur AB berjarak 5 dari titik O dan talibusur AC berjarak $5\sqrt{2}$ dari titik O dengan titik A terletak di busur BC yang lebih kecil (A diantara B dan C) Jika panjang jari-jari lingkaran 10, maka $BC^2 = \ldots$

§4.5 Dalil Stewart

Pada segitiga ABC dengan titik D pada segmen BC, dimana $AB = c, BC = a, CA = b, AD = d, BD = m, CD = n$, maka berlaku

$$BC \cdot AD^2 + BC \cdot BD \cdot CD = CA^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD$$

$$ad^2 + amn = b^2 m + c^2 n$$



§4.6 Latihan Soal Dalil Stewart

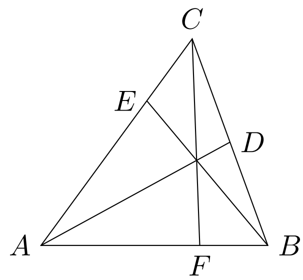
1. (OSK 2016) Pada segitiga ABC, titik M terletak pada BC sehingga $AB = 7, AM = 3, BM = 5$, dan $MC = 6$. Panjang AC adalah ...

2. (HMMT 1999) Dalam segitiga ABD, F berada pada segmen AD, E berada pada sinar BF, G berada pada segmen BD, dan C adalah titik perpotongan dari FG dan ED. Diketahui bahwa $AB = 15$, $BD = 18$, $AF = 15$, $DF = 12$, $BE = 24$, dan $CF = 17$. Temukan rasio $BG : FG$.

§4.7 Dalil Ceva

Jika pada segitiga ABC, titik D, E, F berturut-turut berada di segmen BC,CA,AB, maka AD, BE, CF konkuren atau berpotongan di satu titik jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$



§4.8 Latihan Soal Dalil Ceva

1. (OSK 2015) Pada segitiga ABC, garis tinggi AD, garis bagi BE dan garis berat CF berpotongan di satu titik. Jika panjang $AB = 4$ dan $BC = 5$, dan $CD = \frac{m^2}{n^2}$ dengan m dan n relatif prima, maka nilai dari $m - n$ adalah ...

§4.9 Dalil Menelaus

Jika pada segitiga ABC, titik P, Q, R berturut-turut berada pada garis (bisa di perpanjangan segmen) BC,CA, AB, maka P, Q, R segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

§4.10 Latihan Soal Dalil Menelaus

1. Dalam segitiga ABD, F berada pada segmen AD, E berada pada sinar BF, G berada pada segmen BD, dan C adalah titik perpotongan dari FG dan ED. Diketahui bahwa $AB = 15$, $BD = 18$, $AF = 15$, $DF = 12$, $BE = 24$, dan $CF = 17$. Temukan rasio $BG : FG$.

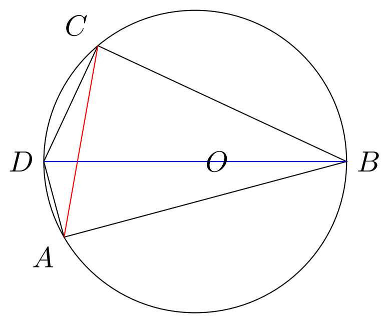
2. (OSK 2022) Diberikan ABC siku-siku sama kaki dengan $BC = AB$. Misalkan L titik tengah BC dan P pada sisi AC sehingga $BP \perp AL$. Jika $CP = 30\sqrt{2}$, maka panjang AB adalah ...

3. Diberikan segitiga ABC dengan panjang $BC = 36$. Misalkan D adalah titik tengah BC dan E adalah titik tengah AD. Misalkan pula bahwa F adalah perpotongan BE dengan AC. Jika diketahui bahwa AB menyinggung lingkaran luar segitiga BFC, hitunglah panjang BF.

§4.11 Dalil Ptolemy

Diketahui sebuah segiempat siklis $ABCD$ maka berlaku

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$



§4.12 Latihan Soal Dalil Ptolemy

1. Diberikan sebuah segiempat siklis $ABCD$ dengan ABC adalah segitiga sama sisi. Jika $AD = 2$ dan $CD = 3$, panjang $BD = \ldots$

§5 Referensi

1. Hermanto, Eddy. 2011. Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika Dasar.