

Soal OSP SMA 2025

AZZAM LABIB HAKIM |INSTAGRAM: @HAXUV_WORLD |THREADS: @AZZAM_29_12

Selasa, 19 Agustus 2025

§1 Isian Singkat

1. Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 1, 2, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah...

2. Misalkan u_1, u_2, u_3, \dots adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 = 31 \text{ dan } u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149$$

Nilai $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots = \dots$

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik P dan Q pada sisi BC , titik R pada sisi AQ sehingga

$$|PB| = |PQ| = |PR| \text{ dan } |QC| = |QR|.$$

Diketahui bahwa $ACPR$ merupakan segiempat talibusur.

Jika $\angle APR = 54^\circ$, maka $\angle ABC = \dots$

Catatan: notasi $|XY|$ mengatakan panjang ruas garis XY .

4. Misalkan bilangan asli a, b, c, d memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b + 2^c = 4^d.$$

Jika $a + b + c + d \leq 500$, maka nilai terbesar yang mungkin dari d adalah...

5. Misalkan f suatu polinomial monik berderajat 5. Sehingga

$$f(1) = 4, f(2) = 7, f(3) = 12, f(4) = 19 \text{ dan } f(5) = 28.$$

Nilai $f(6) = \dots$

Catatan: Polinomial $P(x)$ berderajat n disebut polinomial monik jika koefisien dari x^n adalah 1.

6. Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah...

Catatan:

- Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
- Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat adalah 11211 dan 21222.

7. Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan luas 288, AC tegak lurus BD , dan AB tidak sejajar CD . Misalkan P suatu titik di dalam segiempat $ABCD$. Selanjutnya, misalkan Q dan R berturut-turut merupakan proyeksi titik P pada sisi AC dan BD . Jika $|AQ| : |CQ| = 5 : 3$ dan $|BR| : |DR| = 7 : 2$, maka selisih luas segitiga ABP dengan luas segitiga CDP adalah ...

Catatan: Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:

- Perpotongan kedua diagonalnya terletak didalam segiempat.
- Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari 180° .

8. Banyaknya bilangan asli (a, b) dimana $1 \leq a, b \leq 19^2$ sehingga

$$a^4 + b^3 \text{ habis dibagi } 19^2$$

adalah...

§2 Esai

1. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \geq 2$ sedemikian sehingga terdapat n bilangan bulat berurutan yang jumlahnya 2025.
2. Misalkan S adalah himpunan semua tripel bilangan real positif (a, b, c) yang memenuhi $a+b+c = ab+bc+ca$.
 - a) Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} > 1$$

berlaku untuk setiap $(a, b, c) \in S$.

- b) Apakah terdapat tripel $(a, b, c) \in S$ sehingga

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} < 1 + \frac{1}{20^{25}}$$

Catatan: Notasi $\min\{x, y, z\}$ menyatakan bilangan terkecil di antara x, y, z .

3. Pada segitiga ABC , misalkan D titik tengah ruas garis AB dan E titik pada sisi BC . Misalkan garis yang melalui E dan sejajar AB memotong garis bagi $\angle ACB$ di titik P . Misalkan juga I titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan J titik pusat lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang menyinggung sisi CA (**bukan** perpanjangan sisi CA). Garis DJ memotong sisi CA di titik F .
 - (a) Buktikan bahwa garis IF sejajar dengan AB .
 - (b) Buktikan bahwa garis AP, BJ , dan EF berpotongan di satu titik.
4. Diberikan suatu segitiga pada bidang xy dengan ketiga titik sudutnya **bukan** merupakan titik latis dan ketiga sisinya **tidak** melalui titik latis. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik latis di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik latis di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

Catatan: Pada bidang xy , titik latis adalah titik berbentuk (a, b) dengan a dan b bilangan bulat.