Basic Lessons on High School Math Olympiad Part 1

Azzam L. H.

February 13, 2024

Daftar Isi

§1 Aljabar

§1.1 Pemfaktoran dan Penguraian

Tips: Jangan dihafal secara sengaja, tetapi banyak-banyaklah latihan soal, nanti hafal sendiri :D.

Untuk $x, y, z \in \mathbb{C}$.

§1.1.1 Basic yang paling sering muncul

1. $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.
2. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
3. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
4. $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
5. $(x-y)^3 = x^3 - y^3 + 3xy(x-y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.
6. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.
7. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.
8. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ untuk $n \in \mathbb{N}$.
9. $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ untuk n bilangan asli **ganjil**.

§1.1.2 Lebih Advanced

1. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(y+z)^2 + \frac{1}{2}(z+x)^2$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2$.
4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.
5. $(x+1)(y+1)(z+1) = xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$.
6. (Identitas Sophie Germain) $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.
7. (Ekspansi Binomial) $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 y^n$.
8. (Fermat Two Square Identity / Brahmagupta-Fibonacci Identity)
   $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (bc + ad)^2 + (bd - ac)^2$ untuk $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

§1.2 Latihan Soal Pemfaktoran dan Manipulasi Aljabar

1. Nilai dari $\sqrt{5050^2 - 4950^2}$ adalah ...

2. (OSP 2008) Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka nilai $\dfrac{a+b}{a-b} = \ldots$

3. Jika $x > 0$ dan $x + \dfrac{1}{x} = 5$, maka nilai $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ adalah ...

4. (OSK 2017) Diketahui $x - y = 10$ dan $xy = 10$. Nilai $x^4 + y^4$ adalah ...

5. (OSK 2018) Diketahui x dan y bilangan prima dengan $x < y$, dan $x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$. Nilai x yang memenuhi adalah ...

6. Jika $a + b + c = 0$ untuk suatu bilangan riil a, b, c, buktikan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

7. Jika $x = 2021^3 - 2019^3$, maka nilai $\sqrt{\dfrac{x-2}{6}}$ adalah ...

8. (AIME 1987) Tentukan nilai sederhana dari $\dfrac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$

9. (OSK 2017) Jika $\dfrac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\dfrac{4}{7}$, maka nilai dari $\dfrac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$ adalah ...

10. (OSK 2019) Diketahui $a + 2b = 1$, $b + 2c = 2$, dan $b \neq 0$. Jika $a + nb + 2018c = 2019$ maka nilai n adalah ...

11. (OSK 2019) Misalkan $a = 2\sqrt{2} - \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ dan $b = 2\sqrt{2} + \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$. Jika $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$ dengan x, y bulat, maka nilai $x + y$ adalah ...

12. (OSK 2015) Diketahui bilangan real positif a dan b memenuhi persamaan

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6 \text{ dan } a^2 + ab + b^2 = 4$$

    Nilai dari $a + b$ adalah ...

13. (OSK 2022) Diketahui a, b, c, d bilangan real positif yang memenuhi $a > c$, $d > b$, dan

$$3a^2 + 3b^2 = 3c^2 + 3d^2 = 4ac + 4bd.$$

    Nilai $\dfrac{12(ab+cd)}{ad+bc} = \ldots$

§1.3 Eksponen

Untuk $a, b, c \in RR$

1. $a^0 = 1$ untuk $a \neq 0$.

2. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kali}}$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

3. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

4. $a^b \cdot c^b = (ac)^b$.

5. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ untuk $a \neq 0$.

6. $(a^b)^c = a^{bc}$.

7. $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$ untuk $a \neq 0$.

8. $\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$ untuk $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$

§1.4 Latihan Soal Eksponen

1. Carilah jumlah semua bilangan bulat positif a yang memenuhi $a^{(a-1)^{(a-2)}} = a^{a^2-3a+2}$.

2. Carilah jumlah seluruh solusi real x yang memenuhi $(x^2+5x+5)^{x^2-10x+21} = 1$.

3. Jika $5^x = 6^y = 30^7$, berapakah nilai $\dfrac{xy}{x+y}$?

§2 Teori Bilangan

Pada dasarnya aljabar tetapi di ranah bilangan bulat (atau rasional).

§2.1 Paritas Penjumlahan dan Perkalian antara Dua Bilangan

Paritas dalam konteks ini adalaha "genap-ganjil" nya suatu bilangan.

1. Bilangan Ganjil $\pm$ Bilangan Ganjil $=$ Bilangan Genap
2. Bilangan Genap $\pm$ Bilangan Ganjil $=$ Bilangan Ganjil
3. Bilangan Genap $\pm$ Bilangan Genap $=$ Bilangan Genap
4. Bilangan Ganjil $\times$ Bilangan Ganjil $=$ Bilangan Ganjil
5. Bilangan Ganjil $\times$ Bilangan Genap $=$ Bilangan Genap
6. Bilangan Genap $\times$ Bilangan Genap $=$ Bilangan Genap

Dari sifat-sifat perkalian dua bilangan akan didapat bahwa bilangan genap tidak mungkin membagi bilangan ganjil sedangkan bilangan ganjil mungkin membagi bilangan genap.

§2.2 Latihan Soal Paritas

1. (OSK 2012) Banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi

$$(n-1)(n-3)(n-5)\dots(n-2013) = n(n+2)(n+4)\dots(n+2012)$$

adalah ...

§2.3 Keterbagian

Untuk bilangan bulat $a \neq 0$ serta bilangan bulat b, c, x dan y, notasikan $a \mid b$ sebagai a membagi b. Lalu, a dan b relatif prima atau a dan b koprima (coprime) jika dan hanya jika $FPB(a, b) = 1$.

1. Kita dapat menyatakan semua bilangan bulat $c = pq + r$ untuk suatu bilangan bulat q dimana $0 \leq r < q$. Jadi, saat c dibagi p, maka hasil baginya adalah q dan sisa baginya adalah r.
2. Terdapat suatu bilangan bulat x dimana $a \mid b \iff b = ax$.
3. $a \mid a$.
4. $a \mid 0$.

5. $1 \mid a$.
6. $a \mid b \implies a \mid bc$.
7. Untuk $a, b \neq 0$ maka $ab \mid c \implies a \mid c$ dan $b \mid c$.
8. $a \mid b$ dan $b \mid c \implies a \mid c$.
9. $a \mid b$ dan $a \mid c \implies a \mid bx + cy$.
10. $a \mid b$ dan $a \mid c \implies a \mid b + c$.
11. $a \mid b$ dan $a \mid c \implies a \mid b - c$.
12. Untuk $x \neq 0$ maka $a \mid b \iff xa \mid xb$.
13. $a \mid b$ dan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$.
14. $a \mid bc$ dan $FPB(a, b) = 1$ maka $a \mid c$.

§2.4 Latihan Soal Keterbagian

1. Carilah semua bilangan bulat n sehingga $\dfrac{2n+6}{n-1}$ adalah bilangan bulat.
2. (OSK 2002) Bilangan asli n terbesar sehingga $8^n \mid 44^{44}$ adalah ...
3. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{6}$.
4. Jika a dan b adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2017$, maka nilai dari $a^2 + b^2$ adalah ...
5. (AIME 1986) Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga $n + 10 \mid n^3 + 100$.
6. (OSK 2015) Bilangan bulat x jika dikalikan 11 terletak di antara 1500 dan 2000. Jika x dikalikan 7 terletak di antara 970 dan 1275. Jika x dikalikan 5 terletak di antara 690 dan 900. Banyaknya bilangan x sedemikian yang habis dibagi 3 sekaligus habis dibagi 5 ada sebanyak ...
7. (OSN SMP 2003) Buktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ selalu habis dibagi 6 untuk semua bilangan asli n.

§2.5 Aritmatika Modular

Untuk suatu bilangan asli m dan bilangan bulat a, b, c dan d, notasikan $m \mid a - b \iff a \equiv b \mod m$ (dibaca a kongruen b modulo m). Simpelnya $a \equiv b \mod m$ adalah a dibagi m bersisa b. Contohnya $5 \equiv 2 \mod 3$. $13 \equiv 3 \mod 5$. $10 \equiv -2 \mod 12$.

1. $a \equiv a \mod m$.
2. $a \equiv 0 \mod m \iff m \mid a$.
3. $a \equiv b \mod m \iff b \equiv a \mod m$.
4. $a \equiv b \mod m$ dan $b \equiv c \mod m \implies a \equiv c \mod m$.
5. Jika $a \equiv b \mod m$ dan $d \mid m$ maka $a \equiv b \mod d$.
6. Untuk semua bilangan asli k, $a \equiv b \mod m \iff a^k \equiv b^k \mod m$.
7. $a \equiv b \mod m$ dan $c \equiv d \mod m \implies a + c \equiv b + d \mod m$.
8. $a \equiv b \mod m$ dan $c \equiv d \mod m \implies a - c \equiv b - d \mod m$.
9. $a \equiv b \mod m$ dan $c \equiv d \mod m \implies ac \equiv bd \mod m$.
10. $\forall k \in \mathbb{Z}^+, (am + b)^k \equiv b^k \mod m$.
11. Jika $ca \equiv cb \mod m$ dengan $FPB(c, m) = 1$, maka $a \equiv b \mod m$.

Catatan: Penggunaan sifat nomor 8 dapat dimodifikasi sehingga menjadi konsep **Chinese Remainder Theorem**.

§2.6 Latihan Soal Aritmatika Modular

1. (AIME 1986) Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga $n + 10 \mid n^3 + 100$.
2. Tentukan digit satuan dari 7^{7^7}.
3. Jika $S = 1! + 2! + 3! + \cdots + 2021!$, tentukan sisa S saat dibagi 6.
4. (OSK 2009) Sisa saat $10^{999999999}$ saat dibagi oleh 7 adalah ...
5. (OSK 2011) Bilangan asli terkecil $n > 2011$ yang bersisa 1 jika dibagi $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ adalah ....

6. (OSK 2015) Bilangan x adalah bilangan bulat positif terkecil yang membuat

$$31^n + x \cdot 96^n$$

merupakan kelipatan 2015 untuk setiap bilangan asli n. Nilai x adalah ...

§2.7 Uji habis dibagi

Trik yang suatu saat dapat membuat hidup anda bahagia :D. Semua rumus ini dapat dibuktikan dengan aritmatika modular.

1. Bilangan x genap jika dan hanya jika digit terakhir x genap.

2. $3 \mid x$ jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 3. Contohnya 2931 habis dibagi 3 karena $2 + 9 + 3 + 1 = 15$ habis dibagi 3.

3. $9 \mid x$ jika dan hanya jika jumlah digit-digitnya habis dibagi 9.

4. x habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir x adalah 0 atau 5.

5. x habis dibagi 11 jika dan hanya jika jumlah selang-seling (alternate sums) dari digit-digitnya habis dibagi 11. Contoh: 945351 habis dibagi 11 karena $9 - 4 + 5 - 3 + 5 - 1 = 11$ habis dibagi 11. 121 habis dibagi 11 karena $1 - 2 + 1 = 0$ habis dibagi 11.

§2.8 Latihan Soal Uji Habis Dibagi

1. Show that a number is divisible by 9 if and only if the sum of its digits is divisible by 9. How about divisibility by 11?

2. (OSK 2010) Nilai n terkecil sehingga $\underbrace{20102010\ldots2010}_{n \text{ buah } 2010}$ habis dibagi 99 adalah ...

3. Jika dihitung maka didapat $17! = 3a56874280b6000$. Tentukan nilai digit a dan b.

§3 Kombinatorika

Notasikan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ (dibaca n faktorial) dengan $1! = 0! = 1$.

§3.1 Aturan Pencacahan

§3.2 Latihan Soal Pencacahan: Aturan Penjumlahan dan Perkalian

1. Misalkan Michie mempunyai 3 buah celana dan 4 buah baju. Berapa banyak cara Michie memilih celana dan baju yang akan dipakai ?

2. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf R, A, J, I, N jika

   a) huruf pertama dimulai dari huruf hidup (vokal)

   b) huruf pertama dimulai dari huruf mati (konsonan)

3. Sembilan orang siswa akan duduk pada 5 kursi sejajar. Ada berapa cara susunan mereka ?

4. Denny akan membentuk bilangan genap 3 angka yang angka-angkanya diambil dari 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :

   a) angka-angkanya boleh berulang

   b) angka-angkanya tidak boleh berulang

5. (OSK 2003) Ada berapa banyak bilangan 4-angka (digit) yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?

6. Sekumpulan orang duduk mengelilingi sebuah meja bundar. Diketahui ada 7 wanita dimana di sebelah kanan setiap wanita tersebut adalah wanita dan ada 12 wanita yang di sebelah kanan setiap wanita tersebut adalah pria. Diketahui pula bahwa 3 dari 4 pria di sebelah kanannya adalah wanita. Berapa orang yang duduk mengelilingi meja tersebut?

7. (OSK 2015) Masing-masing kotak pada papan catur berukuran 3×3 dilabeli dengan satu angka yaitu 1, 2, atau 3. Banyaknya penomoran yang mungkin sehingga jumlah angka pada masing-masing baris dan masing-masing kolom habis dibagi 3 adalah ...

§3.3 Permutasi

Permutasi k unsur dari n unsur adalah (urutan diperhatikan)

$$_nP_k = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

§3.4 Latihan Soal Permutasi

1. Sembilan orang siswa akan duduk pada 5 kursi sejajar. Ada berapa cara susunan mereka ?

2. Denny akan membentuk bilangan genap 3 angka yang angka-angkanya diambil dari 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :

   a) angka-angkanya boleh berulang

   b) angka-angkanya tidak boleh berulang

3. (OSP 2003) Empat pasang suami istri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok istri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?

4. (OSK 2022) Di suatu ruangan terdapat 12 kursi yang disusun menjadi 3 baris. Di baris pertama, terdapat 3 kursi. Di baris kedua, terdapat 4 kursi. Di baris ketiga, terdapat 5 kursi. Jika kursi akan diduduki oleh 12 siswa termasuk Aska dan Budi. Misal banyaknya cara untuk 12 siswa menempati tempat duduk jika Aska dan Budi ada di baris pertama adalah A. Nilai dari $\frac{A}{8!}$ adalah . . .

§3.5 Kombinasi

Kombinasi k unsur dari n unsur adalah (urutan tak diperhatikan)

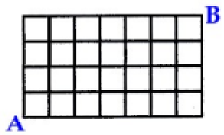
$$\binom{n}{k} = {}_nC_k = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

§3.6 Latihan Soal Kombinasi

1. Carilah banyaknya menempatkan 3 benteng (rooks) pada papan catur 5×5 sehingga tidak ada dua catur yang dalam posisi dapat saling menyerang.

2. Carilah banyaknya kuadrupel terurut bilangan ganjil positif (x_1, x_2, x_3, x_4) yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$.

3. Perhatikan gambar berikut.



Jika seseorang akan berjalan dari titik A ke titik B. Ada berapa banyak cara jalan terpendek yang dapat dipilihnya ?

4. (OSK 2010) Banyaknya himpunan X yang memenuhi

$$\{1, 2, \ldots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, \ldots, 2010\}.$$

5. (OSP 2010) Bilangan asli enam digit $abcdef$ dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak ...

6. (OSK 2017) Sebuah hotel mempunyai kamar bernomor 000 sampai dengan 999. Hotel tersebut menerapkan aturan aneh sebagai berikut: jika suatu kamar berisi tamu, dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya, maka diperoleh nomor kamar yang sama atau nomor kamar yang tidak berisi tamu. Maksimal banyaknya kamar yang berisi tamu adalah ...

§3.7 Permutasi Siklis

n objek ditaruh mengelilingi lingkaran maka banyak cara menyusunnya adalah

$$P_{siklis} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

§3.8 Latihan Soal Permutasi Siklis

1. (OSK 2013) Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana setiap meja akan diduduki oleh minimal satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah ...

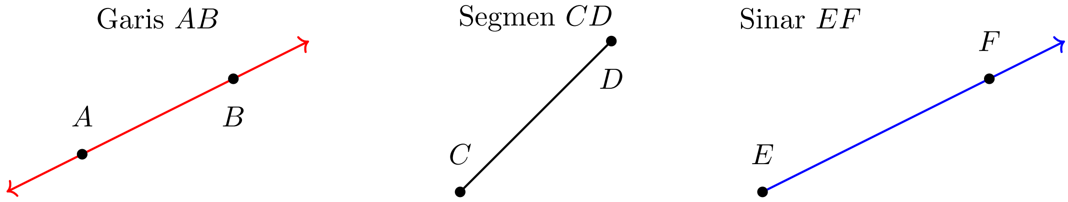
2. (OSK 2015) Suatu sekolah mempunyai lima kelompok belajar siswa kelas 11. Kelompok-kelompok belajar itu berturut-turut mengirimkan 2, 2, 2, 3, dan 3 siswa untuk suatu pertemuan. Mereka akan duduk melingkar sehingga setiap siswa memiliki paling sedikit satu teman dari kelompok belajar yang sama yang duduk di sampingnya. Banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah ...
   (Dua cara mereka duduk melingkar dianggap sama jika salah satu cara dapat diperoleh dari cara yang lain dengan suatu rotasi)

§4 Geometri

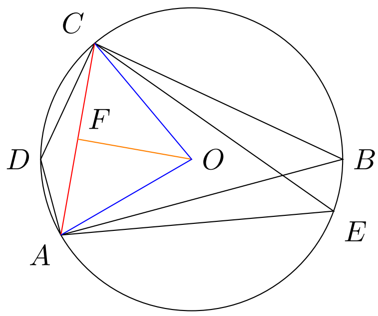
Pada dasarnya geometri di olimpiade matematika SMA ”hanya” tentang lingkaran dan segitiga dua dimensi (Soal bangun tiga dimensi hampir ngga pernah dikeluarin untuk lomba tingkat SMA).

§4.1 Garis, Segmen Garis, Sinar (Bukan Vektor!)

Perlu ditekankan bahwa **garis tidak sama dengan ruas garis**. Garis panjangnya tak hingga, sedangkan ruas garis atau segmen garis panjangnya terbatas. Gambar di bawah terdiri dari **garis AB, segmen garis CD, sinar EF**.



§4.2 Lingkaran

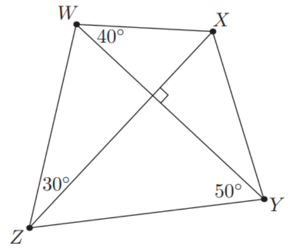


Misalkan O pusat lingkaran Γ dan A, B, C, D, E adalah sembarang titik pada lingkaran Γ seperti pada gambar.

1. $CO = OA$ adalah jari-jari dengan $\angle ACO = \angle OAC$.
2. Misalkan titik F adalah titik tengah tali busur CA, maka $OF \perp CA$ atau OF tegak lurus dengan CA, dengan kata lain, F adalah proyeksi titik O ke CA
3. (Sudut keliling-sudut pusat) Untuk$\angle COA = 2\angle CBA$.
4. (sudut keliling) $\angle CBA = \angle CEA$.
5. $ABCD$ adalah segiempat tali busur atau segiempat siklis atau A, B, C, D terletak di lingkaran (seperti pada gambar) jika dan hanya jika $\angle CBA + \angle ADC = 180°$ atau $\angle ABD = \angle ACD$.

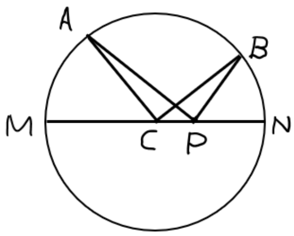
§4.3 Latihan Soal Lingkaran

1. Pada segiempat $WXYZ$ dengan diagonal yang saling tegak lurus diketahui bahwa $\angle WZX = 30°, \angle XWY = 40°$, and $\angle WYZ = 50°$. Hitunglah besar $\angle X$ dan $\angle Z$.



2. (OSK 2013) Diberikan segitiga lancip ABC dengan O sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan M dan N berturut - turut pertengahan OA dan BC. Jika $\angle ABC = 4\angle OMN$ dan $\angle ACB = 6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN$ sama dengan . . .

3. Pada gambar di bawah, diketahui titik A $\neq$ B pada lingkaran berdiameter MN dan berpusat di C. P adalah titik pada segmen CN dimana $\angle CAP = \angle CBP = 10°$. Jika $\angle ACM = 40°$, maka $\angle BCN = \ldots°$

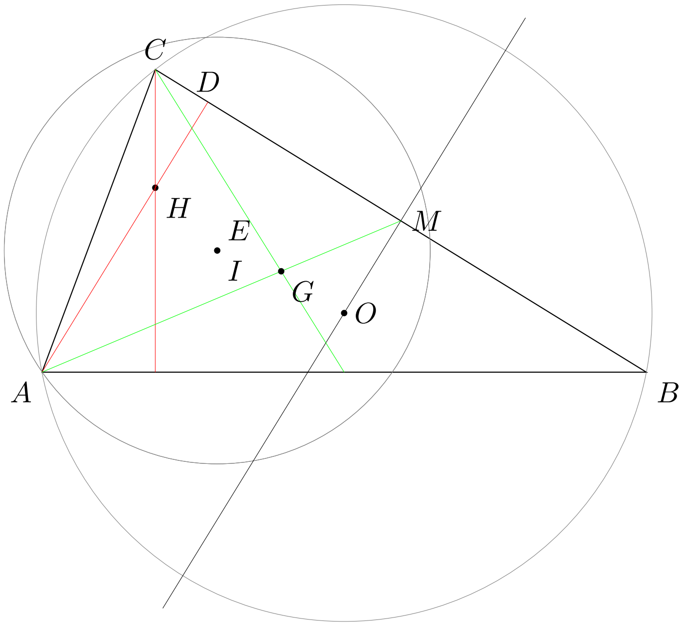


4. (OSK 2011,2012,2013,2018) Diberikan segitiga ABC dan lingkaran Γ yang berdiameter AB. Lingkaran Γ memotong sisi AC dan BC berturut-turut di titik D dan E. Jika $AD = \frac{1}{3}AC, BE = \frac{1}{4}BC$ dan $AB = 30$, maka luas segitiga ABC adalah . . .

5. (OSK 2015) Diberikan segitiga ABC dengan sudut $\angle ABC = 90°$. Lingkaran L_1 dengan AB sebagai diameter sedangkan lingkaran L_2 dengan BC sebagai diameternya. Kedua lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di B dan P. Jika $AB = 5$, $BC = 12$ dan $BP = x$ maka nilai dari $\frac{240}{x}$ adalah . . .

§4.4 Segitiga

Pada segitiga ABC seperti gambar berikut:



1. Garis bagi AE yaitu garis yang membagi dua sudut A sama besar sehingga $\angle BAE = \angle EAC$.

2. Garis berat AM dengan M adalah titik tengah BC.

3. Garis tinggi AD adalah garis yang tegak lurus dengan BC. D biasa disebut dengan proyeksi A ke BC.

4. Garis OM adalah salah satu garis sumbu segitiga ABC, yaitu garis yang melewati titik tengah sisi segitiga dan tegak lurus dengan sisi itu.

5. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis tinggi segitiga ABC adalah titik tinggi, dalam gambar ini adalah H (orthocenter).

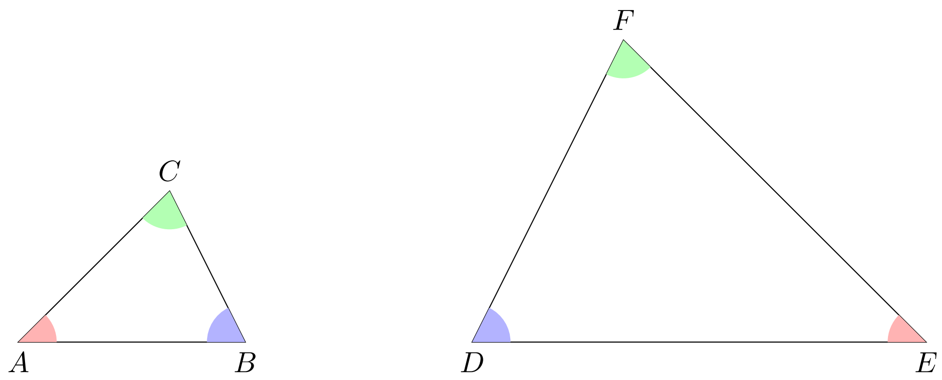
6. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis bagi segitiga ABC adalah titik bagi atau titik pusat lingkaran dalam (incircle) segitiga ABC dalam gambar ini adalah I (incenter).

7. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis berat segitiga ABC adalah titik berat (centroid).

8. Pertemuan atau perpotongan ketiga garis sumbu segitiga ABC adalah titik pusat lingkaran luar (circumcircle) segitiga ABC yang dalam gambar ini adalah O (circumcenter).

9. Berlaku **ketaksamaan segitiga** yaitu $AB + BC > CA$, $BC + CA > AB$, dan $CA + AB > BC$. Selain itu juga berlaku $|AB - BC| < CA$, $|BC - CA| < AB$, dan $|CA - AB| < BC$.

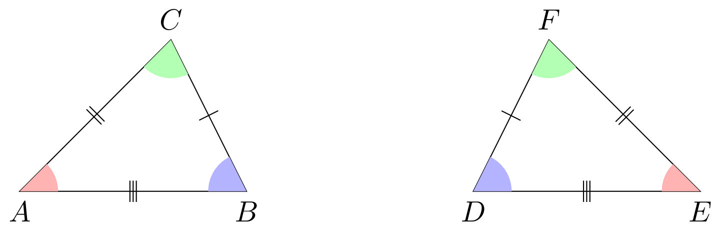
§4.5 Kesebangunan Segitiga



Segitiga ABC dan DEF sebangun atau $ABC \sim DEF$ jika dan hanya jika minimal salah satu syarat ini terpenuhi:

1. $\angle ABC = \angle DEF$ dan $\angle BAC = \angle EDF$.
2. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$.
3. $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ dan $\angle ABC = \angle DEF$ (sudut yang diapit dua sisi yang diperbandingkan nilainya sama)

§4.6 Kekongruenan Segitiga

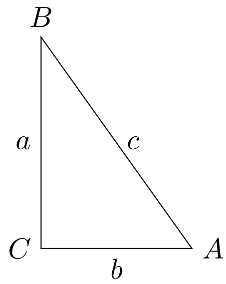


Sedangkan ABC dan DEF dikatakan kongruen atau $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ jika dan hanya jika $AB = DE, BC = EF, CA = FD$ atau dengan kata lain kedua segitiga tersebut sebangun dan ada salah satu sisi dari kedua segitiga tersebut yang panjangnya sama. Simpelnya kongruen = sama persis.

§4.7 Teorema Pythaogras

Salah satu teorema paling terkenal di kalangan awam (atau setidaknya di pop culture). Diberikan segitiga ABC dengan sudut C siku-siku. Jika panjang sisi $AB = c$, $BC = a$, dan $CA = b$, maka berlaku

$$a^2 + b^2 = c^2$$



§4.8 Latihan Soal Segitiga

1. Garis berat AD pada segitiga ABC memotong garis berat CF di titik P, serta perpanjangan BP memotong AC di E. Jika diketahui segitiga ABC lancip dan $AB = 6$, maka panjang DE adalah ...

2. (OSK 2011,2012,2013,2018) Diberikan segitiga ABC dan lingkaran Γ yang berdiameter AB. Lingkaran Γ memotong sisi AC dan BC berturut-turut di titik D dan E. Jika $AD = \frac{1}{3}AC, BE = \frac{1}{4}BC$ dan $AB = 30$, maka luas segitiga ABC adalah ...

3. Diberikan segitiga ABC dengan D titik tengah AC, E titik tengah BD, dan H merupakan pencerminan A terhadap E. Jika F merupakan perpotongan antara AH dengan BC, maka nilai $\dfrac{AF}{FH}$ sama dengan ...

4. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $BC = 20$, $CA = 24$, dan $AB = 12$. Titik D pada segmen BC dengan $BD = 5$. Lingkaran luar dari segitiga ABD memotong CA di E. Hitunglah nilai $2 \times DE$.

5. (OSK 2015) Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar DC dan $AB = 84$ serta $DC = 25$. Jika trapesium $ABCD$ memiliki lingkaran dalam yang menyinggung keempat sisinya, keliling trapesium $ABCD$ adalah ...

6. (OSK 2022) Diberikan segitiga siku-siku ABC. Jika luas dari segitiga ABC adalah 112. Misalkan R adalah panjang jari-jari lingkaran luar segitiga ABC dan r adalah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Diketahui juga $R + r = 16$. Panjang sisi miring dari segitiga ABC adalah ...

§5 Referensi

1. Hermanto, Eddy. 2011. Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika Dasar.