

# Soal OSP SMA 2025

AZZAM LABIB HAKIM |INSTAGRAM: @HAXUV\_WORLD |THREADS: @AZZAM\_29\_12

Selasa, 19 Agustus 2025

## §1 Isian Singkat

1. Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 3, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah...

2. Misalkan  $u_1, u_2, u_3, \dots$  adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots = 31 \text{ dan } u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149$$

Nilai  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots = \dots$

3. Diberikan segitiga lancip  $ABC$  dengan titik  $P$  dan  $Q$  pada sisi  $BC$ , titik  $R$  pada sisi  $AQ$  sehingga

$$|PB| = |PQ| = |PR| \text{ dan } |QC| = |QR|.$$

Diketahui bahwa  $ACPR$  merupakan segiempat talibusur.

Jika  $\angle APR = 54^\circ$ , maka  $\angle ABC = \dots$

**Catatan:** notasi  $|XY|$  mengatakan panjang ruas garis  $XY$ .

4. Misalkan bilangan asli  $a, b, c, d$  memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b + 2^c = 4^d.$$

Jika  $a + b + c + d \leq 500$ , maka nilai terbesar yang mungkin dari  $d$  adalah...

5. Misalkan  $f$  suatu polinomial monik berderajat 5. Sehingga

$$f(1) = 4, f(2) = 7, f(3) = 12, f(4) = 19 \text{ dan } f(5) = 28.$$

Nilai  $f(6) = \dots$

**Catatan:** Polinomial  $P(x)$  berderajat  $n$  disebut polinomial monik jika koefisien dari  $x^n$  adalah 1.

6. Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah...

**Catatan:**

- Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
- Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat adalah 11211 dan 21222.

7. Diberikan segiempat konveks  $ABCD$  dengan luas 288,  $AC$  tegak lurus  $BD$ , dan  $AB$  tidak sejajar  $CD$ . Misalkan  $P$  suatu titik di dalam segiempat  $ABCD$ . Selanjutnya, misalkan  $Q$  dan  $R$  berturut-turut merupakan proyeksi titik  $P$  pada sisi  $AC$  dan  $BD$ . Jika  $|AQ| : |CQ| = 5 : 3$  dan  $|BR| : |DR| = 7 : 2$ , maka selisih luas segitiga  $ABP$  dengan luas segitiga  $CDP$  adalah ...

**Catatan:** Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:

- Perpotongan kedua diagonalnya terletak didalam segiempat.
- Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari  $180^\circ$ .

8. Banyaknya bilangan asli  $(a, b)$  dimana  $1 \leq a, b \leq 19^2$  sehingga

$$a^4 + b^3 \text{ habis dibagi } 19^2$$

adalah...

## §2 Esai

1. Tentukan banyaknya bilangan asli  $n \geq 2$  sedemikian sehingga terdapat  $n$  bilangan bulat berurutan yang jumlahnya 2025.
2. Misalkan  $S$  adalah himpunan semua tripel bilangan real positif  $(a, b, c)$  yang memenuhi  $a+b+c = ab+bc+ca$ .
  - a) Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} > 1$$

berlaku untuk setiap  $(a, b, c) \in S$ .

- b) Apakah terdapat tripel  $(a, b, c) \in S$  sehingga

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} < 1 + \frac{1}{20^{25}}$$

**Catatan:** Notasi  $\min\{x, y, z\}$  menyatakan bilangan terkecil di antara  $x, y, z$ .

3. Pada segitiga  $ABC$ , misalkan  $D$  titik tengah ruas garis  $AB$  dan  $E$  titik pada sisi  $BC$ . Misalkan garis yang melalui  $E$  dan sejajar  $AB$  memotong garis bagi  $\angle ACB$  di titik  $P$ . Misalkan juga  $I$  titik pusat lingkaran dalam segitiga  $ABC$  dan  $J$  titik pusat lingkaran singgung luar dari segitiga  $ABC$  yang menyinggung sisi  $CA$  (**bukan** perpanjangan sisi  $CA$ ). Garis  $DJ$  memotong sisi  $CA$  di titik  $F$ .
  - (a) Buktikan bahwa garis  $IF$  sejajar dengan  $AB$ .
  - (b) Buktikan bahwa garis  $AP, BJ$ , dan  $EF$  berpotongan di satu titik.
4. Diberikan suatu segitiga pada bidang  $xy$  dengan ketiga titik sudutnya **bukan** merupakan titik kisi dan ketiga sisinya **tidak** melalui titik kisi. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik kisi di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik kisi di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

**Catatan:** Pada bidang  $xy$ , titik kisi adalah titik berbentuk  $(a, b)$  dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat.