

Basic Lessons on Olympiad part One

AZZAM L. H.

May 17, 2022

Dokumen ini terdiri dari materi-materi paling dasar dari olimpiade matematika tingkat SMP-SMA dan disertai dengan latihan soal di bagian akhir dokumen ini. Selamat dan semangat belajar! :D

§1 Tips-tips

1. Latihan yang rajin dan **konsisten** setiap hari walaupun hanya 30 menit.
2. Matematika itu ilmu menulis, catat, coba-coba, dan corat-coret. Anda malas menulis dan hanya mau membaca saja? Buang-buang waktu saja.
3. Jangan belajar materi pelajaran matematika sekolah dulu (kecuali yang dibutuhkan di olimpiade), langsung latihan soal olimpiade saja. Kemampuan matematis Anda di pelajaran sekolah akan meningkat sejalan dengan kemampuan matematika olimpiade Anda.
4. Kuasailah Bahasa Inggris (terutama Bahasa Inggris Matematika) agar anda bisa mempelajari materi-materi luar negeri dan mengerjakan soal-soal kontes luar Indonesia yang (sayangnya) masih jauh lebih bagus dari materi dan soal-soal di Indonesia.
5. Rajin-rajin latihan soal dari [Art of Problem Solving - AOPS](#) (klik tulisan untuk menuju website).
6. Usaha tanpa doa = tidak berkah. Ada tangan tak terlihat yang membantu Anda untuk mengerti semua hal di dunia ini.
7. Jangan begadang jika tidak perlu, merusak otak.

§2 Sebelum Anda Belajar Matematika ...

§2.1 Common Math Mistakes

1. $\frac{n}{0} \neq \infty$ tetapi **seharusnya** $\frac{n}{0} = \text{tak terdefinisi}$ dimana $n \neq 0$.
Kecuali kalau pakai limit, baru benar, yaitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n}{x} = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{n}{x} = -\infty$
2. Seharusnya $\frac{0}{0} = \text{tak tentu}$.
3. π itu **dibaca "PI"** bukan dibaca "FI".
4. Kalau φ baru dibaca **"FI"**.
5. $\sqrt{x} \geq 0$ dengan $x \geq 0$. Jadi, hasil dari $\sqrt{(-x)^2} = |x|$ jadinya $\sqrt{(-2)^2} = 2$.

§2.2 Logika Dasar

1. $A \wedge B$ dibaca A dan B .
2. $A \vee B$ dibaca A atau B .
3. $A \equiv B$ dibaca A ekuivalen B (untuk logika).
4. $\exists x$ dibaca ada x atau terdapat x .
5. $\forall x$ dibaca untuk semua x .
6. $A \implies B$ dibaca
 - a) A hanya jika B ,
 - b) B jika A ,
 - c) A mengimplikasikan B ,
 - d) A menyebabkan B ,
 - e) jika A maka B .
7. $A \impliedby B$ dibaca A jika B (kebalikannya \implies).
8. $A \iff B$ dibaca A jika dan hanya jika B . Definisinya adalah $A \iff B \equiv (A \implies B) \wedge (A \impliedby B)$.

Apa bedanya $A \implies B$ dan $A \iff B$? Kalau $A \implies B$ berarti agar pernyataan benar haruslah B benar, A bisa salah atau benar. Kalau $A \iff B$, agar pernyataan benar, haruslah A dan B sama-sama benar atau sama-sama salah. Contohnya:

- Jika sekarang hujan, maka saya tidak pergi. (Baik sekarang hujan ataupun tidak hujan, bisa saja saya tidak pergi, jadi tidak pengaruh).
- Klise tapi ya.... : Saya bergerak jika dan hanya jika saya tidak diam :).

§2.3 Himpunan

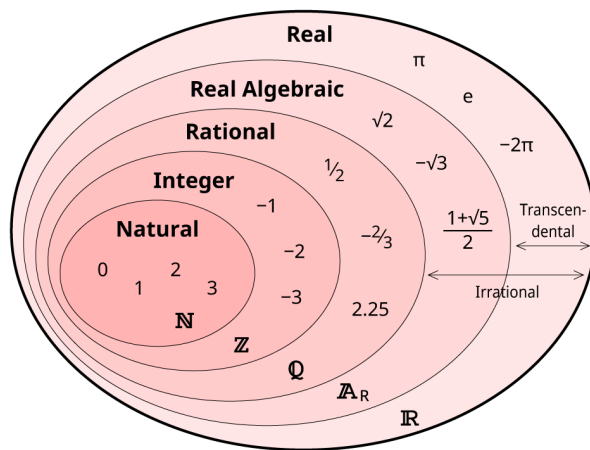
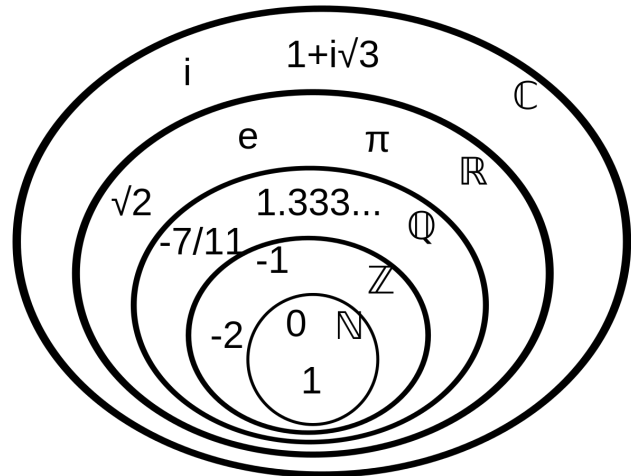
Hanya review, harusnya sejak SMP sudah paham mengenai himpunan / set hehe.

Misalkan A dan B adalah dua himpunan.

1. ϕ atau $\{\}$ adalah himpunan kosong atau himpunan yang tidak mempunyai elemen.
2. Banyak elemen dari A dinotasikan dengan $|A|$ (dibaca "kardinalitas dari A ") atau $n(A)$.
3. $x \in A$ dibaca x elemen dari A .
4. $A \subseteq B$ dibaca A subset dari B atau A himpunan bagian dari B .
5. $A \subset B$ dibaca A adalah proper subset dari B . Bedanya dengan \subseteq ?
 \subset itu mirip $<$ dimana tidak mungkin $A \subset A$, tetapi \subseteq itu mirip \leq karena mungkin $A \subseteq A$.
6. $A \cup B$ dibaca A union B atau A gabung B .
7. $A \cap B$ dibaca A intersection B atau A irisan B .
8. A^c atau A' dibaca A komplemen.
9. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

§2.4 Himpunan Bilangan-bilangan

1. \mathbb{N} adalah himpunan bilangan asli (Natural Numbers) $\{1, 2, 3, \dots\}$. Di beberapa negara Eropa dan beberapa negara lain, himpunan bilangan asli adalah $\{0, 1, 2, \dots\}$.
2. \mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. \mathbb{Q} adalah himpunan bilangan rasional, dengan definisi $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^+\}$.
4. \mathbb{R} adalah himpunan bilangan real, semua bilangan yang ada di dunia nyata, termasuk bilangan irasional seperti $\sqrt{2}$ dan rasional.
5. \mathbb{C} adalah himpunan bilangan kompleks dengan definisi
 $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}.$

Figure 1: dari: https://thinkzone.wlonk.com/Numbers/RealSet_w1000.pngFigure 2: dan <https://en.wikipedia.org/wiki/Number>

6. Definisikan pula \mathbb{Z}^+ sebagai himpunan bialangan bulat positif. Aturan yang sama juga berlaku: $\mathbb{R}^+, \mathbb{Q}^+$.

§3 Aljabar

§3.1 Pemfaktoran dan Penguraian

Pelajaran dari SMP ini mahh. Jangan dihafal secara sengaja, tetapi banyak-banyaklah latihan soal, nanti hafal sendiri :D.

Untuk $x, y, z \in \mathbb{C}$.

1. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.
2. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
3. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.
4. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
5. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
6. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
7. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
8. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 + 3xy(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

9. $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ untuk $n \in \mathbb{N}$.
10. $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ untuk n adalah bilangan asli ganjil.
11. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(y + z)^2 + \frac{1}{2}(z + x)^2$.
12. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2$.
13. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.
14. $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$.
15. (Identitas Sophie Germain) $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.
16. (Ekspansi Binomial) $(x + y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0y^n$.
17. (Fermat Two Square Identity) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (bc + ad)^2 + (bd - ac)^2$ untuk $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

§4 Teori Bilangan

Pada dasarnya aljabar tetapi di ranah bilangan bulat (atau rasional).

§4.1 Sifat-sifat Penjumlahan dan Perkalian Dua Bilangan Bulat

1. Bilangan Ganjil \pm Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
2. Bilangan Ganjil \pm Bilangan Genap = Bilangan Ganjil
3. Bilangan Genap \pm Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
4. Bilangan Genap \pm Bilangan Genap = Bilangan Genap
5. Bilangan Ganjil \times Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
6. Bilangan Ganjil \times Bilangan Genap = Bilangan Genap
7. Bilangan Genap \times Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
8. Bilangan Genap \times Bilangan Genap = Bilangan Genap

Dari sifat-sifat perkalian dua bilangan akan didapat bahwa bilangan genap tidak mungkin membagi bilangan ganjil sedangkan bilangan ganjil mungkin membagi bilangan genap.

§4.2 Keterbagian

Untuk bilangan bulat $a \neq 0$ serta bilangan bulat b, c, x dan y , notasikan $a \mid b$ sebagai a membagi b . Lalu, a dan b relatif prima atau a dan b koprima (coprime) jika dan hanya jika $FPB(a, b) = 1$.

1. Kita dapat menyatakan semua bilangan bulat $c = pq + r$ untuk suatu bilangan bulat q dimana $0 \leq r < q$. Jadi, saat c dibagi p , maka hasil baginya adalah q dan sisa baginya adalah r .
2. Terdapat suatu bilangan bulat x dimana $a \mid b \iff b = ax$.
3. $a \mid a$.
4. $a \mid 0$.
5. $1 \mid a$.
6. $a \mid b \implies a \mid bc$.
7. Untuk $a, b \neq 0$ maka $ab \mid c \implies a \mid c$ dan $b \mid c$.
8. $a \mid b$ dan $b \mid c \implies a \mid c$.
9. $a \mid b$ dan $a \mid c \implies a \mid bx + cy$.
10. Untuk $x \neq 0$ maka $a \mid b \iff xa \mid xb$.
11. $a \mid b$ dan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$.
12. $a \mid bc$ dan $FPB(a, b) = 1$ maka $a \mid c$.

§4.3 Uji habis dibagi

Trik yang suatu saat dapat membuat hidup anda bahagia wkwkwk. Semua rumus ini dapat dibuktikan dengan aritmatika modular.

1. Bilangan x genap jika dan hanya jika digit terakhir x genap.
2. $3 \mid x$ jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 3. Contohnya 2931 habis dibagi 3 karena $2 + 9 + 3 + 1 = 15$ habis dibagi 3.
3. $9 \mid x$ jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.
4. x habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir x adalah 0 atau 5.
5. x habis dibagi 11 jika dan hanya jika jumlah selang-seling (alternate sums) dari digit-digitnya habis dibagi 11. Contoh: 945351 habis dibagi 11 karena $9 - 4 + 5 - 3 + 5 - 1 = 11$ habis dibagi 11. 121 habis dibagi 11 karena $1 - 2 + 1 = 0$ habis dibagi 11.

§4.4 Aritmatika Modular

Untuk suatu bilangan asli m dan bilangan bulat a, b, c dan d , notasikan $m \mid a - b \iff a \equiv b \pmod{m}$ (dibaca a kongruen b modulo m). Sempelnya $a \equiv b \pmod{m}$ adalah a dibagi m bersisa b . Contohnya $5 \equiv 2 \pmod{3}$. $13 \equiv 3 \pmod{5}$. $10 \equiv -2 \pmod{12}$.

1. $a \equiv a \pmod{m}$.
2. $a \equiv 0 \pmod{m} \iff m \mid a$.
3. $a \equiv b \pmod{m} \iff b \equiv a \pmod{m}$.
4. $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$.
5. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $d \mid m$ maka $a \equiv b \pmod{d}$.
6. Untuk semua bilangan asli k , $a \equiv b \pmod{m} \iff a^k \equiv b^k \pmod{m}$.
7. $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m} \implies a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
8. $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m} \implies ac \equiv bd \pmod{m}$.
9. $\forall k \in \mathbb{Z}^+, (am + b)^k \equiv b^k \pmod{m}$.
10. Jika $ca \equiv cb \pmod{m}$ dengan $FPB(c, m) = 1$, maka $a \equiv b \pmod{m}$.

Penggunaan sifat nomor 8 dapat dimodifikasi sehingga menjadi konsep **Chinese Remainder Theorem**.

§5 Kombinatorika

Notasikan $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ (dibaca n faktorial) dengan $1! = 0! = 1$.

§5.1 Kombinasi dan Permutasi

Permutasi k unsur dari n unsur adalah (urutan diperhatikan)

$${}_nP_K = P_k^n = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Kombinasi k unsur dari n unsur adalah (urutan tak diperhatikan)

$$\binom{n}{k} = {}_nC_K = C_k^n = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

§5.2 Permutasi Siklis

n objek ditaruh mengelilingi lingkaran maka banyak cara menyusunnya adalah

$$P_{siklis} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

§5.3 Stars and Bars

Banyaknya solusi bulat non-negatif (x_1, x_2, \dots, x_k) dari sistem persamaan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ adalah

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Banyaknya solusi bulat positif (x_1, x_2, \dots, x_k) dari sistem persamaan $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ adalah

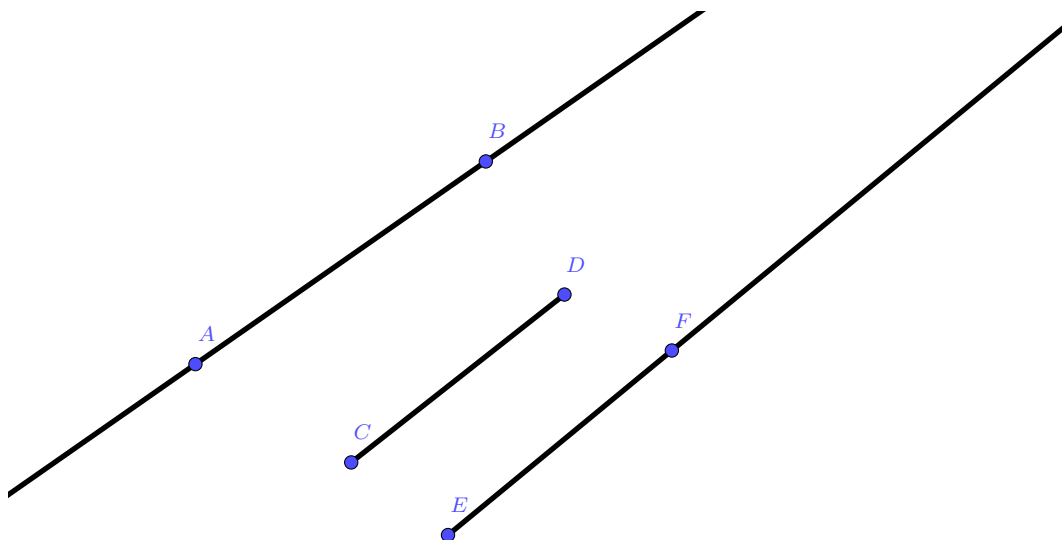
$$\binom{n-1}{k-1}.$$

§6 Geometri

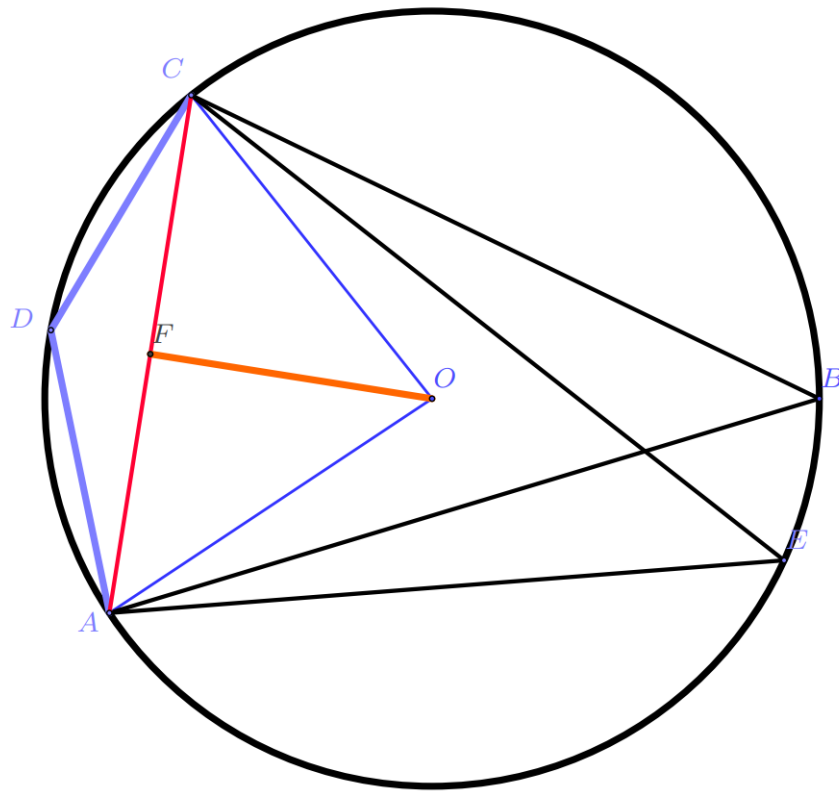
Pada dasarnya geometri di olimpiade matematika SMA "hanya" tentang lingkaran dan segitiga , "saja".

§6.1 Garis, Segmen Garis, Sinar (Bukan Vektor ya...)

Perlu ditekankan bahwa **garis tidak sama dengan ruas garis**. Garis panjangnya tak hingga, sedangkan ruas garis atau segmen garis panjangnya terbatas. Gambar di bawah terdiri dari **garis** AB, segmen garis CD, sinar EF.



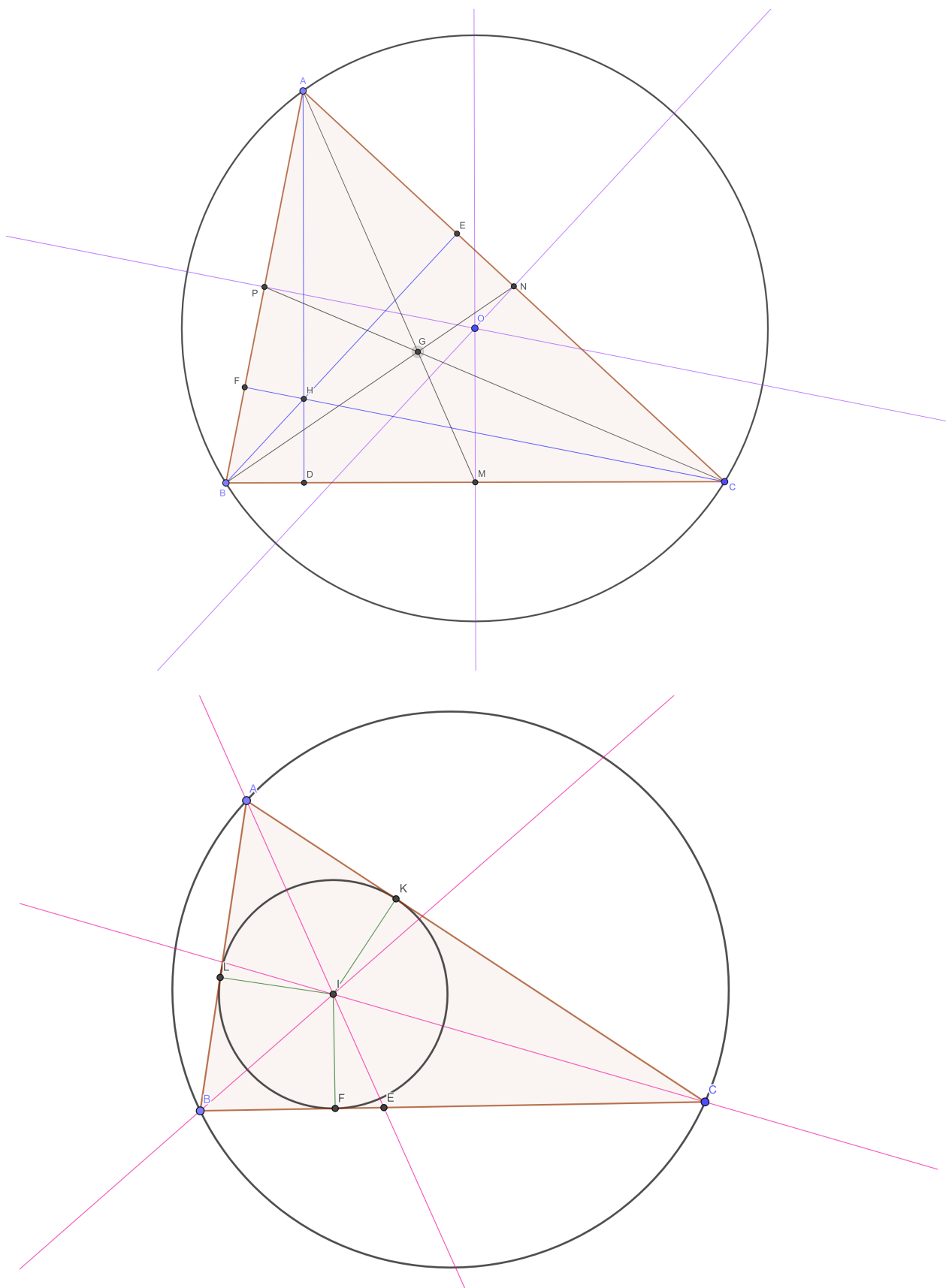
§6.2 Lingkaran



Misalkan O pusat lingkaran dan A, B, C, D, E adalah sembarang titik seperti gambar.

1. $CO = OA$ adalah jari-jari dengan $\angle ACO = \angle OAC$.
2. Misalkan titik F adalah titik tengah tali busur CA , maka $OF \perp CA$ atau OF tegak lurus dengan CA , dengan kata lain, F adalah proyeksi titik O ke CA
3. (Sudut keliling-sudut pusat) Untuk $\angle COA = 2\angle CBA$.
4. (sudut keliling) $\angle CBA = \angle CEA$.
5. $ABCD$ adalah segiempat tali busur atau segiempat siklis atau A, B, C, D terletak di lingkaran (seperti pada gambar) jika dan hanya jika $\angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$.

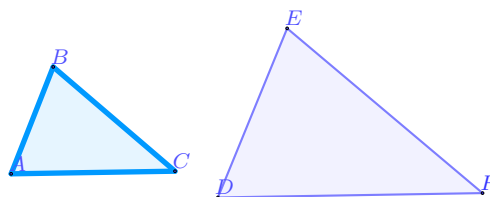
§7 Segitiga



Pada segitiga ABC ,

1. Berlaku **ketaksamaan segitiga** yaitu $AB + BC > CA$, $BC + CA > AB$, dan $CA + AB > BC$. Selain itu juga berlaku $|AB - BC| < CA$, $|BC - CA| < AB$, dan $|CA - AB| < BC$.
2. Garis bagi AE yaitu garis yang membagi dua sudut A sama besar sehingga $\angle BAE = \angle EAC$. Berlaku **Teorema Garis Bagi**, yaitu $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$.
3. Garis berat AM dengan M adalah titik tengah BC .
4. Garis tinggi AD adalah garis yang tegak lurus dengan BC . D biasa disebut dengan proyeksi A ke BC .
5. Garis OM adalah salah satu garis sumbu segitiga ABC , yaitu garis yang melewati titik tengah sisi segitiga dan tegak lurus dengan sisi itu.
6. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis tinggi segitiga ABC adalah titik tinggi, dalam gambar ini adalah H (orthocenter).
7. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis bagi segitiga ABC adalah titik bagi atau titik pusat lingkaran dalam (incircle L_2) segitiga ABC dalam gambar ini adalah I (incenter).
8. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis berat segitiga ABC adalah titik berat (centroid).
9. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis sumbu segitiga ABC adalah titik pusat lingkaran luar (circumcircle L_1) segitiga ABC yang dalam gambar ini adalah O (circumcenter).

§7.1 Kesebangunan Segitiga

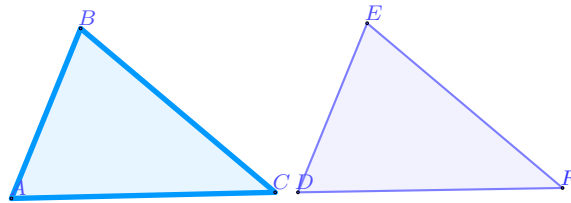


Segitiga ABC dan DEF sebangun atau $ABC \sim DEF$ jika dan hanya jika minimal salah satu syarat ini terpenuhi:

1. $\angle ABC = \angle DEF$ dan $\angle BAC = \angle EDF$.
2. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

3. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ dan $\angle ABC = \angle DEF$ (sudut yang diapit dua sisi yang diperbandingkan nilainya sama)

§7.2 Kekongruenan Segitiga



Sedangkan ABC dan DEF dikatakan kongruen atau $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ jika dan hanya jika $AB = DE, BC = EF, CA = FD$ atau dengan kata lain kedua segitiga tersebut sebangun dan ada salah satu sisi dari kedua segitiga tersebut yang panjangnya sama. Sempelnya kongruen = sama persis.

§7.3 Trigonometri

Banyak sih rumusnya, tapi yang paling sering dipake di olim:

1. $\sin(-x) = -\sin x$.
2. $\cos(-x) = \cos x$.
3. $\tan(-x) = -\tan x$.
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
5. $\sin(90^\circ - x) = \sin(90^\circ + x) = \cos x$.
6. $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.
7. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
8. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$.
9. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.
10. $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$.

Cara menghafal yang gampang bisa make "metode sumbu" (ask me on training to knows more)

§8 Latihan Soal

§8.1 Aljabar

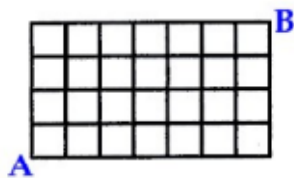
1. Jika $x = 2021^3 - 2019^3$, maka nilai $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$ adalah ...
2. dari $\sqrt{5050^2 - 4950^2}$ adalah ...
3. (OSP 2008) Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka nilai $\frac{a+b}{a-b} = \dots$
4. Jika $x > 0$ dan $x + \frac{1}{x} = 5$, maka nilai $x^3 + \frac{1}{x^3}$ adalah ...
5. (OSK 2017) Diketahui $x - y = 10$ dan $xy = 10$. Nilai $x^4 + y^4$ adalah ...
6. Jika $a + b + c = 0$, buktikan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
7. (AIME 1987) Tentukan nilai sederhana dari $\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}$

§8.2 Teori Bilangan

1. (OSN SMP 2003) Buktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ selalu habis dibagi 6 untuk semua bilangan asli n .
2. Carilah semua bilangan bulat n sehingga $\frac{2n+6}{n-1}$ adalah bilangan bulat.
3. (OSK 2002) Bilangan asli n terbesar sehingga $8^n \mid 44^{44}$ adalah ...
4. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$.
5. Jika a dan b adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2017$, maka nilai dari $a^2 + b^2$ adalah ...
6. (AIME 1986) Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga $n + 10 \mid n^3 + 100$.
7. (OSK 2010) Nilai n terkecil sehingga $\underbrace{20102010 \dots 2010}_{n \text{ buah } 2010}$ habis dibagi 99 adalah ...
8. Jika dihitung maka didapat $17! = 3a56874280b6000$. Tentukan nilai digit a dan b .
9. Tentukan digit satuan dari 7^{7^7} .
10. Jika $S = 1! + 2! + 3! + \dots + 2021!$, tentukan sisa S saat dibagi 6.
11. (OSK 2009) Sisa saat $10^{999999999}$ saat dibagi oleh 7 adalah ...
12. (OSK 2011) Bilangan asli terkecil $n > 2011$ yang bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 adalah

§8.3 Kombinatorika

1. Misalkan terdapat 3 buah celana dan 4 buah baju. Permasalahannya adalah ada berapa banyak cara seseorang memilih celana dan baju yang akan dipakai ?
2. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf R, A, J, I, N jika
 - a) huruf pertama dimulai dari huruf hidup (vokal)
 - b) huruf pertama dimulai dari huruf mati (konsonan)
3. Sembilan orang siswa akan duduk pada 5 kursi sejajar. Ada berapa cara susunan mereka ?
4. Denny akan membentuk bilangan genap 3 angka yang angka-angkanya diambil dari 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :
 - a) angka-angkanya boleh berulang
 - b) angka-angkanya tidak boleh berulang
5. (OSK 2003) Ada berapa banyak bilangan 4-angka (digit) yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?
6. Carilah banyaknya menempatkan 3 benteng (rooks) pada papan catur 5×5 sehingga tidak ada dua catur yang dalam posisi dapat saling menyerang.
7. Sekumpulan orang duduk mengelilingi sebuah meja bundar. Diketahui ada 7 wanita dimana di sebelah kanan setiap wanita tersebut adalah wanita dan ada 12 wanita yang di sebelah kanan setiap wanita tersebut adalah pria. Diketahui pula bahwa 3 dari 4 pria di sebelah kanannya adalah wanita. Berapa orang yang duduk mengelilingi meja tersebut?
8. Carilah banyaknya kuadrupel terurut bilangan ganjil positif (x_1, x_2, x_3, x_4) yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$.
9. Perhatikan gambar berikut.



Jika seseorang akan berjalan dari titik A ke titik B. Ada berapa banyak cara jalan terpendek yang dapat dipilihnya ?

10. (OSP 2003) Empat pasang suami istri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok istri. Untuk masing-masing kelompok

disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?

11. (OSK 2010) Banyaknya himpunan X yang memenuhi

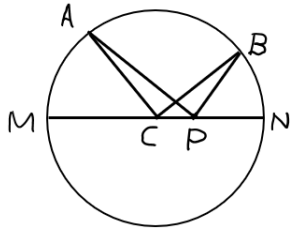
$$\{1, 2, \dots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, \dots, 2010\}.$$

12. (OSP 2010) Bilangan enam digit $abcdef$ dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak ...

13. (OSK 2017) Sebuah hotel mempunyai kamar bernomor 000 sampai dengan 999. Hotel tersebut menerapkan aturan aneh sebagai berikut: jika suatu kamar berisi tamu, dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya, maka diperoleh nomor kamar yang sama atau nomor kamar yang tidak berisi tamu. Maksimal banyaknya kamar yang berisi tamu adalah ...

§8.4 Geometri

1. Pada segiempat $WXYZ$ dengan diagonal yang saling tegak lurus diketahui bahwa $\angle WZX = 30^\circ$, $\angle XWY = 40^\circ$, and $\angle WYZ = 50^\circ$. Hitunglah besar $\angle X$ dan $\angle Z$.
2. Garis berat AD pada segitiga ABC memotong garis berat CF di titik P , serta perpanjangan BP memotong AC di E . Jika diketahui segitiga ABC lancip dan $AB = 6$, maka panjang DE adalah ...
3. (OSK 2013) Diberikan segitiga lancip ABC dengan O sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan M dan N berturut - turut pertengahan OA dan BC . Jika $\angle ABC = 4\angle OMN$ dan $\angle ACB = 6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN$ sama dengan ...
4. (Soal Legend: OSK 2011,2012,2013,2018) Diberikan segitiga ABC dan lingkaran Γ yang berdiameter AB . Lingkaran Γ memotong sisi AC dan BC berturut-turut di titik D dan E . Jika $AD = \frac{1}{3}AC$, $BE = \frac{1}{4}BC$ dan $AB = 30$, maka luas segitiga ABC adalah ...
5. Diberikan segitiga ABC dengan D titik tengah AC , E titik tengah BD , dan H merupakan pencerminan A terhadap E . Jika F merupakan perpotongan antara AH dengan BC , maka nilai $\frac{AF}{FH}$ sama dengan ...
6. Pada gambar di bawah, diketahui titik $A \neq B$ pada lingkaran berdiameter MN dan berpusat di C . P adalah titik pada segmen CN dimana $\angle CAP = \angle CBP = 10^\circ$. Jika $\angle ACM = 40^\circ$, maka $\angle BCN = \dots^\circ$



7. Diberikan sebuah segitiga dengan panjang sisi $BC = 20$, $CA = 24$, dan $AB = 12$. Titik D pada segmen BC dengan $BD = 5$. Lingkaran luar dari segitiga ABD memotong CA di E . Hitunglah nilai $2 \times DE$.
8. Jika $A + B = 45^\circ$ dan $\cos A \sin B = \frac{\sqrt{2}}{6}$, maka $\cos(B - A) = \dots$
9. Nilai dari $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}$ adalah \dots
10. Pada segitiga ABC , buktikan bahwa $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.
11. Tentukan nilai eksak dari $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 89^\circ$.
12. (OSK 2005) Nilai dari $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ$ adalah \dots

§9 Referensi

1. Hermanto, Eddy. 2011. Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika Dasar.